Jean-Louis Boursin

Vite et bien !

Les Maths pour les nuls

200 notions en un clin d'œil

Jean-Louis **Boursin**

Vite et bien !

Les Maths pour les nuls

Les Maths pour les Nuls Vite et bien

ISBN : 978-2-412-03897-0

ISBN numérique : 9782412042106

Dépôt légal : septembre 2018

Rédaction et recherche iconographie : Raphaël Dupuy
Correction : Anne-Lise Martin
Maquette : Émilie Guillemin

Éditions First, un département d'Édi8
12, avenue d'Italie
75013 Paris – France
Tél. : 01-44-16-09-00
Fax : 01-44-16-09-01
E-mail : firstinfo@efirst.com
Internet : www.pourlesnuls.fr

Ce livre numérique a été converti initialement au format EPUB par Isako www.isako.com à partir de l'édition papier du même ouvrage.

L'auteur

Jean-Louis Boursin, agrégé de mathématiques, est l'auteur de plus de cent cinquante manuels scolaires et DVD de mathématiques. Professeur à l'Institut d'études politiques de Paris, il intervient régulièrement auprès de publics non spécialisés.

Il est notamment l'auteur de *La Forme scientifique du mensonge* (Tchou, 1978), *Les Structures du hasard* (Points-Seuil, 1986), *Les Dés et les Urnes*, *Les Calculs de la démocratie* (Seuil, 1990), *Convaincre avec des chiffres* (Chotard), *Les Indices de prix* (« Que sais-je ? », 1979), *La Statistique du quotidien* (Vuibert, 1992), *Mathématiques, case départ* (Ellipses, 1998) et *Les Paradoxes du vote* (Odile Jacob, 2004).

Compter sans nombres

Les nombres sont très utiles dans de nombreuses situations, mais des actes simples de gestion sont possibles sans eux. Le berger qui sort son troupeau le matin peut mettre dans un sac un caillou pour chaque mouton qui sort de la bergerie ; le soir, il retire du sac un caillou à chaque bête qui rentre au bercail. Si le sac est vide, il ne manque aucune bête. Chaque caillou représente un mouton, comme le ferait une encoche sur un bout de bois ou sur un os, ou un petit trait tracé sur une tablette d'argile.

Pour sommaire que soit ce procédé, il permet de s'assurer que deux troupeaux contiennent le même « nombre » d'animaux et, dans le cas contraire, d'avoir une idée de ce qui les différencie.

Dans un effort d'abstraction supplémentaire, les cailloux peuvent être immatériels, comme les mots d'une récitation ou, plus faciles encore à retenir, d'une comptine :

Une poule sur un mur, qui picorait du pain dur, Picoti, picota, lève la queue et puis s'en va.

En prononçant un mot pour chaque objet à dénombrer, on peut se contenter de retenir le dernier mot prononcé. Une collection qui a permis d'aller jusqu'à « pain » contient ce que nous appelons aujourd'hui neuf éléments ; toute collection qui permet d'aller à ce même mot en contient autant, elle en contient moins si la récitation s'arrête avant, plus si elle continue au-delà.

Il n'y a aucune différence essentielle avec une autre récitation, la comptine numérique :

Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix,
Onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, dix-sept,
dix-huit, dix-neuf, vingt

Mais quelque récitation qu'on utilise, on se heurte vite aux limites de la mémoire, sans compter la difficulté de trouver un texte dans lequel aucun mot n'apparaît plus d'une fois.

La numération romaine

On emploie aujourd'hui encore la numération romaine pour les siècles (le XXI^{e} siècle), pour les rois (Louis XIV), pour les papes (Benoît XVI)…

Alors que la numérotation décimale utilise une décomposition à l'aide de dizaines, de centaines, etc., et un principe multiplicatif, la numérotation romaine, pour les quantités inférieures à cinq mille, utilise :

- Des symboles spécifiques :
- I = 1 ; V = 5 ; X = 10 ; L = 50 ; C = 100 ; D = 500 ; M = 1 000
- Un principe d'addition : tout symbole supérieur (ou égal) à celui qui le suit s'y ajoute. Exemple :
- XX 20 (10 + 10)
- LI 51 (50 + 1)
-

MDCXV 1 615 (1 000 + 500 + 10

0 + 10 + 5)

Tardivement, on a ajouté un principe de soustraction, pour alléger les écritures, selon lequel tout symbole strictement inférieur à celui qui le suit s'en retranche. Exemple :

- IV 4 (5 – 1)
- XL 40 (50 – 10)

Ce système n'est pas dépourvu d'ambiguïté. Par exemple, VXC pourrait représenter :

- 5 retranché au nombre XC, soit 90 – 5 = 85 ;
- 5 retranché au nombre X, soit 5, retranché de C, ce qui donne 95.

C'est pourquoi, quitte à allonger les écritures, on n'écrit en général qu'un seul nombre à retrancher à gauche d'un autre :

- 95 sera alors écrit XCV ;
- 85 sera écrit LXXXV.

Pour les besoins de la vie courante, ce système a rempli son rôle tant bien que mal, malgré deux handicaps : la limitation des nombres que le procédé permet d'écrire (il n'y a pas de symbole d'usage courant pour abréger un nombre plus grand que mille) et l’extraordinaire difficulté des opérations, même élémentaires à nos yeux (allez donc multiplier XXIII par XVII !).

L'usage social des nombres entiers

Dans la vie courante, nous utilisons les entiers dans plusieurs contextes qui changent grandement leur nature.

Certains nombres sont de purs codes (les nombres-code) employés pour marquer des objets, des personnes, des éléments plus ou moins abstraits : les nombres de trois chiffres sur les plaques d'immatriculation de nos voitures, les numéros de portables, les numéros de Sécurité sociale, les cases dans une grille de sudoku…

On pourrait sans dommage les remplacer par des lettres, des couleurs, des logos… Il n'y a aucun sens à les comparer : la piscine des Amiraux, dont le numéro de téléphone est 01 46 06 46 47, n'a aucune supériorité sur la piscine Dunois, dont le numéro est seulement 01 45 85 44 81 !

Les entiers sont aussi parfois utilisés pour coder un rang (les nombres-rang) : la liste des reçus à un concours est parfois publiée « par ordre de mérite », candidat reçu 1er, candidat reçu 2e…

Certes, en dehors des cas d'ex æquo, ces numéros de rang peuvent servir de codes : on affecte dans la classe A les candidats de rangs donnés (par exemple : de rangs pairs). Mais ils en disent plus, car ils autorisent des comparaisons : le candidat classé 7 est meilleur que le candidat classé 8.

Enfin, certains nombres sont encore plus riches de sens, exprimant une valeur (les nombres-valeur), et ces valeurs peuvent être additionnées (j'achète un objet marqué 10 € et un marqué 15 €). Ils peuvent être utilisés en nombre-rang (on présente des objets par prix décroissants) ou même en nombre-code (j'achète la boîte à 6 €).

Le principe de Fermat

C'est au XVII^e siècle qu'une formalisation précise est proposée pour prouver qu'une certaine propriété vraie pour un entier particulier est vraie de tout entier. Le mérite en revient à Pierre de Fermat

L'idée de Fermat est la suivante. Une certaine propriété dépend d'un entier n et est vraie, souvent de façon banale, pour $n = 1$.

Par un calcul, Fermat prouve que, si la propriété était fausse pour un entier n, elle serait fausse aussi pour l'entier précédent $n - 1$. Il « descend » ainsi jusqu'à 1, faisant éclater une contradiction : il est absurde de supposer la propriété fausse pour n.

Souvent, la preuve se fait dans l'autre sens : on prouve que si la propriété est vraie d'un entier n, elle est vraie pour le suivant. La propriété est alors dite héréditaire.

Le principe de Fermat s'énonce ainsi :

Si une proposition dépendant d'un entier n *est vraie lorsque* n *= 1, et si elle est héréditaire, alors elle est vraie de tout entier.*

Ou, sous une forme un peu plus générale :

Si une proposition dépendant d'un entier n *est vraie lorsque* n = p*, et si elle est héréditaire, alors elle est vraie de tout entier au moins égal à* p.

C'est sous cette forme que Pascal décrit le raisonnement, dans son *Traité du triangle arithmétique*. Il veut prouver une propriété sur les lignes d'un tableau de nombres (appelé depuis le triangle de Pascal) : « *Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes : le premier, qui est évident de soi-même, est que cette proposition se rencontre dans la seconde ligne ; le deuxième que, si cette proposition se rencontre dans une ligne quelconque, elle se trouve nécessairement dans la suivante. D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les lignes, car elle est dans la seconde ligne par le premier lemme, donc par le second, elle est dans la troisième ligne, donc dans la quatrième, et à l'infini. Il faut donc seulement démontrer le second lemme.* »

« Lemme » signifie résultat préparatoire et Pascal commence dans cet exemple à $n = 2$: « se rencontre dans la seconde ligne ».

Sous la forme proposée par Pascal, ce mode de preuve est généralement appelé raisonnement par récurrence.

L'addition

La simple observation des tas de cailloux utilisés par le berger, lorsqu'on en formalise le résultat, conduit à des propriétés simples de l'opération d'addition :

- **La commutativité :** la somme de deux nombres est indépendante de l'ordre dans lequel on les écrit (exemple : 15 + 2 = 2 + 15).
- **L'associativité :** la somme de trois nombres est indépendante des groupements qu'on y fait. Ces groupements sont marqués par des parenthèses. Les parenthèses sont en effet un signe de priorité : on doit effectuer en priorité l'opération indiquée entre parenthèses.

Même à l'époque des calculatrices, il est bon de savoir faire une addition, ne serait-ce que parce que les piles peuvent être usées !

On dispose les nombres en colonnes, les chiffres représentant des unités de même ordre les uns en dessous des autres ; on obtient :

- une colonne des unités (la plus à droite) ;
- une colonne des dizaines ;
- une colonne des centaines, etc.

Bien disposé
3 461
     25

Mal disposé
3 461
2 5

En commençant par la droite, on additionne les unités. Si le total ne dépasse pas 9, on l’écrit en bas de la colonne, sinon, on reporte le nombre de dizaines dans la colonne voisine à gauche (retenue).

Exemple :

On pose	On calcule	
1 1 1	7 + 5 = 12	on écrit 2 et 1 en retenue
23 617	1 + 1 + 3 = 5	on écrit 5
+ 37 535	6 + 5 = 11	on écrit 1 et 1 en retenue
61 152	1 + 3 + 7 = 11	on écrit 1 et 1 en retenue
	1 + 2 + 3 = 6	on écrit 6

La soustraction

La soustraction est l'opération qui permet de calculer une différence.

La différence entre un nombre a et un nombre b est le nombre qu'il faut ajouter à b pour obtenir a.

Matériellement, elle figure l'opération qui consiste à enlever b cailloux du sac qui en contient a, puis à voir combien il en reste dans le sac. Elle suppose évidemment que b est moindre que a : seuls les prestidigitateurs savent enlever d'un sac plus de cailloux qu'il n'en contient !

Pour faire une soustraction, on dispose le second nombre en dessous du premier, avec les mêmes précautions que pour l'addition.

Deux remarques :

1. La différence entre deux nombres ne change pas si on leur ajoute ou si on leur retranche un même nombre.

Exemple : si vous avez treize ans de plus que votre petite sœur, il y a quatre ans, vous aviez déjà treize ans de plus qu'elle, et, dans cinq ans, vous aurez toujours treize ans de plus qu'elle.

2. La soustraction n'est pas associative.

Par exemple : $9 - (4 - 2) = 9 - 2 = 7$, alors que $(9 - 4) - 2 = 5 - 2 = 3$.

Le calcul mental

Même à l'époque des calculatrices, il est toujours bon d'être capable de faire un petit calcul mental : au restaurant, vous ne vous voyez pas sortir la calculatrice pour contrôler l'addition !

À l'inverse de la procédure habituelle, il est plus simple, en calcul mental, d'effectuer d'abord la somme des unités d'ordre le plus élevé, c'est-à-dire de commencer par la gauche.

Exemple : pour calculer 312 + 179, on se dit, dans l'ordre :

- trois centaines et une centaine, quatre centaines ;
- une dizaine et sept dizaines, huit dizaines ;
- deux unités et neuf unités, onze unités, que je transforme en une dizaine (ce qui m'en fera neuf) et une unité.

Au total, quatre centaines, neuf dizaines, une unité, soit 491.

Il est bon aussi de savoir reconnaître au premier coup d'œil qu'une opération est fausse. Voici une règle de bon sens :

Si l'on ajoute à un même nombre, séparément, deux nombres différents, c'est en ajoutant le plus petit qu'on obtient la somme la plus petite.

Le calcul 6 463 + 914 = 7 477 est certainement faux puisque, en ajoutant à 6 463 un nombre inférieur à 1 000, on doit trouver une somme inférieure à 7 463.

Un calcul se rencontre fréquemment, et il est utile de savoir le faire mentalement : c'est celui du complément d'un nombre à 100, à 1 000, à 10 000, etc. En partant du premier chiffre non nul à droite, on prend son complément à 10, puis pour tous les autres, le complément à 9.

Par exemple, 10 000 – 4 860 :

- complément à 10 de 6 : 4
- complément à 9 de 8 : 1
- complément à 9 de 4 : 5
- différence cherchée : 5 140.

Les carrés magiques

On raconte que, en 2200 avant notre ère, l'empereur Yu, au moment de monter sur une embarcation pour naviguer sur le fleuve Jaune, vit apparaître une tortue. Sur son écaille se trouvaient gravées des cases avec, à l'intérieur de chacune, la représentation chinoise d'un nombre, ce que nous écrivons aujourd'hui :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Si l'on calcule la somme des nombres inscrits sur chaque ligne, dans chaque colonne et dans chaque diagonale, on trouve le même résultat : 15.

Ces propriétés servent de définition à l'expression « carré magique ».

Un carré magique est une disposition de nombres entiers, en autant de lignes que de colonnes, en sorte que les sommes des nombres écrits sur chaque ligne, sur chaque colonne, sur chaque diagonale soient toutes égales.

La valeur commune de ces sommes est parfois appelée la constante magique.

Le carré magique de Dürer, représenté dans la gravure *Melencolia* (1514).

Souvent, comme c'est le cas ici, les entiers écrits sont les nombres consécutifs à partir de 1. En s'affranchissant de cette condition, on pourrait se donner l'illusion de découvrir de nombreux autres carrés magiques, puisque en ajoutant un même entier à tous les nombres inscrits dans un carré magique ou en multipliant par un même entier tous les nombres inscrits dans un carré magique, on forme encore un carré magique.

Dans la gravure de Dürer, datée de 1514, on trouve ce carré :

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

On vérifie qu'il s'agit d'un carré magique (la constante magique est 34). Mais le carré de cette gravure recèle d'autres curiosités : en particulier, les sommes des termes dans chaque coin de quatre cases sont encore égales à la constante magique.

De nombreux mathématiciens, même amateurs, se sont penchés sur les carrés magiques. On sait par exemple qu'il existe un seul carré magique construit avec les 9 premiers entiers (aux symétries près), qu'il en existe 880 avec les 16 premiers.

Avec 25 entiers, on ignore le nombre exact de carrés magiques possibles, on sait seulement qu'il y en a plus de 300 millions.

La multiplication

La simple observation des rangements rectangulaires de cailloux a fait découvrir très tôt des propriétés simples de cette opération de multiplication, si simples qu'on n'a pas jugé utile, pendant des siècles, de leur donner des noms. Ce sont :

- la commutativité ;
- l'associativité ;
- la distributivité par rapport à l'addition.

La commutativité rappelle qu'on peut dénombrer les cailloux ligne par ligne, ou colonne par colonne, et obtenir le même résultat. Elle se traduit par une formule littérale :

$$b \times a = a \times b$$

L'associativité s'observe plus facilement avec des petits cubes qu'on peut empiler en couches, chacune étant composée d'un rangement en lignes et en colonnes. Trois couches comportant chacune quatre lignes de cinq colonnes, ou cinq couches comportant chacune quatre lignes de trois colonnes, cela fait toujours autant de petits cubes. Cela se traduit par la formule littérale :

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

Nous avions déjà observé des propriétés analogues pour l'addition.

La distributivité exprime qu'on peut dénombrer séparément les cailloux dans les premières colonnes, puis dans les dernières : en ajoutant ces résultats, on trouve autant de cailloux que dans un dénombrement fait en une seule fois. Cela se traduit par la formule littérale :

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

La découverte des nombres parfaits

En dehors de lui-même, le nombre 6 admet pour diviseurs les nombres 1, 2 et 3, et l'on remarque que 6 est égal à la somme de ses diviseurs : 6 = 1 + 2 + 3.

Ce n'est pas une propriété banale. Les diviseurs de 8 sont 1, 2 et 4, dont la somme est 7 et non pas 8. Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4 et 6, dont la somme est 16 et non pas 12.

Euclide, au IIIe avant J.-C., avait formulé la définition mathématique suivante :

On appelle nombre parfait un entier qui est égal à la somme de ses diviseurs.

Dans cette définition, on inclut le nombre 1 parmi les diviseurs, mais pas l'entier lui-même. Euclide connaissait quatre nombres parfaits, même s'il n'en est sans doute pas le découvreur :

- 6=1+2+3

- 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14
- 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 31 + 62 + 124 + 248
- 8 128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 127 + 254 + 508 + 1 016 + 2 032 + 4 064

On doit en revanche à Euclide lui-même une observation sur ces listes de diviseurs.

Prenons les diviseurs de 8 128. On trouve :

- 1, 2, 4, 8, 16, 32, qui sont des puissances de 2, celles qu'on note aujourd'hui 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 ;
- 127, 254, 508, 1 016, 2 032, 4 064, qui sont les produits de 127 par les puissances de 2 déjà notées (ce nombre 127 est d'ailleurs la puissance de 2 suivante, 2^7, soit 128 à laquelle on a retranché 1).

L'évolution des nombres parfaits

Au début du IIe siècle de notre ère, Nicomaque de Gérase publia ce que nous appellerions aujourd'hui un manuel scolaire, l'*Introduction arithmétique*, qui contenait notamment une synthèse des connaissances de l'époque sur les nombres parfaits. Comme c'est souvent le cas en matière d'édition scolaire, les successeurs de Nicomaque reprirent sans discussion ses affirmations, pendant plus de 1 500 ans ! Alors qu'il ne connaissait que les quatre nombres parfaits déjà cités par Euclide, Nicomaque affirmait :

- Tous les nombres parfaits sont pairs.
- Tous les nombres parfaits sont de la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$.
- Il existe une infinité de nombres parfaits.
- Il existe des nombres parfaits s'écrivant avec un nombre quelconque de chiffres.

Aujourd’hui encore, on ignore s’il existe des nombres parfaits impairs, mais on sait depuis 1989 que, s’il en existe, ils sont très grands, s’écrivant avec plus de cent soixante chiffres. On ignore s’il existe une infinité de nombres parfaits ou seulement un nombre fini. On sait qu’il n’existe pas de nombre parfait s’écrivant avec cinq ou six chiffres. Euler a démontré que tous les nombres parfaits pairs sont de la forme 2^{n-1} $(2^n - 1)$, où $(2^n - 1)$ est un nombre premier.

Devant la rareté des nombres parfaits, on a pensé à assouplir un peu la condition en autorisant un écart de 1, en plus ou en moins, entre un nombre et la somme de ses diviseurs. Par exemple, 8 est un nombre « presque parfait plus » puisque la somme de ses diviseurs vaut $1 + 2 + 4 = 7$. Il en est de même de 16, 32, 64… et plus généralement de toute puissance de 2.

Mais, à ce jour, nul ne sait :

- s’il existe d’autres nombres « presque parfaits plus » que les puissances de 2 ;
- s’il existe un nombre « presque parfait moins ».

Les nombres amicaux

On avait eu l'idée, dès l'époque pythagoricienne (VI^{e} siècle avant J.-C.), d'une généralisation des nombres parfaits : on prend un nombre, on calcule la somme de ses diviseurs, qui est un nouveau nombre. De ce nouveau nombre, on calcule la somme des diviseurs, et ainsi de suite. On constitue ainsi une sorte de chaîne ; il peut arriver que cette chaîne se referme (on trouve un même nombre une seconde fois). Si elle n'a qu'un seul chaînon, on retrouve un nombre parfait. Si elle en a deux, on dit que les deux nombres ainsi trouvés sont amicaux.

Le plus ancien couple connu est probablement le suivant :

- 220 a pour diviseurs 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, dont la somme est 284.
- 284 a pour diviseurs 1, 2, 4, 71, 142, dont la somme est 220.

Depuis la très haute Antiquité, cette paire de nombres symbolisait l'amitié ; on l'a retrouvée gravée sur des paires d'anneaux ou de talismans. Ce n'est sans doute pas un hasard si, dans le livre de la Genèse, Ésaü fait offrande à Jacob de 220 chèvres.

Longtemps, on a cru qu'il n'existait pas d'autres paires de nombres amicaux. Au XVII[e] siècle seulement, Fermat en découvrit une deuxième, 17 296 et 18 416 (on sait aujourd'hui que cette paire était déjà connue au XIII[e] siècle par le mathématicien arabe Al-Farisi), puis Descartes découvrit 9 363 584 et 9 437 056. Encore aujourd'hui, malgré nos moyens de calcul, nous restons admiratifs et perplexes devant le travail de ces mathématiciens. C'est pourtant un travail moins laborieux qu'on pourrait le croire à première vue.

En fait, Descartes, certainement, et Fermat, très probablement, avaient redécouvert une règle remontant au X[e] siècle, publiée par le mathématicien arabe Thabit ibn Qurra. L'idée en est simple ; on prend un entier *n* au moins égal à 2 et on calcule les nombres :

- $h = 3 \cdot 2^{n} - 1$
- $t = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$
- $s = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$

S’il advient qu’ils soient tous les trois premiers, alors les produits $2^n ht$ et $2^n s$ forment un couple de nombres amicaux. Le nombre h est parfois appelé nombre de Thabit ibn Qurra.

Le plus grand commun diviseur

Pour deux entiers quelconques non nuls, il existe toujours un diviseur commun, ne serait-ce que 1. Mais en existe-t-il toujours d'autres moins banals ? Ces diviseurs sont de toute façon en nombre fini, comme les diviseurs de tout entier, et il en existe donc un plus grand, qu'on appelle tout naturellement le plus grand commun diviseur (PGCD).

Reprenons notre couple historique :

- 220 a pour diviseurs 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220 ;
- 284 a pour diviseurs 1, 2, 4, 71, 142, 284.

Les diviseurs communs sont les nombres 1, 2, 4, et le PGCD est donc 4.

Lorsque le PGCD de deux nombres est 1, ces nombres sont dits étrangers. On dit aussi que ces nombres sont premiers entre eux, malgré le risque de confusion avec des nombres premiers.

Pour trouver le PGCD de deux nombres, on peut bien entendu faire comme dans notre exemple et procéder en trois étapes :

- établir les listes des diviseurs de chacun ;
- puis en déduire celle des diviseurs communs ;
- puis en déduire le plus grand.

C'est long ! Déjà, Euclide avait proposé une façon de calculer beaucoup plus rapide, qui est encore la meilleure qu'on connaisse aujourd'hui et qu'on appelle l'algorithme d'Euclide.

L’algorithme d’Euclide

L’algorithme d’Euclide repose sur une remarque toute simple :

Tout diviseur commun à deux nombres divise leur somme et leur différence.

Chercher les diviseurs communs à deux entiers équivaut à chercher par exemple :

- les diviseurs communs à l’un d’eux et à leur différence ;
- les diviseurs communs à l’un d’eux et à leur somme ;
- les diviseurs communs à leur somme et à leur différence.

En particulier, le PGCD de deux entiers est donc tout aussi bien par exemple :

- le PGCD de l’un d’eux et de leur différence ;
- le PGCD de l’un d’eux et de leur somme ;
- le PGCD de leur somme et de leur différence.

Deux méthodes exploitent ces remarques.

La méthode par soustractions : puisque tout diviseur commun de (a, b) est diviseur commun de $a - b$ (en supposant qu'on ait noté a le plus grand des nombres a et b) et de b, on ramène le problème à la recherche des diviseurs communs à deux nombres dont le plus grand est inférieur à a. Le processus s'arrêtera donc après un nombre fini d'étapes.

Au passage, on fait une remarque qu'il ne serait pas difficile de démontrer en toute généralité :

Les diviseurs communs à deux nombres sont les diviseurs de leur PGCD.

La méthode par divisions : la méthode par soustractions peut paraître fastidieuse. On les résume en proposant de diviser b par a et de garder le reste. Par exemple, avec $a = 108$ et $b = 620$: $620 = 108 \times 5 + 80$

Si bien que, en un seul calcul, on se trouve ramené au PGCD de 108 et 80. C'est ce qu'avait proposé Euclide.

Les théorèmes de Bézout

Prenons deux nombres étrangers a et b, et supposons que a divise le produit bc. Le PGCD de a et b est 1. Si l'on multiplie ces deux nombres par c, on obtient ac et bc, dont le PGCD est par conséquent c.

Le nombre a divise ac et bc, et divise donc leur PGCD c.

Ainsi se trouve démontré le premier théorème de Bézout :

Si un nombre divise le produit de deux facteurs et est étranger à l'un d'eux, alors il divise l'autre.

Observons maintenant deux entiers naturels a et b, et la famille F des nombres positifs qui s'écrivent : $xa + yb$ (x et y étant des entiers, positifs ou négatifs).

Cette famille contient par exemple 0 (il suffit de choisir $x = b$ et $y = -a$), et de nombreux autres entiers. Notons d le plus petit entier non nul de cette famille : $d = xa + yb$.

Tout diviseur commun à a et b divise donc d. D'autre part, si l'on divise a par d, la division tombe juste : sinon, le reste, qui est inférieur à d, appartiendrait aussi à la famille F, et d ne serait pas le plus nombre positif non nul de la famille. Donc d est un diviseur de a (et de même de b).

Ainsi, nous savons deux choses : d est un diviseur commun et tout diviseur commun divise d : c'est donc que d est le PGCD de a et b.

En particulier, si a et b sont étrangers, il existe des entiers x et y (l'un est positif, l'autre négatif) tels que : $ax + by = 1$.

Réciproquement, il est évident que, si cette égalité est vérifiée, tout diviseur commun à a et b divise 1, autrement dit que a et b sont étrangers.

Le petit théorème de Fermat

C'est seulement en 1749 qu'Euler publia une démonstration de ce résultat, qu'il attribuait lui-même à Fermat :

Si p *est un nombre premier, quel que soit l'entier* a*, le nombre* $a^p - a$ *est un multiple de* p.

Par exemple, avec $p = 3$: $2^3 - 2 = 6$; $3^3 - 3 = 24$; $4^3 - 4 = 60$; $5^3 - 5 = 120$… sont tous des multiples de 3.

En revanche, avec $p = 4$, $2^4 - 2 = 14$ n'est pas un multiple de 4.

La démonstration est un exemple simple de récurrence. La propriété est une évidence pour $a = 1$. Montrons qu'elle est héréditaire.

Supposons $a^p - a$ multiple de p. Alors, pour vérifier que $(a + 1)^p - a - 1$ est aussi un multiple de p, il suffit de montrer que leur différence en est un :

$$(a+1)^p - a^p - 1 = \binom{p}{1} a^{p-1} + \binom{p}{2} a^{p-2} + \ldots + \binom{p}{p-1} a.$$

Chacun des termes de la somme écrite à droite est un multiple de p.

On remarquera que le théorème ne dit pas que seuls les nombres premiers possèdent cette priorité. Ce n’est donc pas, comme on l’a cru quelque temps, un moyen de reconnaître un nombre premier.

On appelle parfois pseudo-premier un nombre qui « passe le test de Fermat » pour un entier a (au moins égal à 2). Exemples :

Le nombre composé	341	91	15	124	35	25	9	28	33
passe le test avec *a* =	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Il y a mieux : certains nombres passent le test pour tout a et pourtant ne sont pas premiers. On les appelle nombres de Carmichael. C’est en 1910 que R. D. Carmichael proposa les premiers exemples de tels nombres (561, 1 105, 1 729, 2 465, 2 821, 6 601, 8 911…) et conjectura qu’il en existe une infinité, ce qui ne fut démontré qu’en 1994 par Alford.

Le grand théorème de Fermat

Si on a vu le « petit » théorème de Fermat dans la notion précédente, c'est parce qu'il est nécessaire de le distinguer d'un autre théorème attribué à Fermat, qui énonce que, pour $n > 2$, il n'existe pas d'entiers non nuls a, b, c permettant d'écrire :

$$a^n = b^n + c^n$$

(pour $n = 2$, cette relation est vérifiée par les triplets de Pythagore).

Fermat avait prétendu, dans une annotation manuscrite sur un livre de Diophante, avoir trouvé une démonstration de ce théorème, qui était cependant trop longue pour être inscrite dans la marge. Pendant 325 ans, les mathématiciens en ont cherché la démonstration et c'est seulement en 1993 que Andrew Wiles l'a trouvée.

Le théorème devrait, en toute justice, être nommé théorème de Wiles, mais l'habitude de le désigner comme le « grand théorème de Fermat » n'est sans doute pas près d'être abandonnée.

Les nombres premiers

L'importance quasi mythique accordée dans l'Antiquité aux diviseurs d'un nombre a permis, très tôt, de mettre en évidence les nombres premiers.

On trouve dans les *Éléments* d'Euclide des définitions qui ne sont pas démodées :

Le nombre premier est celui qui est divisible par la seule unité.

Le nombre composé est celui qui est divisible par quelques nombres.

En ajoutant cette remarque que tout nombre est divisible par lui-même, la définition moderne est à peine différente :

On appelle nombre premier un nombre qui a exactement deux diviseurs.

Tout nombre étant divisible par lui-même et par l'unité, la petite précision que cette définition apporte est d'exclure 1 de la définition d'un nombre premier (il n’a qu’un diviseur, et non exactement deux) : c’est une pure convention, mais qui allège l’énoncé de certains théorèmes.

Le théorème d'Euclide

Euclide énonça lui-même le résultat suivant :

Tout nombre non premier (autre que 1) est divisible par un nombre premier.

La démonstration nous semble élémentaire, elle montre pourtant l'étendue et la subtilité des connaissances des mathématiciens de la Grèce antique.

Soit a un nombre non premier autre que 1. Il admet des diviseurs autres que 1 (sinon, il serait premier). Notons p le plus petit de ces diviseurs. Il est premier, car, s'il admettait un diviseur (autre que 1 et lui-même), ce diviseur, plus petit que p, serait aussi diviseur de a et p ne serait pas le plus petit.

Euclide a utilisé son théorème pour démontrer l'existence d'une infinité de nombres premiers. Son raisonnement n'a pas pris une ride et c'est un des plus anciens exemples de raisonnement par l'absurde.

Euclide le formule pour trois nombres, mais reconnaît que son raisonnement est général. S'il n'existait, écrit-il, que trois nombres premiers a, b, c, je calculerais le nombre : $abc + 1$.

Quand on le divise par a (ou par b, ou par c), il y a toujours un reste égal à 1 : ce nombre n'est divisible par aucun des nombres premiers a, b, c. Alors :

- ou bien il est premier, et l'hypothèse selon laquelle il n'existe que trois nombres premiers se trouve infirmée ;
- ou bien il ne l'est pas et, d'après le théorème précédent, il admet au moins un diviseur premier et ce ne peut être ni a, ni b, ni c ; l'hypothèse selon laquelle il n'existe que trois nombres premiers se trouve encore infirmée.

La factorisation des entiers

Euclide avait démontré que tout nombre non premier admet au moins un diviseur premier p : $a = pb$.

Si l'on applique à nouveau ce résultat à b (qui est inférieur à a) et qu'on répète cette opération, on aboutira à reconnaître a comme un produit dont tous les facteurs sont des nombres premiers ; c'est le théorème d'Euclide :

Tout nombre non premier (autre que 1) peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.

Euclide a énoncé un résultat encore plus fort : cette décomposition d'un entier en un produit de facteurs premiers est unique, à l'ordre près dans lequel on écrit ces facteurs. Cette unicité de la décomposition joue un rôle très important pour toute la théorie des nombres.

Pendant une bonne vingtaine de siècles, la démonstration proposée par Euclide a été enseignée à des générations d'élèves, recopiée dans des centaines d'ouvrages. Malheureusement, elle est fausse, ou plutôt elle ne s'applique que pour des entiers qui ne sont pas divisibles par le carré d'un nombre premier, comme $20 = 2^2 \times 5$, autrement dit qui sont le produit de facteurs premiers tous différents.

La plupart de ceux qui ont utilisé ce théorème auraient certainement été capables de le démontrer correctement, mais nul ne s'en est soucié avant Gauss.

Une fois la remarque faite, la correction est immédiate, par l'utilisation du théorème de Gauss. Supposons qu'il existe des entiers qui admettent deux (au moins) décompositions en facteurs premiers et observons le plus petit de ces entiers, a : $a = pqr... = p'q'r'...$

Le nombre premier p divise le produit $p'q'r'...$ Il divise donc l'un de ses facteurs, mais ceux-ci sont premiers : p est donc égal à l'un des facteurs du second produit. On simplifie l'égalité par p, obtenant un nombre plus petit que a dont on aurait deux décompositions distinctes, ce qui est impossible puisque a est le plus petit de ces nombres.

On peut donc énoncer :

Tout nombre non premier (autre que 1) peut s'écrire comme un produit de nombres premiers et cette décomposition est unique (à l'ordre près des facteurs).

La suite des nombres premiers

On sait depuis Euclide que la suite des nombres premiers est illimitée. On en connaît de nombreux termes, jadis rassemblés en des livres, les « tables de nombres premiers ». De nombreuses observations ont été faites sur la suite des nombres premiers.

Les nombres premiers jumeaux : en dehors du couple (2, 3), il est évident que deux nombres premiers ont entre eux un écart de 2 au minimum, puisque, de deux nombres consécutifs n et $n + 1$, l'un des deux est pair et ne peut donc être premier, sauf l'exception (2, 3) mentionnée.

Cet écart de 2 est facile à observer. Ce sont par exemple (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), etc.

De tels couples sont appelés des couples de nombres premiers jumeaux. On ignore encore aujourd'hui s'il en existe une infinité, même si on en connaît de très grands, s'écrivant avec plusieurs milliers de chiffres. En 1949, le mathématicien P. A. Clement a énoncé et démontré un résultat qui ressemble au théorème de Wilson :

Des entiers n et n + 2 forment une paire de nombres premiers jumeaux si et seulement si le nombre n + 4 [(n − 1) ! + 1] est un multiple de n (n + 2).

Là encore, le gigantisme des nombres mis en cause ôte tout intérêt pratique à ce résultat. Cependant, il est facile d'écrire une suite de cent nombres (par exemple) consécutifs dont aucun ne soit premier. Il suffit de prendre le produit : 100 ! = 100 × 99 × 98... × 3 × 2 et d'observer les nombres : 100 ! + 2 ; 100 ! + 3... 100 ! + 99 ; 100 ! + 100.

Le premier est divisible par 2, le suivant par 3, le suivant par 4... et le dernier par 100 : aucun de ces nombres n'est premier. Autrement dit, dans la suite des nombres premiers, il y a des « trous » aussi longs qu'on le souhaite.

Les nombres de Mersenne

Les mathématiciens grecs de l'Antiquité savaient que, si *a* et *b* sont des entiers autres que 1, le nombre $2^{ab} - 1$ n'est pas premier. Cela résulte simplement de la remarque plus générale de l'identité :

$$y^a - 1 = (y - 1)\ (y^{(a-1)} + y^{(a-2)} + \ldots + y + 1)$$

dans laquelle on remplace *y* par x^b :

$$x^{ab} - 1 = (x^b - 1)\ (x^{b(a-1)} + x^{b(a-2)} + \ldots + x^b + 1)$$

Au passage, la première relation nous donne un résultat amusant : $y^a - 1$ ne peut être premier que si $y - 1 = 1$ (sinon $y - 1$ serait un « vrai » diviseur), donc $y = 2$. Quant à la seconde, elle nous indique que $x^{ab} - 1$ n'est pas premier.

Lorsque $2^n - 1$ est premier, on l'appelle un nombre de Mersenne. Cela exige que *n* soit premier et on a cru longtemps que cette condition était suffisante. Mais en 1536, Huldaricus Regius montra que $2^{11} - 1$, soit 2 047, était le produit des nombres 23 et 89, et n'était donc pas premier. Un siècle plus tard, le moine Marin Mersenne affirma que $2^n - 1$ était premier pour n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257.

Encore aujourd'hui, on se demande comment Mersenne a fait pour vérifier que $2^{257} - 1$ était premier (c'est un nombre de 77 chiffres). Il a fallu attendre Euler, un siècle plus tard, pour voir prouver que $2^{31} - 1$ est effectivement premier, puis, en 1876, Lucas vérifia que $2^{127} - 1$ était aussi premier. En 1883, Pervouchine montra que $2^{61} - 1$ était premier, révélant ainsi que la liste de Mersenne était incomplète.

Ce n'est qu'au milieu du XX^e^ siècle que les nombres inférieurs à 257 furent tous vérifiés ; Mersenne avait oublié 61, 89 et 107, et il avait inclus à tort 67 (certains historiens des sciences ont crédité Mersenne d'une coquille typographique : l'imprimeur aurait mis 67 pour 61). En 2018, on connaissait 50 nombres de Mersenne, le plus grand ayant plus de vingt-trois millions de chiffres.

Les nombres de Fermat

Pierre de Fermat avait proposé le processus suivant pour construire des nombres premiers :

- prendre un entier n ;
- calculer $m = 2^n$;
- calculer $2^m + 1$.

Et il avait commencé le tableau de ces nombres (appelés depuis lors nombres de Fermat) :

n	0	1	2	3	4	5	...
$m = 2^n$	1	2	4	8	16	32	...
$2^m + 1$	F0 = 3	F1 = 5	F2 = 17	F3 = 257	F4 = 65 537	F5 = 4 294 967 297	...

Pierre de Fermat avait affirmé que tous ces nombres étaient premiers. Dans une lettre datée d'août 1640, il écrit : « *Je suis quasiment persuadé que tous les nombres [de Fermat] sont premiers, comme 3, 5, 17, 257, 65 537, 4 294 967 297, et le suivant* *de vingt chiffres, etc. Je n'en ai pas la démonstration exacte, mais j'ai exclu si grandes quantités de diviseurs par démonstrations infaillibles, et j'ai de si grandes lumières qui établissent ma pensée, que j'aurais peine à me dédire.* »

Nous savons que c'est vrai pour les premières valeurs de *n*, les nombres 0, 1, 2, 3 et 4. Euler montra que le nombre de Fermat suivant, F5, est composé, égal au produit de 641 × 6 700 417.

Pierre de Fermat.

L'évolution des connaissances des nombres de Fermat

On ignore encore aujourd'hui s'il existe d'autres nombres de Fermat premiers. Chaque mois ou presque, un nouveau résultat est publié sur Internet. En 2018, l'état des connaissances sur les nombres F*m* était le suivant :

m = 0, 1, 2, 3, 4	Premier
m = 5, 6, 7, 8	Décomposé en produit de 2 facteurs premiers
m=9	Décomposé en produit de 3 facteurs premiers
m = 10	Décomposé en produit de 4 facteurs premiers
m = 11	Décomposé en produit de 5 facteurs

	premiers
m = 12	On en connaît 6 diviseurs premiers
m = 13	On en connaît 4 diviseurs premiers
m = 15, 19, 25, 52, 287	On en connaît 3 diviseurs premiers
m = 16, 17, 18, 27, 30, 36, 38, 39, 42, 77, 147, 150, 284, 416, 417	On en connaît 2 diviseurs premiers
m = 14, 21, 22, 23, 26, 28, 29, 31, 32, 37, 43 et 256 valeurs éparses entre 43 et 3 329 780	On en connaît 1 diviseur premier
m = 20, 24	Non premier, mais on n'en connaît pas de diviseur
m = 33, 34, 35, 40, 41, 44, 45, 46, 47, 49, 50	Aucune information

En 2018, le plus grand nombre de Fermat dont on connaissait la factorisation complète est F11. En ce qui concerne F12, on sait qu'il est composé mais c'est, en 2018, le plus petit nombre de Fermat dont on ne connaisse pas la factorisation complète. Quant à F20, c'était, en 2018, le plus petit nombre de Fermat non premier dont on ne connaisse aucun diviseur.

Les fractions égyptiennes

Les Égyptiens avaient développé une règle d'écriture selon laquelle, dans une somme de « fractions » (selon leur définition, c'est-à-dire celles que nous notons aujourd'hui $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ...), on ne doit jamais trouver deux fois la même fraction. Ainsi, au lieu d'écrire $\frac{1}{15}+\frac{1}{15}$, ils écrivaient $\frac{1}{9}+\frac{1}{45}$ (vous pouvez vérifier !). Mais c'était plus une coquetterie d'écriture qu'une technique utile, car nous savons aujourd'hui que, pour toute fraction, il existe une infinité de façons de l'écrire comme somme de fractions de la forme $\frac{1}{n}$ avec des dénominateurs tous différents. Il reste cependant en ce domaine des questions ouvertes.

Par exemple, pour une fraction $\frac{p}{q}$ dans laquelle p vaut 2 ou 3, on prouve de façon élémentaire qu'il existe une décomposition en somme d'au plus trois fractions égyptiennes de dénominateurs différents.

Pour $p = 4$ ou $p = 5$, nul n'a jamais trouvé d'exemple de fraction qu'on ne puisse décomposer en somme de trois fractions égyptiennes de dénominateurs différents. Mais nul n'a pu prouver que c'était toujours le cas.

Un des plus anciens textes dont nous disposons est le célèbre papyrus du scribe Ahmed, écrit vers 1650 avant notre ère, qui se présentait comme une copie d'un document antérieur de la XXe dynastie (environ 1800 avant J.-C.). On y trouve la table des fractions que nous notons aujourd'hui $\frac{2}{n}$, écrite comme des sommes de fractions « pures » (celles que nous notons $\frac{1}{p}$), et ce pour toutes les valeurs de n jusqu'à 101. On savait donc doubler une fraction et, comme on connaissait aussi le procédé de multiplication par doublements, on savait effectuer toute multiplication d'une fraction par un nombre entier. Par exemple, pour multiplier par 19, on multipliait par 16, par 2 (et par 1) avant d'additionner.

On comprend qu'il ait fallu de longues études pour apprendre à additionner des fractions !

Les fractions équivalentes

La première idée pour construire des fractions équivalant à une fraction donnée s'appuie sur la comparaison avec des parts de gâteau : si l'on fait des parts deux fois plus petites et qu'on en prend deux fois plus, cela revient au même, comme prendre *n* fois plus de parts *n* fois plus petites. D'où notre première règle :

Lorsqu'on multiplie numérateur et dénominateur d'une fraction par un même nombre, on obtient une fraction équivalente.

Bien entendu, cela peut se dire dans l'autre sens : lorsqu'on divise numérateur et dénominateur d'une fraction par un même nombre (à supposer qu'ils soient multiples de ce nombre), on obtient une fraction équivalente. On dit alors qu'on a « simplifié » la fraction. Lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1, autrement dit lorsque ces nombres sont étrangers, la fraction ne peut pas être simplifiée, elle est dite irréductible. La simplification la plus forte est obtenue lorsqu'on a simplifié par le plus grand nombre possible, autrement dit par le PGCD du numérateur et du dénominateur. On peut en tirer une règle pratique assez commode.

Observons les fractions équivalentes $\frac{a}{b}$ et $\frac{ma}{mb}$. Les « produits en croix » $a \times mb$ et $b \times ma$ sont égaux. Inversement, étant donné deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ telles que les produits en croix soient égaux ($ad = bc$) d'après les règles établies, nous savons que $\frac{a}{b}$ est équivalente à $\frac{ad}{bd}$, qui est exactement la fraction $\frac{bc}{bd}$, qui est équivalente à $\frac{c}{d}$.

C'est la « règle des produits en croix » :

On reconnaît des fractions équivalentes à l'égalité des produits en croix.

Il est utile ici de remarquer que, si l'on fait de chaque gâteau une seule part, deux, trois, quatre parts reviennent à deux, trois, quatre gâteaux : une fraction de dénominateur 1 est équivalente à un entier, son numérateur.

Caractères de divisibilité

La simplification se fait souvent par étapes. Certes, en recherchant le PGCD du numérateur et du dénominateur, on obtient la meilleure simplification possible, mais, s'il y a un diviseur commun évident, on peut commencer par simplifier par ce diviseur. C'est le principal intérêt des caractères de divisibilité, qui permettent de reconnaître, sans faire la division, qu'un entier admet un diviseur simple. Tous sont liés à la base dix que nous utilisons.

On reconnaît un multiple de :

- 10 au fait que son dernier chiffre est un zéro ;
- 2 au fait que son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- 5 au fait que son dernier chiffre est 0 ou 5 ;
- 9 au fait que la somme de ses chiffres est un multiple de 9 ;

- 3 au fait que la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
- 11 au fait que la somme alternée de ses chiffres est un multiple de 11 (la somme alternée s'obtient en ajoutant et retranchant alternativement les chiffres).

Exemples :

- 712 173 : $7 - 1 + 2 - 1 + 7 - 3 = 11$

  712 173 est un multiple de 11.

- 52 416 : $5 - 2 + 4 - 1 + 6 = 12$

  52 416 n'est pas un multiple de 11.

Réduire au même dénominateur

Lorsqu'il faut savoir qui a le plus de tarte, il est nettement plus commode que les assiettes soient garnies de parts de même taille. J'ai cinq parts, tu en as six, j'en ai moins que toi. Mais si, individuellement observées, tes parts sont plus petites que les miennes, la comparaison n'est plus aussi simple.

Pour comparer deux nombres représentés par des fractions, il vaut mieux que celles-ci aient même dénominateur. Si ce n'est pas le cas, il est préférable de les réduire au même dénominateur.

Je veux comparer $\frac{5}{6}$ et $\frac{6}{7}$. En multipliant numérateur et dénominateur de la première fraction par 7, j'obtiens la fraction équivalente $\frac{35}{42}$. En multipliant numérateur et dénominateur de la seconde fraction par 6, j’obtiens la fraction équivalente $\frac{36}{42}$.

La comparaison est alors immédiate : la seconde est la plus grande. Ce qui permet le calcul et assure son succès, c’est l’idée de prendre 42 pour dénominateur commun, un multiple de 6 et de 7.

Ainsi :

On peut toujours réduire deux fractions au même dénominateur en choisissant pour dénominateur commun le produit de leur dénominateur.

Mais ce qui importe, c’est que 42 soit un multiple commun à 6 et 7. Tout autre multiple commun aurait permis de réduire nos fractions au même dénominateur. C’est naturellement le plus petit commun multiple (PPCM) qui assure les calculs les plus simples (dans notre exemple, 6 et 7 sont étrangers, et le PPCM est le produit de ces nombres).

Opérations de fractions

Additionner les contenus de deux assiettes lorsque les parts sont de même taille est aisé : il suffit d'additionner les nombres de parts. Traduit en langage de fractions, cela devient :

Pour additionner des nombres représentés par des fractions de même dénominateur, on écrit la fraction ayant encore ce même dénominateur et ayant pour numérateur la somme des numérateurs.

Exemple : $\frac{4}{15} + \frac{10}{15} = \frac{14}{15}$

Si les écritures données ne sont pas des fractions de même dénominateur, on sait les transformer pour les réduire au même dénominateur :

$$\frac{4}{15} + \frac{2}{3} = \frac{4}{15} + \frac{10}{15} = \frac{14}{15}$$

En ce qui concerne la multiplication, la règle est beaucoup plus simple : pour calculer le produit de deux fractions, on forme une fraction dont le numérateur est le produit des numérateurs et dont le dénominateur est le produit des dénominateurs.

Exemple : $\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{24}{36}$

Soit : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ Si l'on multiplie une fraction par cette fraction « renversée » :

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab}$$

on peut simplifier en $\frac{1}{1}$, où nous reconnaissons l'entier 1. Retenons que pour obtenir l'inverse d'une fraction, on échange le numérateur et le dénominateur.

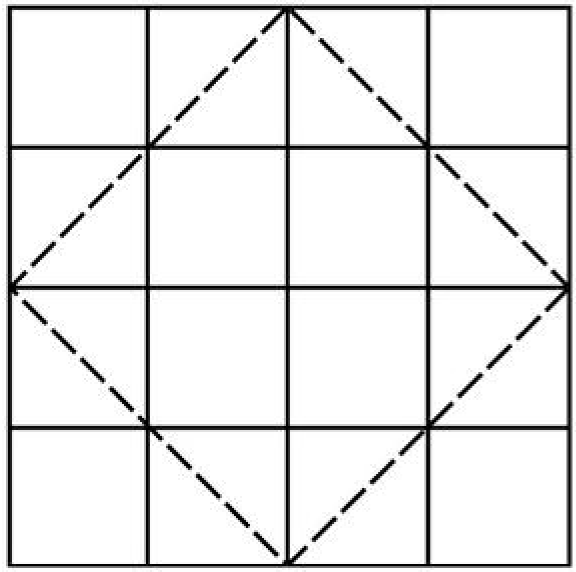
Les longueurs incommensurables – démonstration géométrique

Bien avant Euclide, on savait qu'il existait des longueurs incommensurables : il n'existe entre elles aucune mesure commune, c'est-à-dire aucune longueur qui soit contenue un nombre entier de fois dans l'une et dans l'autre. Un exemple célèbre, raconté par Platon (IVe siècle avant J.-C.), est un dialogue entre Socrate et un esclave de Ménon.

Traçant sur le sable un carré de deux pieds de côté, Socrate demande à l'esclave comment construire un carré d'aire double. Quatre pieds de côté ? L'aire serait quadruplée. Trois pieds ? Elle serait multipliée par $\frac{9}{4}$, et c'est encore trop. Et Socrate de présenter non un calcul mais une construction géométrique : en repliant les quatre « coins » autour des droites en pointillé, on met en évidence le rapport 2 entre les aires du grand et du petit carré.

Il y a là un paradoxe déjà connu des pythagoriciens. Pour les plus anciens d'entre eux, tout est nombre (entier). À la rigueur, rapport de nombres. Si seuls existent le nombre entier et les rapports de nombres entiers, la diagonale du carré de côté 1 n'a pas de longueur : le nombre qui, pour nous, s'écrit $\sqrt{2}$ n'est pas égal au quotient de deux entiers.

Aristote expose avec un modernisme étonnant la démonstration. « *On prouve par l'exemple l'incommensurabilité de la diagonale,* écrit-il, *par cette raison que les pairs deviendraient impairs si on posait cette diagonale commensurable. Ainsi on prouve l'incommensurabilité de la diagonale par ce qu'une conclusion fausse découlerait de la proposition contradictoire.* »



L'aire du grand carré est le double de celle du petit.

Les longueurs incommensurables – démonstration mathématique

La démonstration à laquelle se réfère Aristote s'énoncerait, en langage moderne, comme suit.

Remarque préalable n° 1 :

Le carré d'un nombre impair est impair : $(2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$.

Remarque préalable n° 2 :

Toute fraction est équivalente à une fraction dont le numérateur et le dénominateur ne sont pas tous les deux pairs. (En effet, si les deux termes d'une fraction sont pairs, on peut la simplifier par 2 et on recommence aussi longtemps que c'est nécessaire ; un nombre fini de simplifications étant possible, on parviendra à une fraction de la forme souhaitée.)

Démonstration :

S'il existait une fraction $\frac{p}{q}$ ainsi simplifiée dont le carré soit égal à 2, on aurait $p^2 = 2q^2$ et p serait pair d'après la remarque 1. D'après la remarque 2, q serait donc impair. Écrivant $p = 2m$ (m est le nombre entier égal à la moitié de p), on aurait, après simplification : $2m^2 = q^2$ et q serait pair, selon la remarque 1.

Les nombres négatifs

C'est à l'Allemand Adam Riese (1492-1559), auteur de manuels d'arithmétique très répandus, que l'on doit la notation d'un nombre négatif avec le signe « – ». L'écriture – 5 indique une dette de 5 unités. Un nombre négatif comporte donc le signe « – » et un nombre ordinaire qu'on appelle « sa valeur absolue ». Par souci d'uniformité, un nombre ordinaire est parfois qualifié de « positif » et est même écrit avec le signe « + » ; on écrit ainsi +5 au lieu de 5.

Un nombre affecté d'un signe, « + » ou « – », avec une signification illustrée par ces quelques exemples, s'appelle un nombre relatif. S'il est précédé du signe « + », il est dit positif ; s'il est précédé du signe « – », il est dit négatif.

On évite des confusions en mettant parfois des parenthèses : (– 5), (+2)...

Deux nombres de même valeur absolue mais de signes différents sont dits opposés. On dit aussi que l'un est l'opposé de l'autre, rendant ainsi évident le fait que l'opposé de l'opposé d'un nombre est ce nombre lui-même. Par exemple, (– 6) et (+6) sont opposés.

Attention

Par exception, 0 s'écrit sans signe. Pour la généralité de certains énoncés, il est commode de considérer que 0 est à la fois un nombre positif et un nombre négatif. Il est donc son propre opposé.

Sur la calculatrice, il existe une touche $\pm$ qui remplace le nombre -affiché par son opposé. Ainsi, si l'on frappe 2,2 $\pm$, on obtient l'affichage – 2,2. Si l'on frappe encore $\pm$, on obtient 2,2.

On peut aussi entrer directement sur la calculatrice le signe « – » avant les chiffres.

Les propriétés de l'addition des nombres négatifs

Quels que soient les signes des nombres relatifs en cause, on vérifie facilement les propriétés suivantes :

- **Commutativité :** la somme de deux nombres ne dépend pas de leur ordre.
- **Associativité :** la somme de plusieurs nombres ne dépend pas des groupements qu'on y fait.
- **Opposés :** la somme d'un nombre quelconque et de son opposé est égale à zéro. Par exemple : $(-4) + (+4) = 0$.

Une lettre peut parfaitement représenter un nombre relatif. Par exemple, on écrit sans hésiter $a = -3$. Dans ces conditions, l'opposé de a est noté $-a$.

Attention

Lorsque la valeur de a n'est pas précisée, on ne peut pas affirmer que $-a$ est négatif. Par exemple, si $a = -3$, alors $-a$ est le nombre positif $+3$.

C'est un sens de plus accordé à ce signe, mais il n'y a pas de risque de confusion gênante. En effet, le signe « – » peut indiquer :

- l'opération de soustraction : $7 - 3 = 4$;
- un nombre négatif : -15 ;
- l'opposé d'un nombre : $-a$.

La différence $a - b$ de deux nombres relatifs n'exige pas qu'on énonce une nouvelle définition : c'était pour nous le nombre qui, additionné à b, donne a. Notons provisoirement b' l'opposé de b. Nous savons que $b' + b = 0$, et par conséquent :

$$a = a + (b' + b) = (a + b') + b.$$

Cela manifeste que le nombre $a + b'$, additionné à b, donne a. C'est exactement notre définition, d'où la règle simple :

Pour retrancher un nombre, on ajoute son opposé.

Les propriétés de la multiplication des nombres négatifs

Si l'on trouve des traces des règles liées à l'addition des nombres négatifs chez des auteurs très anciens, il n'en est pas de même de la multiplication. Les supports concrets comme les soldes bancaires ne se prêtent pas à la multiplication. Certes, on peut doubler le solde d'un compte mais, en dehors de ces cas, on ne voit guère quel sens donner au produit de (– 3,2) par (– 1,5).

La seule démarche cohérente nous semble aujourd'hui simple, mais il a fallu attendre le début du XX^{e} siècle pour la voir s'imposer. Elle consiste à mettre de côté toute tentative d'interprétation matérielle et à poser le problème dans les termes suivants. Il s'agit de trouver une façon de définir, si c'est possible, le produit $a \times b$ de deux nombres relatifs, en sorte que :

1. S'il advient que les nombres soient positifs, leur produit est ce qu'on a toujours appelé produit de deux nombres ;
2. Les propriétés familières de la multiplication restent vraies pour la multiplication de nombres relatifs, ces propriétés étant :
    - **la commutativité :** le produit de deux nombres ne dépend pas de leur ordre : $a \times b = b \times a$;
    - **la distributivité :** pour multiplier un nombre par une somme, on peut le multiplier séparément par chaque terme de la somme, puis additionner les produits obtenus : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Si le problème a une solution, les exigences posées en entraînent quelques autres :

- le produit de deux nombres positifs est positif ;
- le produit d'un nombre par 0 est égal à 0 (en effet, $a \times b = a \times (b + 0) = a \times b + a \times 0$) ;
- les produits d'un nombre a par deux nombres opposés b et b' sont des nombres opposés (en

effet, si b et b' sont deux nombres opposés, le produit $a \times (b + b')$, qui est $a \times 0$, est nul et il est égal à $a \times b + a \times b'$;

- on peut aussi dire que, si l'on change un facteur en son opposé, le produit change de signe.

La règle des signes

Les remarques qui précèdent permettent d'énoncer la règle des signes :

- le produit de deux nombres positifs est positif ;
- le produit d'un nombre positif et d'un nombre négatif est un nombre négatif ;
- le produit de deux nombres négatifs est positif.

Exemple

$(+2) \times (+5) = (+10)$

$(+2) \times (-5) = (-10)$

$(-2) \times (-5) = (+10)$

$(-2) \times (+5) = (-10)$

Si l'un des facteurs est nul, le produit est nul : on ne lui donne pas de signe. Inversement, si un produit est nul, l'un (au moins) des facteurs est nul.

Quelques remarques :

- le produit par (+1) d'un nombre relatif est égal à ce nombre ;
- le produit par (− 1) d'un nombre relatif est égal à son opposé ;
- le carré d'un nombre relatif a, qui est le produit de deux facteurs identiques, est positif, quel que soit a, puisque les deux facteurs ont évidemment le même signe (un carré est toujours positif) ;
- le signe du produit de plusieurs facteurs ne dépend que du nombre de facteurs négatifs : si ce nombre est pair, le produit est positif, si ce nombre est impair, le produit est négatif.

Les exposants négatifs

Pour m entier au moins égal à 2, la notation 3^m est une abréviation commode pour désigner le produit de m facteurs égaux à 3 :

$$3^m = 3 \times 3 \times \ldots \times 3$$

ou, plus généralement, a^m pour désigner le produit de m facteurs égaux au nombre a.

L'idée est de donner un sens commode à une écriture telle que 3^{-2}. Commode a ici un sens précis : il s'agit de faire en sorte que la règle qu'exprime la formule $3^m \times 3^n = 3^{m+n}$ reste encore respectée. Il n'y a pas d'inconvénient à conserver le nombre 3 si cela peut aider, ce qui suit reste correct pour tout autre nombre, positif ou négatif. On exclut cependant 0 pour éviter certaines contradictions.

Définir 3^1 peut sembler étrange : quel sens donner à une prétendue multiplication alors qu'on disposerait seulement d'un facteur ? Mais on sait d'une part que 3^{m+1} est le produit de $m + 1$ facteurs égaux à 3, d'autre part que 3^m est le produit de m facteurs égaux à 3. Dès lors, si la règle doit rester valable :

3^{m+1}	=	$3^m \times 3^1$
m+1 facteurs 3		m facteurs 3

il n'y a pas le choix, 3^1 doit désigner 3.

Ainsi, par convention :

Pour tout nombre a, on définit a^1 comme étant égal à a.

Définir 3^0 semble étrange également : quel sens donner à une prétendue multiplication alors qu'on ne disposerait d'aucun facteur ? C'est encore pire que 3^1 ! Mais on sait que 3^m est le produit de m facteurs égaux à 3. Dès lors, si la règle doit rester valable :

3^{m+0}	=	$3^m \times 3^0$
m facteurs 3		m facteurs 3

il n'y a pas le choix, 3^0 doit désigner 1. Ainsi, par convention :

Pour tout nombre a non nul, on définit a^0 comme étant égal à 1.

Définir 3^{-m} est encore pire : quel sens donner à une prétendue multiplication dont le nombre des facteurs serait négatif ? Mais si la règle doit rester valable, d'une part : $3^{m-m} = 3^m \times 3^{-m}$ et d'autre part : $3^{m-m} = 3^0 = 1$, il n'y a pas le choix, 3^{-m} doit désigner le nombre qui, multiplié par 3^m donne 1, ce que nous appelons l'inverse de 3^m.

Donc :

Pour tout nombre a non nul, on définit a^{-m} comme étant égal à $\frac{1}{a^m}$ *.*

Les opérations à trous

Voici un tour de « magie » mathématique :

« Pensez à un nombre. Ajoutez-lui 5, multipliez le résultat par 2 et retranchez le nombre initial. » Le sujet révèle ensuite le résultat final, par exemple 13, et le « magicien » lui donne le nombre de départ.

En se bornant aux étapes décrites, si l'on note x le nombre initial, le programme de calcul se traduit par la formule $(x + 5) \times 2 - x$ et le magicien résout en fait l'équation $2\,(x + 5) - x = 13$.

Le papyrus Rhind contient de nombreux problèmes de ce type. Les plus simples demandent seulement une opération mystère, une addition. Dans notre langue, nous dirions : « Quel nombre faut-il ajouter à 6 pour obtenir 14 ? » La pédagogie scolaire appelle cela une opération « à trou ». On écrit… → + 6 = 14.

À nous qui connaissons la soustraction, la réponse apparaît immédiatement. Le nombre cherché est la différence 14 – 6, que nous savons calculer : 8.

Une égalité « à trou » s'appelle une équation. Trouver le nombre à écrire dans la case pour qu'elle soit vérifiée, c'est résoudre l'équation. Le nombre ainsi trouvé s'appelle une solution de l'équation.

Lorsqu'on avance un peu, le champ des opérations à trous s'étend. On peut en écrire :

- avec la soustraction : →… − 6 = 14 ou 18 −… → = 14
- avec la multiplication : →… × 6 = 14
- avec la division : … → /6 = 14 ou 6/… → = 14
- ou même avec une succession d'opérations : (→… + 5) ×… → − 2 = 4

Les écritures deviennent vite pesantes. Apparue pour la première fois dans un traité de Francisco Maurolico en 1575, généralisée peu après par François Viète, l'idée de remplacer ce « trou » par une lettre qui représenterait le nombre inconnu nous apparaît aujourd'hui comme une évidence. Les équations précédentes prennent des formes plus maniables :

$$x + 6 = 14$$

$$x - 6 = 14$$

$$6x = 14$$

L'équation f(x) = 0

Dans le *Don Quichotte* de Cervantès, on trouve cette remarque à propos d'un chirurgien : « C'est un excellent algébriste. » Dans la langue de l'époque, cela signifiait qu'il était habile à remettre bien en face les fragments d'un os brisé. C'est une allusion à la façon dont, à l'époque, une équation était posée, sans utilisation de nombres négatifs.

Résoudre par exemple l'équation $x^2 + 6 = 5x$, c'était trouver le ou les nombres tels que, en les mettant à la place de x, les deux membres se trouvent prendre la même valeur, comme les morceaux d'un tibia fracturé.

On peut procéder par essais successifs, en écrivant :

- pour $x = 0$ $6=0$ échec
- pour $x = 1$ $7=5$ échec
- pour $x = 2$ $10 = 10$ succès
- pour $x = 3$ $15 = 15$ succès
- pour $x = 4$ $22 = 20$ échec

- etc.

La méthode laisse à désirer : jusqu'où continuer ? Pourquoi n'avoir pas essayé des nombres décimaux ? Des fractions ? Des nombres plus compliqués encore ? Nous aimerions disposer d'une procédure systématique, nous donnant toutes les solutions (s'il en existe) par des formules faisant appel aux opérations connues, les « quatre opérations », plus les extractions de racines.

Maintenant que nous n'avons plus peur des nombres négatifs, nous pouvons écrire l'équation précédente sous la forme $x^2 - 5x + 6 = 0$, regroupant ainsi sous une seule forme générale $x^2 + bx + c = 0$ des équations qu'on devait écrire jadis en distinguant les cas : $x^2 + 7x = 8$; $x^2 = 6x + 1$…

C'est sous cette forme que nous traiterons désormais des équations. Une fonction polynôme f étant donnée, résoudre l'équation $f(x) = 0$, c'est chercher les nombres x dont l'image par f est nulle. Selon la forme de la fonction f, on parle d'une :

- équation du premier degré de la forme : $ax + b = 0$

- équation du deuxième degré de la forme : $ax^2 + bx + c = 0$
- équation du troisième degré de la forme : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
- équation du quatrième degré...

Les équations du premier degré

Sous leur forme la plus simple, de telles équations ne mettent en jeu qu'une seule fois le nombre à trouver et seulement deux opérations, l'addition et la multiplication. En suivant les conseils de Viète, nous l'écrivons : $ax + b = 0$, étant convenu que a et b sont des nombres connus. Si l'on n'en précise pas immédiatement les valeurs, c'est que beaucoup de raisonnements généraux peuvent être faits sans que cette information soit nécessaire.

Les nécessités d'une situation concrète peuvent dissimuler cette forme simple et exiger quelques calculs préalables. Si l'on propose l'équation $3\ (2x + 4) - 2\ (4x - 1) = 5\ (1 - x)$, il faut un peu d'entraînement pour voir que les règles de calcul des additions, soustractions et multiplications permettent de la ramener à la forme désirée. On écrit successivement :

$$6x + 12 - 8x + 2 = 5 - 5x$$

$$- 2x + 14 = 5 - 5x$$

On applique alors une règle propre aux équations : si l'on ajoute un même nombre aux deux membres d'une équation, on ne change pas ses solutions. Cela vaut aussi pour retrancher un même nombre (c'est seulement ajouter son opposé). Cela vaut encore si le nombre ajouté est inconnu.

Grâce à l'addition de $5x$ aux deux membres, on écrit $3x + 14 = 5$.

Grâce à l'addition de $- 14$ aux deux membres, on écrit $3x = - 9$.

On voit avec quelle arrière-pensée ont été choisis $5x$ ou $- 14$. Il s'agit d'isoler dans l'un des membres les nombres connus et d'isoler dans l'autre les nombres inconnus. On peut maintenant appliquer une autre règle propre aux équations : si l'on multiplie par un même nombre non nul les deux membres d'une équation, on ne change pas ses solutions. Cela vaut aussi pour une division. On obtient ainsi : $x = - 3$.

Attention

Si l'équation étudiée provient d'un problème concret, il faut s'assurer que le résultat du calcul a une interprétation convenable. Nos règles de calcul étant valables pour tous les nombres relatifs et toutes les fractions, c’est généralement à la fin du calcul que nous nous soucions de cette cohérence, en posant la question : le nombre trouvé répond-il à toutes les conditions du problème posé ?

Les équations élémentaires du second degré

En géométrie, un carré de côté 2 peut être recouvert par quatre carrés de côté 1, ce que nous écrivons aujourd'hui $2^2 = 4$. À l'inverse, pour que l'aire d'un carré soit 4, la longueur du côté doit être 2, évidemment.

Certes, 2 est une bonne réponse, mais est-ce la seule ? Si l'on quitte le domaine géométrique et que les nombres négatifs sont définis, on dira aussi que $(-2)^2 = 4$. En résumé, il y a deux solutions à l'équation $x^2 = 4$: 2 est la seule solution positive et on voit sans difficulté que -2 est la seule solution négative.

Les Grecs n'avaient aucun doute sur l'existence d'un nombre positif x tel que $x^2 = 2$, ou plus généralement $x^2 = p$, la lettre p désignant un nombre positif donné.

Les Égyptiens savaient en donner des approximations, par une technique que les livres actuels ne désavoueraient pas.

On part d'un nombre positif u_0, dont le carré n'est pas trop éloigné de p, tout en restant en dessous. Par exemple, s'agissant de l'équation $x^2 = 10$, on partira de 3.

Si u_0 est trop petit, le quotient $\frac{P}{u_0}$ est trop grand :

$$\left(\frac{P}{u_0}\right)^2 > \frac{P^2}{u_0} > \frac{P^2}{P}$$

La moyenne de cette approximation par défaut et de cette approximation par excès est sans aucun doute plus proche de la « vraie » valeur. On la désigne par u_1, et on recommence.

Et on sait aujourd'hui démontrer qu'on se rapproche ainsi indéfiniment de la « vraie » valeur. Par exemple, pour $x^2 = 2$, en partant de $u_0 = 1$, on obtient en trois étapes une approximation avec six décimales.

u_0	$\frac{2}{u_0}$	**Somme**	**Moyenne**
1	2	3	1,5

1,5	1,333333	2,833333	1,416667
1,416667	1,411765	2,828431	1,414216
1,414216	1,414211	2,828427	1,414214
1,414214	1,414214	2,828427	1,414214

Les équations produits

Ce que nous savons de la multiplication rend particulièrement simple la résolution d'un type particulier d'équations, qui s'écrivent $(x - m)(x - n) = 0$, dans laquelle m et n sont des nombres donnés.

Nous savons en effet qu'un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Par conséquent, l'équation proposée admet pour solutions les nombres m et n, et eux seulement. On peut ainsi retrouver un résultat du paragraphe précédent, en se servant d'une « identité remarquable » : $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$.

L'équation $x^2 = a^2$ admet donc deux solutions (et seulement deux) qui sont des nombres opposés, $-a$ et a.

Bien entendu, le résultat s'étend à un produit de plus de deux facteurs. Par exemple, les solutions de l'équation $(x - 1)(x + 2)(x - 3) = 0$ sont les nombres 1, -2 et 3.

Inversement, un résultat très important, généralement attribué à d'Alembert (XVIII^e siècle), énonce que, si un polynôme P s'annule pour une valeur a de x, il existe un autre polynôme Q permettant d'écrire $P(x) = (x - a)\,Q(x)$.

On dit que le polynôme P est divisible par $x - a$.

La démonstration est très simple. On commence par observer que, si le théorème est vrai pour deux polynômes P_1 et P_2, il est vrai pour leur somme :

$$P_1(x) = (x - a)\,Q_1(x)$$

$$P_2(x) = (x - a)\,Q_2(x)$$

$$P_1(x) + P_2(x) = (x - a)\,[Q_1(x) + Q_2(x)]$$

Il suffit donc de démontrer le théorème pour les polynômes particuliers de la forme x^n, ce que la formule $x^n - a^n = (x - a)\,(x^{n-1} + ax^{n-2} \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1})$ rend immédiat.

Les équations du troisième degré

Pour les équations de degré 3, de la forme $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, la résolution à l'aide des seules opérations élémentaires a été beaucoup plus tardive. C'est dans les années 1530, à l'occasion d'un tournoi mathématique, que Nicolo Tartaglia prouva qu'il était capable de résoudre des équations d'une des formes suivantes : $x^3 + bx = c$ et $x^3 + ax^2 = c$.

Mais, fidèle aux habitudes de l'époque, il ne publia pas sa méthode ; dissimulée en un poème, il la confia à Cardan qui la publia en 1545 dans son *Ars magna*. La méthode de Cardan se traduit, en langage moderne, par les étapes suivantes. Pour étudier l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, on cherche, non pas x, mais $y = x + \frac{a}{3}$. La raison de cette ruse apparaît immédiatement lorsqu'on écrit $x = y - \frac{a}{3}$ de sorte que l'équation devient :

$$\left(y-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(y-\frac{a}{3}\right)+b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c=0$$

Il suffit de développer cette écriture pour voir disparaître le terme en y^2, ce qui se ramène ainsi à une équation d'écriture plus simple, de la forme $y^3 + py + q = 0$.

L'idée de Tartaglia est de chercher y comme la somme $u + v$ de deux nombres, auxquels il se réserve d'imposer plus tard une autre condition. L'équation se transforme alors en $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$ et la condition à imposer saute aux yeux : exiger $uv = -\frac{p}{3}$, ce qui ramène l'équation à la forme $u^3 + v^3 + q = 0$.

On se trouve ainsi chercher deux nombres, u^3 et v^3, connaissant leur somme $-q$ et leur produit $-\frac{p^3}{27}$ $= 0$. D'après l'étude faite plus haut, u^3 et v^3 sont racines de l'équation du second degré $z^2 + qz - \frac{p^3}{27}$ $= 0$.

Lorsque cette équation a des racines (c'est-à-dire lorsque le discriminant $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$ est positif), on obtient une racine de l'équation du troisième degré sous la forme :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Les surprises de Cardan

Appliquant la méthode décrite ci-dessus à l'équation $x^3 + 6x - 20 = 0$, Cardan trouve la racine :

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{-\sqrt{108}-10}$$

L'appliquant à l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$, Cardan trouve la racine :

$$\sqrt[3]{\sqrt{-121}+2} + \sqrt[3]{-\sqrt{-121}+2}$$

dans laquelle apparaît la racine carrée d'un nombre négatif !

Quelques années plus tard, Bombelli porte le trouble à de nouvelles extrémités, en feignant de croire que – 1 est un « nombre » auquel les règles usuelles de calcul s'appliquent. Il note alors :

$$\left(2+\sqrt{1}\right) = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}$$
$$\left(2-\sqrt{1}\right)^3 = 2 - 11\sqrt{-1} = 2 - \sqrt{-121}$$

et la racine trouvée par Cardan s'écrit alors :

$$2+\sqrt{-121}+2-\sqrt{-121}=4$$

Il s'avère en effet que 4 est bien une racine de l'équation donnée. Ainsi, en passant par l'intermédiaire de ces « nombres » imaginaires, on trouve un nombre parfaitement réel, qui est bien racine de l'équation.

Au cours des siècles qui suivirent, les mathématiciens apprirent à apprivoiser ces « nombres », appelés aujourd'hui nombres complexes.

À peu près à la même époque, et par une généralisation de la méthode de Cardan, Ferrari donna la méthode de résolution de l'équation de degré 4 :

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Les mathématiciens des siècles suivants perfectionnèrent ces méthodes, mais ne purent s'attaquer à l'équation de degré 5, en dehors de quelques cas particuliers. Il fallut attendre 1799 pour qu'un mathématicien italien, Ruffini, publie un livre dans lequel il affirme l’impossibilité de résoudre algébriquement les équations de degré 5 et plus. Le Français Augustin Louis Cauchy, en 1815, en donna la preuve.

Les inégalités entre nombres

Au moment de l'élaboration du texte de la Constitution européenne, on a beaucoup discuté sur la référence, dans le préambule, aux racines chrétiennes de l'Europe. Qui sait encore que l'envie était l'un des sept péchés capitaux ? Aujourd'hui, on parle plutôt de la réduction des inégalités.

Les inégalités qui nous intéressent ici sont moins controversées. Il s'agit d'inégalités entre nombres, explicitement écrits ou représentés par des lettres.

Par une subtilité qui s'avère parfois utile, on distingue diverses écritures, par exemple :

- $x > 4$ qui se lit : x est strictement supérieur à 4 ;
- $x < 4$ qui se lit : x est strictement inférieur à 4 ;
- $x \geq 4$ qui se lit : x est supérieur ou égal à 4 ;
- $x \leq 4$ qui se lit : x est inférieur ou égal à 4.

Longtemps controversées, les expressions « supérieur à » ou « inférieur à » sans autre précision sont à éviter, car elles demeurent ambiguës.

Lorsqu’on a appris à reconnaître préalablement si un nombre est positif, on peut utiliser cette capacité pour définir les inégalités. Par exemple, on écrira $x > 4$ pour exprimer que le nombre $x - 4$ est strictement positif.

Les propriétés des inégalités

Quelques propriétés sont si élémentaires qu'on hésite à les énoncer. Pourtant, si on leur a donné des noms spécifiques, c'est qu'elles ont leur intérêt et sont sources de généralisations utiles.

La réflexivité : tout nombre est supérieur ou égal à lui-même. Ou encore, quel que soit x : $x \geq x$.

Notre « définition » d'un nombre positif signifie qu'on considère 0 comme un cas particulier de nombre positif, et c'est en effet la convention usuelle.

La transitivité : prenons des nombres x, y, z tels que $x \geq y$ et $y \geq z$, alors $x \geq z$.

Si je suis plus grand (au sens : au moins aussi grand, ce qui autorise l'égalité) que quelqu'un qui est plus grand que toi, alors je suis plus grand que toi. Avec notre « définition », cela signifie que la somme de deux nombres positifs ($x - y$ et $y - z$) est positive (c'est $x - z$).

L'antisymétrie : prenons des nombres x, y tels que $x \geq y$ et $y \geq x$, alors $x = y$.

Si je suis plus grand que toi, et que tu es plus grand que moi, alors je suis exactement aussi grand que toi. Avec notre « définition » des nombres positifs, cela signifie que le seul nombre qu'on puisse considérer à la fois comme positif et comme négatif est zéro.

Les inégalités et les opérations – additions et soustractions

Quelques propriétés évidentes des opérations élémentaires ont une traduction en termes d'inégalités.

La différence de deux nombres ne change pas si l'on ajoute un même nombre à chacun ; si j'ai trois ans de plus que mon frère, dans vingt ans, j'aurai encore trois ans de plus. Donc :

- si $x > 4$ (autrement dit : le nombre $x - 4$ est strictement positif), alors $x + y > 4 + y$;
- si $x \geq 4$ (autrement dit : le nombre $x - 4$ est positif, ou nul), alors $x + y \geq 4 + y$.

Au collège, on retient cette propriété en disant : on peut ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité. Il se trouve des rigoristes pour critiquer cette formulation en affirmant qu'on peut toujours écrire n'importe quoi, l'important étant ce qui n'est pas exprimé : l'inégalité reste valable.

Bien entendu, la même propriété vaut pour les inégalités < et ≤.

De la même manière, la différence de deux nombres ne change pas si l'on retranche un même nombre à chacun ; si j'ai trois ans de plus que mon frère, il y a deux ans, j'avais déjà trois ans de plus. Donc :

- si $x > 4$, alors, quel que soit y, $x - y > 4 - y$;
- si $x \geq 4$, alors, quel que soit y, $x - y \geq 4 - y$.

Dans le langage des collégiens, on retient de même qu'on peut retrancher un même nombre aux deux membres d'une inégalité. Bien entendu, la même propriété vaut aussi pour les inégalités < et ≤.

Les inégalités et les opérations – multiplications et divisions

La différence de deux nombres ne change pas de signe si on la multiplie par un nombre positif. Donc, si c est un nombre positif et :

- si $x \geq y$, alors $cx \geq cy$;
- si $x \leq y$, alors $cx \leq cy$.

Une fois encore, on retient cette propriété en disant : on peut multiplier par un même nombre positif les deux membres d'une inégalité.

Bien entendu, la même propriété vaut pour une division.

La différence de deux nombres change de signe si on la multiplie par un nombre négatif. Donc si c est un nombre négatif et :

- si $x \geq y$, alors $cx \leq cy$;
- si $x \leq y$, alors $cx \geq cy$.

Une fois encore, on retient cette propriété en disant : on peut multiplier par un même nombre négatif les deux membres d'une inégalité à condition de changer le sens de cette inégalité.

Bien entendu, la même propriété vaut pour une division.

L'inégalité de la moyenne

Une inégalité rend de grands services dans de nombreuses applications ; elle concerne exclusivement les nombres positifs. Elle s'écrit sous diverses formes. La plus simple indique que, si a et b sont deux nombres positifs, alors $(a + b)^2 \geq 4ab$.

Sa démonstration est élémentaire. Elle repose sur l'égalité $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$, que l'on peut vérifier en développant ces carrés, puisqu'elle s'écrit alors :

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab$$

Le carré $(a - b)^2$ étant toujours positif, on en déduit l'inégalité demandée. On peut même faire une remarque supplémentaire : $(a - b)^2$ est nul seulement si $a = b$. Autrement dit, sauf dans le seul cas où $a = b$, on a même une inégalité stricte $(a + b)^2 > 4ab$.

Cette inégalité est la clé de plusieurs questions amusantes.

Observons la famille des rectangles de même aire ab = G. Nous savons que $(a + b)^2$ est supérieur à 4G et ne peut lui être égal que si $a = b$. Cela peut s'énoncer géométriquement :

De tous les rectangles de même aire, celui qui a le plus petit périmètre est le carré.

On peut considérer cela dans l'autre sens. Observons des rectangles de même périmètre $2(a + b) = 2p$. Le produit ab (égal à l'aire du rectangle de côtés a et b) est au plus égal à p^2 et ne peut lui être égal que si $a = b$. Cela peut s'énoncer géométriquement :

De tous les rectangles de même périmètre, celui qui a la plus grande aire est le carré.

Par exemple, de façon moins concrète, le produit de deux nombres (positifs) de somme 1 vaut au plus $\frac{1}{4}$. De même, la somme de deux nombres positifs dont le produit est égal à 1 vaut au moins $\frac{1}{4}$.

Pour tout x strictement positif :

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

$$x + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{4}$$

L'inégalité de Cauchy

On prend des nombres arbitraires a, b, c, d. L'inégalité de Cauchy exprime que $(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$.

La démonstration repose sur le calcul de la différence $(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ab + cd)^2$ qu'on développe en $a^2b^2 + c^2d^2 + a^2d^2 + c^2b^2 - (a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd) = a^2d^2 + c^2b^2 - 2abcd = (ad - bc)^2$.

Ce calcul est sans attraits, mais d'une part, il prouve l'inégalité demandée et, d'autre part, il montre que cette inégalité est stricte, sauf le cas où $ad = bc$, c'est-à-dire que les nombres a et c sont proportionnels à b et d.

Indiquons une démonstration ingénieuse de la formule générale, due à Lagrange, mathématicien du XVIII^e siècle. On donne des nombres a_1, a_2,… a_n et b_1, b_2,… b_n et on se propose de démontrer l'inégalité $(a_1b_1 + a_2b_2\ldots + a_nb_n)^2 \leq (a^2{}_1 + a^2{}_2\ldots + a^2{}_n)(b^2{}_1 + b^2{}_2\ldots + b^2{}_n)$, ainsi que ce petit supplément : l'égalité n'a lieu que si les nombres a_1, a_2,… *an* sont proportionnels aux nombres b_1, b_2,… b_n.

Lagrange observe la somme de carrés $(a_1 - sb_1)^2 + (a_2 - sb_2)^2 \ldots + (a_n - sb_n)^2$ qui est manifestement positive quelle que soit la valeur donnée à s.

Elle ne peut être nulle que pour un éventuel s qui vérifierait toutes les égalités :

$$a_1 = sb_1$$

$$a_2 = sb_2 \ldots$$

$$a_n = sb_n$$

Cela signifie que le discriminant Δ de ce qui est un trinôme du second degré en s est négatif. Or, ce discriminant s'écrit :

$(2a_1b_1 + 2a_2b_2 \ldots + 2a_nb_n)^2 - 4\ ({a^2}_1 + {a^2}_2 \ldots + {a^2}_n)\ ({b^2}_1 + {b^2}_2 \ldots + {b^2}_n)$

On a bien l'inégalité recherchée.

Avec de nombreuses interprétations possibles, notamment géométriques, cette inégalité est parfois appelée inégalité de Cauchy-Schwartz.

Elle donne aussi la clé de nombreux exercices à l'énoncé très simple, mais susceptibles de faire

« sécher » longtemps un « pas nul » qui ne penserait pas à l’inégalité de Cauchy.

Les inégalités géométriques des triangles

Tout un groupe d'inégalités concerne différentes longueurs liées au triangle et, en premier lieu, l'inégalité triangulaire.

Si a, b, c sont les longueurs des côtés d'un triangle, alors $a \leq b + c$, $b \leq c + a$ et $c \leq a + b$.

Attention

Ces inégalités sont même strictes si les trois sommets du triangle ne sont pas sur une même droite (triangle aplati). Dans toute la suite, on notera $2p$ le périmètre du triangle : $a + b + c = 2p$.

On peut déduire quelques autres inégalités simples.

On donne un point O à l'intérieur d'un triangle ABC. Nous voulons encadrer la somme des distances de O aux trois sommets.

Dans le triangle AA'C, l'inégalité triangulaire permet d'écrire AA' < AC + CA'.

Dans le triangle OA'B, de même : OB < OA' + A'B.

Additionnons membre à membre en décomposant AA' en AO + OA' : AO + OA' + OB < AC + CA '+ OA' + A'B, et donc OA + OB < CA + CB ou $a' + b' < a + b$.

En raisonnant de même avec les autres sommets, on obtient aussi :

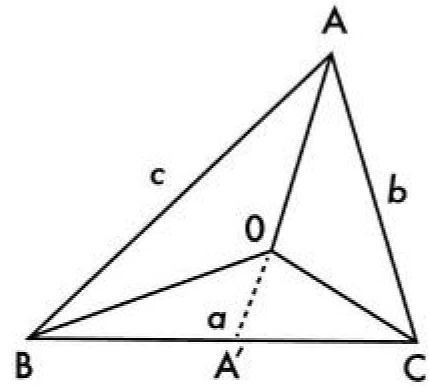
$$b' + c' < b + c \text{ et } c' + a' < c + a.$$

Il ne reste qu'à additionner membre à membre les trois inégalités obtenues et à diviser par 2 pour obtenir $a' + b' + c' < a + b + c$ ou $a' + b' + c' < 2p$.

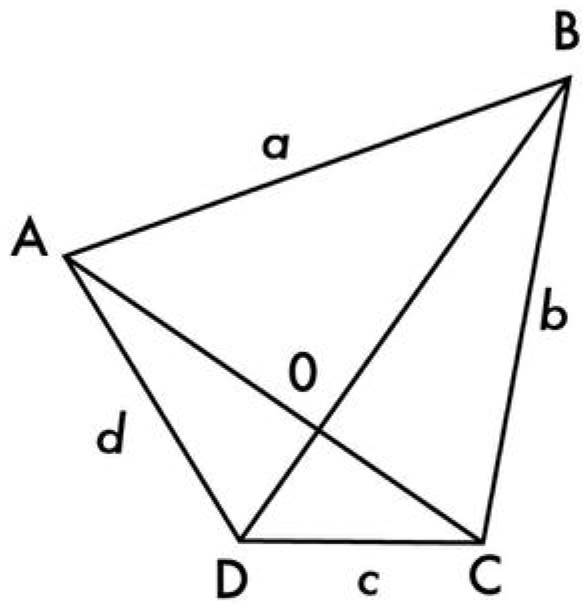
En appliquant l'inégalité triangulaire aux triangles BOC, COA et AOB, on obtient respectivement $a < b' + c'$, $b < c' + a'$ et $c < a' + b'$ et, par addition membre à membre de ces inégalités, on obtient $a + b + c < 2 (a' + b' + c')$ ou $p < a' + b' + c'$.

On a donc obtenu un encadrement de la somme des distances de O aux trois sommets : $p < a' + b' + c' < 2p$.

Ainsi, la somme des distances aux trois sommets d'un point intérieur à un triangle est comprise entre le demi-périmètre et le périmètre de ce triangle.



Représentation de l'inégalité triangulaire.



Représentation du quadrilatère convexe ABCD.

Les inégalités géométriques des quadrilatères

On donne un quadrilatère convexe ABCD.

Nous souhaitons encadrer son périmètre $a + b + c + d$ à l'aide des longueurs des diagonales.

L'application répétée de l'inégalité triangulaire permet d'écrire BD < AB + AD ; BD < DC + CB ; AC < AB + BC ; AC < AD + DC ; et par addition membre à membre de ces quatre inégalités, puis en divisant par 2 le résultat, on obtient AC + BD < ($a + b + c + d$).

D'autre part et par une observation similaire, on obtient les inégalités AB < OA + OB ; BC < OB + OC ; CD < OC + OD ; DA < OD + OA ; et par addition membre à membre de ces quatre inégalités, on obtient $a + b + c + d < 2$ (AC + BD).

Ainsi, le périmètre d'un quadrilatère convexe est compris entre la somme des longueurs des diagonales et son double :

$$AC + BD < a + b + c + d < 2\,(AC + BD).$$

La proportionnalité

Nous vivons dans un monde de proportionnalités, mais nous n'en avons pas toujours conscience. Pourtant, en tant que consommateurs, salariés, observateurs d'images imprimées dans nos journaux ou animées sur des écrans, à chaque instant, des situations de proportionnalité s'imposent.

Exemple

Dans un hypermarché, en dehors de toute promotion : j'achète cinq plaques de chocolat, identiques ; après passage en caisse, j'ai un regret et je retourne en acheter quatre autres. En dehors du temps perdu, il aurait été équivalent d'acheter d'un seul coup neuf plaques.

Si l'on note $f(x)$ le prix payé pour x plaques, cette équivalence se traduit par une relation bien plus impressionnante : $f(5) + f(4) = f(9)$ ou, pour des nombres quelconques de plaques, notons-les x et y : $f(x) + f(y) = f(x + y)$.

On peut dire que le prix payé est une fonction additive du nombre de plaques achetées.

La validité de notre exemple exclut des opérations promotionnelles du type « une plaque gratuite pour six achetées » ou « un euro de remise chaque fois que vous passez à la caisse » : dans le premier cas, il est avantageux de grouper ses achats et, dans le second, de les fractionner.

Au rayon téléviseurs d'un grand magasin, il peut être amusant d'observer les images diffusées par un modèle de 51 cm et un écran de 102 cm, lorsque ces deux téléviseurs diffusent la même chaîne. Sans avoir besoin de faire des copies d'écran, nous voyons bien que toute longueur sur une image du second est le double de celle de l'image correspondante sur le premier. Si la longueur du prototype d'Airbus à un instant est de 17 cm sur le petit téléviseur, elle est de 34 cm sur l'autre. C'est encore une relation multiplicative : $f(x) = 2x$ (ici, x désigne la longueur de l'image sur le petit modèle et $f(x)$ la longueur de l'image correspondante sur le grand).

Reconnaître la proportionnalité sur un tableau

L'existence d'une relation de proportionnalité n'est pas toujours assurée par les usages du commerce. Parfois, un expérimentateur dispose d'une série de mesures, par exemple l'allongement d'un ressort en fonction du poids qu'on y suspend.

Poids (grammes)	5	8	10	12	13	15	20
Allongement (cm)	1	1,6	2	2,4	2,6	3	4

Reconnaître une proportionnalité est alors élémentaire : il doit exister un nombre k tel que, en multipliant un nombre de la première ligne par k, on trouve le nombre associé de la deuxième ligne. Ou, ce qui revient au même s'il n'y a pas de zéros dans le tableau, le rapport de tout nombre de la deuxième ligne à son correspondant sur la première est le même pour toutes les colonnes (c’est encore notre k).

Ce nombre k s’appelle le coefficient de proportionnalité.

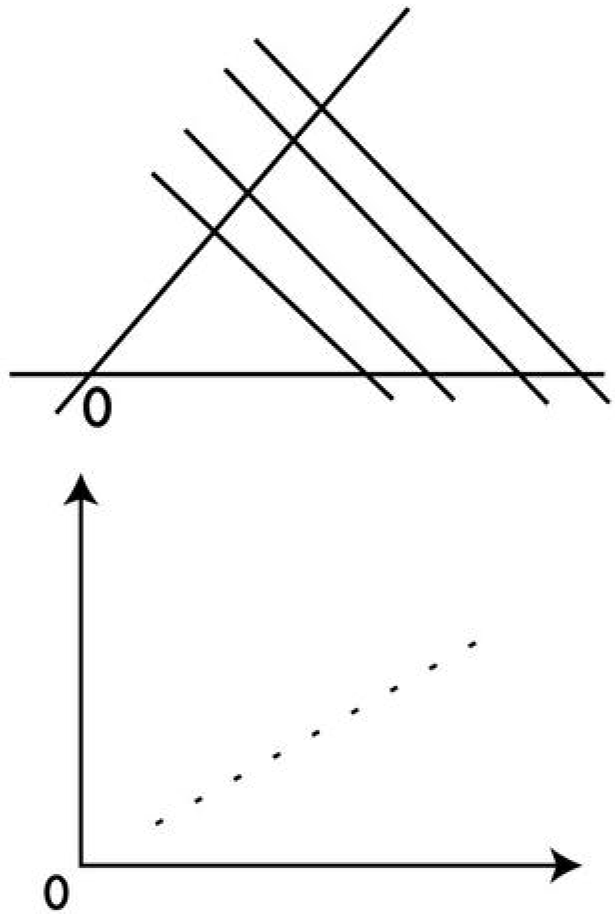
On peut aussi écrire, ce qui revient encore au même, que le rapport de tout nombre de la première ligne à son correspondant sur la deuxième est le même pour toutes les colonnes (c’est alors l’inverse $\frac{1}{k}$ de k). Ici, on a bien l’égalité des rapports :

$$\frac{5}{1} \quad \frac{8}{1,6} \quad \frac{10}{2} \quad \frac{12}{2,4} \quad \frac{13}{2,6} \quad \frac{15}{3} \quad \frac{20}{4}$$

Un cas particulier joue un rôle important dans les applications, c’est celui où le tableau n’a que deux colonnes. Par exemple :

Poids (grammes)	**8**	**15**
Allongement (cm)	1,6	3

Selon notre règle, la proportionnalité se constate par l’égalité des rapports : $\frac{8}{1,6}$ $\frac{15}{3}$ ou, ce qui est parfois plus rapide à vérifier, par l’égalité des « produits en croix » : 8 × 3 = 1,6 × 15.



Vérification avec la méthode de Thalès (en haut) et avec
la méthode de Descartes (en bas).

Reconnaître la proportionnalité sur un graphique

Même si la méthode laisse subsister une certaine imprécision, sa rapidité est un atout important. L'idée est de constater « à vue d'œil », quitte à vérifier ensuite la proportionnalité par un calcul précis, comme dans la notion précédente.

La méthode de Thalès : on trace deux droites se coupant en un point O et on porte sur l'une les mesures de la première ligne, sur l'autre les mesures de la seconde. On joint ensuite les points associés à une même colonne.

Le théorème de Thalès nous dit que les droites tracées sont parallèles si et seulement si les deux séries de mesures sont proportionnelles.

La méthode de Descartes : on utilise un repère du plan et chaque couple de mesures est représenté par le point dont il constitue les coordonnées. Par exemple, la première colonne du tableau précédent est représentée par le point de coordonnées (5, 1).

La proportionnalité des coordonnées se traduit par l'alignement des points marqués sur une droite qui contient l'origine.

La règle de trois en pratique

C'est un petit calcul relativement simple, mais qui est le cauchemar de beaucoup d'écoliers : la règle de trois. Prenons un exemple pour illustrer cette règle.

Pour 10 euros, on a 6 cendriers. Combien en obtient-on pour 15 euros ?

Le raisonnement « élémentaire » consiste à écrire successivement :

- pour 10 euros, on a 6 cendriers ;
- pour 1 euro, on en a dix fois moins,
  soit 0,6 cendrier ;
- pour 15 euros, on en a quinze fois plus,
  soit 15 × 0,6 = 9 cendriers.

La règle de trois a été imaginée pour éviter cette étape gênante des fragments de cendriers. On dresse le tableau de proportionnalité :

10	15

6	

Et on le complète de la façon suivante. Appelons x le nombre manquant. La règle de remplissage nous demande d'écrire l'égalité des rapports : $\frac{10}{6}$ $\frac{15}{x}$, ce qui équivaut (règle des produits en croix) à l'égalité : $10x = 6 \times 15$; d'où $x = 6 \times \frac{15}{10}$.

Le pourcentage

On voit souvent exprimés à l'aide d'un pourcentage :

- une taxe ou un impôt ;
- une réduction commerciale ;
- un intérêt (par exemple l'intérêt donné pour une somme déposée sur un livret d'épargne) ;
- une proportion (on dit que 43 % des électeurs se sont abstenus : cela signifie que, sur 100 électeurs inscrits sur les listes, 43 n'ont pas voté ; bien entendu, ce calcul n'est pas fait sur une liste de 100 personnes, mais sur un ensemble beaucoup plus vaste).

Une erreur fréquente consiste à oublier qu'un pourcentage est un coefficient de proportionnalité et que, appliquer un pourcentage, c'est multiplier par un nombre. En voici un exemple : un objet est affiché à 50 euros. Une réduction de 10 % se monte à $\frac{10 \times 50}{100}$, soit 5 euros. Le prix à payer après réduction est donc de 50 – 5 = 45 euros.

On aurait pu le calculer directement en multipliant le prix affiché par 0,95. On retrouve ainsi la règle :

Après une réduction proportionnelle au taux i, le prix à payer se trouve multiplié par 1 – i.

De façon symétrique :

Après une augmentation proportionnelle au taux i, le prix à payer se trouve multiplié par 1 + i.

Appliquer des pourcentages successivement

L'utilisation des règles vues dans la notion précédente permet d'éviter les erreurs trop classiques, dont voici quelques exemples :

- **Une baisse de 10 % et une hausse consécutive de 10 % ne se compensent pas.** Cela conduit à multiplier le prix initial par 0,9, puis à multiplier le résultat par 1,1. Il revient au même de le multiplier en une seule fois par $0{,}9 \times 1{,}1 = 0{,}99$, ce qui exprime une baisse de 1 %.
- **Une baisse de 10 % suivie d'une seconde baisse de 10 % ne conduit pas à une baisse de 20 %.** Cela conduit à multiplier le prix initial par 0,9, puis à multiplier le résultat par 0,9. Il revient au même de le multiplier en une seule fois par $0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}81$, ce qui exprime une baisse de 19 %.

▶ **Une hausse de 10 % suivie d'une hausse de 10 % ne conduit pas à une hausse de 20 %.** Cela conduit à multiplier le prix initial par 1,1, puis à multiplier le résultat par 1,1. Il revient au même de le multiplier en une seule fois par 1,1 × 1,1 = 1,21, ce qui exprime une hausse de 21 %.

Le risque d'erreur est d'autant plus grand qu'on applique davantage de hausses ou de baisses. C'est en particulier ce qui se produit quand on observe une croissance annuelle (ou une décroissance) sur une longue période. Par exemple, une croissance annuelle de 2 % observée pendant cinquante ans ne conduit pas à une hausse de 100 %, c'est-à-dire à un doublement. La règle précédente conduit à calculer une hausse de 2 % en multipliant par 1,02. Si cette augmentation se répète cinquante fois, on multiplie donc 50 par 1,02, ce qui se résume en une seule multiplication par $1{,}02^{50}$. Une valeur approchée de ce nombre est 2,69, si bien que la grandeur observée n'est pas multipliée par 2, mais par 2,69 !

La représentation proportionnelle

Le mode d'élection qui a été utilisé pour la plupart des élections législatives de la V^{e} République est le scrutin majoritaire : le pays est découpé en circonscriptions électorales, et dans chacune un député est élu, ce qui suppose qu'il recueille la majorité des suffrages, au moins la majorité relative, en cas de triangulaires par exemple. Si bien qu'un parti sans allié, même si 25 % des électeurs le soutiennent, peut très bien se retrouver avec un ou deux députés.

Le principe du scrutin proportionnel est très simple. Imaginons un pays dont l'Assemblée nationale comporte 576 sièges. Supposons que trois partis soient en concurrence et qu'ils aient obtenu les résultats suivants, sur 52 millions de suffrages exprimés :

- Parti socialiste : 26 millions de voix ;
- Parti conservateur : 19,5 millions de voix ;

- Parti populaire : 6,5 millions de voix.

Soit, en pourcentage, 50 %, 37,5 % et 12,5 %. La règle proportionnelle exigerait donc que soient déclarés élus :

- 50 % de députés socialistes, soit 288 ;
- 37,5 % de députés conservateurs, soit 216 ;
- 12,5 % de députés populaires, soit 72.

Dans notre exemple, il a été possible d'attribuer tous les sièges. Dans la réalité, cela n'arrive quasiment jamais. En refaisant les calculs précédents avec 577 sièges, on parviendra à en répartir 576, mais le dernier resterait non attribué. La loi doit alors fixer le mode d'attribution des sièges restants.

On peut comparer ce résultat à celui qu'offre le scrutin majoritaire : si le pays est divisé en 576 circonscriptions présentant cette même répartition, c'est le candidat socialiste qui l'emporte dans chacune et la Chambre sera composée de 576 socialistes.

Le « prix » d'un siège est plus académiquement appelé le quotient électoral et sa partie entière le quotient de Hare. Dans notre exemple, avec 576 sièges et 52 millions de suffrages exprimés, le quotient électoral, que l'on calcule en divisant 52 millions par 576, est 90 277,78. En pratique, on s'épargne les calculs intermédiaires, comme pour la règle de trois.

Le paradoxe de l'Alabama

Une entreprise de distribution de cuisines dispose de trois vendeurs A, B, C qui ont vendu respectivement 767, 967 et 1 870 cuisines. À la fin de l'année, la direction achète 35 magnums de champagne à distribuer aux vendeurs et décide de les partager proportionnellement aux résultats de chacun.

Il suffit de calculer le quotient de Hare, en divisant par 35 le total des cuisines vendues : 767 + 967 + 1 870 = 3 604. Le quotient est 102 (en négligeant les décimales). On attribue à chaque vendeur autant de magnums qu'il a vendu de fois 102 cuisines.

Vendeur	A	B	C
Attribution	7	9	18
Pour récompenser	714	918	1 836
Reste non pris en compte	53	49	34

On ne peut que décider que le dernier magnum ira au vendeur A, qui a le plus fort reste, 53. C'est la méthode des plus forts restes.

Or le fournisseur a ajouté gracieusement un 36e magnum. Le nouveau quotient de Hare, qu'on obtient en divisant par 36 le total des cuisines vendues, est 100. On attribue à chaque vendeur autant de magnums qu'il a vendu de fois 100 cuisines.

Vendeur	**A**	**B**	**C**
Attribution	7	9	18
Pour récompenser	700	900	1 800
Reste non pris en compte	67	67	70

Le dernier magnum ira au vendeur C, qui a le plus fort reste, 70. Triste résultat pour le vendeur A : quand il y avait 35 magnums, il en recevait 8, et il n'a plus droit qu'à 7 quand on en répartit 36 !

Ce paradoxe est connu sous le nom de « paradoxe de l'Alabama », en souvenir de la première fois où il est apparu publiquement : il s'agissait de répartir, après le recensement de 1880, entre les États américains, les sièges de représentants suivant la méthode des plus forts restes. L'administration chargée des statistiques effectua pour le Congrès des simulations du nombre de sièges à affecter à chaque État pour des chambres dont la taille varierait entre 275 et 350 sièges. On découvrit alors que l'État de l'Alabama aurait eu droit à 8 sièges pour une chambre de 299 et seulement 7 sièges pour une chambre de 300.

Les méthodes à diviseurs

Puisque les difficultés viennent de la répartition complémentaire des restes, une idée toute simple serait de diminuer le quotient électoral (le « prix » d'un siège, ou d'un magnum…) pour diminuer le nombre de sièges restant à attribuer après la première répartition, ou même pour l'annuler. Quel dommage de n'avoir pas été parlementaire au début du siècle dernier ! On aurait pu donner son nom à un quotient de son invention ; citons-en quelques-uns, en reprenant le vocabulaire des élections :

- En premier, celui que nous avons utilisé précédemment, **le quotient de Hare**, quotient entier du nombre de suffrages exprimés par le nombre de sièges à pourvoir.
- **Le quotient de Hagenbach-Bishoff**, quotient entier du nombre de suffrages exprimés par le nombre de sièges augmenté de 1. Il est donc inférieur au quotient de Hare et permet

d'attribuer davantage de sièges lors de la première distribution.

- Pour les adeptes du principe de précaution, qui craignent le cas miraculeux où, toutes les divisions tombant juste, on distribuerait un siège de trop, on peut augmenter de 1 le nombre de suffrages exprimés. C'est **la méthode de Droop**.
- Pour ceux qui redoutent les sièges non attribués plus que les divisions qui tombent juste, il existe aussi **le quotient d'Imperiali,** utilisé en Italie jusqu'en 1993, quotient entier du nombre de suffrages exprimés par le nombre de sièges augmenté de 2.

Les coordonnées sur une droite

Une droite géométrique ne suffit pas pour retrouver un point à partir d'un nombre. Si l'on nous dit « le point A est à 12 cm », c'est une information sans grand intérêt : à 12 cm de quoi ? Pour pouvoir faire nos repérages, il nous faut :

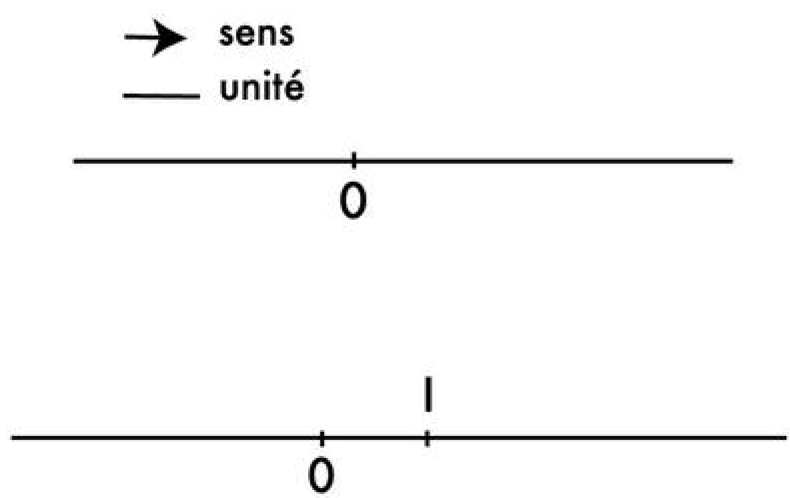
- un point O à partir duquel on comptera les distances, on l'appelle origine ;
- un sens, qui nous permettra de savoir si on cherche le point A à droite ou à gauche de O ;
- une unité (le centimètre, ou toute autre longueur).

Une droite ainsi équipée s'appelle un axe.

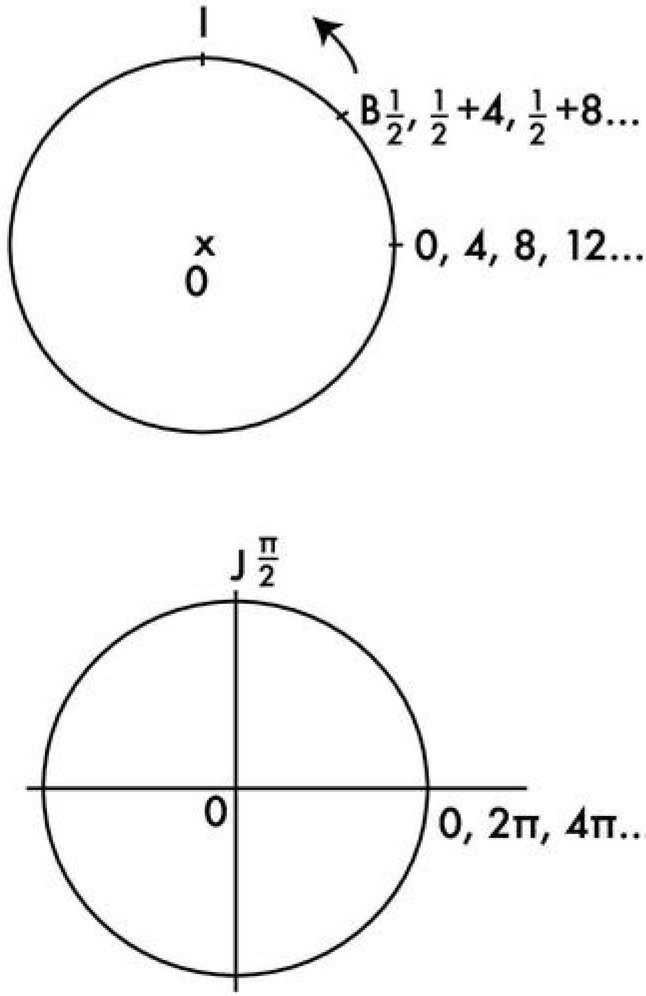
Une convention commode permet de désigner en même temps l'unité et le sens : elle consiste à marquer sur la droite un point I à la distance d'une unité (celle qu'on choisit) de l'origine.

Ce point est le point unité, et c'est grâce à un nombre relatif qu'on repère n'importe quel point de la droite :

- les points situés du même côté de O que le point I sont repérés par des nombres positifs ;
- les points situés du côté opposé sont repérés par des nombres négatifs ;
- le nombre qui marque un point de l'axe s'appelle l'abscisse de ce point ;
- le point qui représente un nombre est appelé l'image de ce nombre.



Représentation d'un axe (en haut) et de l'unité et du sens de celui-ci (en bas).



Choix de l’unité du quart de tour (en haut) et du rayon (en bas).

Les coordonnées sur un cercle

Deux unités de longueur sont couramment employées pour repérer un point sur un cercle : l'arc associé au quart de tour et le rayon.

Le quart de tour : le point origine A a pour abscisse 0, mais aussi 4 (après un tour, on revient en A), 8, 12, 16… On peut aussi tourner dans l'autre sens, obtenant ainsi les abscisses – 4, – 8, – 12…

Une remarque analogue peut être faite pour tout autre point. Le point B par exemple a une infinité d'abscisses :

$$\ldots\frac{1}{2}-12 \quad \frac{1}{2}-8 \quad \frac{1}{2}-4 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}+4 \quad \frac{1}{2}+8 \quad \frac{1}{2}+12\ldots$$

Le rayon : la longueur du cercle est alors 2π. Le point origine A a pour abscisse 0, mais aussi 2π (après un tour, on revient en A), 4π, 6π, 8π… On peut aussi tourner dans l'autre sens, obtenant ainsi les abscisses -2π, -4π, -6π…

L'une des abscisses du point J est alors $\frac{\pi}{2}$. Cette pratique est à l'origine d'une unité d'arc et d'angle couramment utilisée, le radian. Un arc d'un radian a une longueur égale au rayon du cercle.

Les coordonnées dans un plan

Pour permettre de retrouver facilement une rue sur un plan de la ville, on marque généralement un quadrillage. Les carreaux sont numérotés, en lignes et en colonnes, si bien que l'indication de deux nombres, un numéro de colonne et un numéro de ligne, permet de déterminer un « petit » territoire dans lequel se trouve la rue ou le monument recherché.

On attribue généralement à Descartes l'idée de repérer les points d'un plan en utilisant deux axes de même origine O. Le plus simple est de définir complètement ces axes en précisant en plus le point unité de chacun, de sorte que le repère est parfaitement défini par la donnée des trois points :

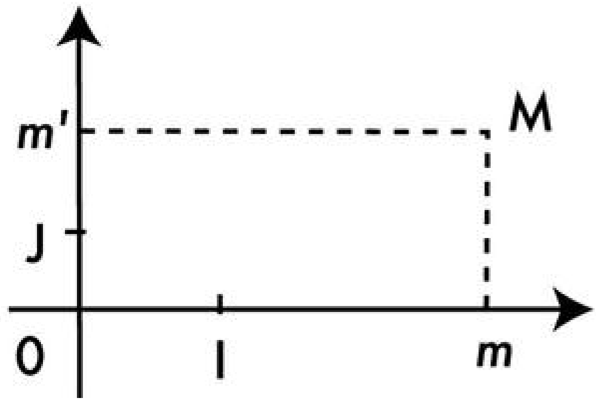
- O, origine commune ;
- I, point unité de l'un des axes, qu'on trace le plus souvent parallèle au bord inférieur de la feuille de papier ;
- J, point unité du second axe.

On parlera du repère (O, I, J).

Même si c'est l'usage le plus répandu, rien n'impose que ces axes soient perpendiculaires (autrement dit que le triangle OIJ soit rectangle en O). Quand les axes sont perpendiculaires, le repère est qualifié d'orthogonal. Rien n'impose non plus qu'en outre les unités des deux axes soient les mêmes (autrement dit que le triangle OIJ soit isocèle de sommet O). Si c'est le cas, le repère est qualifié d'orthonormal.

Pour repérer un point M dans le plan, on trace à partir de M les droites parallèles aux axes, définissant ainsi un parallélogramme (un rectangle dans le cas d'axes orthogonaux) dont O et M sont des sommets opposés. Les deux autres sommets sont des points situés chacun sur un des axes.

L'axe (O, I) est l'axe des abscisses, tandis que (O, J) est l'axe des ordonnées. Le couple (*m*, *m*') est le couple des coordonnées du point M : par un usage constant, on écrit l'abscisse en premier, l'ordonnée en second.



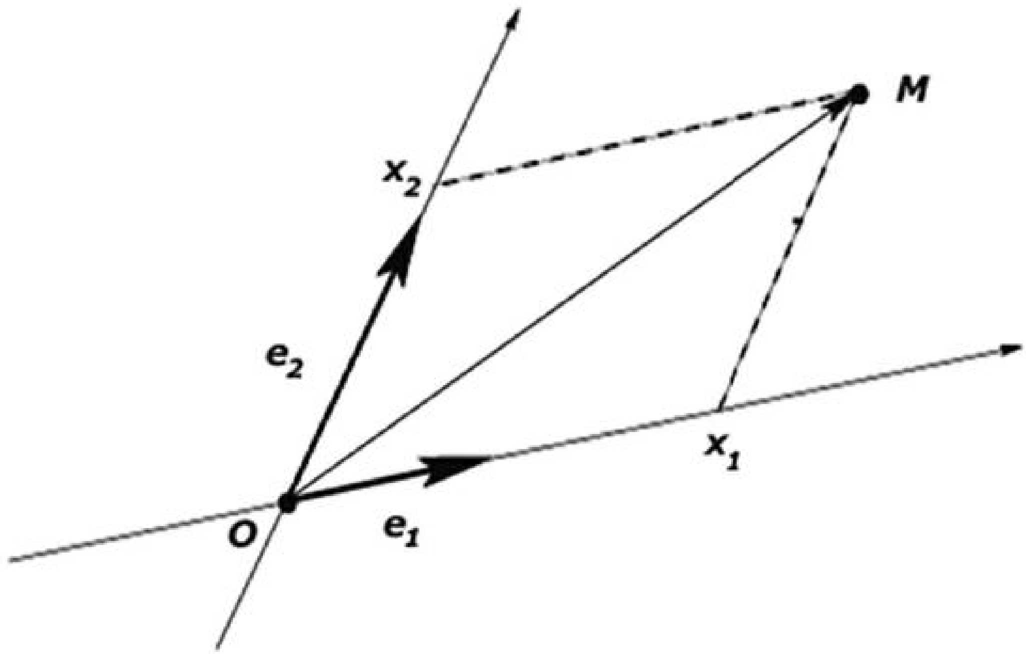
m est l’abscisse du point M ; m’ est l’ordonnée du point M.

Changement de repère

Changer d'origine : si nous prenons une autre origine, toutes les abscisses vont se trouver augmentées d'un même nombre (si l'on déplace l'origine du côté négatif) ou diminuées d'un même nombre (si l'on déplace l'origine du côté positif). Autrement dit, si $f(M)$ est l'abscisse d'un point M dans l'ancien repère, et $g(M)$ son abscisse dans le nouveau, on a la relation $f(M) = g(M) +$ constante.

Changer de sens : si nous changeons le sens sur l'axe, toutes les abscisses vont changer de signe. Un point dont l'abscisse était +3 dans l'ancien repère aura pour abscisse – 3 dans le nouveau. Si $f(M)$ est l'abscisse d'un point M dans l'ancien repère et $g(M)$ son abscisse dans le nouveau, on a la relation $f(M) = -g(M)$.

Changer d'unité : si nous divisons par deux l'unité de longueur, toutes les distances sont multipliées par deux. Si $f(M)$ est l'abscisse d'un point M avec l'ancienne unité et g(M) son abscisse dans la nouvelle, on a la relation f(M) = ag(M).



Repère cartésien dans le plan.

Équations d'une droite

On démontre assez simplement que l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation : $3x + 5y = 15$ est une droite. Il est facile de marquer notamment deux de ses points :

- le point d'ordonnée nulle (si $x = 0$, la relation donnée permet de calculer $y = 5$) ;

- le point d'abscisse nulle (si $y = 0$, la relation donnée permet de calculer $x = 3$).

Toute droite du plan pouvant ainsi être représentée par une équation, tout problème de géométrie portant sur des droites peut être remplacé par un problème d'algèbre portant sur leurs équations. Par exemple, la recherche du point d'intersection de deux droites se traduit par la recherche du couple (x, y) de ses coordonnées, nombres qui doivent vérifier l'équation écrite pour chacune des droites.

Par exemple, la recherche de l'intersection des droites d'équations respectives :

$$3x + 5y = 15$$

$$4x + 7y = 28$$

se ramène à la résolution du système de deux équations :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ 4x + 7y = 28 \end{cases}$$

L'exercice est laissé au lecteur, qui trouvera la solution unique $x = -35$, $y = 24$. Les droites se coupent au point de coordonnées $(-35, 24)$.

D'autres courbes géométriques simples ont des équations à peine plus compliquées (par exemple, des équations du second degré pour les paraboles, ellipses, hyperboles), si bien que tout problème de géométrie concernant ces courbes peut être traité par un calcul algébrique.

C'est la découverte de René Descartes, qu'on appelle la géométrie analytique.

Le principe additif

Lorsque l'on regroupe des ensembles sans éléments communs, l'un contenant a éléments et l'autre b, on obtient un ensemble qui contient $a + b$ éléments.

Par exemple, si 450 garçons et 500 filles sont inscrits dans un collège, on en conclut que ce collège compte 950 élèves.

Les mots importants de ce principe additif sont : *sans éléments communs*. À défaut, les éventuels éléments communs seraient comptés deux fois.

Dans des situations trop simples, on ne voit guère l'utilité d'énoncer un principe aussi évident. Mais dès qu'on veut étudier soit une situation comportant des nombres plus importants, soit une formule générale, il trouve son utilité.

Pour trouver une formule générale de calcul du nombre de parties, $P(n)$, d'un ensemble E_n qui comporte n éléments, on peut raisonner grâce au principe additif. Il permet de calculer $P(n + 1)$ en connaissant $P(n)$ et donc, de proche en proche, chaque nombre P(n), sans avoir à dresser cette liste fastidieuse.

Concentrons notre attention sur un des éléments x de E_n+1.

Les parties de E_n+1 peuvent être séparées en deux familles sans éléments communs.

- Celles qui contiennent x : il y en a P(n), puisque pour former une telle partie, on doit prendre x d'une part et une partie de l'ensemble des n autres éléments d'autre part.
- Celles qui ne contiennent pas x : il y en a aussi P(n).

Ainsi, il y a exactement deux fois plus de parties dans E_n+1 que dans En, ce qui se traduit par la relation P(n + 1) = 2P(n), qui permet le calcul de proche en proche à partir de P(2) = 4 que nous avions trouvé en dressant la liste. Ainsi, P(3) = 8 ; P(4) = 16 ; P(5) = 32... et d'une façon générale : P(n) = 2n.

Les codages : principe multiplicatif

Pour pouvoir suivre pas à pas, imaginons des plaques d'immatriculation construites avec deux signes, une lettre, qui ne peut être que a, b ou c, suivie d'un chiffre, 0 ou 1.

Pour visualiser, afin de dénombrer ensuite, toutes les immatriculations possibles, deux techniques sont utilisées, le tableau et l'arbre.

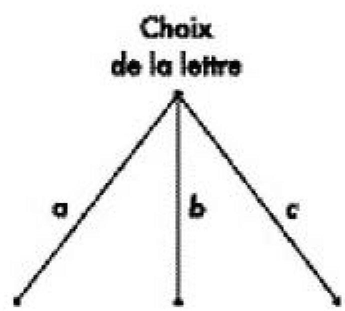
Le tableau des choix possibles : on trace un tableau, dont les lignes représentent le premier signe, ici une des lettres a, b ou c, et les colonnes le second, ici l'un des chiffres 0 ou 1.

	0	1
a	$a0$	$a1$
b	$b0$	$b1$
c	$c0$	$c1$

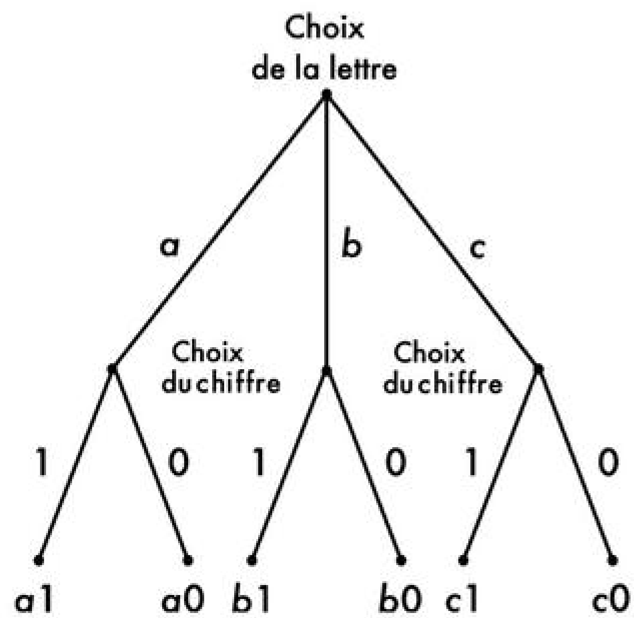
Le dénombrement des cases du tableau est immédiat : c’est le produit du nombre de lignes par le nombre de colonnes, ici 3 × 2, soit 6.

L’arbre des choix possibles : on trace un arbre, en représentant par des bifurcations chacun des choix.

Premier choix – la lettre, trois possibilités :



Deuxième choix – pour chacun des premiers choix, autrement dit à chacune des branches de notre arbre, deux possibilités :



Le dénombrement des extrémités de l’arbre est encore immédiat : c’est le produit du nombre de branches de premier choix, par le nombre de branches de deuxième choix, ici 3 × 2, soit 6.

L’intérêt de l’arbre, par rapport au tableau, est qu’il peut se généraliser à un plus grand nombre de choix successifs : si un troisième signe devait être adjoint à nos plaques, par exemple une lettre *c* ou *d*, on tracerait deux branches à chacune des six extrémités de l’arbre précédent, et ainsi de suite.

Permutations et factorielles

Une permutation des n éléments d'un ensemble est simplement une suite ordonnée de ces éléments : l'un est donc rangé en premier, un autre en deuxième, et ainsi de suite. Deux permutations distinctes des termes d'un même ensemble diffèrent par l'ordre dans lequel ils sont écrits.

Le principe multiplicatif permet d'écrire le nombre des permutations d'un ensemble à n éléments. Le premier élément est choisi parmi n, le deuxième parmi les $n - 1$ restants, etc. Le nombre de ces permutations est donc $n \times \ldots \times (n - 1) \times \ldots \times 2 \times 1$, noté $n!$ (et prononcé : factorielle n).

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

$$6! = 720$$

$$7! = 5\,040$$

$$8! = 40\,320$$

$$9! = 362\,880$$

$$10! = 3\,628\,800$$

Platon fixait, dans les *Lois*, à 7! = 5 040 le nombre idéal des citoyens de la cité, au motif que ce nombre possède un nombre très élevé de diviseurs (58, sans compter 1 et 5 040), ce qui offrait de nombreuses possibilités de diviser le peuple en groupes de même effectif.

Pour la généralité de certaines formules, il est commode de convenir des extensions 0! = 1 et 1! = 1.

De nombreuses énigmes subsistent concernant les factorielles.

- En 1876, Brocard affirme que 4!, 5! et 7! sont les seules factorielles qui, augmentées de 1, donnent un carré :

  $4!+1= 25=5^2$; $5!+ 1=121= 11^2$; $7!+1=5041=71^2$.

  On ne l'a toujours pas prouvé.

- On connaît des nombres tels que le produit de leurs factorielles soit une factorielle. Si l'on écarte les cas banals (0, 1), (0, 1, 2), (1, 2), ou un nombre qui est lui-même une factorielle et son prédécesseur comme :

  - puisque $6 = 3!$ alors $6! = 3! \times 5!$
  - puisque $24 = 4!$ alors $24! = 4! \times 23!$

- On connaît un seul autre exemple : $6! \times 7! = 10!$
- Enfin, ce n'est qu'en 1964 qu'on a trouvé tous les nombres égaux à la somme des factorielles de leurs chiffres. Par rapport aux précédents, c'est un résultat de moindre intérêt, car il est lié au système à base 10. En dehors de 1 et 2, évidents, il en existe deux seulement :
  - $145 = 1!+4!+ 5!$
  - $40\,585 = 4! + 0!+ 5!+ 8!+ 5!$

Arrangements et combinaisons

Arrangements. On appelle ainsi une suite ordonnée de *p* termes d'un ensemble qui en contient *n*. Autrement dit, alors que pour une permutation, on doit ranger tous les éléments de l'ensemble initial, pour un arrangement, on n'en aligne que *p*.

Il existe une notation traditionnelle pour le nombre des arrangements de *p* éléments pris dans un ensemble de *n* éléments : on le note A_n^p .

On trouve immédiatement une formule de calcul, par exemple grâce au principe multiplicatif :

$$A_n^p = n(n - 1)...(n - p + 1)$$

On peut aussi recenser les arrangements à partir des permutations, chacun se trouvant alors écrit $(n - p)$! fois. On obtient ainsi :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Naturellement, les deux formules conduisent au même résultat.

Combinaisons. On appelle ainsi une partie comportant *p* éléments pris dans un ensemble qui en contient *n*. C'est en quelque sorte un arrangement pour lequel on n'attache pas d'importance à l'ordre des éléments.

Il existe deux notations traditionnelles pour le nombre des combinaisons de *p* éléments pris dans un ensemble de *n* éléments. L'une d'origine européenne est C_n^p ; l'autre, d'origine anglo-saxonne, tend à s'imposer : $\binom{n}{p}$.

On trouve immédiatement une formule de calcul, par exemple en écrivant les combinaisons à partir des arrangements, chacune se trouvant alors écrite *p* ! fois. On obtient ainsi :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Le triangle de Pascal et le binôme de Newton

On peut écrire les nombres C^p en un tableau, la ligne désignant le nombre *n*, la colonne le nombre *p*, naturellement au maximum égal à *n* : d'un ensemble à *n* éléments, on ne peut évidemment pas en extraire plus de *n*.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1
…					

Ce tableau est connu sous le nom de triangle de Pascal. Il peut être construit ligne à ligne si l'on observe la relation :

$$C_{n+1}^{p} = C_{n}^{p} + C_{n}^{p-1}$$

Chaque nombre du triangle est égal à la somme du nombre écrit au-dessus de lui et de son voisin de gauche. On peut vérifier cette relation à l'aide de la formule en factorielles, mais il peut être amusant d'en obtenir une preuve directe à l'aide du principe additif. Une partie entrant dans le calcul de C_{n}^{p-1} contient ou ne contient pas un élément *z* spécifié.

Dans le premier cas, il reste à choisir les *p* – 1 autres éléments, parmi *n* ; ce choix peut se faire de C_{n}^{p} façons.

Dans le second, il reste à choisir les *p* éléments parmi *n* ; ce choix peut se faire de C_{n}^{p-1} façons.

En algèbre, on connaît les formules permettant d'écrire comme une somme les puissances successives d'un binôme $a + b$.

- $(a + b)^1 = a + b$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

On constate, et la démonstration n'est pas difficile, que les coefficients sont justement les nombres qui figurent dans le triangle de Pascal, d'où le nom de coefficients binomiaux qu'on leur donne souvent.

Le principe de Dirichlet

C'est un énoncé d'apparence très banale que, dans les livres sérieux, on appelle principe de Dirichlet :

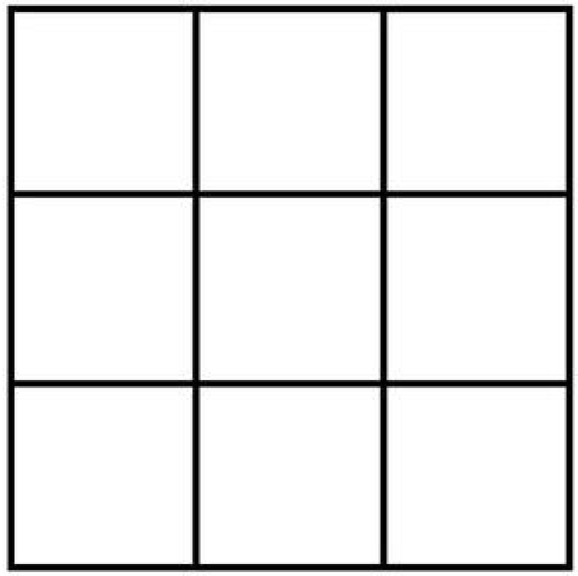
Si n + 1 pigeons disposent d'un pigeonnier comportant n cases, nécessairement, deux pigeons au moins partageront la même case.

Mais les applications sont nombreuses et amusantes.

Par exemple, il est impossible d'écrire cinq cent un nombres entre 1 et 1 000 sans que l'un soit un multiple d'un autre : tout entier est le produit d'une puissance de 2 par un nombre impair (on le voit en enchaînant des divisions par 2 tant qu'elles sont possibles). On pourrait appeler résidu ce nombre impair. Les résidus des nombres donnés sont 501 entiers impairs inférieurs à 1 000. Or, il n'y a que 500 nombres impairs inférieurs à 1 000, de sorte que deux des résidus sont nécessairement égaux. Ils correspondent à des nombres de la forme $2^q x$ et $2^p x$, dont l'un est un multiple de l'autre (le premier si $q > p$).

Il existe aussi des applications géométriques simples du principe de Dirichlet. Il permet par exemple de démontrer que, si dix points sont placés dans un carré dont la diagonale mesure 3 cm, il existe forcément deux de ces points dont la distance est inférieure à 1 cm. L'idée est de diviser notre carré en neuf carrés égaux : il en existe nécessairement un qui contient deux des dix points donnés.

Leur distance est inférieure à la diagonale d'un des petits carrés (les arbitres de boxe savent que, pour éloigner au maximum deux boxeurs sur un ring carré, il faut les asseoir dans des coins opposés). Ces diagonales mesurent toutes 1 cm.



Une application géométrique du principe de Dirichlet.

La médiane

Dans une série de mesure, un nombre est simple à déterminer : c'est celui qu'on appelle la médiane ! Il se trouve au centre de la série rangée. Le revenu médian des Français serait ainsi le revenu R tel que la moitié des Français ont un revenu supérieur, et donc aussi la moitié un revenu inférieur, à R.

En démographie économique, on considère la médiane comme un bon résumé d'une série de revenus, meilleur en tout cas que la moyenne : si, dans un village, il y a un maharadjah immensément riche et quelques centaines d'indigents, que signifie le revenu moyen ? Il a beau être très élevé, il résume mal la situation.

La médiane a une autre qualité : les valeurs les plus élevées peuvent varier, la médiane n'en est pas affectée (et de même pour les valeurs les moins élevées). Cela est particulièrement précieux en matière de revenus. Les plus élevés sont parfois connus avec une médiocre précision de l'administration, il en est de même des plus bas ; or cela est sans importance pour la détermination de la médiane.

Les quartiles

Rien n'oblige à séparer les données en deux parties égales ; on pourrait très bien les séparer en quatre, définissant ainsi ce qu'on appelle les quartiles de la série :

- le premier quartile est supérieur au quart des valeurs de la série (et inférieur aux trois quarts) ;
- le deuxième quartile est supérieur aux deux quarts (soit la moitié) des valeurs de la série (et inférieur à la moitié) : c'est simplement la médiane ;
- le troisième quartile est supérieur aux trois quarts des valeurs de la série (et inférieur au quart).

Il n'y a pas de limite à l'imagination : pourquoi ne pas séparer les nombres en sept ou vingt parties de même effectif ? Dans la pratique, en dehors des quartiles, on n'utilise guère que les déciles. Il y a neuf déciles (attention, il faut bien neuf coups de ciseaux pour couper un ruban en dix). Pour une liste de revenus, le premier décile rassemble donc les 10 % les plus pauvres, le dernier les 10 % les plus riches de la population.

La moyenne en formule

Bien que la quasi-totalité des calculatrices aient une touche qui permet d'afficher directement une moyenne, il est bon d'écrire les formules correspondantes.

La moyenne (on précise parfois : moyenne arithmétique, pour la distinguer d'autres types de moyennes qui seront présentés plus loin) d'une série de nombres est le quotient de leur somme par le nombre de valeurs. Lorsque les nombres sont désignés par une lettre munie d'un indice, comme x_1, x_2, x_3,..., x_n, on allège souvent l'écriture de leur somme en utilisant la lettre grecque majuscule Σ (prononcée sigma). Au lieu d'écrire $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$, on écrit :

$$\sum_{1}^{n} x_i$$

étant entendu que l'indice i doit prendre toutes les valeurs entre 1 et n et qu'il s'agit de calculer la somme des valeurs *xi* correspondant à chacune.

La moyenne des nombres *xi*, souvent notée $\overline{X}$ (c'est souvent ainsi que la touche « moyenne » d'une calculatrice est indiquée), est alors :

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} x_i$$

La moyenne quadratique

La moyenne arithmétique n'est pas l'unique formule imaginable et elle n'est pas nécessairement la mieux adaptée au problème concret examiné. Entre deux plaques en forme de carré, l'un de 10 cm de côté, l'autre de 20 cm, la plaque « moyenne » n'a pas nécessairement un côté de 15 cm. Si l'on considère les aires, par exemple pour des feuilles d'or, le petit carré enferme une aire de 10^2, soit 100 cm^2 ; le second, de 20^2, soit 400 cm^2. La plaque moyenne devrait avoir pour aire : $\frac{1}{2}(100 + 400) = 250\ cm^2$, ce qui correspond à un côté d'environ 15,8 cm.

Pour calculer cette « moyenne » d'un type particulier, il faut donc :

- prendre les carrés des nombres donnés 10 et 20 ;
- calculer la moyenne arithmétique de ces carrés ;

- trouver le nombre q dont le carré est égal à cette moyenne.

On appelle cette moyenne la moyenne quadratique.

La moyenne harmonique

Exemple

Celui qui a un plan d'investissement en parts d'épargne et y place 100 euros chaque mois obtient chaque mois un nombre de parts qui dépend de son cours x : de façon précise, il obtient $\frac{100}{x}$ parts.

En trois mois par exemple, il obtient ainsi $\frac{100}{x_1}+\frac{100}{x_2}+\frac{100}{x_3}$, alors qu'en achetant au cours moyen, il aurait obtenu : $300/\bar{x}$. Un exemple suffit à montrer l'écart.

Supposons $x_1 = 16$; $x_2 = 20$ et $x_3 = 25$. Il a obtenu successivement $\frac{100}{16} = 6{,}75$ parts, $\frac{100}{20} = 5$ parts et $\frac{100}{25} = 4$ parts, soit un total de 15,75 parts. Au cours moyen de $\frac{61}{3}$, il aurait obtenu en une seule fois 14,75 parts. L'argument est utilisé par certains banquiers pour expliquer que le plan d'épargne régulière est plus avantageux puisque, à la fin, on a acquis ses titres à un cours moindre que le cours moyen. Et de fait, le cours moyen qui aurait permis d'obtenir 15,75 parts est $\frac{300}{15,75}$, soit environ 19 euros. C'est une autre formule de calcul qui donne ce cours moyen *h* : $\frac{3}{h} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.

Autrement dit, il faut :

- prendre les inverses des nombres donnés x_i ;
- calculer la moyenne arithmétique de ces inverses ;
- trouver le nombre *h* dont l'inverse est égal à cette moyenne.

On l'appelle la moyenne harmonique.

Comparer des moyennes

Même correctement calculée, avec la formule pertinente, la moyenne peut conduire à des conclusions, explicites ou sous-entendues, trompeuses. L'erreur peut provenir du fait que, dans la situation examinée, la caractéristique choisie soit pertinente, mais qu'elle soit utilisée pour comparer des populations non directement comparables.

En voici notamment un exemple : les membres de l'Académie française sont souvent appelés les immortels, et la statistique fournit d'excellents arguments, l'âge moyen du décès d'un académicien étant de très loin supérieur à l'âge moyen du décès du commun des mortels.

Le piège réside dans le fait que ce n'est guère avant cinquante ans qu'on accède à l'illustre compagnie. Par conséquent, ce n'est pas à la population tout entière qu'il faudrait comparer nos académiciens, mais à la fraction de la population qui était en vie à l’âge de cinquante ans !

L'effet de structure

Exemple

Prenons un exemple se passant dans un pays imaginaire où l'on voit des inégalités à combattre partout. La sous-commission pour la correction de ces inégalités s'est un jour penchée sur une université et a découvert que la proportion d'étudiants reçus aux examens était de 75 %, alors que la proportion des étudiantes reçues n'était que de 56 %.

Comme toujours lorsqu'il y a un problème, un administrateur cherche quelqu'un à qui faire porter le chapeau. Et c'est là que la statistique réserve une surprise : tous les doyens, sans exception, peuvent rendre compte au recteur que, dans leur faculté, la proportion d'étudiants reçus et celle d'étudiantes reçues sont rigoureusement égales.

Comment cela est-il possible ? Un exemple numérique permet de comprendre ce qui a pu se passer.

	Lettres	**Sciences**

Étudiants présents	100	500
Étudiants reçus	50	400
Étudiantes présentes	400	100
Étudiantes reçues	200	80

En lettres, il y a 50 % de reçus, tant chez les étudiants que chez les étudiantes ; en sciences, de même, cette proportion commune est de 80 %. Nos deux doyens sont donc irréprochables. Mais pour l’ensemble de l’université, 600 étudiants se sont présentés, 450 ont été reçus, ce qui fait bien 75 %. En revanche, pour les étudiantes, 500 se sont présentées, 280 ont été reçues, ce qui représente un pourcentage de 56 %. Ce paradoxe apparent est appelé l’effet de structure. On a calculé des moyennes sur des populations dont les structures sont différentes.

La régression

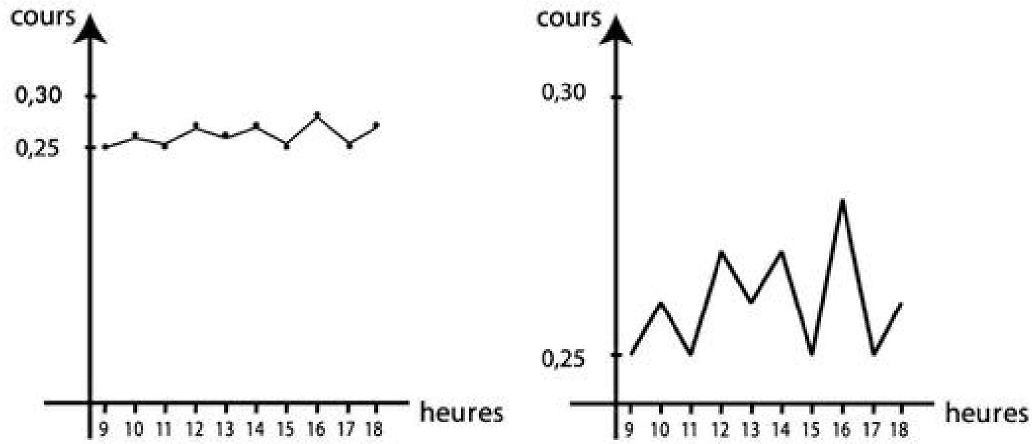
Une erreur célèbre, celle de la « régression vers la moyenne », est apparue d'abord chez les ethnologues. Lorsqu'on s'intéresse à la taille des hommes d'une population, on observe, de façon constante, qu'un groupe de pères plus grands que la moyenne de la population a des fils, certes plus grands en moyenne que cette moyenne générale, mais plus petits qu'eux. D'où l'idée que, de génération en génération, la taille des individus « régresserait » vers la taille moyenne de la population.

C'est bien entendu une illusion : depuis qu'il y a des hommes, nous devrions avoir tous la même taille. D'autre part, on observe aussi qu'un groupe d'hommes plus grands que la moyenne de la population a des pères, certes plus grands en moyenne que cette moyenne générale, mais plus petits qu'eux : il y aurait donc aussi « régression » vers la moyenne en remontant les générations !

Cette « illusion de la régression » est une preuve de plus que le bon sens commun peut se trouver pris en défaut et que, par exemple, un professeur ignorant tout de la statistique, même le mot « moyenne », risque moins l'erreur que celui qui en sait un peu. Devant les résultats d'un examen partiel et de l'épreuve finale, que penserait ce dernier ?

- « La statistique prouve » que les meilleurs étudiants de février ont de moins bons résultats en juin ; il faudrait donc garder les notes secrètes, pour que ceux-là ne relâchent pas leur effort !
- « La statistique prouve » que les plus faibles étudiants de février ont de meilleurs résultats en juin ; l'avertissement leur a donc été salutaire, et ils se sont enfin mis au travail !

Bien entendu, c'est parfaitement illusoire ! Une façon plus rapide de s'en rendre compte est de considérer que, si l'on extrait d'un groupe les 20 plus grands et 20 autres personnes, sélectionnées au nom d'un autre critère (par exemple parce que leurs pères étaient grands), la première sélection est plus grande en moyenne que la seconde.



Deux représentations d’une même variation.

Les graphiques cartésiens

Il semble que, en matière de graphique, il n'y ait aucun risque d'illusion : deux axes de coordonnées, des échelles, des points qui représentent des couples de nombres, tout est sans ambiguïté.

Cependant, la prudence s'impose : il faut bien regarder les graduations marquées sur chacun des axes. En effet, si, en mathématiques « abstraites », l'origine commune est systématiquement représentative du couple (0, 0), il n'en est pas toujours ainsi lorsqu'on représente une série statistique. Les deux graphiques de la page de gauche représentent les variations du cours de la Bourse de l'action Eurotunnel au cours d'une séance.

On peut considérer que la première courbe ne reflète pas correctement les nombreux et importants écarts de cours, mais que la seconde amplifie. Selon l'impression qu'on voudra donner au lecteur, on utilisera l'une ou l'autre ; est-ce une tromperie ? Il faut bien répondre non : les valeurs sont correctement indiquées et le lecteur qui en retire une impression biaisée ne peut s'en prendre qu'à lui-même.

Les histogrammes

Lorsqu’on veut représenter une série dans laquelle les valeurs sont regroupées en classes, le risque d’erreur est encore plus grand. Voici par exemple la statistique des revenus annuels des 4 500 habitants d’une petite ville :

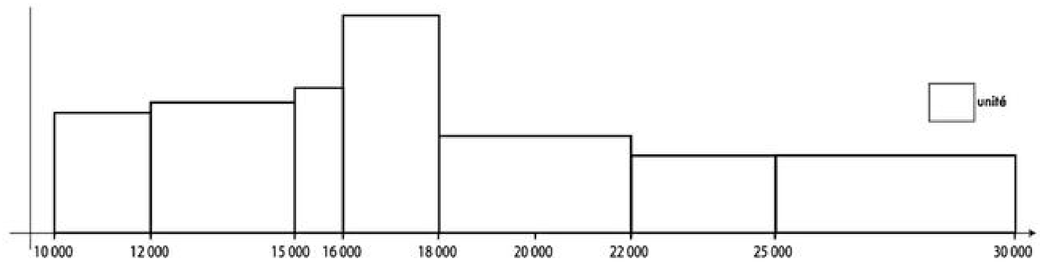
- classe 1, moins de 10 000 euros : 400 ;
- classe 2, de 10 000 à 12 000 euros : 500 ;
- classe 3, de 12 000 à 15 000 euros : 700 ;
- classe 4, de 15 000 à 16 000 euros : 300 ;
- classe 5, de 16 000 à 18 000 euros : 900 ;
- classe 6, de 18 000 à 22 000 euros : 800 ;
- classe 7, de 22 000 à 25 000 euros : 500 ;
- classe 8, de 25 000 à 30 000 euros : 300 ;
- classe 9, plus de 30 000 euros : 100.

On peut toujours représenter les effectifs de ces neuf classes sur un graphique cartésien. Mais on se rend compte que l’impression visuelle dépend fortement d’une information qui ne tient pas à la réalité économique : le choix des classes.

C’est pour remédier à cela qu’on a imaginé un autre type de représentation : les histogrammes. Dans un histogramme, l’effectif est représenté non plus par une longueur mais par une aire, celle d’un rectangle construit sur l’intervalle de classe.

Les classes extrêmes posent une petite difficulté puisqu’on ne connaît qu’une extrémité de chacune. En général, on leur donne un intervalle fictif, par exemple égal à l’intervalle voisin. Par exemple, la classe « moins de 10 000 » sera dessinée comme s’il s’agissait de la classe 8 000 à 10 000 (largeur 2 000, comme la classe voisine) et la classe « plus de 30 000 » comme s’il s’agissait de 30 000 à 35 000 (largeur 5 000 comme la classe voisine).

Si l’on regroupe deux classes, on remplace simplement deux rectangles par un rectangle « moyen », qui, au moins, ne fait pas apparaître un pic artificiel.



Représentation de l'histogramme des revenus annuels.

Les écarts

Pour certaines applications, les écarts qui peuvent apparaître au sein d'une série statistique sont plus utiles que les tendances centrales, telles que les moyennes et la médiane les reflètent. Par exemple, le jury d'un concours est souvent indifférent à la moyenne des notes : on recevra les deux cents premiers, peu importent leurs notes. En revanche, il est sensible à une bonne dispersion des notes, qui lui évitera d'avoir à départager des candidats trop proches.

Il existe de nombreux résumés statistiques pour traduire la dispersion : l'amplitude en est un. On peut penser à la différence entre le neuvième et le premier décile, qui a l'avantage d'éliminer les 10 % des valeurs les plus basses et les 10 % des plus élevées. On peut en construire de nombreux autres par le processus suivant :

- on choisit une caractéristique de tendance centrale, médiane ou l'une des diverses moyennes ;

- on calcule les écarts des nombres de la série à la caractéristique choisie ;
- on choisit une caractéristique de tendance centrale de cette série d’écarts.

On pourrait ainsi penser à la médiane des écarts à la médiane, à la moyenne arithmétique des écarts à la médiane, à la moyenne quadratique des écarts à la moyenne harmonique…

Dans la pratique, une seule triomphe, au point d’être programmée en une touche spéciale sur la plupart des calculatrices : la moyenne quadratique des écarts à la moyenne arithmétique, qu’on appelle l’écart type, pratiquement toujours noté σ. Le carré σ^2 s’appelle la variance.

Calcul de la variance

La formule qui traduit la définition est rarement utilisée :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

Il est souvent commode de calculer la moyenne des carrés des écarts, non à la moyenne arithmétique, mais à un nombre *a* arbitraire, choisi pour la commodité.

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - a)^2$$

Bien entendu, on n'obtient pas ainsi la variance, mais l'erreur est simple à évaluer. On calcule :

$$\sigma_a^2 - \sigma^2 = \frac{1}{n} \Sigma \left[x_i - \bar{x})^2 - (x_i - a)^2 \right]$$

et chaque différence de deux carrés peut être réécrite, selon les formules des identités remarquables :

$$(x_i - \overline{x})^2 - (x_i - a)^2 = (\overline{x} - a)(2x_i - \overline{x} - a)$$

de sorte que, lorsqu'on calcule la somme, $\overline{x} - a$ peut être mis en facteur commun, facteur de :

$$2\Sigma x_i - n\overline{x} - na = n\overline{x} - na$$

Ainsi :

$$\sigma_a^2 - \sigma^2 = (\overline{x} - a)^2$$

Ce résultat est parfois appelé théorème de König. D'une part, il permet parfois un calcul aisé de la variance, et d'autre part, il prouve un résultat mettant en valeur la variance :

C'est par rapport à la moyenne arithmétique que la somme des carrés des écarts est la plus petite.

La variance en pratique

Observons la formule de calcul de la variance et distinguons dans la somme l'ensemble A des *p* termes tels que $3\sigma > x_i - \bar{x} > 3\sigma$ (ils sont à moins de trois écarts types de la moyenne) et l'ensemble B des autres :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_A (x_i - \bar{x})^2 + \frac{1}{n}\sum_B (x_i - \bar{x})^2$$

On en déduit :

$$\sigma^2 > \frac{1}{n}\sum_A (x_i - \bar{x})^2$$

Et à plus forte raison :

$$\sigma^2 > \frac{1}{n}\, 9p\sigma^2$$

et donc :

$$\frac{p}{n} < \frac{1}{9}$$

La proportion des valeurs situées à plus de trois écarts types de la moyenne est inférieure à $\frac{1}{9}$. Bien entendu, le calcul fait pour 3 vaut pour n'importe quel nombre positif : la proportion des valeurs situées à plus de *k* écart type de la moyenne est inférieure à $\frac{1}{k^2}$.

C'est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Il est remarquable que ce résultat ne suppose aucune information sur la distribution des valeurs de la série statistique étudiée.

Les probabilités

Rares sont les événements futurs sur lesquels nous n'avons aucun jugement de vraisemblance. Vainqueur d'une course de chevaux, résultat sur un ticket de loterie, succès à un examen ou à une élection, chacun de nous émet des jugements : il y a une chance sur deux, une sur trois… La fraction un sur deux ($\frac{1}{2}$) ou un sur trois ($\frac{1}{3}$) est ce qu'il est convenu d'appeler la probabilité (personnelle) que nous attachons à l'événement considéré.

Il est des cas où une symétrie physique manifeste ne laisse guère de place à la subjectivité : qui oserait proposer une probabilité différente de $\frac{1}{2}$ pour un jeu de pile ou face, ou de $\frac{1}{4}$ pour le tirage d'un carreau dans un jeu de cartes ? Ces jeux de hasard constituent une bonne façon de se familiariser avec le mode de raisonnement probabiliste.

Cette symétrie physique est plus une hypothèse qu'une observation. Une pièce de monnaie peut-elle être parfaitement symétrique ? On ne pourrait alors pas distinguer le côté pile du côté face. Un jeu de cartes peut-il être parfaitement battu ?

Quels paris peut-on prendre sur une carte à tirer ? Tous se traduisent en termes de parties de l'ensemble des 52 cartes :

- tirer un cœur : tirer une carte de l'ensemble des 13 cartes portant un cœur ;
- tirer un roi : tirer une carte de l'ensemble des 4 cartes portant un roi ;
- tirer l'as de cœur : tirer une carte de l'ensemble réduit à une carte $\{A\heartsuit\}$.

Avec la brutalité d'un prof de maths « parachutant » des définitions, nous dirons :

- On donne un ensemble (pour le moment fini) qu'on nomme l'univers.
- Les éléments de cet ensemble s'appellent des éventualités.
- Les parties de cet ensemble sont appelées des événements : un événement est donc un ensemble d'éventualités.

À chaque éventualité est attaché un nombre positif($\frac{1}{52}$ pour notre jeu de cartes bien battu), qu'on appelle sa probabilité, et, à tout événement, on attache la somme des probabilités des éventualités qu'il contient, qu'on appelle encore sa probabilité. Enfin, on convient que la probabilité de l'univers est 1.

Les probabilités totales

Prenons des événements A et B, par exemple :

- A : tirer un carreau ;
- B : tirer un trèfle.

L’événement « tirer un carreau ou un trèfle » correspond à l’ensemble de 13 + 13 = 26 cartes qui sont soit un carreau, soit un trèfle. En termes de probabilités, on écrira P(A ou B) = P(A) + P(B).

Mais ce raisonnement ne vaut que parce qu’aucune carte n’est à la fois carreau et trèfle : c’est ce que nous avions vu pour la réunion de deux ensembles sans éléments communs avec le principe additif. Ici, on exprime plutôt qu’il s’agit d’événements qui n’ont aucune éventualité en commun : on dit que de tels événements sont incompatibles. C’est la formule dite des probabilités totales :

Lorsque A et B sont des événements incompatibles, P(A ou B) = P(A) + P(B).

Probabilités composées

Prenons des événements C et D, par exemple :

- C : tirer un carreau ;
- D : tirer un valet.

La conjonction (C et D) de ces événements, l'événement « tirer une carte qui est à la fois un carreau et un valet », correspond à l'ensemble réduit à une carte, le valet de carreau, dont la probabilité est $\frac{1}{52}$. Et on remarque que $\frac{1}{52}$ est le produit de la probabilité $\frac{1}{4}$ de tirer un carreau et $\frac{1}{13}$ de tirer un valet. Cette règle n'est pas universelle. Supposons que l'on ait choisi les événements :

- A : tirer un carreau ;
- B : tirer un trèfle.

Dans ce cas, la probabilité de tirer une carte qui soit à la fois un carreau et un trèfle n'aurait pas été

$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ puisqu'elle est nulle.

Lorsque cette règle du produit s'applique, les événements concernés sont dits indépendants. C'est la formule dite des probabilités composées :

Lorsque A et B sont des événements indépendants, P(A et B) = P(A) × P(B).

Les anniversaires

Voulez-vous parier dix euros qu'à l'Académie française deux membres ont le même anniversaire ? Il y a 40 membres dans cette assemblée et l'intuition commune estime bien peu probable une telle coïncidence, si bien que je vais trouver de nombreux parieurs.

Un petit calcul bat cette intuition en brèche. Cherchons à évaluer, c'est un peu plus simple, la probabilité $P(n)$ pour que, dans un groupe de n personnes, il n'y en ait pas deux avec le même anniversaire (oublions le 29 février !). Nous allons la déterminer de proche en proche à l'aide de la règle des probabilités totales.

Supposons que, dans un groupe de n personnes ayant toutes des anniversaires différents, on veuille intégrer un nouvel arrivant en maintenant cette propriété. L'anniversaire du nouvel arrivant peut alors être l'un des $365 - n$ jours encore disponibles et la probabilité composée pour le groupe de *n* + 1 personnes est :

$$P(n + 1) = \frac{365 - n}{n} P(n)$$

Cette formule permet le calcul de proche en proche, à partir de P(1) = 1, car, dans un groupe réduit à une personne, il est certain qu'il ne se trouve pas deux personnes avec le même anniversaire. Le résultat du calcul est surprenant :

Nombre de membres	**Probabilité pour qu'il ne se trouve pas deux personnes ayant le même anniversaire**	**Probabilité pour qu'il se trouve au moins deux personnes ayant le même anniversaire**
10	0,88	0,12
20	0,69	0,31
30	0,31	0,69
40	0,11	0,89
50	0,03	0,97

Il y a près de neuf chances sur dix que deux immortels aient le même anniversaire (et c'est le cas en 2018, Dany Laferrière et Pierre Rosenberg étant nés un 13 avril, et François Weyergans et Jules Hoffmann étant nés un 2 août). En fait, le pari devient avantageux à partir de 23 personnes.

Les dés pipés

Pour un dé cubique, l'équivalent du jeu de cartes « bien battu » est la parfaite symétrie des six faces, qui donne à chacune la probabilité $\frac{1}{6}$. Mais tous les touristes qui ont visité Las Vegas se sont vu proposer des dés « pipés », qui donnent aux faces des probabilités légèrement différentes. Voici une devinette amusante, qui peut faire « sécher » même un « pas nul », malgré la simplicité de la solution : comment piper deux dés en sorte que toutes les valeurs possibles pour la somme des points obtenus aient la même probabilité ?

Ces valeurs possibles sont les entiers de 2 à 12 et il s'agit donc de donner à chacun la probabilité $\frac{1}{11}$.

Les probabilités à attribuer aux faces du premier dé sont notées respectivement : p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6. Et, pour le second : q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6.

Quelle est la probabilité d'obtenir 7 ? En procédant de la manière indiquée, on l'exprime comme la somme :

$$S = p_1q_6 + p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 + p_6q_1$$

S est supérieure à la somme de son premier et de son dernier terme :

$$p_1q_6 + p_6q_1 = p_1q_1 \left(\frac{q_6}{q_1}\right) + p_6q_6 \left(\frac{q}{q_6}\right)$$

Mais p_1q_1 et p_6q_6 sont respectivement la probabilité d'obtenir une somme égale à 2 ou une somme égale à 12. Nous les voulons égales à $\frac{1}{11}$. Ainsi :

$$S > \frac{1}{11} \left(\frac{q_6}{q_1} + \frac{q_1}{q_6}\right)$$

Comme nous savons que la somme de deux nombres dont le produit vaut 1 est au minimum égale à 2, cela fait éclater l'impossibilité de l'égalité

$$S = \frac{1}{11}$$

Il est donc impossible de piper deux dés en sorte que toutes les valeurs possibles de la somme des points obtenus aient la même probabilité.

L’espérance mathématique

Quelle est, avant le tirage, la valeur d’un ticket de loterie ? Bien sûr, elle dépend de ce qu’on peut gagner et des chances qu’on a de gagner. Prenons un cas simple : une loterie comporte mille billets et on met un seul lot au tirage, qui vaut 2 000 euros. L’un des billets gagnera ce lot, les 999 autres ne gagneront rien. Mais cette valeur que nous recherchons n’est pas une valeur au sens usuel du terme : le billet ne vaut rien, ou il vaut 2 000 euros.

On doit à un économiste du XIX^{e} siècle, Augustin Cournot, un raisonnement de type économique, fondé sur les lois du marché. L’organisateur de la loterie ne peut pas mettre en vente ses billets à un prix inférieur à 2 euros, car, même s’il les vendait tous, il ne retrouverait pas la valeur du lot promis. Mais, s’il les met en vente plus cher, à 2,30 euros par exemple, il se trouvera bien vite un concurrent qui organisera une loterie analogue en vendant ses billets 2,20 euros, et ainsi de suite : tout prix supérieur strictement à 2 euros se trouve exposé à la concurrence.

C'est par ce raisonnement que Cournot peut définir l'espérance mathématique comme « *la limite dont tend à s'approcher, par les lois qui régissent le commerce libre, la valeur vénale des chances possédées par chaque prétendant à la chose, ou la valeur vénale de sa probabilité de gain* ».

Le nombre obtenu, 2, est naturellement le produit de la probabilité de gain par le montant du lot :

$$\frac{1}{1000} \times 2\,000$$

Si le même billet peut participer à d'autres tirages permettant de gagner d'autres lots, sa valeur vénale est la somme des valeurs des billets permettant la participation à chacun des tirages.

L'espérance mathématique a parfois été qualifiée de « juste prix » ; c'est clairement le juste prix pour l'organisateur de la loterie qui vendrait la totalité des billets. Doit-on en conclure que c'est le juste prix pour le consommateur ? La réponse n'est pas aussi évidente que le calcul.

Le paradoxe de Saint-Pétersbourg

Je vous offre, moyennant un prix d'entrée, de jouer avec moi à une série de pile ou face. La partie prend fin à la première apparition du côté face. La pièce est parfaite, chaque côté a une probabilité $\frac{1}{2}$.

Si le côté face sort au premier coup, vous gagnez 1 euro. S'il sort seulement au deuxième coup, vous gagnez 2 euros. S'il sort seulement au troisième coup, vous gagnez 4 euros. Et ainsi de suite, sans limites. Quel est le juste prix du droit de jouer contre moi ?

D'après les propriétés de l'espérance mathématique, c'est la somme du juste prix de gagner au premier jet de la pièce, plus celui de gagner au deuxième… Or, au premier coup, la probabilité de gagner est $\frac{1}{2}$ et l'espérance est donc $\frac{1}{2}$ euro. Gagner au deuxième coup suppose pile au premier et face au second, événement de probabilité

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

qui fait gagner 2 euros, soit une espérance de :

$$\frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2} \text{ euro}$$

De même, le gain au troisième coup, de probabilité $\frac{1}{8}$, ferait gagner 4 euros, d'où encore une espérance de $\frac{1}{2}$ euro.

Pour les *n* premiers coups, l'espérance totale est donc, en euros :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

Comme la partie est illimitée, le juste prix du droit à payer est infini ! Et le mathématicien suisse Nicolas Bernoulli voyait un paradoxe dans le fait qu'aucun homme sensé n'était prêt à parier une forte somme pour ce droit de jouer. C'est le paradoxe dit de Saint-Pétersbourg, car il a été connu à la suite de sa parution dans les

Commentaires de l'académie de Saint-Pétersbourg en 1738.

Son explication n'a été découverte que bien plus tard. Elle tient au fait que, si riche que je sois, je ne peux pas m'engager à payer plus que ma fortune tout entière et que le nombre de coups de la partie ne peut pas être illimité. Pour pouvoir offrir une partie limitée à 26 jets, il faut déjà disposer de 2^{26} euros, soit plus de 67 millions. Mais si la partie est ainsi limitée, le juste prix du droit de jouer est simplement $\frac{26}{2} = 13$ euros, et on trouvera bien des joueurs pour risquer 13 euros à une loterie dont le gros lot est de 67 millions d'euros, sans compter les plus petits lots qui pourraient provenir d'une victoire au 25e coup, ou même avant.

Le problème des partis par Pascal

Beaucoup voient dans ce problème, initialement posé par Blaise Pascal, l'origine du calcul des probabilités et de la notion d'espérance mathématique.

Voici ce qu'il écrit dans une lettre à Pierre de Fermat : « Pierre et Paul jouent dans des conditions telles que leurs chances de gagner un coup sont égales. Ils conviennent que celui des deux qui aura le premier gagné trois coups sera le gagnant de la partie et deviendra le possesseur de l'ensemble des deux mises, qui sont égales chacune à 32 pistoles. À un moment donné, ils se trouvent obligés d'interrompre une partie, Pierre ayant gagné deux coups et Paul un seul. On demande de quelle manière ils doivent partager les 64 pistoles. »

Aujourd'hui, nous traiterions cette question en calculant les probabilités de gain de chacun des deux joueurs et nous proposerions de partager la mise proportionnellement à ces probabilités, selon la technique du partage proportionnel. Voici la solution que Pascal propose : « Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacun des partis quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties et que chacun a mis 32 pistoles au jeu. Posons que le premier en ait deux [parties gagnantes] et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie dont le sort est que, si le premier la gagne, il emporte tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles. Considérez donc, monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils ne veulent point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : Je suis sûr d'avoir 32 pistoles car la perte même me les donne ; pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez ; le hasard est égal ; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, les 32 pistoles qui me sont sûres. Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16. »

Les parties interrompues

On peut rapprocher le problème des partis de Pascal d'une règle du bridge sur les parties interrompues. On sait que celui qui gagne deux manches contre zéro marque une prime de 700 points, celui qui gagne par deux manches contre une marque 500 points. En cas d'interruption forcée d'une partie, le gagnant d'une manche marque 300 points. Est-ce juste ?

Nous pouvons calculer les espérances des deux joueurs. Il nous faut bien, pour cela, assimiler le bridge à un jeu de hasard, chacun ayant une probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner chaque manche. Désignons par A le gagnant de la première manche.

La deuxième manche peut voir la victoire de A (probabilité $\frac{1}{2}$) lui rapporter 700 points, ou celle de B. On pourrait considérer que, dans ce dernier cas, les deux joueurs seraient à égalité et devraient se séparer sans prime pour quiconque ; l'espérance de A est alors de 350. La prime officielle est légèrement inférieure ; on peut considérer que cela prend en compte le fait que la deuxième partie est un peu plus risquée pour A, qui est vulnérable, de sorte que les pertes sont plus sévères.

Probabilités et modes de rationalisation – mise en situation

Au milieu du siècle dernier, Oscar Morgenstern et John von Neumann ont tenté de déterminer des modes de rationalisation de la conduite à tenir en face d'un adversaire lui-même rationnel.

Une supérette dispose de deux coffres-forts. Le coffre principal, où est accumulée la recette de la semaine, et un coffre secondaire, dans lequel est déposée la recette de chaque jour, avant d'être vérifiée et transportée dans le coffre principal. Le magasin ne dispose que d'un seul vigile, qui peut se poster devant l'un ou l'autre coffre.

Or, voici qu'un voleur découvre cette situation et décide un cambriolage. Devra-t-il s'attaquer au coffre principal ou au coffre secondaire ?

Il faut bien entendu préciser quelques hypothèses et donner quelques chiffres. Nous supposerons donc que :

- le voleur qui s'attaque à un coffre non gardé réussit à en prendre le contenu ;
- le voleur qui s'attaque à un coffre gardé échoue ;
- le coffre principal contient 800 000 euros, le coffre secondaire 200 000 euros, et ces montants sont connus de tous, dont le voleur.

Le vigile pourrait choisir de protéger systématiquement le coffre principal, qui représente le plus grand risque. Mais si le voleur devine ce raisonnement, il volera sans risque le coffre secondaire. Sachant son voleur intelligent, le vigile décide donc de le bluffer et de se placer devant le coffre secondaire. Mais, puisque le voleur est intelligent, il a deviné ce raisonnement subtil du vigile et sait qu'il peut sans risque s'attaquer au coffre principal…

Nous tournons en rond. Si nous faisons l'hypothèse que les deux protagonistes sont aussi intelligents l'un que l'autre, tout raisonnement que ferait l'un serait deviné par l'autre. La seule décision impossible à deviner consiste à s'en remettre au hasard : le vigile va tirer au sort le coffre devant lequel il se postera et le voleur va tirer au sort celui qu'il attaquera.

La seule liberté possible, pour l'un comme pour l'autre, concerne les probabilités à assigner à ces décisions.

Probabilités et modes de rationalisation – explications

Le vigile tirera donc au sort, en donnant la probabilité p au coffre principal, et donc la probabilité $1 - p$ au coffre secondaire. Le voleur tire aussi au sort, en donnant la probabilité q au coffre principal, et donc la probabilité $1 - q$ au coffre secondaire.

Quelle est l'espérance mathématique du butin du voleur (qui est égale à l'espérance de la perte du magasin) ?

Si l'on suppose que les deux adversaires prennent des décisions indépendantes, la règle des probabilités composées permet de calculer les probabilités de chaque issue. Le voleur emporte 200000 euros avec la probabilité $p\,(1 - q)$, c'est-à-dire s'il s'attaque au coffre secondaire alors que le vigile est posté devant l'autre. Il emporte 800 000 euros avec la probabilité $q\,(1 - p)$, c'est-à-dire s'il s'attaque au coffre principal alors que le vigile est posté devant l'autre. Son espérance mathématique est donc :

$$E = 200\,000\,[p\,(1 - q) + 4q\,(1 - p)] = 200\,000\,[p - 5pq + 4q]$$

Ce n'est pas un calcul très difficile que de transformer cette formule en :

$$160\,000 - 1\,000\,000\left(p - \frac{4}{5}\right)\left(q - \frac{1}{5}\right)$$

Si $p = \frac{4}{5}$, et dans ce cas seulement, cette espérance est indépendante de q et vaut 160 000 euros. Le vigile a intérêt à choisir cette valeur de p, qui limite le risque de l'entreprise à 160 000 euros : toute autre valeur augmente ce risque.

Du côté du voleur, s'il choisit $q = \frac{1}{5}$, et dans ce cas seulement, cette espérance est indépendante de p et vaut 160 000 euros. Le voleur a intérêt à choisir cette valeur de q, qui lui assure cette espérance. Toute autre valeur diminue son espérance.

Les fonctions

La notion de fonction est très ancienne, même si sa formalisation est relativement récente ; c'est Leibniz qui, au XVIIe siècle, inventa le mot de « fonction » pour désigner un processus qui permet d'associer un nombre à un nombre qu'on se donnerait, au sein d'un ensemble de nombres, l'ensemble de définition. Lorsqu'il faut les distinguer, le nombre donné au départ est appelé argument, le résultat du processus étant appelé image de l'argument.

Ce processus peut être par exemple :

- un processus physique : fabriquer une boule en pâte à modeler dont le rayon en centimètres est le nombre donné, peser la boule et inscrire son poids (si l'on recommence avec la même pâte et le même rayon, on trouvera le même résultat) ;
- un processus à première vue mystérieux, une sorte de boîte noire comme une calculatrice de

poche : on frappe un nombre x, par exemple 25, on appuie sur la touche marquée √ et la machine affiche un nombre (dans notre exemple, elle affiche 5) ;

- un programme de calcul : doubler le nombre donné et lui ajouter 84 (si le nombre donné est noté x, ce programme de calcul est résumé par la formule $2x + 84$).

C'est Euler qui, au XVIII[e] siècle, eut l'idée de noter f une fonction et $f(x)$ le nombre qu'elle associe à un nombre x. On dira par exemple : la fonction f associe à tout nombre x le nombre : $f(x) = 2x + 84$.

Dans cette écriture, x est l'argument et $f(x)$ est l'image de x.

Parmi les fonctions les plus simples qu'on puisse imaginer, il faut placer les fonctions constantes, comme celle qui à tout x associe invariablement le nombre 37 : $f(x) = 37$.

Les fonctions affines – sens de variation

Au-delà du cas très simple vu dans la notion précédente, on utilise beaucoup les fonctions dites affines, qui décrivent un programme ainsi conçu :

- deux nombres a et b sont donnés ;
- multiplier l'argument x par a ;
- ajouter b au résultat.

Avec la notation d'Euler, on écrira simplement : $f(x) = ax + b$.

Lorsque le coefficient a est nul, la fonction est constante : $f(x) = b$.

Technique

Lorsque le coefficient a est strictement positif, la fonction est croissante ; cela signifie que si un nombre est plus grand qu'un autre, son image est aussi la plus grande. Ce résultat est presque évident et résulte de la règle de multiplication d'une inégalité par un nombre positif : si $x_1 > x_2$ alors $ax_1 > ax_2$ et $ax_1 + b > ax_2 + b$

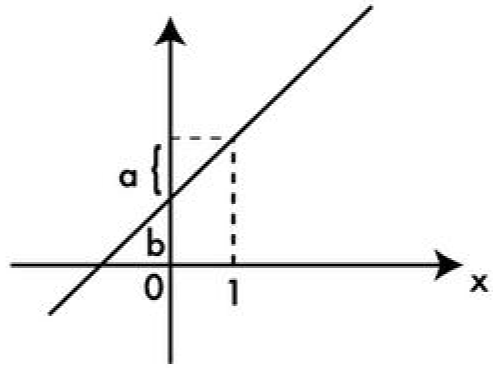
En revanche, lorsque a est négatif, on se souvient qu'on peut multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif à condition d'en changer le sens. La fonction est alors décroissante ; cela signifie que, si un nombre est plus grand qu'un autre, son image est plus petite.

Les fonctions affines – représentation graphique

Nous avons à plusieurs reprises observé que, dans un graphique cartésien, si l'on prend plusieurs valeurs possibles de l'argument, x_1, x_2,…, x_n, les points de coordonnées sont alignés :

- x_1, $f(x_1) = ax_1 + b$
- x_2, $f(x_2) = ax_2 + b$
- …
- x_n, $f(x_n) = ax_n + b$

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite. Les nombres a et b qui figurent dans l'écriture $f(x) = ax + b$ se retrouvent sur la figure de la fonction affine.



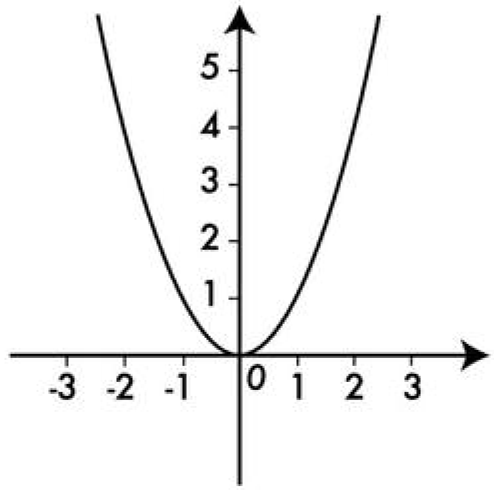
Représentation d’une fonction affine.

La parabole

Intéressons-nous maintenant à la fonction qui, à tout nombre, associe son carré : $f(x) = x^2$.

De façon purement empirique, nous pouvons en tracer de nombreux points en choisissant des valeurs arbitraires de x.

En multipliant ainsi les points marqués à l'infini, nous trouvons une courbe, déjà connue d'Archimède au IIIe siècle avant J.-C. : la parabole, que nous observons en de nombreuses circonstances (câbles d'un pont suspendu, trajectoire d'un projectile, trajectoire apparente de certaines comètes…).



Représentation de la fonction x^2.

La définition géométrique de la parabole

Voici un petit calcul, mais le résultat en vaut la peine. Sur le même graphique que celui de la notion précédente, marquons le point F de coordonnées (0, $\frac{1}{4}$) et traçons la droite représentant la fonction constante :

$$f(x) = -\frac{1}{4}$$

Si nous prenons un point M quelconque sur la parabole, dont nous appelons x l'abscisse et dont l'ordonnée est donc $y = x^2$, nous pouvons calculer sa distance à la droite D (elle est égale à $y + \frac{1}{4}$) et sa distance au point F, qui s'obtient par la relation :

$$MF^2 = x^2 + (y - \frac{1}{4})^2$$

Ce qui s'écrit :

$$y + (y - \frac{1}{4})^2$$

Et il est simple de vérifier que cette somme est égale à :

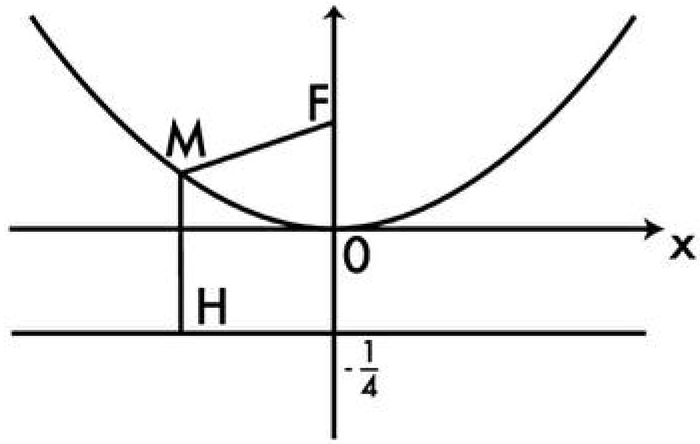
$$(y + \frac{1}{4})^2$$

Ainsi, pour tout point de la courbe, sa distance à la droite D est égale à sa distance au point F ; on vérifie, réciproquement, que tout point équidistant de F et de D appartient à la courbe.

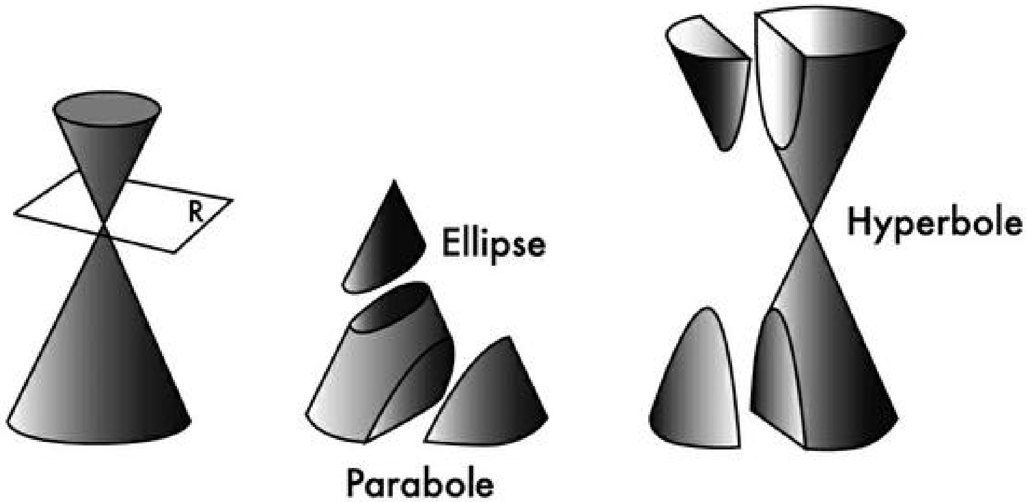
C'est la définition géométrique de la parabole :

Étant donné une droite D et un point F pris hors de D, on appelle parabole de foyer F et de directrice D l'ensemble des points équidistants de D et F.

Cette définition se retrouve dès le IVe siècle chez Pappus d'Alexandrie, synthétisant des travaux antérieurs, et notamment ceux d'Apollonius de Perge.



Foyer et directrice de la parabole.



Diverses sections d'un cône : ellipse, parabole et hyperbole.

Le théorème d'Apollonius

Considérons un cône de révolution, sa section par un plan Q et le plan R passant par le sommet du cône et parallèle au plan de section.

Selon que R contient 0, 1 ou 2 génératrices, on obtient une ellipse E, (éventuellement un cercle), une parabole P ou une hyperbole H.

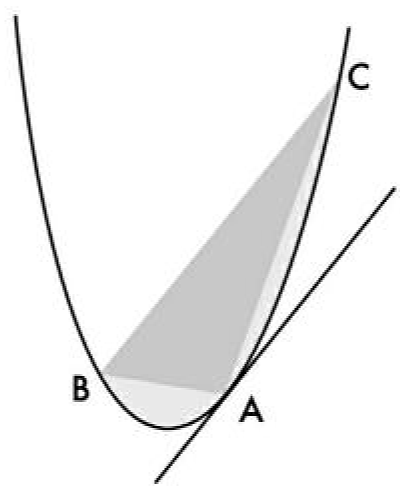
On doit notamment à Apollonius, mathématicien grec du III^{e} siècle avant J.-C., d'avoir reconnu la

Histoire

parabole comme intersection d’un cône droit et d’un plan parallèle à une génératrice du cône. Lorsque le plan de section n’est pas parallèle à une génératrice, on obtient d’autres courbes, appelées des coniques.

La quadrature d'Archimède

La figure ci-dessous présente un segment de parabole, partie de plan limitée par un arc de parabole et une corde.



Archimède démontra que l'aire en gris clair est égale aux $\frac{4}{3}$ de l'aire du triangle ABC, A étant le point en lequel la tangente à la parabole est parallèle à la corde [BC]. Sa méthode est particulièrement ingénieuse et préfigure les méthodes du calcul infinitésimal qui se développera au XVII^{e} siècle. Pour simplifier les écritures, posons que l’unité d’aire a été choisie en sorte que l’aire de ce triangle soit égale à 1.

L’idée d’Archimède est de marquer des points de l’arc de parabole :

- D, en lequel la tangente est parallèle à (AB) ;
- E, en lequel la tangente est parallèle à (AC).

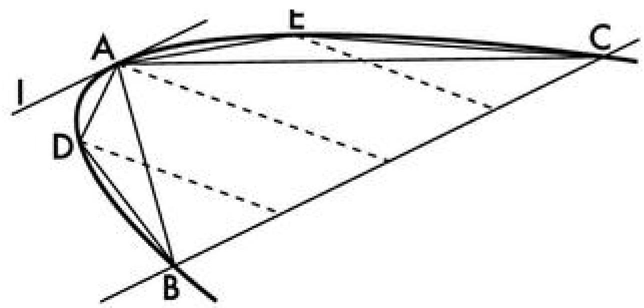
À partir de là, on construit les triangles AEC et ADB et on montre que chacun d’eux a une aire égale à $\frac{1}{8}$, donc la somme de ces aires vaut $\frac{1}{4}$. On recommence la même construction, en ajoutant quatre triangles dont la somme des aires est $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ et de même *n* fois, ce qui conduit à une approximation par défaut de l’aire du segment de parabole :

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Cette somme vaut :

$$\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}$$

Archimède observa que le numérateur se rapproche de plus en plus de 1, ce qui le conduit à affirmer que la somme « infinie » vaut $\frac{4}{3}$.



Représentation de la méthode d’Archimède.

Les hyperboles

Intéressons-nous à la fonction qui, à tout nombre non nul, associe son inverse :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

De façon purement empirique, nous pouvons une fois encore en marquer de nombreux points en choisissant des valeurs arbitraires de *x*.

En les multipliant ainsi à l'infini, nous trouvons une courbe, elle aussi connue des mathématiciens grecs, l'hyperbole (bien que, avant Apollonius, une seule des deux branches ait été considérée). Les axes de coordonnées ont une propriété curieuse : aucun point de l'hyperbole n'est sur un de ces axes, mais on peut trouver sur la courbe des points aussi rapprochés qu'on le souhaiterait de ces axes. On les appelle des asymptotes.

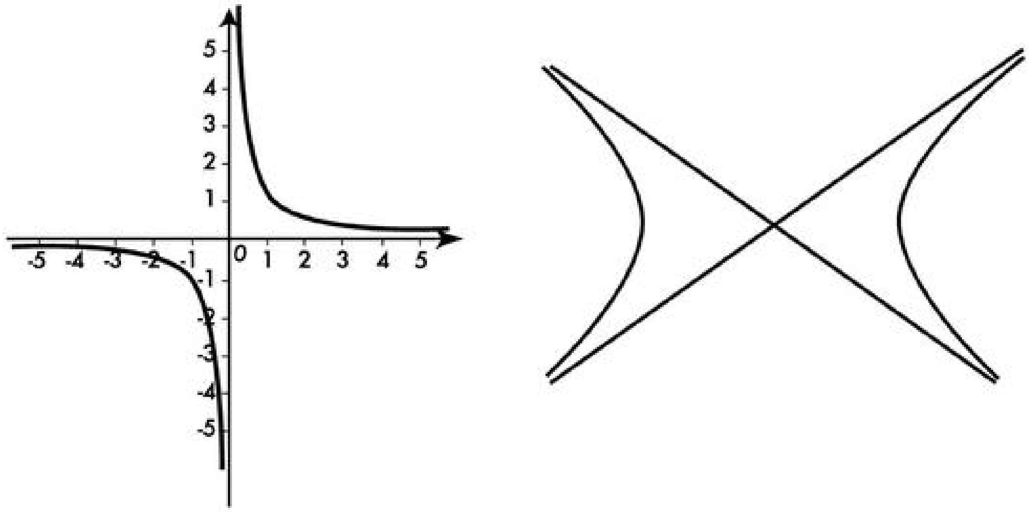
En utilisant un repère dont les axes ne sont pas perpendiculaires et en traçant encore la représentation graphique de la courbe $\frac{1}{x}$, on trouve une courbe de forme un peu différente, dont les asymptotes ne sont pas perpendiculaires.

Un petit calcul, fondé sur les mêmes principes que pour la parabole, permet de donner une et même plusieurs définitions géométriques de l'hyperbole :

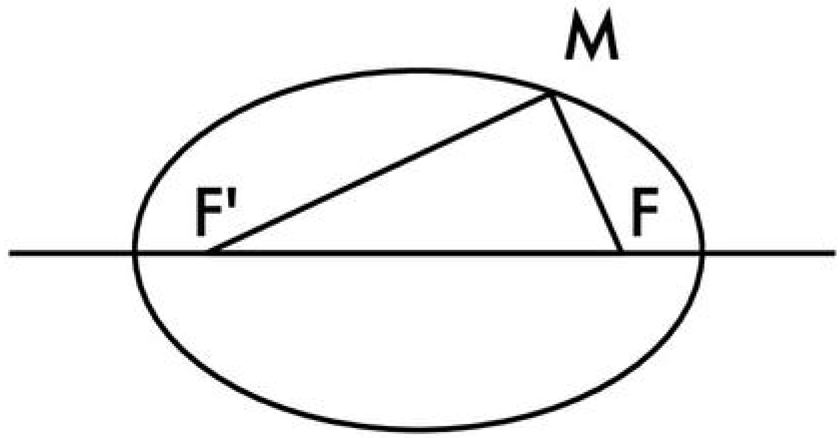
On peut trouver un nombre e (qu'on appelle l'excentricité), un point F (qu'on appelle foyer) et une droite D (qu'on appelle directrice), tels que l'hyperbole soit l'ensemble des points M tels que : MF = eMH.

Technique

Ce nombre *e* est supérieur à 1 (il vaut $\sqrt{2}$ pour l'hyperbole à asymptotes perpendiculaires).



Deux représentations d’une hyperbole : dans un repère aux axes perpendiculaires (à gauche) et aux axes non perpendiculaires (à droite).



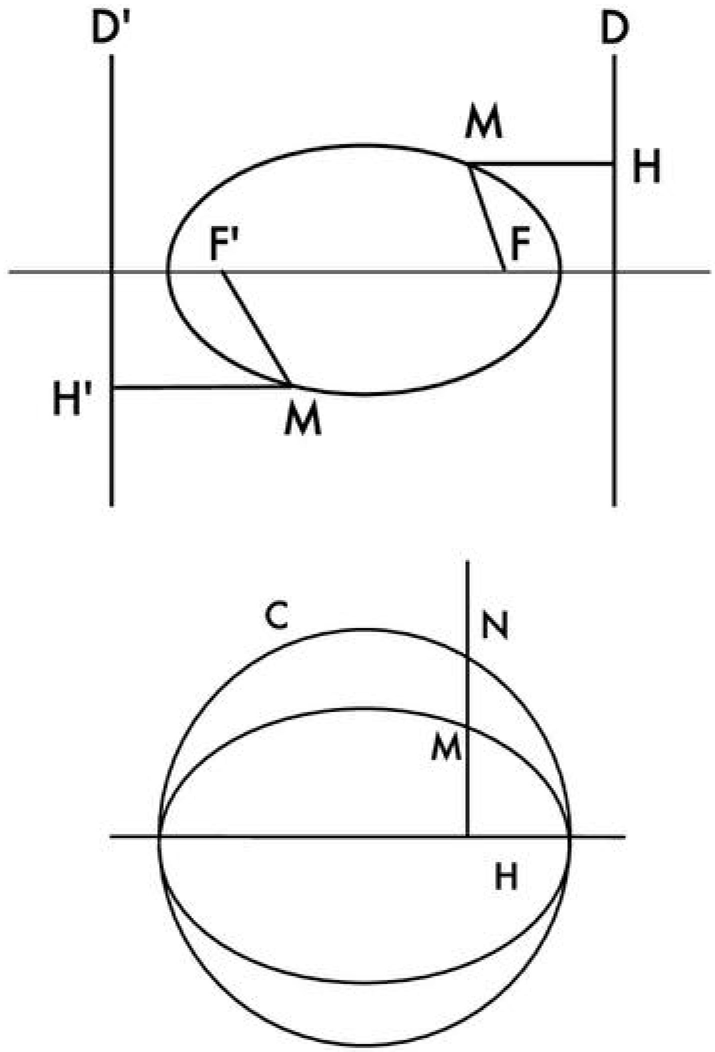
Représentation des foyers de l'ellipse.

L'ellipse – définition bifocale

Le théorème d'Apollonius évoque une autre courbe possible comme intersection d'un plan et d'un cône, l'ellipse. C'est aussi une courbe familière, trajectoire des planètes autour du Soleil. On peut donner plusieurs définitions de cette courbe, dont certaines se rapprochent de ce qui a été dit pour l'hyperbole.

On donne deux points F et F'. L'ensemble des points dont la somme des distances à F et F' est constante est une ellipse. Les points F et F’ sont appelés les foyers de l’ellipse.

Cette définition est utilisée pour présenter un procédé mécanique de tracé d’une ellipse. On peut imaginer un cas limite, dans lequel les points F et F’ seraient confondus et la définition se réduirait alors à celle d’un cercle, ensemble des points dont la distance à un point F est constante.



Représentation des foyers et directrices de l’ellipse (en haut) et du cercle « aplati » (en bas).

L'ellipse – définition monofocale

À chacun des foyers, on peut associer une droite (D associée à F et D' associée à F') de sorte que l'ellipse soit l'ensemble des points M tels que : MF = *e*MH.

Ce nombre *e* est inférieur à 1 et est appelé excentricité.

À partir d'un cercle : on peut aussi tracer un cercle C et l'aplatir légèrement. En termes plus rigoureux, on se donne un coefficient *c* entre 0 et 1 et on transforme tout point N du cercle en un point M tel que : HM = *c*HN.

C est appelé le grand cercle de l'ellipse.

On pourrait réaliser cette opération en supposant le cercle C tracé dans un plan et sa projection dans un second plan.

La Terre est en orbite elliptique autour du Soleil. L'ellipse décrite par la Terre est très proche d'un cercle puisque le périhélie (plus petite distance de la Terre au Soleil) est d'environ 149 millions de kilomètres alors que l'aphélie (plus grande distance) est de 153 millions de kilomètres.

La tangente

Les mathématiciens grecs avaient déjà observé la configuration particulière que peuvent former un cercle et une droite perpendiculaire à un rayon en son extrémité : la droite et le cercle ont un point commun et un seul.

Une configuration très ressemblante s'observe lorsque :

- une ellipse et une droite ont un point commun et un seul ;
- une parabole et une droite (non perpendiculaire à la directrice) ont un point commun et un seul ;
- une hyperbole et une droite (non parallèle à une asymptote) ont un point commun et un seul.

Mais il a fallu attendre Leibniz pour avoir une définition et une méthode générales, qui s'appliquent à la plupart des fonctions. L'idée est d’observer des droites passant par un point M de la courbe, d’abscisse t, et un point M’« voisin », d’abscisse t'. Le coefficient de cette droite est :

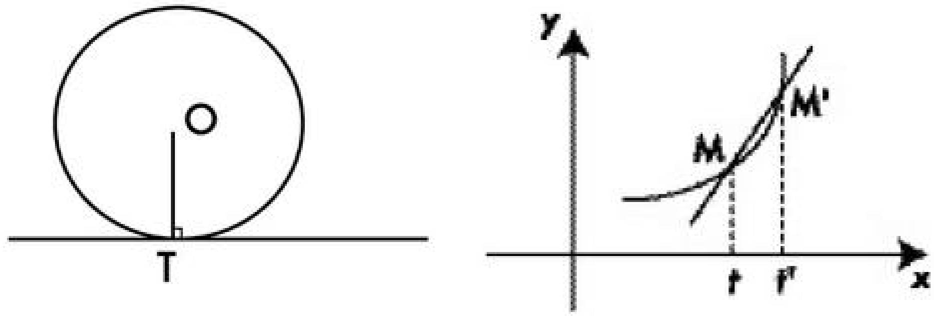
$$a = \frac{f(t') - f(t)}{t' - t}$$

Prenons l’exemple de la fonction t^2 ; le coefficient de notre droite est :

$$a = \frac{t'^2 - t^2}{t' - t}$$

Lequel est égal à $t' + t$. Or, lorsque t' est très proche de t, ce coefficient est très proche de $2t$. La droite passant par M et de coefficient $2t$ est tangente à la courbe. La fonction $2t$ est appelée la dérivée de la fonction t^2. De façon générale, la dérivée d’une fonction f en un point t est la limite de l’accroissement relatif de f entre t et une valeur très proche :

$$\frac{f(t') - f(t)}{t' - t}$$



Représentation de la tangente au cercle et de la corde (MM’).

Quelques dérivées de fonctions

Un calcul analogue à celui présenté dans la notion précédente permet de trouver les dérivées de nombreuses fonctions élémentaires. Par exemple, pour la fonction t^3, le coefficient de notre droite est :

$$a = \frac{t'^3 - t^3}{t' - t}$$

Lequel est égal à $t'^2 + tt' + t^2$. Or, lorsque t' est très proche de t, ce coefficient est très proche de $3t^2$. Des procédés algébriques de cette nature permettent de trouver les dérivées de nombreuses fonctions sans avoir à effectuer de calcul d'accroissements :

- la dérivée de la fonction x^n, qui est nx^{n-1} ;
- la dérivée de la somme $f + g$ de deux fonctions, qui est $f' + g'$;
- la dérivée du produit fg de deux fonctions, qui est $f'g + fg'$.

La vitesse moyenne

Le calcul à base purement géométrique qui a été présenté dans la notion précédente a de nombreuses interprétations concrètes. L'une d'entre elles est familière à chacun de nous depuis que les radars fleurissent sur nos autoroutes.

Un mobile se déplace sur un axe et sa position (repérée par son abscisse x) est une fonction du temps, $f(t)$. Entre deux instants t et t', le chemin parcouru est $f(t') - f(t)$ et la vitesse moyenne, quotient de la distance parcourue par le temps mis à la parcourir, est :

$$v = \frac{f(t') - f(t)}{t' - t}$$

Lorsque t' est très proche de t, la vitesse moyenne est mesurée sur un intervalle très petit, nous conduisant à la notion de vitesse instantanée, celle qu'affichent les compteurs de nos automobiles.

Les taux marginaux

Ce que dépense un ménage est, en principe, fonction de son revenu *x*. Notons le montant mensuel de ses dépenses *f*(*x*).

Les économistes s'intéressent à l'accroissement de dépenses, *f*(*x*') – *f*(*x*), provoqué par un accroissement de revenu *x*' – *x* ou, plus précisément, au rapport de ces deux quantités :

$$t = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

C'est ce qu'on appelle le taux marginal de consommation : de façon imaginée et approximative, c'est la fraction dépensée d'un euro supplémentaire de revenu.

La croissance exponentielle

D'une façon générale, une suite exponentielle est une fonction f qui associe à tout entier une valeur $f(n)$ en sorte que les accroissements relatifs soient tous égaux à un même nombre k : $f(n + 1) - f(n) = kf(n)$.

Le taux d'accroissement peut être positif, et on parlera alors de croissance exponentielle ; il peut être négatif, et on parlera plutôt de décroissance exponentielle.

Dans les deux cas, il est immédiat d'obtenir, de proche en proche, une formule permettant de calculer un terme de la suite sans avoir à calculer successivement tous ceux qui le précèdent. On écrit la relation sous la forme : $f(n + 1) = (1 + k) f(n)$ et on la décline en :

- $f(n + 1) = (1 + k) f(n)$
- $f(n) = (1 + k) f(n - 1)$
- …

- $f(2 + 1) = (1 + k)\, f(2)$
- $f(1 + 1) = (1 + k)\, f(1)$
- $f(1 + 0) = (1 + k)\, f(0)$

D'où, en passant un peu vite sur le raisonnement sous-entendu de récurrence : $f(n) = (1 + k)^n f(0)$.

Le temps de doublement

Une bonne façon de visualiser l'effet d'une croissance exponentielle, même de taux i modeste, est de calculer le temps de doublement t. Il est défini très simplement par la relation $2 = (1 + i)^t$. Une bonne approximation, pour les petites valeurs de i, est de considérer que le produit it vaut environ 70.

Exemples :

- Au taux de 2 %, une grandeur double approximativement en trente-cinq ans.
- Au taux de 3,5 %, elle double approximativement en vingt ans.
- Au taux de 7 %, elle double approximativement en dix ans.

Sur une longue période, l'hypothèse d'une croissance exponentielle du nombre des personnes qui se consacrent à la recherche est étonnamment précise : le taux correspond à un doublement tous les quinze ans, soit un peu plus de 4 % par an. Ce taux observé explique de façon mathématique les affirmations de ce genre : sur huit savants dans l'histoire de l'humanité, sept sont encore en vie.

Admettons une durée de carrière de quarante-cinq ans : pour tout savant né avant une période donnée de quinze ans, il y en a un né pendant cette période, deux nés pendant la suivante et quatre pendant celle d'après, soit sept savants vivants pour huit que la Terre ait jamais portés, ou enfin 87,5 %.

Les fonctions exponentielles – valeurs inverses et rationnelles

Valeurs de l'argument inverses de nombres entiers. La relation :

$$f(1) = f(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}) = f(\tfrac{1}{2})f(\tfrac{1}{2}) = a$$

montre que $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est un nombre qui, multiplié par lui-même, donne a ; nous le notons d'ordinaire $\sqrt{a}$, mais aussi $a^{1/2}$.

La relation :

$$f(1) = f(\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n} + \ldots + \tfrac{1}{n}) = f(\tfrac{1}{n}) \times f(\tfrac{1}{n}) \times \ldots \times f(\tfrac{1}{n}) = [f(\tfrac{1}{n})]^n$$

montre que $f(\frac{1}{u})$ est un nombre qui, multiplié n fois par lui-même, donne a. Nous le notons $^n\sqrt{a}$ mais aussi $a^{1/n}$.

Valeurs de l'argument rationnelles. Lorsque l'argument est un nombre rationnel $\frac{p}{q}$, la combinaison des règles précédentes donne :

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\sqrt[q]{a^{p}}$$

Ce qui se note encore $a^{p/q}$ (en toute rigueur, il faudrait avoir vérifié auparavant que, pour deux fractions telles que $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, cela donne effectivement le même résultat).

Les fonctions exponentielles – valeurs entières

Au lieu d'observer une fonction pour une suite de valeurs t, $t + 1$, $t + 2$,…, $t + \mathrm{n}$, on peut généraliser et étudier les fonctions f telles que :

$$f(t + y) - f(t) = k\, f(t)$$

formule dans laquelle le nombre k ne dépend pas de t.

Cette relation s'écrit aussi :

$$f(t + y) = (1 + k)\, f(t)$$

Et, en choisissant $t = 0$, nous avons :

$$f(y) = (1 + k)\, f(0)$$

Attention

Bien entendu, la valeur de $f(0)$ importe peu et on peut la choisir arbitrairement égale à 1 : cela signifie qu'on choisit pour unité la valeur que prend notre fonction en 0. Cela permet d'exprimer $1 + k$ et donc de formuler de façon plus symétrique la relation fondamentale d'une fonction à croissance exponentielle :

$$f(x + y) = f(x)\, f(y)$$

Pour simplifier les écritures, on peut noter a le nombre $f(1)$, que nous supposerons strictement positif. La relation fonctionnelle ci-dessus permet de donner la valeur de $f(x)$ pour de nombreuses valeurs de x. Naturellement, derrière chaque série de points de suspension, se dissimule un raisonnement par récurrence qu'en toute rigueur il faudrait expliciter.

- $f(2) = f(1 + 1) = f(1)\, f(1) = a \times a = a^2$
- $f(3) = f(2 + 1) = f(2)\, f(1) = a^2 \times a = a^3$
- …
- $f(n) = f(n - 1 + 1) = f(n - 1)\, f(1) = a^{n-1} \times a = a^n$

Les fonctions exponentielles – valeurs négatives

Si m et n sont des nombres opposés, tels que $m + n = 0$, la relation :

$$f(m + n) = f(m)\, f(n) = f(0) = 1$$

montre que les nombres $f(m)$ et $f(n)$ sont inverses l'un de l'autre. On notera donc a^{-s} le nombre $\frac{1}{a^s}$.

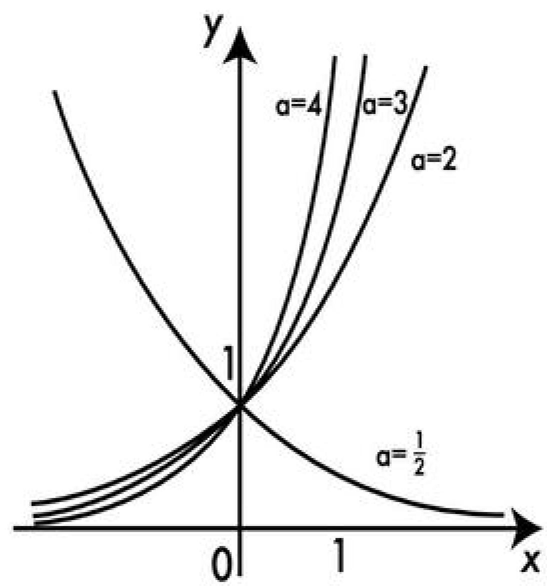
En définitive, pour de très nombreuses valeurs de l'argument (les valeurs rationnelles), nous connaissons les valeurs d'une fonction exponentielle. Plus généralement, pour tout nombre $a > 1$, on peut démontrer l'existence d'une fonction croissante f telle que :

- $f(1) = a$;
- pour tout couple (x, y), on a l'égalité $f(x + y) = f(x)\, f(y)$.

On l'appelle exponentielle de base a et on la note a^x. (Une démonstration analogue donne pour tout a

< 1 une fonction décroissante.)

Les courbes représentatives de ces fonctions ont l’allure suivante :



L’exponentielle naturelle

Parmi les fonctions exponentielles, il en est une qui joue un rôle capital dans plusieurs branches des mathématiques, qu’on appelle l’exponentielle naturelle et qui correspond à une valeur de *a* particulière qu’on note *e*. Ce nombre n’est pas rationnel, on en connaît des approximations. Une d’elles est la fraction $\frac{878}{323}$; une autre est 2,71828182845904523536…

La notation *e* est due à Euler ; en 1761, le mathématicien français Lambert a prouvé que *e* n’est pas rationnel ; un siècle plus tard, Hermite prouvait qu’il n’est racine d’aucune équation algébrique. On connaît de nombreuses suites qui en donnent des valeurs approchées. En voici deux exemples.

Le premier est : $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

Il exige de très longs calculs pour donner une approximation convenable :

$u100 \approx 2{,}70$

$u500 \approx 2{,}716$

$u1\,000 \approx 2{,}717$

$u10\,000 \approx 2{,}71814593$

Le deuxième est : $v_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ (la notation n ! désigne le produit de tous les entiers de 1 à n)

Il donne bien plus rapidement des approximations convenables. Par exemple :

$u100 \approx 2{,}71828183$

Une des raisons du succès de cette exponentielle est que la fonction e^x est sa propre dérivée. Cette propriété joue un rôle essentiel dans diverses branches des mathématiques.

Les logarithmes décimaux

John Napier, connu en France sous le nom de Neper, vécut près d'un siècle avant Euler. Après plusieurs approches moins pratiques, il en vint à considérer ce que nous appellerions aujourd'hui des logarithmes décimaux.

Lorsque des nombres sont tels que $10^y = x$, le nombre y est appelé le logarithme décimal de x et est noté log x. C'est un simple jeu de traduction que de déduire des propriétés de l'exponentielle des propriétés du logarithme. Voici quelques exemples :

- puisque $10^0 = 1$, on a $\log 1 = 0$;
- puisque $10^1 = 10$, on a $\log 10 = 1$;
- puisque $10^2 = 100$, on a $\log 100 = 2$;
- puisque $10^u\, 10^v = 10^{u+v}$, on a $\log xy = \log x + \log y$.

C'est surtout la dernière relation qui a fait la fortune de l'idée de Napier. À une époque où une multiplication, dès lors que les facteurs comportaient beaucoup de chiffres, était une tâche ardue, on pouvait la remplacer par une simple addition, pourvu qu'on disposât d'une table de logarithmes. Pour calculer le produit de deux nombres x et y, il suffit :

- de chercher dans la table $\log x$ et $\log y$;
- d'additionner ces deux nombres ;
- de lire dans la table le nombre dont cette somme est le logarithme.

Bien entendu, ces calculs sont tous approximatifs, avec une précision qui dépend de la table de logarithmes utilisée : les tables courantes donnaient les logarithmes avec cinq décimales.

Portrait de John Napier.

La table de logarithmes de sinus

La première table calculée par Napier était une table de logarithmes de sinus, utiles aux calculs astronomiques. Il avait même imaginé des réglettes qui, mises bout à bout, matérialisaient l'addition à faire, ancêtres directs des règles à calcul du siècle dernier. Et de fait, pendant plus de trois siècles, professionnels et lycéens utilisaient des tables de logarithmes. C'est là que se situe l'anecdote des tables Louis XVI.

Histoire

Le contrôle des dépenses publiques alimente souvent la presse, même humoristique. Gigantesques gaspillages ici, contrôles paralysants là. Un jour des années soixante, un laboratoire universitaire se trouve avoir besoin d'une table de logarithmes. On l'achète à la librairie voisine et on envoie la facture, quelques dizaines de francs de l'époque, à l'agent comptable. La facture revient, impérieusement annotée : « Veuillez préciser le numéro d'inventaire de ce mobilier. » Et *Le Canard enchaîné*, qui avait rapporté l'incident, ironisait sur le style de ces pièces de mobilier.

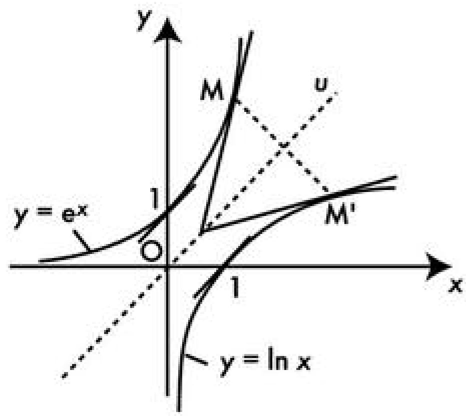
Avec la banalisation des moyens électroniques de calcul, les logarithmes décimaux ont perdu tout intérêt. Le nombre 10 n'est qu'un choix possible parmi l'infinité de nombres strictement positifs et différents de 1.

Les logarithmes naturels

Il existe une base qui joue un rôle très important, c'est la base *e*. Les logarithmes à base *e* sont appelés logarithmes naturels, ou logarithmes népériens, en hommage au baron Neper (Napier). On utilise la notation « ln » (c'est celle qui est indiquée sur la touche des calculatrices donnant le logarithme naturel d'un nombre *x*).

Par définition, les deux écritures $y = e^{x}$ et $x = \ln y$ sont parfaitement équivalentes. Sur un même graphique, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme sont symétriques par rapport à la bissectrice des axes de coordonnées.

Si la fonction ln joue un si grand rôle, c'est aussi parce que sa dérivée est étonnamment simple ; c'est tout simplement $\frac{1}{x}$.



Représentation de l’exponentielle et du logarithme.

La loi de Fechner

Entre certaines mesures physiques et les sensations que nous éprouvons, il existe une relation, formulée pour la première fois au XIX^{e} siècle par Gustav Theodor Fechner (1801-1887), qui s'énonce, de façon très grossière :

La sensation varie comme le logarithme de l'excitation.

Les observations sont multiples, et pour certaines, fort anciennes.

Fechner prenait l'exemple de violons. Entre 1 et 10 violons jouant à l'unisson, l'oreille ressent le même accroissement de niveau sonore qu'entre 10 et 100 violons, ou entre 100 et 1 000. Cet accroissement est appelé le bel. On utilise plus volontiers le décibel, ou dixième de bel.

Excitation	1	10	100	1 000	10 000
Sensation (en bels)	0	1	2	3	4

Les nombres de la seconde ligne sont les logarithmes décimaux des nombres de la première. Ainsi, entre 1 et 100 violons, on gagne 2 bels. Entre 1 et 20 violons, on gagne log 20 = 1,301 bel, ou environ 13 décibels.

La magnitude des étoiles

Histoire

Dès l'Antiquité, les astronomes classaient les étoiles visibles à l'œil nu en fonction de leur éclat. Les 20 plus brillantes étaient classées dans la catégorie « étoiles de première grandeur », les autres se répartissaient ensuite en cinq catégories, jusqu'aux « étoiles de sixième grandeur » qui étaient les plus faibles visibles à l'œil nu. Après avoir construit sa lunette astronomique, Galilée fut conduit à définir une septième catégorie pour désigner les étoiles invisibles à l'œil nu mais révélées par son instrument. Jusqu'au milieu du XIXe siècle, les astronomes ajoutèrent de nouveaux échelons, mais toujours de façon empirique.

L'utilisation des télescopes, le recours à la photographie, puis, au XXe siècle, à des détecteurs électroniques de plus en plus sensibles, ont fait abandonner cet ancien système.

Le système actuel utilise la notion de magnitude, dont la définition permet de donner un sens plus objectif à l'impression produite.

Le premier qui formalisa le passage d'une magnitude à une autre fut l'astronome anglais Norman Pogson. En 1856, il proposa de considérer qu'une différence de cinq magnitudes était associée à une différence d'éclats de 100 fois. Le rapport entre deux échelons successifs de magnitude était alors égal à la racine cinquième de 100, soit 2,512. D'une façon précise, on définit la différence de magnitude entre deux étoiles en fonction du rapport de leurs éclats :

$$m - m' = -2,512 \times \log \frac{E}{E'}$$

où E et E' représentent les éclats de deux étoiles à comparer, et *m* et *m'* leurs magnitudes respectives.

Le signe « – » permet d'assurer, conformément à l'usage séculaire, que la magnitude est d'autant plus grande que l'éclat est faible.

Deux remarques à propos de cette formule :

- elle ne donne que les différences de magnitude, il a donc fallu choisir arbitrairement une étoile à laquelle on attribue la magnitude 1, et c'est Aldébaran de la constellation du Taureau qui a été choisie ;

- la constante, ici (– 2,512), dépend de la base de logarithmes choisie, ici la base 10, et du choix de l'unité de magnitude, déduit de la proposition de Pogson.

La méthode d’exhaustion

C’est la fête au village : la mairie a prévu une immense tarte et veut en donner une part à toute personne qui se présente à la fête. Impossible de la partager en trente, car s’il se présente une trente et unième personne, elle n’aura plus rien.

Une règle simple, même si elle n’est pas très égalitaire, consiste à donner à toute personne qui se présente au buffet la moitié de ce qui reste dans le plat. Quel que soit le nombre de personnes qui se présentent, il restera toujours de la tarte, puisque le dernier servi n’aura reçu que la moitié de ce qui restait. La fraction de tarte consommée par les *n* premières personnes est dans ces conditions :

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Nous disposons d’une formule pour exprimer cette somme plus simplement :

$$S_n = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On voit bien alors ce qui se produit : plus n est grand, plus $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ se rapproche de 0, sans jamais être nul : la fraction consommée de la tarte n'est donc jamais égale à 1, même si elle s'en rapproche de plus en plus lorsque n augmente.

La rente perpétuelle

Nos arrière-grands-parents se sont ruinés en souscrivant auprès de l'État des titres de rente perpétuelle : moyennant l'abandon d'un capital, le souscripteur se voyait promettre une rente perpétuelle de 3 % du capital versé. L'épargnant faisait-il ainsi une affaire extraordinaire, puisque la somme qu'il espérait recevoir dépasse toute limite concevable ? Veut-il deux fois son capital, il les aura en soixante-sept ans. Le veut-il dix fois ? Il n'a qu'à attendre trois cent trente ans !

Oublions l'inflation. De toute façon, un euro demain vaut moins qu'un euro disponible aujourd'hui puisque nul n'accepterait l'échange sans une compensation, pas plus que nul n'achèterait pour 30 euros une rente de 1 euro par an pendant trente ans : cette promesse ne vaut certainement pas 30 euros. Il faut tenir compte en quelque sorte du prix du temps. C'est ce qu'on appelle le taux d'actualisation.

En fait, avec un taux d'actualisation i, 1 euro disponible dans un an vaut :

$$a = \frac{1}{1 + i}$$

Par conséquent, i étant supposé fixe :

- 1 euro disponible dans deux ans vaut a^2 ;
- 1 euro disponible dans trois ans vaut a^3 ;
- ...
- 1 euro disponible dans n ans vaut a^n.

La valeur actuelle d'une rente de 1 euro sur n années est donc $a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$, somme que nous savons écrire

$$a \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

Comme dans l'exemple précédent, a est strictement inférieur à 1, si bien que plus n est grand, plus a^{n+1} se rapproche de 0. Loin d'être infinie, la valeur actuelle d'une rente perpétuelle est égale à

$$\frac{a}{1 - a}$$

On peut même l’exprimer en revenant à *i*. On divise le numérateur et le dénominateur de cette fraction par *a*. Le numérateur devient 1. Le dénominateur devient :

$$\frac{1}{a} - 1 = 1 + i - 1 = i$$

La valeur actuelle d’une rente perpétuelle de 1 euro est donc simplement $\frac{1}{i}$.

Par exemple :

- au taux i = 2,5 % ou $\frac{2,5}{100}$, $\frac{1}{i}$ = 40 ;
- au taux i = 3 % ou $\frac{3}{100}$, $\frac{1}{i}$ = 33,3 ;
- au taux i = 4 % ou $\frac{4}{100}$, $\frac{1}{i}$ = 25 .

Les limites de la méthode d'exhaustion

Il faut se garder de croire que, si l'on ajoute des termes positifs de plus en plus petits, qui finissent par être inférieurs à 0,001 ou à 0,00001 ou à tout nombre qu'on voudra, on obtiendra toujours une somme finie ; en d'autres termes, qu'en donnant une part de plus en plus petite, il y aura nécessairement de la tarte pour tout le monde.

Par exemple, si la consigne donnée est d'attribuer une part égale à $\frac{1}{n}$ tarte à la énième personne qui se présente, une tarte n'y suffira pas, ni même 2 puisque, en toute logique, la première personne a droit à une tarte entière. La deuxième tarte ne suffit d'ailleurs même pas à satisfaire les personnes de rangs 2, 3, 4 puisque $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ dépasse 1.

Combien faudra-t-il de tartes ? Il s'agit d'étudier la somme $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ pour des valeurs de n aussi grandes qu'on voudra.

À cette fin, observons que pour servir les n personnes dont le rang est entre $n + 1$ et $2n$, il faut une fraction de tarte égale à :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$$

Chacune doit avoir au moins la part $\frac{1}{2n}$ (c'est la plus petite part dans ce groupe) et, comme elles sont n, il faut plus d'une demi-tarte pour les satisfaire. Nous sommes faits :

- il faut plus d'une demi-tarte pour satisfaire les personnes de rang entre n et $2n$;
- il faut plus d'une demi-tarte pour satisfaire les personnes de rang entre $2n$ et $4n$;
- il faut plus d'une demi-tarte pour satisfaire les personnes de rang entre $4n$ et $8n$;
- etc.

La conclusion est claire : il n'y en aura jamais assez pour tout le monde.

Calculer l'aire du triangle rectangle par exhaustion

Nous nous proposons de calculer l'aire du triangle OAB à l'aide de la formule classique donnant l'aire d'un rectangle.

L'utilisation du repère marqué sur la figure facilite les écritures, l'hypoténuse apparaissant comme la représentation graphique d'une fonction linéaire, de la forme $f(x) = sx$.

L'idée est de découper le segment [OA] en n « petits » segments de même longueur $\frac{a}{n}$. Concentrons l'attention sur le k^e segment, limité aux points $\frac{ka}{n}$ et $(k + 1)\frac{a}{n}$. L'aire A du trapèze PQRS se trouve encadrée par les aires des deux rectangles :

- PQS'S : largeur $\frac{a}{n}$, longueur $\frac{ska}{n}$, aire $\frac{ska^2}{n^2}$;

- PQRR' : largeur $\frac{a}{n}$, longueur $s\,(k + 1)\,\frac{a}{n}$, aire $s\,(k + 1)\,\frac{a^2}{n^2}$.
- Par addition, l'aire du triangle se trouve encadrée par :

$$\sum_{1}^{n-1} sk\frac{a^2}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{0}^{n-1} s(k+1)\frac{a^2}{n^2}$$

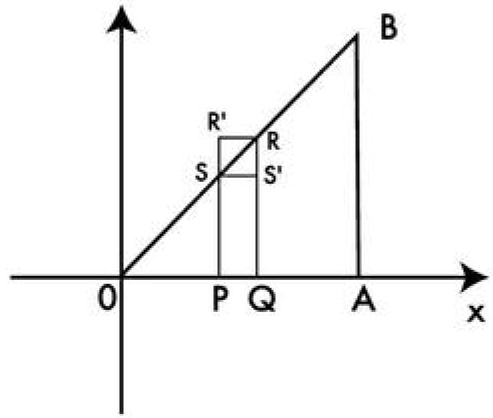
Or, il se trouve que nous savons exprimer ces sommes. Ne parlons pas du coefficient $\frac{sa^2}{n^2}$, qui est commun à tous les termes :

$$\sum_{1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1) \quad \text{et} \quad \sum_{0}^{n-1} (k+1) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

L'aire du triangle est ainsi encadrée entre

$$\frac{1}{2}\,sa^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\,sa^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Un seul nombre se trouve ainsi encadré pour toutes les valeurs de n, c'est $\frac{1}{2}$ sa^2. On retrouve sans étonnement l'expression de l'aire d'un triangle du demi-produit de la base a par la hauteur sa.



Représentation graphique du calcul de l’aire OAB.

Calculer l'aire de la parabole par exhaustion

Appliquons la technique de la notion précédente à l'aire limitée par un arc de parabole $y = x^2$.

L'idée est encore de découper le segment [OA] en n « petits » segments de même longueur $\frac{a}{n}$. Concentrons notre attention sur le k^e segment, limité aux points $\frac{ka}{n}$ et $(k + 1)\frac{a}{n}$. L'aire limitée par l'arc de parabole, l'axe des abscisses et les deux droites tracées se trouve encadrée par les aires des deux rectangles :

- PQS'S : largeur $\frac{a}{n}$, longueur $\left(\frac{ka}{n}\right)^2$, aire $\frac{k^2a^3}{n^3}$;
- PQRR' : largeur $\frac{a}{n}$, longueur$[(k + 1)\frac{a}{n}]^2$, aire $(k + 1)^2\frac{a}{n^3}$.

Par addition, l'aire cherchée se trouve encadrée par :

$$\frac{\sum k^2 a^3}{n^3}$$

$$\frac{\sum (k+1)^2 a^3}{n^3}$$

Or, il se trouve que nous savons exprimer ces sommes. Ne parlons pas du coefficient $\frac{sa^2}{n^2}$, qui est commun à tous les termes :

$$\sum_{1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$\sum_{0}^{n-1} (k+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

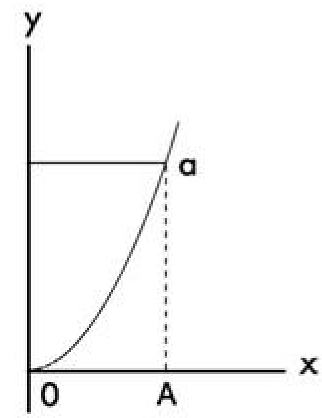
L'aire cherchée est ainsi encadrée entre :

$$\frac{a^3}{3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}$$

et

$$\frac{a^3}{3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

Un seul nombre se trouve ainsi encadré pour toutes les valeurs de n, c'est $\frac{a^3}{3}$. L'aire située sous l'arc de parabole est égale au tiers de l'aire du rectangle tracé. On retrouve ainsi le résultat d'Archimède.



Aire limitée par la parabole.

Calcul de la somme des carrés des *n* premiers entiers

On connaît le développement de $(a + b)^3$, cas particulier de la formule du binôme de Newton (ou simplement en développant ce produit) : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

En particulier, on en déduit les égalités :

- $(1 + 1)^3 = 1^3 + 3.1^2.1 + 3.1.1^2 + 1^3$
- $(2 + 1)^3 = 2^3 + 3.2^2.1 + 3.2.1^2 + 1^3$
- $(3 + 1)^3 = 3^3 + 3.3^2.1 + 3.3.1^2 + 1^3$
- …
- $(n + 1)^3 = n^3 + 3.n^2.1 + 3.n.1^2 + 1^3$

Additionnons soigneusement en colonnes ces égalités. On obtient :

$$(n+1)^3 = 1 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

Nous connaissons déjà la somme des n premiers entiers, égale à $\frac{1}{2}$ n (n + 1). La formule précédente permet alors de calculer la somme des carrés des entiers de 1 à n, qui s'écrit, après simplifications :

$$\sum k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Par un procédé analogue utilisant les développements :

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

on établit que la somme des cubes des n premiers entiers naturels est :

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Usage des dérivées

Prenons maintenant une fonction f, moins banale que la fonction linéaire. Pour éviter des difficultés d'écriture, nous supposons $f(x)$ positif pour les valeurs de x en cause. Nous allons définir graphiquement une nouvelle fonction F comme l'aire limitée par :

- l'axe des abscisses ;
- une droite fixe parallèle à l'axe des ordonnées, $x = a$;
- une droite variable, elle aussi parallèle à l'axe des ordonnées, $x=t$;
- la courbe représentative des variations de f.

Quel est l'accroissement de F lorsque x passe de t à t' ? C'est la différence : $f(t') - f(t)$.

Cet accroissement est figuré par une bande grisée sur la figure. Quel est maintenant l'accroissement relatif ?

$$\frac{f(t') - f(t)}{t' - t}$$

Attention

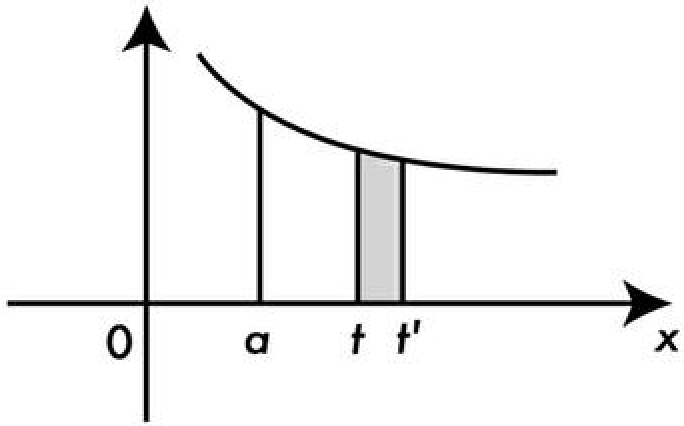
Observons cette fraction. Le numérateur $f(t') - f(t)$ est l'aire de la bande grisée, presque un rectangle. Le dénominateur $t' - t$ est la largeur de ce rectangle. Le quotient est donc approximativement la longueur du rectangle, $f(t)$.

On peut donner une démonstration rigoureuse de cette propriété : la fonction F a pour dérivée la fonction f.

Comme on sait trouver, pour beaucoup de fonctions, des fonctions dont elles sont dérivées, cela fournit un moyen très simple de calculer des aires.

C'est l'occasion de faire un retour sur la quadrature d'Archimède. La technique précédente permet d'écrire bien plus rapidement l'aire limitée par l'arc de parabole sur la figure présentée dans la notion « Calculer l'aire de la parabole par exhaustion ».

La fonction qui a pour dérivée x^2 est $\frac{x^3}{3}$, et l'aire demandée est simplement $\frac{a^3}{3}$.



Accroissement de F.

Les débuts de la géométrie – de l’Égypte à la Grèce

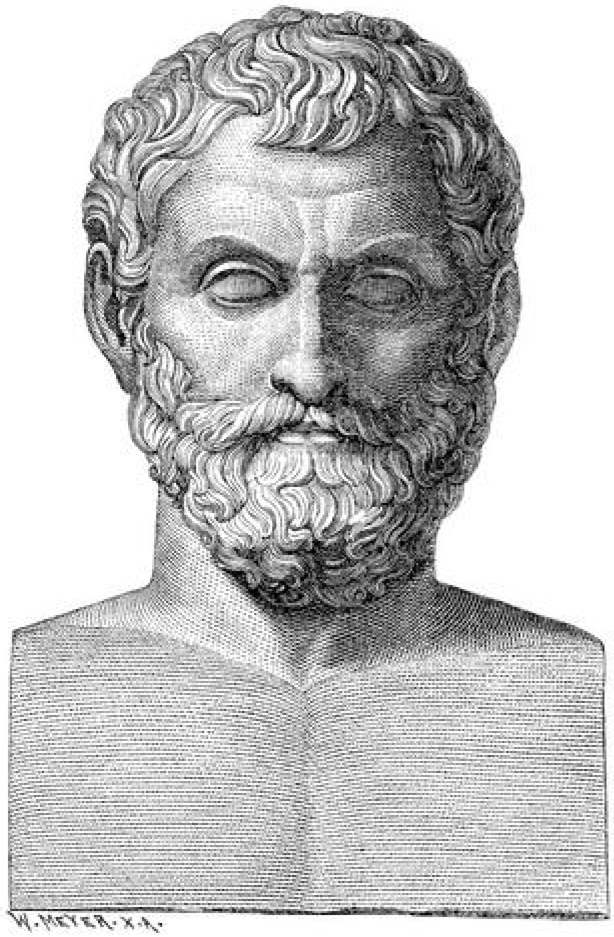
Histoire

On dispose d’assez nombreux documents mathématiques du II^{e} millénaire. Pour l’Égypte, nous avons le papyrus Rhind et celui de Moscou, pour la Mésopotamie, d’abondantes tablettes d’argile. La démarche n’y est en aucune façon déductive : il s’agit de « trucs » pour calculer une longueur, une aire, un volume. Aucun nom de « géomètre » ne nous est parvenu de cette époque.

Thalès de Milet, qui vécut vers 600 avant notre ère, est considéré comme le pionnier de la géométrie. Selon Plutarque, il « fut apparemment le seul dont la réflexion s’échappa des limites de l’utilité pratique ». On sait peu de choses sur lui : Proclus, au V^{e} siècle après J.-C., l’évoque en citant un résumé de l’*Histoire des mathématiques* d’Eudème de Rhodes, élève d’Aristote. À la suite de Proclus, on attribue à Thalès des « démonstrations », même si certains résultats sont utilisés longtemps avant lui.

Voici les démonstrations attribuées à Thalès :

- Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.
- Des angles opposés par le sommet sont égaux.
- Si des triangles ont un côté égal et deux angles respectivement égaux, ils sont égaux.
- Un diamètre partage un cercle en parties de même longueur.
- Un angle inscrit dans un quart de cercle est droit.



Buste de Thalès, 1877.

Les débuts de la géométrie – de Pythagore à Euclide

Pythagore nous est un peu mieux connu. Le travail de mise en ordre et de diffusion de nombreux éléments par l'école pythagoricienne est généralement reconnu. On peut situer au VI^e siècle avant J.-C. l'émergence du raisonnement déductif en géométrie grâce à un écrit d'un des pythagoriciens tardifs, Archytas de Tarente, selon lequel, avant Pythagore, « des preuves satisfaisantes étaient possibles en arithmétique, mais pas en géométrie ».

Mais c'est avec Euclide, deux siècles et demi plus tard, que ce souci de rigueur est réellement développé : ce mathématicien grec commence avec un nombre réduit de définitions et de postulats et, appliquant une méthode strictement déductive, il en tire de nouvelles propositions. Il récuse ainsi la méthode du simple constat ou, du moins, la circonscrit aux postulats de départ. Naturellement, la notion même de rigueur évolue de siècle en siècle et toute trace d'intuition n'a été définitivement effacée que par David Hilbert et ses *Fondements de la géométrie*, publiés en 1899.

La géométrie d'Euclide : les définitions

Euclide pose d'abord quelques définitions. Ainsi :

- Le point est ce qui n'a pas d'étendue.
- La ligne est ce qui a une longueur, mais pas d'épaisseur.
- Les extrémités de la ligne sont des points.
- La droite est la ligne qui s'étend régulièrement entre ses points.
- L'angle est l'inclinaison de deux droites qui se coupent, sans être confondues, etc.

Il est probable que ces « définitions » remontent à Platon. Il faut garder à l'esprit que l'œuvre principale d'Euclide, les *Éléments*, est un manuel scolaire et que son ambition est de mettre en forme les connaissances de son époque. On ne s'arrêtera pas trop sur l'insuffisance de ces définitions. (Par exemple, « inclinaison » n'est pas défini et, s'il avait tenté d'en proposer une définition, Euclide aurait probablement utilisé le mot « angle » !) Ce défaut est largement inévitable au commencement d'un discours structuré.

D'autres définitions, toujours au livre I des *Éléments*, comprennent encore plus de sous-entendus. Ainsi, Euclide définit un angle droit en disant : « Lorsqu'une droite en rencontre une autre en formant des angles égaux, chacun de ces angles est appelé angle droit. » Cette définition suppose une définition de l'égalité, considérée comme évidente par Euclide, bien qu'elle soulève une question à l'époque très controversée, celle du déplacement.

La géométrie d’Euclide : les postulats

Euclide pose ensuite des postulats : des affirmations sans démonstration, que le lecteur doit tenir pour évidentes. Elles sont au nombre de cinq :

- Il est possible de tracer une ligne droite et une seule d’un point donné vers un point donné.
- Il est possible de prolonger une ligne droite en une ligne droite.
- Il est possible de tracer un cercle dont on donne le centre et le rayon.
- Tous les angles droits sont égaux.
- Si une droite qui en coupe deux autres forme avec elles et du même côté des angles intérieurs moindres que deux angles droits, ces droites, si on les prolonge de ce côté, finiront par se rencontrer.

Les trois premiers postulats donnent un rôle prééminent à deux instruments : la règle (non graduée) et le compas. Aujourd'hui encore, lorsqu'un énoncé scolaire demande de « construire le point qui… », il y a un sous-entendu : cette construction doit être faite à l'aide de la règle et du compas seulement. Plus généralement, une telle construction est appelée une construction euclidienne.

La règle, le compas et autres instruments

Les Grecs utilisaient de nombreux instruments de dessin, au-delà de la règle qui permet de tracer des lignes droites et du compas qui permet de tracer des cercles.

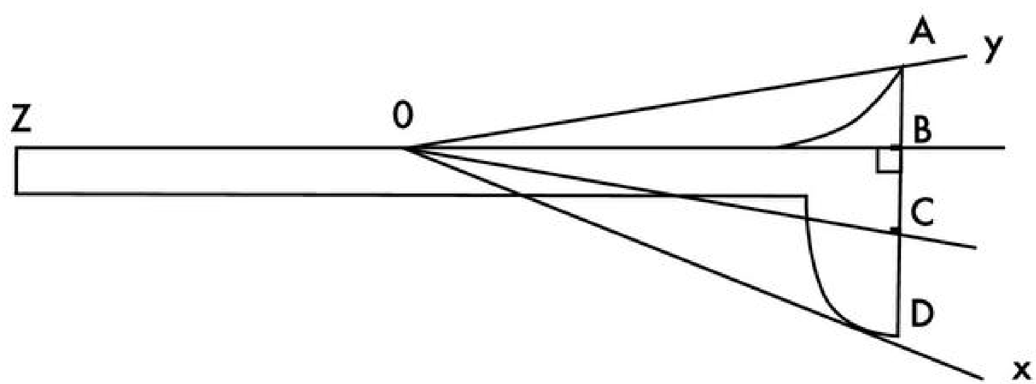
L'un d'eux, parmi les plus rudimentaires, est encore familier aujourd'hui, c'est le procédé utilisé par le jardinier pour construire une ellipse. On peut en effet prouver que si l'on attache une ficelle à deux piquets et qu'on déplace un bâton qui tende la ficelle, la pointe de ce bâton décrit une ellipse.

D'autres instruments sont encore d'usage courant : la règle graduée, le rapporteur, l'équerre, etc. Les musées d'arts et techniques présentent de nombreux instruments de dessin. Citons, parce qu'il résout un problème fameux, le trisecteur, qui permet de partager un angle en trois angles égaux.

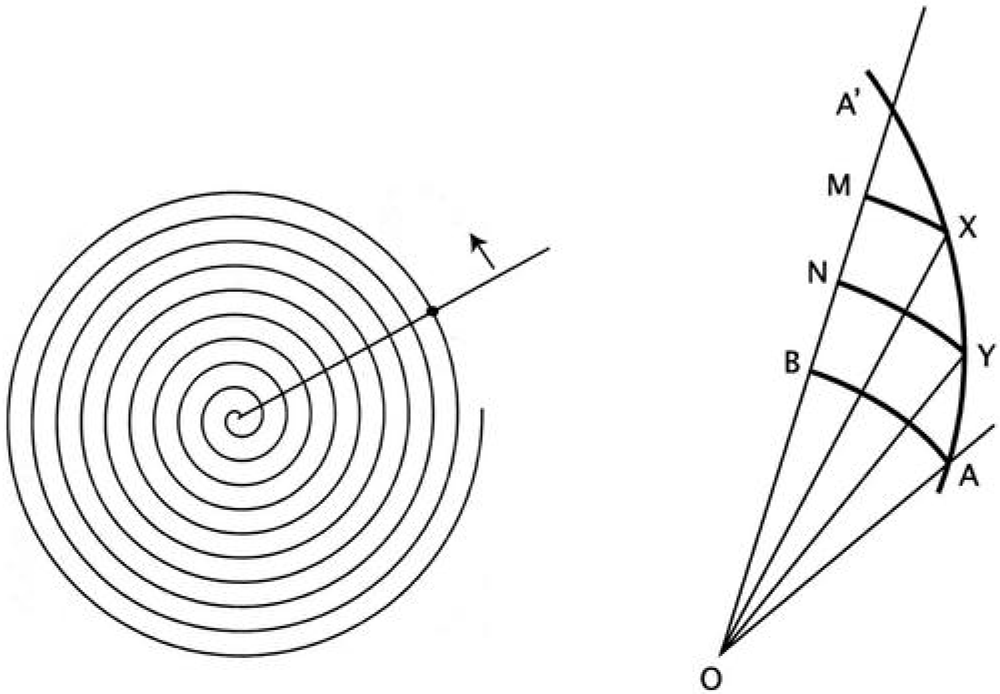
Le trisecteur de Bergery est encore plus rudimentaire ; c'est une pièce de bois telle que :

- A, B, C et D sont alignés ;
- AB = BC = CD ;
- [BD] est le diamètre du demi-cercle ;
- (BZ) est perpendiculaire à (AD).

Pour partager en trois l’angle xOy, on place l’appareil en sorte que A soit sur [Oy) et O sur le côté [BZ]. Puis on le déplace en sorte que [Ox) soit tangent au demi-cercle. [OB] et [OC] sont les trisectrices demandées.



Trisection d’un angle xOy avec un trisecteur de Bergery.



La spirale d’Archimède (à gauche) et la trisection d’un angle à l’aide de la spirale d’Archimède.

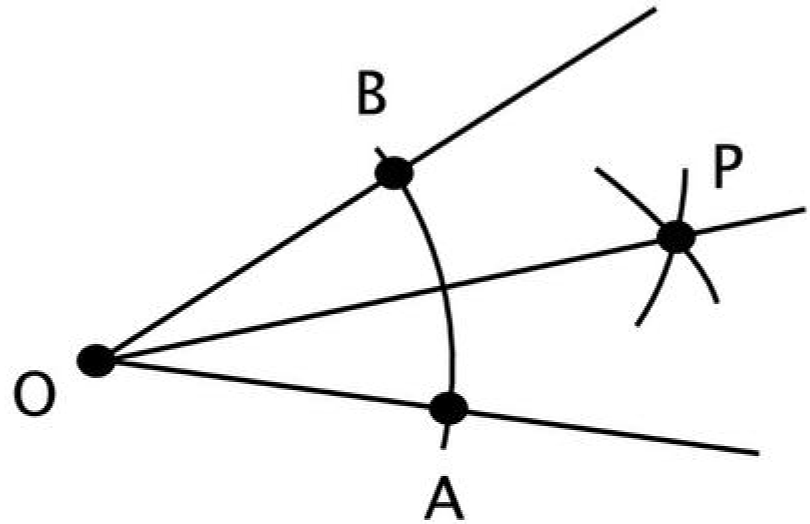
La spirale d’Archimède

Très tôt, on a observé qu’une figure tracée à l’avance pouvait faciliter certaines constructions géométriques. C’est ainsi qu’Archimède s’est fait l’avocat d’une courbe, qu’on nomme aujourd’hui spirale d’Archimède, dont la description mécanique est très simple : une demi-droite tourne à vitesse constante autour de son origine, cependant qu'un de ses points s'éloigne de cette origine avec une vitesse constante.

Cette spirale peut être utilisée pour diviser un angle en un nombre quelconque d'angles égaux. Voici comment Archimède lui-même proposait de diviser un angle en trois parties.

Plaçons le sommet de l'angle au centre de la spirale et observons l'un des arcs (n'importe lequel) qu'il découpe sur cette courbe. Reportons à l'aide d'un compas la longueur OA sur OB. Toujours à l'aide d'un compas, on sait diviser le segment [A'B] en trois segments de même longueur, [A'M], [MN], [NB]. Les arcs de cercle centrés en O et passant respectivement par M et N recoupent l'arc de spirale en X et Y et il ne reste qu'à tracer (OX) et (OY). On vérifie aisément que l'angle donné a ainsi été divisé en trois parties.

Bien entendu, si l'on dispose d'un rapporteur, la construction est encore plus rapide : on mesure l'angle et on divise par trois !



La construction d’une bissectrice par Euclide.

La construction d’une bissectrice par Euclide

Il est dans la nature de l’homme d’élever constamment la barre de ses défis. Après avoir conquis un sommet, un alpiniste voudra le conquérir par la face nord, plus difficile, puis en hiver, plus rigoureux. Si c’est dans l’Himalaya, il voudra le conquérir sans oxygène… La Grèce a connu une telle escalade dans les défis mathématiques.

Les instruments de dessin, les courbes prétracées sont apparues comme des facilités, le compas et la règle ayant seuls la pureté digne d'un vrai géomètre. Si bien qu'Euclide lui-même proposa de très nombreuses constructions utilisant seulement ces deux instruments, en précisant bien que la règle n'est pas graduée et permet seulement de marquer des points alignés.

Un exemple élémentaire suffit à illustrer le principe. Il concerne la bissectrice d'un angle, demi-droite qui le partage en deux angles égaux.

Traçons du sommet de l'angle un arc de cercle qui coupe en A et B les côtés de l'angle. Avec la même ouverture de compas, traçons les cercles passant par O et centrés respectivement en A et en B. Ils se recoupent en un point P et il est immédiatement possible de vérifier, par exemple en notant que OAPB est un losange, que (OP) est la bissectrice de l'angle donné.

Construire à la règle et au compas

Une fois cernées les constructions réalisables à l'aide d'une règle et d'un compas, plusieurs « perfectionnements » furent apportés à ce défi.

Au Xe siècle, un astronome persan, Abul Wefa, de son nom complet Muhammad ibn Muhammad ibn Yahya ibn Isma'il ibn al-Abbas Abu'l-Wafa'al-Buzjani, publia un ouvrage où il présentait de nombreuses constructions géométriques réalisées à l'aide d'une règle et d'un compas à ouverture fixe (ce que les géomètres appellent familièrement un compas rouillé) : c'est d'ailleurs ainsi que nous avons construit la bissectrice d'un angle dans la notion précédente.

En 1672, George Mohr prouva que tout point qu'on peut construire à la règle et au compas peut être construit à l'aide du seul compas. Son livre n'a été retrouvé qu'en 1928, si bien que Mascheroni, qui redécouvrit en 1797 le même résultat, lui a donné son nom : une construction de Mascheroni est une construction faite à l'aide du seul compas.

En 1822, le mathématicien Jean Victor Poncelet suggéra que toute construction euclidienne peut être réalisée à l'aide de la seule règle, pourvu que soient tracés d'avance un cercle et son centre. C'est le Suisse Joseph Steiner qui en donna une preuve rigoureuse onze ans plus tard.

Il s'agit davantage désormais de récréations mathématiques. On doit par exemple à T.R. Dawson, célèbre pour ses problèmes au jeu d'échecs, un des plus amusants théorèmes de la série : pour toute construction euclidienne, il est possible d'utiliser seulement des allumettes (identiques et en nombre illimité).

Le cinquième postulat d’Euclide

Il y a peu d’affirmations mathématiques qui ont fait, au cours des siècles, couler autant d’encre que le cinquième postulat d’Euclide, formulé ainsi :

Si une droite qui en coupe deux autres forme avec elles et du même côté des angles intérieurs dont la somme est moindre que deux angles droits, ces droites, si on les prolonge de ce côté, finiront par se rencontrer.

Dès l’époque d’Euclide, le cinquième postulat a souvent été considéré trop complexe pour un simple postulat (il fait de plus référence à une somme de mesures d’angles) et de nombreux géomètres ont tenté soit de le démontrer, soit de le remplacer par un énoncé plus simple. Deux formulations particulièrement simples ont été proposées, dont on a prouvé l’équivalence avec le cinquième postulat :

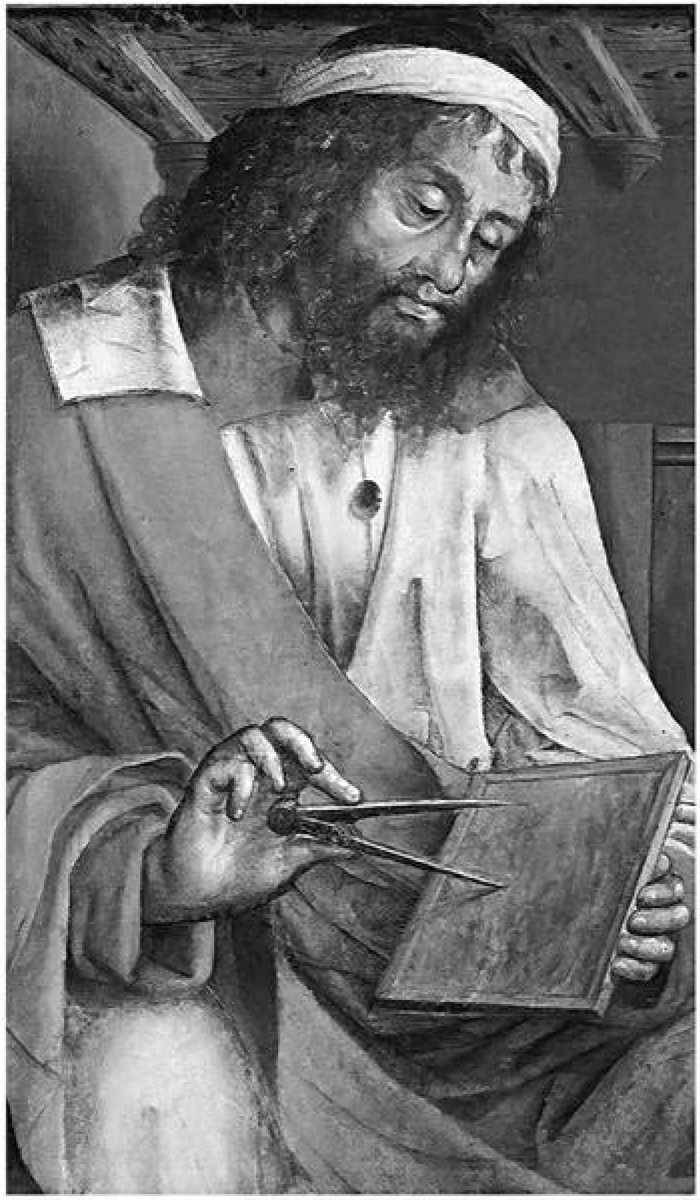
- Par un point extérieur à une droite, on peut tracer une droite qui lui est parallèle, et une seule.

- La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à deux angles droits.

Mais on en connaissait bien d'autres formes, parfois depuis fort longtemps. Par exemple :

- Si un point se déplace en restant à distance constante d'une droite, il décrit une droite parallèle à cette droite. (Ibn al-Haytham, dit Alhazen, Xe siècle)
- Tout quadrilatère ayant trois angles droits (quadrilatère de Lambert) a son quatrième angle droit. (Omar Khayyam, XIe siècle)
- Si un quadrilatère a deux côtés opposés de même longueur, perpendiculaires à un autre côté (quadrilatère de Saccheri), on prouve, sans le postulat d'Euclide, que les deux autres angles sont égaux. Les supposer droits implique ce cinquième postulat. (Omar Khayyam)
- Pour tout segment, il existe un carré dont il est l'un des côtés. (Legendre, XVIIIe siècle)
- Il existe une paire de triangles semblables mais non égaux. (Wallis, XVIIIe siècle)

- Pour tout triangle, il existe un cercle passant par ses trois sommets. (Legendre)
- Il existe un triangle rectangle d'aire arbitrairement grande. (Gauss)



Euclide, par Juste de Gand, vers 1474.

La géométrie non euclidienne

Pendant une vingtaine de siècles, les mathématiciens se sont escrimés à démontrer l'un ou l'autre des énoncés cités précédemment. En vain. Nous arrivons au XVIII^e siècle, lorsque le jésuite Jérôme Saccheri publie un livre, *Euclide débarrassé de ses défauts*, dans lequel il analyse le cinquième postulat.

Son ambition est d'en donner une démonstration à l'aide des quatre premiers, mais il n'aboutit pas et, implicitement, il en montre l'indépendance, préparant le chemin à d'autres géométries qui refusent le cinquième postulat.

Saccheri croyait en effet parvenir à une démonstration rigoureuse en proposant une nouvelle formulation pour les angles d'un triangle. Mais en réalité, il ouvrait la voie à des constructions rigoureuses de géométries nouvelles, non euclidiennes, en ce sens qu'elles récusaient le cinquième postulat et postulaient à la place l'un ou l'autre des deux « contraires » suivants :

- Par un point pris hors d'une droite, on ne peut mener aucune parallèle à cette droite (ou ce qui s'avère être équivalent : la somme des angles d'un triangle surpasse deux angles droits).
- Par un point pris hors d'une droite, on peut mener une infinité de parallèles à cette droite (ou ce qui s'avère être équivalent : la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux angles droits).

La géométrie de Riemann

Il s'avère, comme l'ont prouvé un siècle plus tard Gauss, Riemann, Bolyai et Lobatchevski, que, en choisissant l'un de ces énoncés, on peut développer une « géométrie » parfaitement logique et cohérente. Dans une lettre à Bolyai datée de 1813, Gauss écrivait : « J'ai à coup sûr prouvé des résultats qui sembleraient à beaucoup des démonstrations du cinquième postulat, mais qui, selon moi, ne prouvent rien du tout. » Il tenta même une vérification expérimentale en mesurant la somme des angles d'un triangle formé par trois sommets montagneux, mais l'écart avec 180° ne dépassait pas les erreurs attendues des mesures.

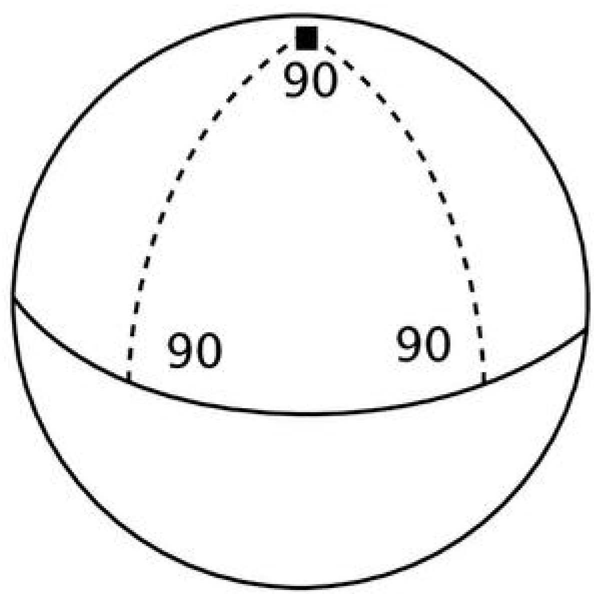
Dans la réalité, trois géométries sont condamnées à la coexistence :

- celle qui accepte le cinquième postulat, la géométrie euclidienne ;
- celle qui le refuse en posant que la somme des angles d'un triangle surpasse deux angles

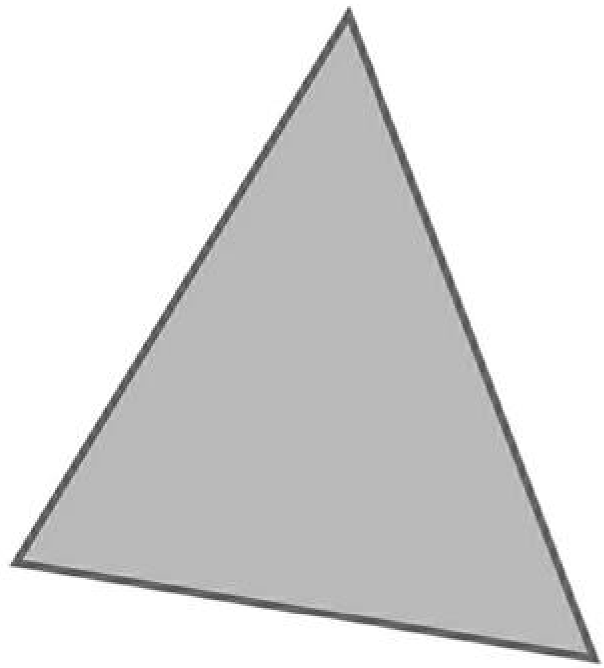
droits, qu'on appelle la géométrie de Riemann ;

- celle qui le refuse en posant que la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux angles droits, qu'on appelle la géométrie hyperbolique, ou géométrie de Lobatchevski.

La géométrie de Riemann a une illustration très simple : la géométrie sur la sphère, où les grands cercles jouent le rôle des droites. Le cinquième postulat est bien sûr en défaut, puisque deux « droites » ont toujours deux points communs. Un triangle peut avoir trois angles droits.



Un triangle avec trois angles droits.



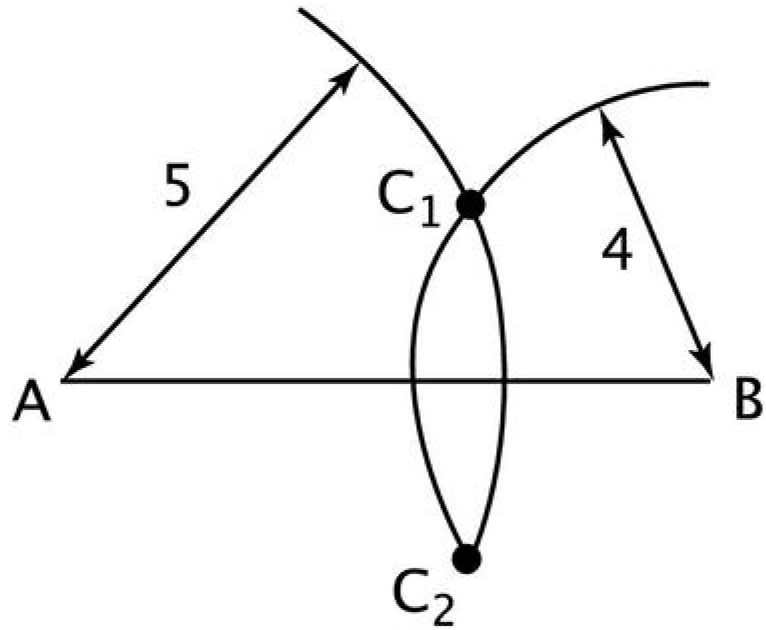
Un triangle.

Le triangle

L'une des figures les plus simples de la géométrie est le triangle : trois points (les sommets), trois segments qui les joignent deux à deux (les côtés), trois angles. Les géomètres grecs lui ont consacré des centaines de pages, au point qu'on aurait pu penser que, après les pythagoriciens, plus rien d'intéressant ne pouvait s'écrire sur le sujet.

Visitant le temple de Poséidon, au cap Sounion, un touriste serait surpris d'entendre le guide s'extasier sur le fait que ce temple, associé au temple d'Égide et au Parthénon, forme une figure géométrique parfaite, un triangle ! Trois points constituent toujours un triangle (sauf s'ils sont alignés, ce qui serait alors encore plus remarquable).

Une des caractéristiques majeures du triangle est que les longueurs de ses trois côtés suffisent à en fixer la forme : un triangle est indéformable. C'est le coup de génie, il y a un siècle, des inventeurs du pneu X de Michelin : alors que les trames étaient traditionnellement faites de croisillons rectangulaires, comme la trame d'un tissu, ils eurent l'idée de faire des croisillons triangulaires, qui rendaient le pneu indéformable.



Le triangle « téléphoné ».

« Téléphoner » un triangle

Si j'étudie un triangle dessiné sur ma feuille et que je souhaite obtenir de l'aide d'un ami lointain, je peux lui indiquer par téléphone trois nombres, les longueurs des côtés. Là-bas, il pourra construire son triangle et nous pourrons dialoguer. C'est même une construction euclidienne, une construction à la règle et au compas.

Posons par exemple que je lui ai donné les longueurs 7 cm, 5 cm et 4 cm. Il trace un segment [AB], par exemple de la plus grande des longueurs que je lui ai indiquées, soit 7 cm, puis, avec pour centre A, un cercle dont le rayon soit la deuxième longueur, soit 5 cm, et avec pour centre B, un cercle dont le rayon soit la troisième longueur, soit 4 cm.

Certes, il aura pu construire deux triangles, mais ils ne sont guère différents, comme une image et son reflet dans un miroir, et, pour la plupart des questions dont nous aurons à discuter, cela n’a pas d’importance.

L'inégalité triangulaire

S'il est possible de « téléphoner » un triangle, cela ne veut pas dire que je puisse tricher et donner trois nombres pris au hasard : si je dis que mon triangle a des côtés dont les longueurs sont 5 cm, 2 cm et 2 cm, il sera impossible de réaliser la construction (les cercles ne se coupent pas).

Dans tout triangle, la longueur d'un côté, quel qu'il soit, est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. C'est la fameuse inégalité triangulaire. Euclide la démontre, ce que Proclus trouvait ridicule : « Même un âne trouve plus court de se diriger tout droit vers sa nourriture que de faire un détour ! »

La seule donnée des longueurs des côtés d'un triangle permet d'énoncer et de démontrer de très nombreuses propriétés. Certes, l'enseignement français a pris pour habitude d'y associer très rapidement les angles, mais ce n'est pas une nécessité. Un très bel exemple est la formule de

Héron, que l'on nomme ainsi en l'honneur du géomètre Héron d'Alexandrie, même si certains historiens l'attribuent plutôt à Archimède mort deux siècles auparavant.

La formule de Héron. On donne les longueurs a, b, c des côtés d'un triangle. Le carré S^2 de son aire S est donné par la formule $S^2 = p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)$ dans laquelle p désigne le demi-périmètre du triangle.

$$p = \frac{1}{2}\,(a + b + c)$$

Si l'on veut éviter d'utiliser une quatrième lettre p, on peut remarquer que :

$$p - a = \frac{1}{2}\,(2p - 2a) = \frac{1}{2}\,(b + c - a)$$

En procédant de même pour b et c, on obtient :

$$S^2 = \frac{1}{16}\,(a + b + c)\,(b + c - a)\,(a - b + c)\,(a + b - c)$$

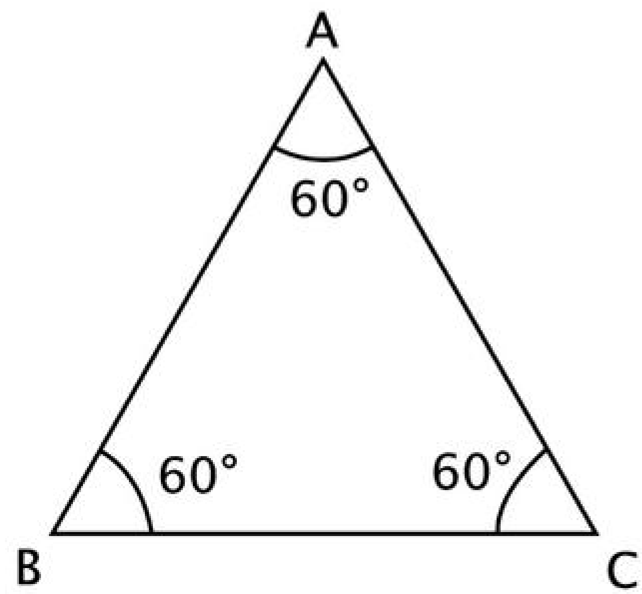
Exemple : les côtés d'un triangle mesurent 5 cm, 5 cm et 6 cm. Le demi-périmètre est :

$$\frac{1}{2}\,(5 + 5 + 6) = 8$$

Et la formule de Héron donne :

$$S^2 = 8\ (8 - 5)\ (8 - 5)\ (8 – 6) = 16 \times 9$$

S est donc égale à $4 \times 3 = 12$.



Représentation d’un triangle équilatéral et de ses angles.

Le triangle équilatéral

On désigne sous le nom de triangle équilatéral, de façon parfaitement conforme à l’étymologie latine de ce mot, tout triangle dont les trois côtés ont la même longueur.

Nous verrons plus loin que, pour un tel triangle, les trois angles ont la même mesure, 60°. D’autres calculs sont faciles, par exemple celui de l'aire par la formule de Héron (voir notion précédente).

Notons a la longueur du côté d'un triangle équilatéral. Le périmètre est $3a$ et le demi-périmètre $1{,}5a$. La formule de Héron donne immédiatement :

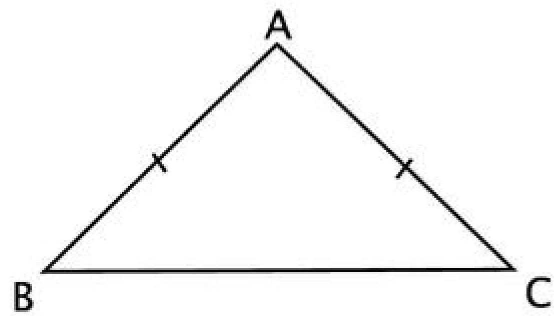
$$S^2 = 1{,}5a\ (0{,}5a)\ (0{,}5a)\ (0{,}5a) = \frac{3a^4}{16}$$

Le triangle isocèle

Bien que « isocèle », emprunté au grec, soit l'exact équivalent d'« équilatéral » issu du latin, on désigne ainsi tout triangle qui a deux côtés de même longueur.

S'il n'est pas en plus équilatéral, un triangle isocèle a un côté particulier, celui qui est de longueur différente et qu'on appelle la base. Quant au sommet opposé à la base, c'est lui qu'on appelle le sommet. Ainsi, lorsqu'on écrit « triangle ABC isocèle de sommet A », cela signifie que AB = AC.

Nous verrons plus loin qu'un tel triangle a deux angles qui ont la même mesure, ceux qui « encadrent » la base.

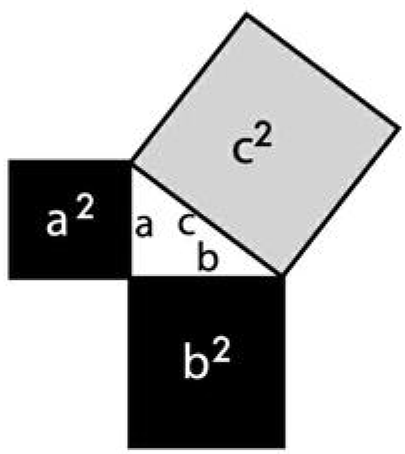


Représentation d’un triangle isocèle.

Le triangle de Pythagore

Observons le triangle ci-dessous, dont les côtés mesurent respectivement 3, 4 et 5 unités. Il est facile de voir que 25 est la somme de 9 et de 16, autrement dit que : $5^2 = 3^2 + 4^2$, ou encore que l'aire du carré construit sur le plus grand côté est égale à la somme des aires des carrés construits sur les deux autres.

Nous verrons plus loin qu'un tel triangle a un angle droit (triangle rectangle). La formule de Héron devient particulièrement intéressante dans ce cas.



Le triangle de Pythagore.

La formule de Héron pour un triangle de Pythagore

Reprenons la formule de Héron sous la forme :

$$16S^2 = (a + b + c)\,(b + c - a)\,(a - b + c)\,(a + b - c)$$

Moyennant quelques calculs ennuyeux mais faciles, cela se réduit successivement en :

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)$$

$$c^2\,(2a^2 + 2b^2 - c^2) - (a^4 - 2a^2b^2 + b^4)$$

Il est temps de tenir compte de la relation de Pythagore $a^2 + b^2 = c^2$ pour obtenir :

$$c^4 - (a^2 - b^2)^2$$

Soit :

$$(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2$$

Et donc :

$$16S^2 = 4a^2b^2$$

$$S = \frac{1}{2}\,ab$$

et :

Ainsi, l’aire d’un triangle de Pythagore est égale au demi-produit des longueurs de ses deux plus petits côtés. Nous retrouverons plus loin une interprétation évidente de ce résultat.

Héron d’Alexandrie.

Les entiers de Pythagore

Les triplets d'entiers qui vérifient la relation de Pythagore, $c^2 = a^2 + b^2$, font l'objet d'une littérature abondante et ancienne. L'exemple (3, 4, 5) est certainement connu depuis quatre millénaires. Bien entendu, en multipliant les trois nombres par un même entier, on obtient un triplet tel que (6, 8, 10) qui vérifie la même relation, mais cela n'a guère d'intérêt. On s'attache plutôt aux triplets d'entiers sans diviseur commun (autre que 1). Un tel triplet est appelé triplet de Pythagore.

Un deuxième exemple est (5, 12, 13) puisque : $169 = 144 + 25$.

De tels triplets étaient connus bien avant Pythagore ; une tablette de l'époque d'Hammourabi, dix-huit siècles avant notre ère, la tablette Plimpton 322, en recense plusieurs dizaines.

Euclide connaissait la formule, vraie quels que soient les nombres u et v :

$$(u + v)^2 = (u - v)^2 + 4uv$$

Il en résulte que si u et v sont des carrés d'entiers ($u = m^2$ et $v = n^2$), alors les nombres $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$ vérifient la relation de Pythagore :

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2$$

Si l'on choisit m et n sans diviseur commun autre que 1, il en est de même de u, v et w. Euler a démontré la réciproque : tout triplet de Pythagore est de la forme $(m^2 + n^2)$, $(m^2 - n^2)$, $2mn$.

Les triangles semblables

Revenons à l’exemple du triangle « téléphoné » dans lequel les longueurs des côtés sont 7 cm, 5 cm, et 4 cm. Mais imaginons que mon interlocuteur soit en vacances et qu’il n’ait pas d’instruments de mesure des longueurs, règle graduée ou autres. Ou encore que mon interlocuteur soit un Martien qui n’a aucune idée de ce qu’est un centimètre. Avec son unité à lui, le marsomètre (qui s’abrège en Mm), il peut parfaitement appliquer la méthode décrite pour dessiner un triangle dont les côtés mesurent 7 Mm, 5 Mm et 4 Mm.

Mon triangle et le sien se ressemblent ; le terme officiel pour décrire cette situation est précisément « triangles semblables ».

Si, un jour, il devenait possible de comparer les étalons terrestre et martien, nous pourrions avoir une idée plus précise de la ressemblance de nos triangles. Par exemple :

- si 1 Mm mesure 2 cm, son triangle a pour dimensions 14 cm, 10 cm, 8 cm ;
- si 1 Mm mesure 3 cm, son triangle a pour dimensions 21 cm, 15 cm, 12 cm.

La ressemblance entre nos triangles peut s'énoncer autrement. Il suffit de multiplier les mesures des côtés du premier (7, 5, 4) par un facteur constant :

- facteur 2 pour obtenir 14, 10, 8 ;
- facteur 3 pour obtenir 21, 15, 12.

Telle est donc la définition utilisée dans de nombreux manuels :

Des triangles semblables sont des triangles dont les côtés ont des longueurs proportionnelles.

Cette définition rend immédiates quelques remarques, que nous retrouverons dans les notions suivantes :

- Tout triangle semblable à un triangle équilatéral est lui-même équilatéral.
- Tout triangle semblable à un triangle isocèle est lui-même isocèle.
- Tout triangle semblable à un triangle de Pythagore est lui-même un triangle de

Pythagore.

Les angles d’un triangle

On ne peut guère éluder plus longtemps les angles du triangle. Car, si un triangle a bien trois côtés, il a aussi trois angles. « À quoi servent les angles ? » peuvent se demander certains. L’histoire de la géométrie nous donne la réponse : à calculer certaines distances entre des points inaccessibles, comme la hauteur d’une pyramide, le diamètre du Soleil ou sa distance à la Terre.

Mais, contrairement aux côtés, les angles ne suffisent pas à caractériser complètement un triangle : si, sur un triangle, on effectue des agrandissements ou des réductions, les angles restent inchangés.

Inversement d’ailleurs, si des triangles ont leurs angles respectivement de même mesure, l’un est obtenu à partir de l’autre par un agrandissement : toutes les longueurs des côtés sont multipliées par un même facteur.

Ce résultat figurait déjà dans les *Éléments* d'Euclide. Ce dernier avait établi des conditions pour qu'on puisse affirmer l'égalité (la « superposabilité ») de deux triangles, les angles ne le permettant pas. Ce sont les fameux cas d'égalité.

Aujourd'hui, on évoque plutôt la possibilité de construire un triangle dont on connaît certains éléments. Nous l'avons fait dans les notions précédentes lorsque les longueurs des trois côtés sont données. Euclide avait indiqué deux autres cas.

Les angles des triangles : les cas d’Euclide

Premier cas : on connaît la longueur d’un côté et les mesures des angles qui encadrent ce côté. La construction est alors très simple : on trace un segment de la longueur donnée et, à ses extrémités, on trace les angles de mesures données. Certes, il y a encore deux cas de figure, mais un simple retournement permet de faire coïncider les triangles obtenus.

Second cas : on connaît la mesure d’un angle et les longueurs des côtés de cet angle. La construction est encore très simple : on trace un angle de la mesure donnée et, sur ses côtés, on porte les longueurs données. Une fois de plus, il y a encore deux cas de figures, mais un simple retournement permet de faire coïncider les triangles obtenus.

Une curiosité : deux triangles peuvent avoir cinq éléments donnés, les trois angles et les mesures de deux côtés, et cependant n’être pas superposables.

La clé du mystère réside dans le fait que les côtés de mêmes longueurs données ne sont pas ceux d'un angle de même mesure donnée.

Les médianes des triangles

Prenons un triangle arbitraire ABC et marquons successivement :

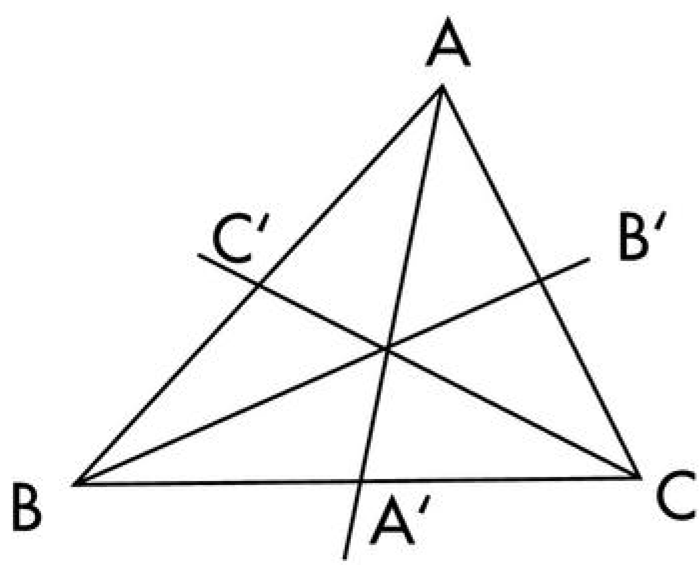
- le point C’, milieu du segment [AB] ;
- le point A’, milieu du segment [BC] ;
- le point B’, milieu du segment [CA] ;
- les droites (AA’), (BB’) et (CC’).

Si la figure est faite avec un peu de soin, une propriété inattendue apparaît : les trois droites tracées semblent passer par un même point. Cette propriété peut être démontrée, elle était déjà connue d’Euclide.

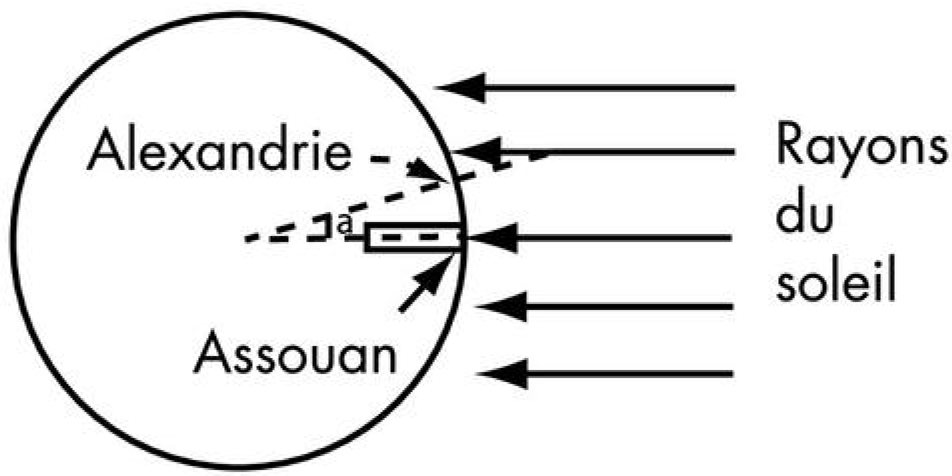
Les droites tracées sont appelées les médianes du triangle donné et leur point commun est le centre de gravité du triangle. Ce n’est pas un hasard si ce terme emprunté à la physique est utilisé : si l’on découpe un triangle dans une plaque de carton et qu’on y marque le centre de gravité G, le carton tient (en principe) en équilibre sur une pointe d'aiguille placée en G.

Attention

La démonstration géométrique de l'existence d'un point commun aux trois médianes repose sur les propriétés du parallélogramme. En effet, AC'A'B' et BC'B'A' sont des parallélogrammes, ce qui permet de démontrer que deux médianes quelconques se coupent en un point situé aux deux tiers de chacune à partir du sommet : autrement dit, si l'on isole par la pensée une des trois médianes, chacune des autres la coupe en ce même point ainsi situé.



Les médianes.



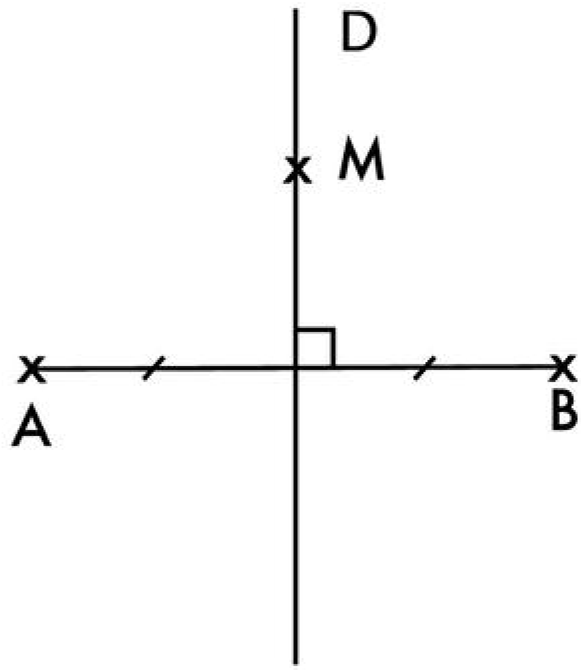
La mesure d'Ératosthène pour déduire le rayon terrestre.

À quoi servent les angles ?

Le 30 octobre 1990, lorsque les tunneliers français et britanniques se rejoignirent au milieu du tunnel sous la Manche, il n'y avait que quelques centimètres d'écart entre les deux forages, pour un tunnel de 38 km. Les équipes avaient été guidées par des rayons laser, calés sur les angles que les géomètres avaient calculés dans ce but.

Dès le IIIe siècle avant notre ère, Ératosthène avait noté que, à l'emplacement de la ville actuelle d'Assouan, le jour du solstice d'été, le soleil atteignait le fond d'un puits profond. Au même instant, à Alexandrie, qui est sur le même méridien, il mesure l'angle des rayons solaires avec la verticale, trouve un cinquantième de cercle. Connaissant la distance Assouan-Alexandrie, il en déduit la première estimation du rayon terrestre.

Dans tous ces exemples, le moyen utilisé est le même : des angles. C'est en somme un moyen de calculer des distances entre deux points dont un au moins est inaccessible.



Représentation de la médiatrice de [AB].

Angle droit et médiatrice

Au commencement de la géométrie, dans une présentation parfaitement déductive, l'angle droit est le premier à être défini. Euclide observe une droite « tombant » sur une autre et, lorsque les angles ainsi formés sont égaux, il les appelle angles droits. Il postule ensuite (c'est-à-dire : il demande qu'on lui accorde comme une évidence, sans démonstration) :

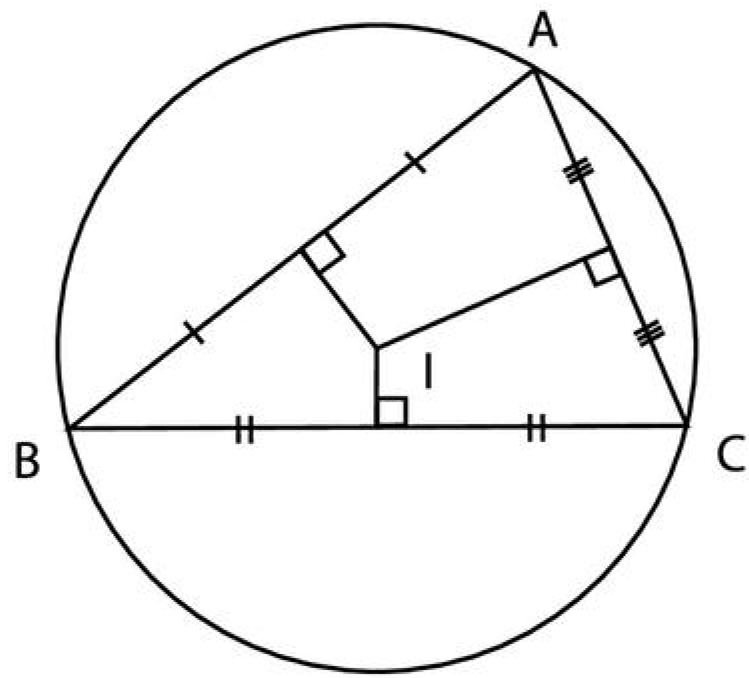
Tous les angles droits sont égaux entre eux.

Naturellement, l'angle droit était connu depuis bien longtemps, tant les exemples en sont nombreux dans la nature. On savait même le diviser en 90 degrés, pour mesurer avec plus de précision certains angles.

La figure d'Euclide d'une droite « tombant » perpendiculairement sur une autre est particulièrement riche dans le cas d'un segment [AB] : la droite perpendiculaire à la droite qui porte un segment et qui contient le milieu de ce segment en est appelée la médiatrice.

Attention

Les points de la médiatrice d'un segment ont une propriété remarquable : ils sont équidistants des extrémités de ce segment. Sur la figure ci-contre, M est un point arbitraire de la droite D et les distances MA et MB sont égales. On peut d'ailleurs démontrer la réciproque : si un point est équidistant de A et de B, alors il est situé sur la médiatrice du segment [AB]. Autrement dit, la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.



Les trois médiatrices du triangle ABC.

Les médiatrices des côtés d’un triangle

De la notion précédente, il résulte une conséquence immédiate en ce qui concerne les médiatrices des côtés d’un triangle ABC. Traçons la médiatrice de [AB] et celle de [AC] et nommons I leur point commun.

I appartient à la médiatrice de [AB] et donc IA = IB.

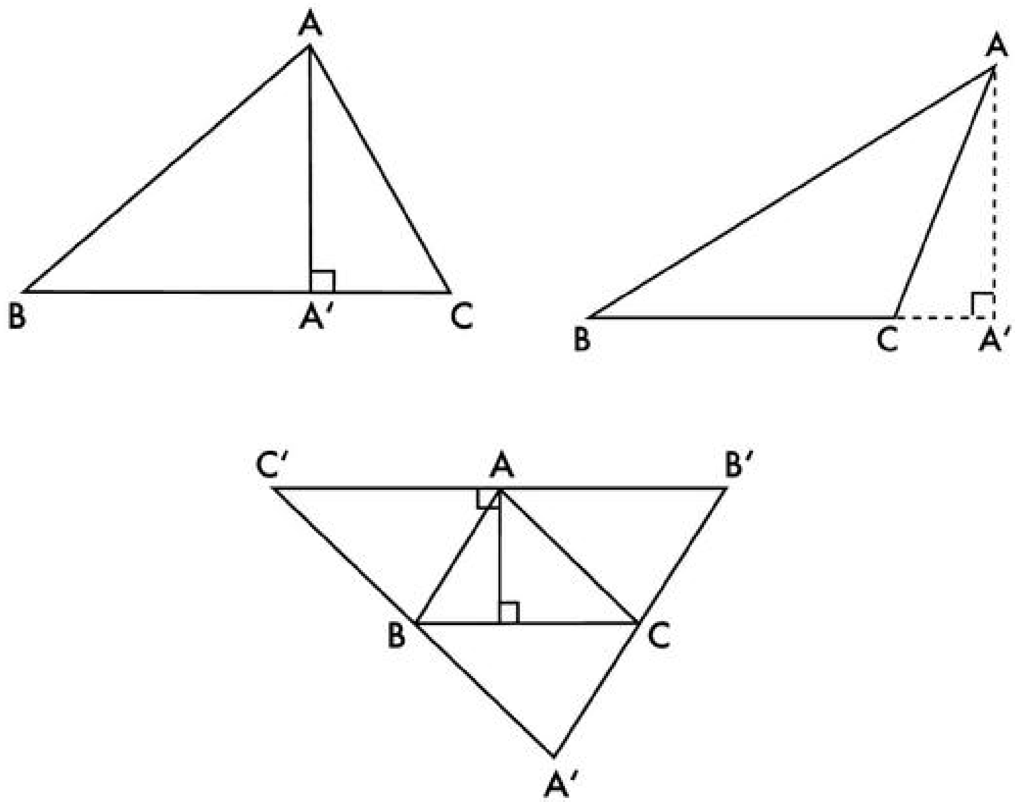
I appartient à la médiatrice de [AC] et donc IA = IC.

On en déduit que IB = IC et donc que I appartient à la médiatrice de [BC].

D'ailleurs, puisque IA = IB = IC, le cercle de centre I et de rayon IA passe par B et C.

Le résultat ainsi prouvé est d'usage fréquent :

Les médiatrices des trois côtés d'un triangle passent par un même point. Ce point est le centre d'un cercle passant par les trois sommets du triangle (cercle circonscrit).



La hauteur d’un triangle peut être à l’intérieur ou à l’extérieur de celui-ci.

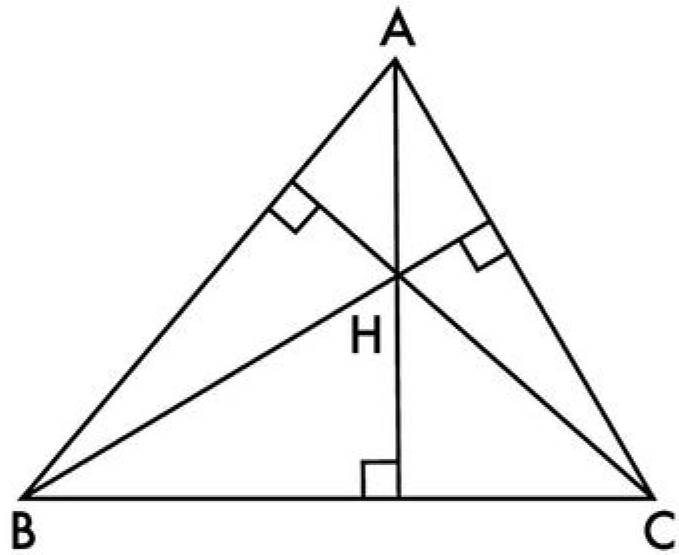
Les hauteurs d’un triangle

La propriété des médiatrices présentée dans la notion précédente permet de démontrer immédiatement une propriété des hauteurs d'un triangle.

Rappelons qu'on appelle hauteur d'un triangle la droite contenant un sommet et perpendiculaire au côté opposé. Il y a donc trois hauteurs dans un triangle, une issue de chaque sommet. Par un abus de langage commode, on appelle aussi hauteur le segment d'une telle droite compris entre un sommet et le côté opposé, ou même la longueur de ce segment.

Une hauteur n'est pas nécessairement tracée à l'intérieur du triangle, comme le montre la seconde figure de la page de gauche.

La propriété promise des hauteurs résulte d'une construction très simple. Étant donné un triangle ABC, on trace par chaque sommet la parallèle au côté opposé, définissant ainsi un triangle A'B'C'. En observant les parallélogrammes tracés, on voit que AB' = AC', si bien que la hauteur issue de A dans le « petit triangle » est une médiatrice du « grand triangle ». Il en est de même pour les deux autres hauteurs.



L’orthocentre du triangle.

L’orthocentre d’un triangle

Attention

Comme les trois médiatrices présentées dans la notion précédente passent par un même point, le centre du cercle circonscrit au triangle A’B’C’, on a prouvé que les trois hauteurs du triangle ABC passent par un même point.

Les trois hauteurs d’un triangle passent par un même point. Ce point est appelé l’orthocentre du triangle.

Il suffit d'observer les droites perpendiculaires sur la figure ci-contre pour remarquer que, si H est l'orthocentre du triangle ABC, alors :

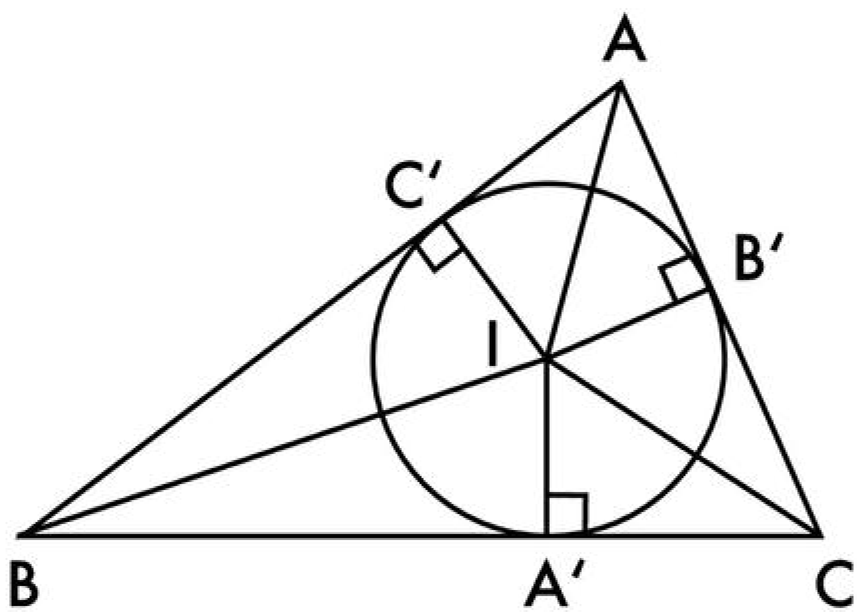
- C est l'orthocentre du triangle HAB ;
- A est l'orthocentre du triangle BCH ;
- B est l'orthocentre du triangle AHC.

Quatre points ainsi disposés forment une configuration riche de propriétés, qu'on appelle un quadrilatère orthocentrique.

Les bissectrices d’un triangle

Les bissectrices des trois angles d’un triangle sont appelées simplement bissectrices du triangle. Par un procédé analogue à celui qui a été utilisé pour les médiatrices, on peut prouver que :

Les trois bissectrices d’un triangle passent par un même point. Ce point est situé à égale distance des trois côtés du triangle. On l’appelle le centre du cercle inscrit.



Le cercle inscrit.

Le théorème de Pythagore

Vous n'êtes pas né de la dernière pluie, vous avez peut-être eu quelques soupçons lorsque nous avons évoqué les triangles de Pythagore. Ils ne sont rien d'autre que les triangles rectangles, et ce résultat était connu plus de dix siècles avant Pythagore.

Il existe plusieurs centaines de démonstrations du théorème de Pythagore, parmi lesquelles deux sont remarquables : l'une d'un mathématicien arabe du XIIe siècle, Baashi, et l'autre d'un auteur célèbre : le président des États-Unis, James Garfield.

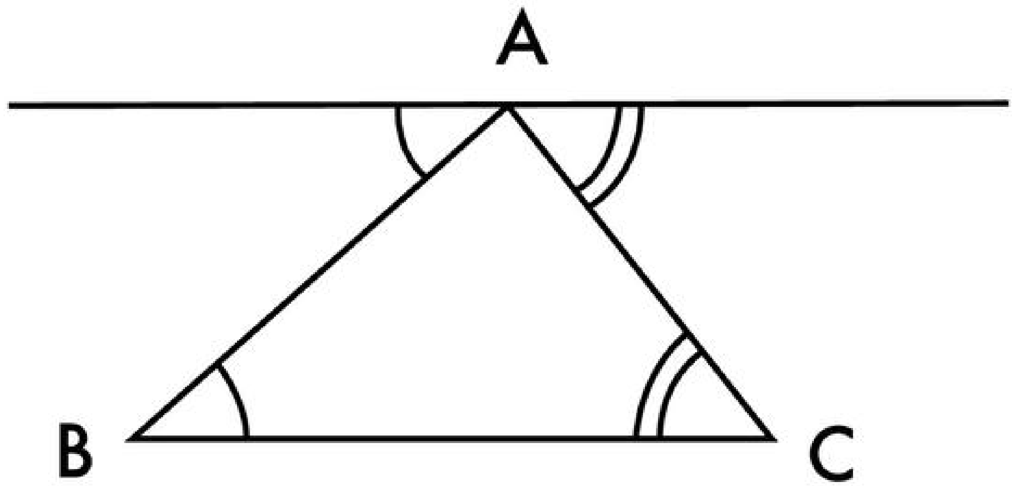
Le théorème de Pythagore est énoncé ainsi :

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Les Anciens, qui ne distinguaient pas le nombre sous la longueur, énonçaient ce théorème ainsi :

L'aire du carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la somme des aires des carrés construits sur les deux autres côtés.

Soit $a^2 + b^2 = c^2$.



La somme des angles d’un triangle.

Les angles du triangle

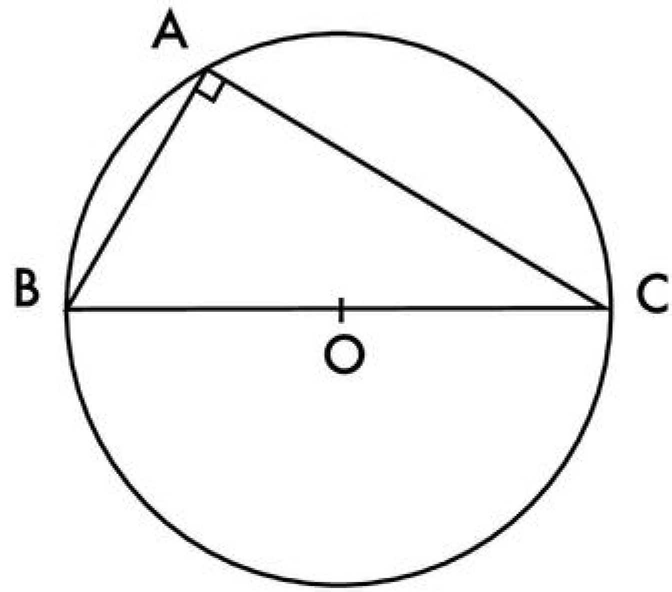
Nous avons déjà cité la proposition XX d’Euclide, une des plus célèbres, dont il a été prouvé qu’elle équivaut au cinquième postulat :

La somme des mesures des angles d’un triangle est égale à 180°.

Dans l’enseignement secondaire français, on déduit cette propriété de l’égalité des mesures de certains angles formés par deux droites parallèles et une sécante. Ce qui peut se formuler de la manière suivante :

Lorsqu'une droite coupe deux droites parallèles, les angles correspondants ont même mesure et les angles alternes-internes ont même mesure.

Pour un triangle arbitraire ABC, on trace alors la parallèle à (BC) contenant A (encore le cinquième postulat) et on note, d'après la propriété ci-dessus, les angles de même mesure, marqués de la même manière sur la figure. Il en résulte immédiatement que la somme des mesures du triangle ABC est 180° et que les trois angles d'un triangle équilatéral mesurent 60°.



Cercle circonscrit au triangle rectangle.

Le triangle rectangle et sa médiane

Il résulte de la propriété présentée dans la notion précédente qu’un triangle ne peut pas avoir deux angles droits : le troisième angle aurait une mesure nulle ! En revanche, il est possible qu’un triangle admette un angle droit : on l’appelle triangle rectangle et le côté opposé à l'angle droit est appelé l'hypoténuse.

Les deux autres angles sont aigus et la somme de leurs mesures est 180 – 90, soit 90°.

Lorsque les deux angles aigus ont la même mesure, cette mesure est la moitié de 90°, soit 45°, et le triangle est isocèle (on le dit rectangle isocèle). On le reconnaît souvent comme la moitié d'un carré.

Comme pour tout triangle, on peut tracer trois médianes dans un triangle rectangle. L'une d'elles, qui joint le sommet de l'angle droit au milieu de l'hypoténuse, a une propriété intéressante : sa longueur est la moitié de celle de l'hypoténuse.

On peut l'énoncer d'une autre façon, utile pour de nombreuses applications :

Le cercle ayant pour diamètre l'hypoténuse d'un triangle rectangle passe par le sommet de l'angle droit.

Les quadrilatères familiers – les longueurs des côtés

On ne peut pas « téléphoner » un quadrilatère aussi simplement qu'un triangle : avec quatre côtés de longueurs données, on peut normalement fabriquer un quadrilatère, mais il est déformable.

Cependant, avec certaines longueurs, on peut reconnaître des quadrilatères particuliers.

Quatre côtés de même longueur : un quadrilatère dont les quatre côtés ont la même longueur est un losange.

On vérifie aisément que chaque diagonale est la médiatrice de l'autre, autrement dit que les diagonales se coupent à angle droit en leur milieu.

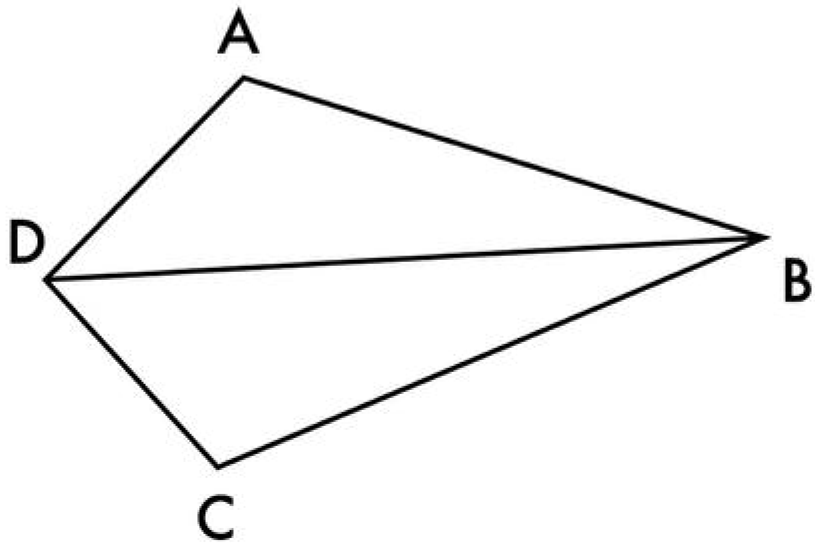
Deux côtés de même longueur : quand deux couples de côtés ont même longueur, il faut déterminer s'il s'agit des côtés opposés ou des côtés consécutifs.

Les côtés opposés : un quadrilatère convexe dont les côtés opposés ont deux à deux la même longueur est un parallélogramme.

On vérifie aisément que les diagonales se coupent en leur milieu.

Les côtés consécutifs : un quadrilatère dont les côtés consécutifs ont deux à deux la même longueur est un cerf-volant.

On vérifie aisément que les diagonales se coupent à angle droit : l'une d'elles est la médiatrice de l'autre.



La somme des angles du quadrilatère ABCD est de 360º.

Les quadrilatères familiers – les angles

Certains quadrilatères convexes se reconnaissent assez simplement grâce à leurs angles. En tout cas, une propriété s'applique à tous les quadrilatères convexes : la somme des mesures de ses quatre angles est 360º.

Exemple

Prenons un quadrilatère convexe arbitraire et traçons une diagonale.

Les mesures des angles $A + B' + D' = 180^\circ$ (somme des mesures des angles du triangle ABD) et celles des angles $C + B'' + D'' = 180^\circ$ (somme des mesures des angles du triangle CBD).

Il suffit d'additionner ces deux relations pour pouvoir écrire $A + B' + D' + C + B'' + D'' = 360^\circ$ et de remplacer $B' + B''$ par B, puis $C' + C''$ par C, pour obtenir $A + B + C + D = 360^\circ$.

Cependant, avec certaines propriétés des angles, on peut reconnaître des quadrilatères particuliers (voir notion suivante).

La formule de Brahmapoutre

Nous avons rencontré plus haut une très ancienne formule, la formule de Héron, que certains font remonter à Archimède, pour calculer S l'aire d'un triangle lorsqu'on connaît seulement les longueurs a, b, c des côtés :

$$S^2 = p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)$$

Dans cette formule, $2p$ désigne le périmètre $a + b + c$ du triangle.

Les géomètres anciens utilisent une formule analogue pour calculer l'aire d'un quadrilatère convexe. Si les longueurs des côtés sont notées a, b, c, d et le périmètre $a + b + c + d$ est noté encore $2p$, ils recourent à une généralisation de la formule de Héron :

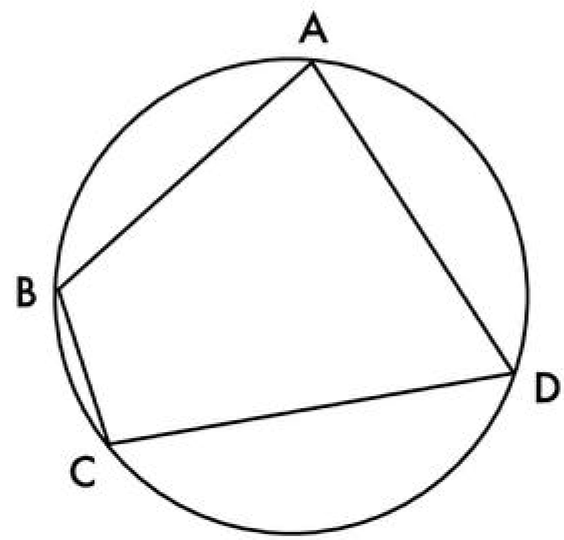
$$S^2 = (p - a)\,(p - b)\,(p - c)\,(p - d)$$

Cette formule, dite de Brahmapoutre, semble « raisonnable ». Par exemple, si la longueur d est « minuscule », le quadrilatère est « presque » un triangle (il a deux sommets très proches) et la formule s'apparente à celle de Héron. Ou encore, appliquée au rectangle, elle devient la formule élémentaire S = *ab*.

Malgré ces promesses, la formule est fausse ! Il y a à cela une raison évidente : avec les longueurs des quatre côtés, on peut construire un quadrilatère déformable, autrement dit plusieurs quadrilatères dont les aires sont différentes !

En fait, la formule de Brahmapoutre est exacte dans un seul cas : si les quatre points sont sur un même cercle (on dit que le quadrilatère est inscriptible).

Si elle a pu être utilisée comme une approximation pendant des siècles, c'est que les quadrilatères examinés étaient « presque » inscriptibles.



Représentation d’un quadrilatère inscriptible.

Les quadrilatères complets

Voici une histoire qui ne fait rire que les initiés. En descendant du train, un professeur de mathématiques veut monter dans un autobus de la ligne C, « Gare centrale, Quadrilatère ». Il se présente pour monter et demande : « Quadrilatère ? » Le conducteur lui répond : « C'est complet ! »

Pour apprécier l'histoire, il faut avoir entendu parler du quadrilatère complet ; c'est la figure formée par quatre droites telles que :

- jamais trois d'entre elles ne passent par le même point ;
- jamais trois d'entre elles ne sont parallèles.

En fait, ce n'est rien d'autre que ce que nous avons appelé jusqu'ici quadrilatère, à cela près que l'on suppose tracées les droites qui portent les côtés.

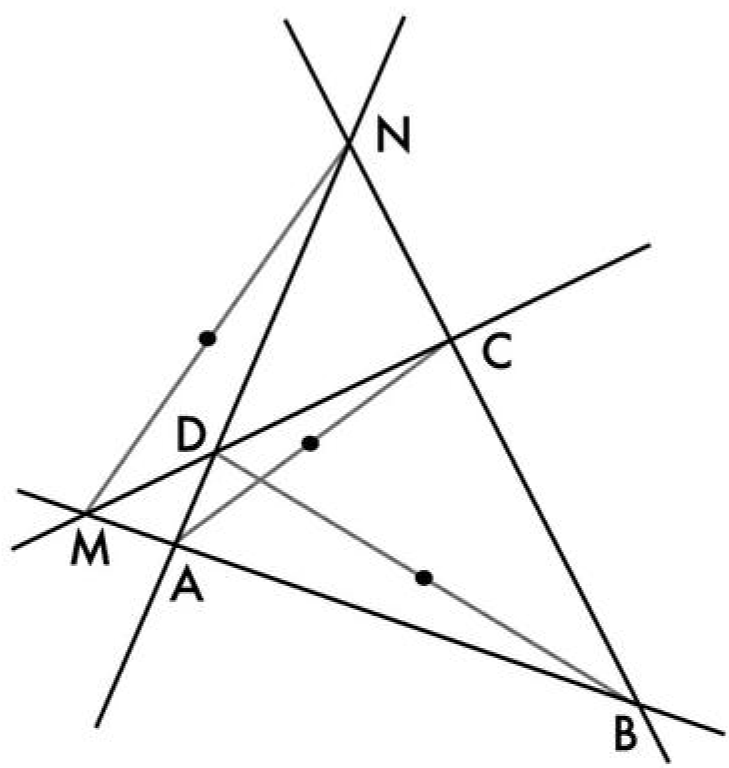
Du même coup, on peut définir trois « diagonales » dans un quadrilatère complet : sur notre figure, ce sont les droites (ou les segments) [AC], [BD] et [MN].

Attention

C'est là qu'intervient un théorème étonnant, car il a fallu très peu d'hypothèses pour arriver à cette figure. Il s'agit du théorème de Newton :

Les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés.

La droite qui les contient est souvent appelée droite de Newton du quadrilatère.



Représentation de la droite de Newton.

Les quadrilatères particuliers

D'après la notion précédente, lorsqu'un quadrilatère possède trois angles droits, le quatrième angle, qui mesure $360 - 90 - 90 - 90 = 90$, est lui aussi droit.

Un quadrilatère dont les quatre angles sont droits est un rectangle.

On vérifie aisément que les côtés opposés ont même longueur, donc qu'un rectangle est un parallélogramme, et que les diagonales sont de même longueur.

Lorsque deux couples d'angles ont la même mesure, il faut déterminer s'il s'agit des angles opposés ou des angles consécutifs.

Les angles opposés : un quadrilatère dont les angles opposés ont deux à deux la même mesure est un parallélogramme. On vérifie aisément que les diagonales se coupent en leur milieu.

Les angles consécutifs : un quadrilatère dont les angles consécutifs ont deux à deux la même mesure est un trapèze.

On vérifie aisément que deux côtés opposés sont parallèles et que les deux autres ont même longueur. C’est pourquoi un tel trapèze est dit isocèle, pour le distinguer des autres trapèzes qui ont simplement deux côtés opposés parallèles. On vérifie que, pour un trapèze isocèle, les diagonales ont la même longueur.

L’aire des rectangles

L’idée d’aire est sans doute presque aussi ancienne que celle de longueur. L’aire d’un champ permet d’évaluer la récolte qu’on espère en tirer. L’aire d’une étoffe tissée d’or permet d’en évaluer le coût.

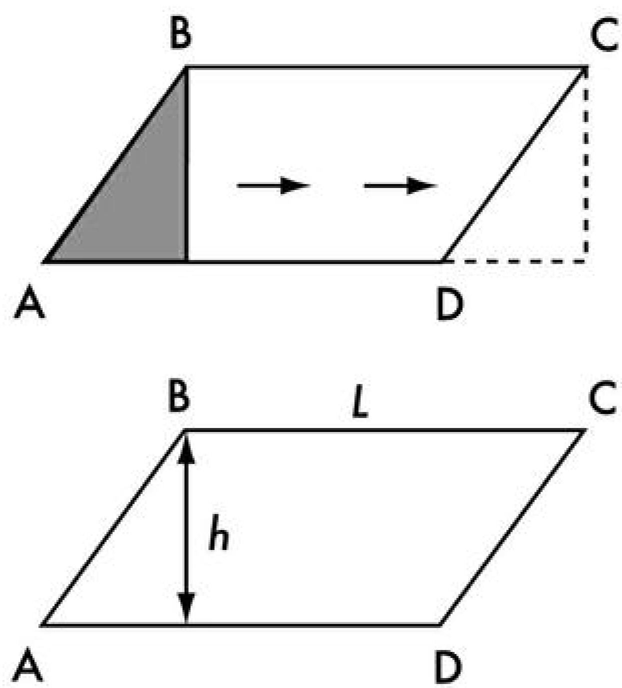
C’est sans doute par des champs rectangulaires que la recherche de formules de calcul a commencé. On peut, par la pensée ou par un tracé sur le sol, diviser un champ de 4 mètres sur 9 en carrés de 1 mètre de côté et diviser aussi un champ de 6 mètres sur 6. Dans les deux cas, on obtient 36 lopins de même forme (des carrés) et de même dimension (1 mètre de côté).

Ce sont ces carrés qu’on peut choisir comme unité d’aire, naturellement appelée le mètre carré (et notée m^2). On généralise cette formule en écrivant :

L’aire d’un rectangle est égale au produit des longueurs de sa largeur et de sa longueur.

Les carrés sont des rectangles particuliers. La formule est donc valable aussi pour les carrés : la longueur L et la largeur l sont égales au côté a du carré et l'aire est simplement : $L \times l = a^2$.

C'est d'ailleurs l'origine de la prononciation « a au carré » pour le produit d'un nombre a par lui-même.



Il est possible de calculer l'aire du parallélogramme en le transformant en rectangle.

L’aire des parallélogrammes

Prenons un parallélogramme ABCD. Deux des côtés parallèles, arbitrairement choisis (l’usage est de les dessiner horizontalement), reçoivent le nom de bases. La distance entre les bases est appelée la hauteur du parallélogramme.

Observons maintenant les aires des différentes parties de la figure de la page de gauche. Les triangles grisé et en pointillés sont superposables, donc de même aire. Si l’on fait glisser le triangle gris comme indiqué sur la figure, on fait apparaître un rectangle qui a la même aire que le parallélogramme.

Par conséquent, l’aire A d’un parallélogramme est égale au produit de la longueur de sa base par sa hauteur : A = L × h.

L’aire des triangles

Prenons un triangle ABD. Un des côtés, arbitrairement choisi (l’usage est de le dessiner horizontalement), reçoit le nom de base. La distance du sommet opposé à la base est la hauteur associée à cette base.

Prenons le milieu d’un des deux autres côtés et « doublons » la figure symétriquement autour de ce milieu. On constitue ainsi un parallélogramme, dont la base et la hauteur sont respectivement la base et la hauteur de notre triangle.

L’aire du parallélogramme est le double de l’aire du triangle ABD et il en résulte immédiatement :

L’aire d’un triangle est égale au demi-produit des longueurs de la base et de la hauteur associée.

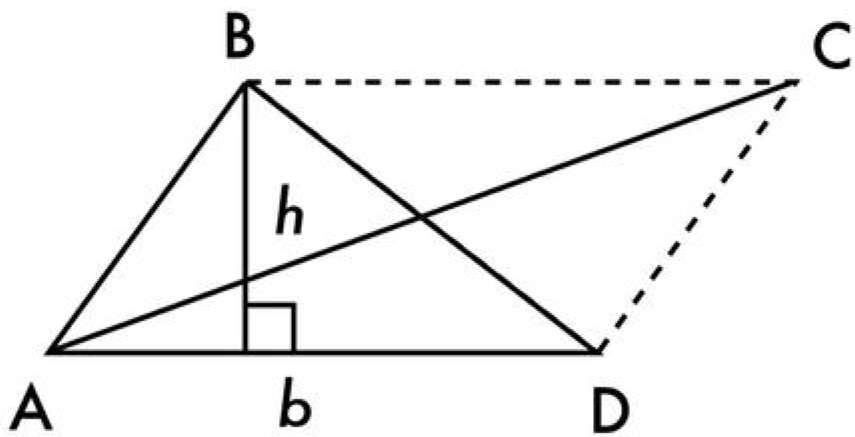
$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\, b \times h$$

Tout triangle a trois hauteurs, donc on dispose de trois façons de calculer son aire :

$$A = \frac{1}{2}\, a \times h_a = \frac{1}{2}\, b \times h_b = \frac{1}{2}\, c \times h_c$$

Dans le cas particulier d'un triangle rectangle, on peut choisir pour base un des côtés de l'angle droit. L'autre côté de l'angle droit est alors la hauteur associée, et la formule se simplifie ; l'aire d'un triangle rectangle est égale au demi-produit des longueurs des côtés de l'angle droit :

$$A = \frac{1}{2}\, L \times l$$



Il est possible de calculer l'aire du triangle en le doublant en un parallélogramme.

Le cercle

Longtemps avant l'invention de la roue, nos ancêtres connaissaient des figures circulaires : le soleil, la lune parfois, des troncs d'arbre, la surface de l'eau juste après l'impact d'un caillou. Un animal attaché à un piquet par une corde peut brouter une partie de prairie limitée par un cercle...

Si ancien que soit cet exemple, il est à la base de la définition du cercle qu'on trouve encore aujourd'hui dans les manuels scolaires :

Le cercle est l'ensemble des points situés à une distance donnée d'un point donné, appelé le centre du cercle.

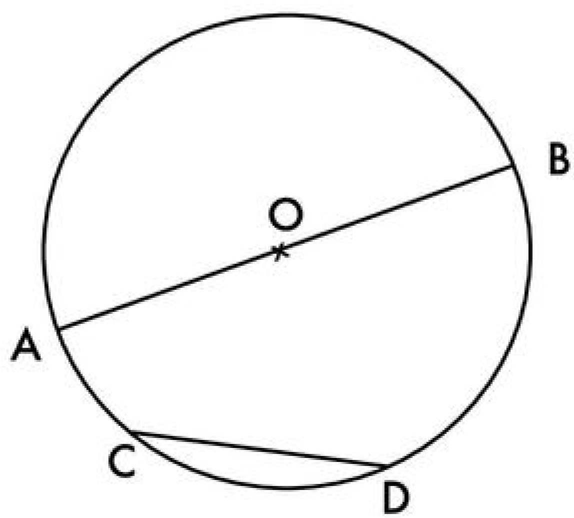
La distance de n'importe quel point du cercle au centre est appelée le rayon. Suivant un abus de langage habituel, le mot rayon a un triple sens :

- le segment dont les extrémités sont un point du cercle et le centre ;
- la longueur de ce segment ;

- la mesure de cette longueur avec une unité donnée.

Voici les définitions essentielles :

- Tout segment joignant deux points d'un cercle est appelé une corde.
- Une corde qui passe par le centre est appelée un diamètre (ce terme a un triple sens, comme le mot rayon).
- La partie de cercle limitée par deux de ses points est un arc de cercle.
- La partie de plan limitée par un cercle est appelée un disque.



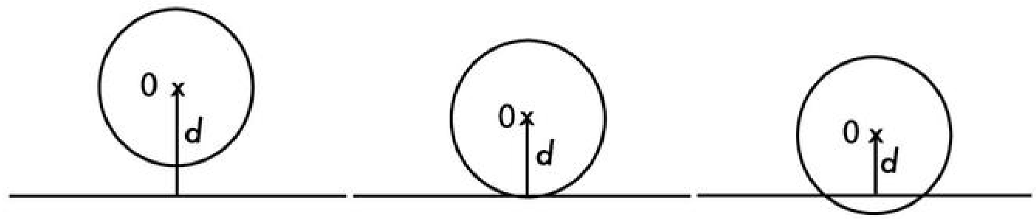
[AB] est un diamètre, [CD] est une corde.

La tangente des cercles

La configuration formée par un cercle et une droite peut revêtir plusieurs aspects.

- Dans le premier cas, la droite et le cercle n'ont aucun point commun.
- Dans le deuxième cas, la droite et le cercle ont exactement un point commun : on dit la droite tangente au cercle.
- Dans le troisième cas, la droite et le cercle ont deux points communs : on dit la droite sécante au cercle.

Les propriétés de ces figures se trouvent dans les *Éléments* d'Euclide. Il y démontre en particulier que la tangente au cercle en un point M est perpendiculaire au rayon en M.



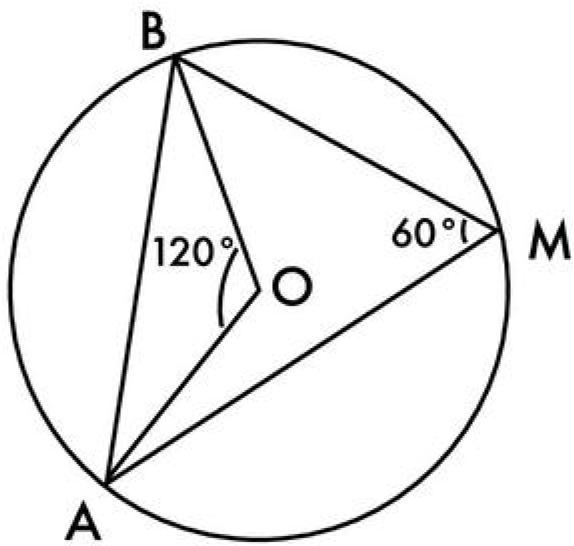
Les différents aspects de l’association entre un cercle et une droite.

Le théorème des isopérimètres

Sous ce nom un peu crypté se cache une idée simple : pour disposer une ficelle sur une feuille de papier en sorte qu'elle délimite l'aire la plus grande possible, il faut lui donner la forme d'un cercle. Cela peut s'exprimer de façon plus académique :

De toutes les figures de périmètre donné, c'est le cercle qui enferme l'aire la plus grande.

Le même théorème vaut dans l'espace pour la sphère et explique que l'on rencontre tant de sphères dans la nature. De toutes les enveloppes qu'on peut constituer avec un morceau de peau d'aire donnée, celle qui contient le plus grand volume a la forme d'une sphère. Ainsi s'explique la forme du soleil, des astres ou des bulles de savon.



Représentation de l'angle au centre et de l'angle inscrit.

Arcs et angles

Pour observer un arc de cercle, deux positions présentent un vif intérêt : le centre du cercle ou un point situé sur le cercle. Ainsi se trouvent définis :

- l'angle au centre interceptant l'arc AB ;
- l'angle inscrit de sommet M interceptant l'arc AB.

On peut démontrer sans trop de difficulté le théorème fondamental suivant :

Dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit est la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Sur la figure de la page de gauche, l'angle au centre mesure 120° et l'angle inscrit associé mesure 60°.

De ce théorème résultent immédiatement deux conséquences fort utiles :

- Deux angles inscrits dans un même cercle qui interceptent le même arc ont la même mesure. (En effet, le double de leurs mesures est la mesure d'un seul et même angle au centre.)
- Un angle qui s'inscrit exactement dans un demi-cercle est un angle droit. (En effet, le double de sa mesure est la mesure d'un angle plat, soit 180°.)

L’admirateur de l’obélisque

Place de la Concorde à Paris se dresse un obélisque offert en 1831 à la France par Méhémet-Ali. Un admirateur qui se place très loin le verrait tout petit, comme un admirateur qui se placerait très près. À quelle distance du monument faut-il se placer pour le voir sous l’angle le plus grand possible ?

La meilleure position est facile à déterminer si l’on utilise la propriété du cercle précédemment rappelée. Des angles inscrits qui interceptent le même arc ont même mesure. Prenons alors une position imaginable du spectateur et traçons le cercle circonscrit au triangle MAB (A et B marquant le pied et le sommet du monument).

Ce cercle a un point M commun avec la droite D ; par conséquent, ou bien il a un second point commun P, ou bien la droite D est tangente en M au cercle.

Supposons que le cercle et D ont deux points communs, M et P.

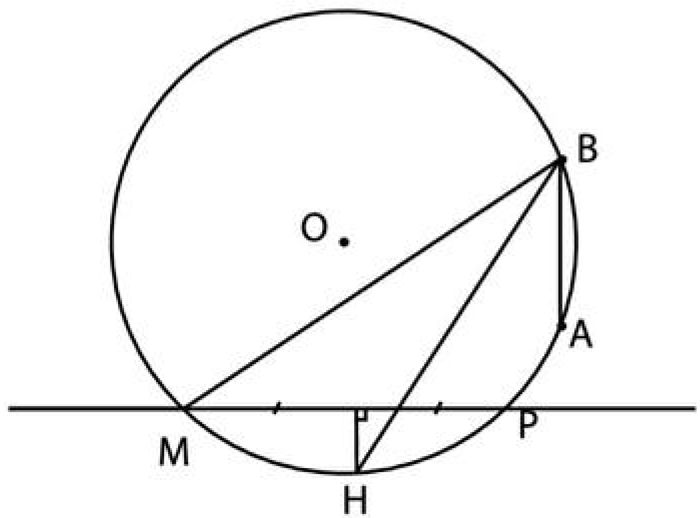
Appelons H le point situé sur la médiatrice de [MP] et sur ce cercle, du côté opposé à l'obélisque par rapport à D.

Les angles AMB et AHB ont même mesure.

Mais si l'on se déplace sur cette médiatrice en partant de H, on agrandit l'angle sous lequel on voit le monument. C'est vrai en particulier lorsque l'on se place au milieu de [MP], qui est donc un point plus favorable que M.

On a ainsi montré que, chaque fois que le cercle circonscrit au triangle ABM recoupe la droite D, M n'est pas la meilleure position.

Il faut donc choisir M en sorte que le cercle circonscrit au triangle ABM soit tangent à D.



Représentation graphique pour déterminer la meilleure distance pour voir l'obélisque.

Le partage du gâteau

Il suffit d'avoir déjà organisé un goûter d'enfants pour garder un souvenir douloureux du partage du gâteau. Gare aux cris si les parts ne sont pas parfaitement égales ! Sur un dessin et avec l'aide d'un rapporteur, ce n'est pas très difficile. On divise 360 par le nombre de parts et cela donne l'angle au centre qui correspond à chaque part. Par exemple, pour cinq parts, l'angle au centre est 72°.

Si, sur le cercle, on joint chaque point de coupe à ses voisins, on obtient un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles la même mesure. Dans notre exemple à cinq parts, un angle du polygone est un angle inscrit qui intercepte les arcs correspondant à trois côtés, soit une mesure de : $3 \times 72 = 216°$.

Chaque angle du polygone mesure donc 108°.

Cette méthode peut être renouvelée pour un nombre quelconque de côtés. Ces polygones, du moins pour un petit nombre de côtés, ont un nom particulier, qui nous donne aussi la mesure des angles :

- 3 côtés triangle angles de 60°
- 4 côtés carré angles de 90°
- 5 côtés pentagone angles de 108°
- 6 côtés hexagone angles de 120°
- 7 côtés heptagone angles de 128,57... °
- 8 côtés octogone angles de 135°
- 10 côtés décagone angles de 144°

Quatre points sur un cercle

Nous savons que, par trois points non alignés, il passe un cercle et un seul, le cercle circonscrit au triangle ainsi défini. Si l'on se donne quatre points quelconques, il n'y a aucune raison pour que le cercle passant par trois d'entre eux passe aussi par le quatrième. C'est donc un vrai « plus » de dire que quatre points sont cocycliques (ou qu'un quadrilatère est inscriptible). Par exemple, nous avons déjà vu que la formule de Brahmapoutre s'applique à un quadrilatère inscriptible, mais pas à un quadrilatère quelconque.

Il existe quelques autres propriétés, dont l'énoncé peut revêtir diverses formes.

Les cordes sécantes : *si deux cordes d'un cercle se coupent en un point P, le produit des distances de P aux extrémités de chaque corde est le même.*

Le théorème de Ptolémée : il a été publié par l'astronome Claude Ptolémée, au Ier siècle de notre ère. Ptolémée l'a utilisé pour calculer des tables trigonométriques. Il s'énonce ainsi :

Dans un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.

La réciproque est exacte : si cette relation est vérifiée, le quadrilatère est inscriptible.

Les angles d'un quadrilatère inscriptible

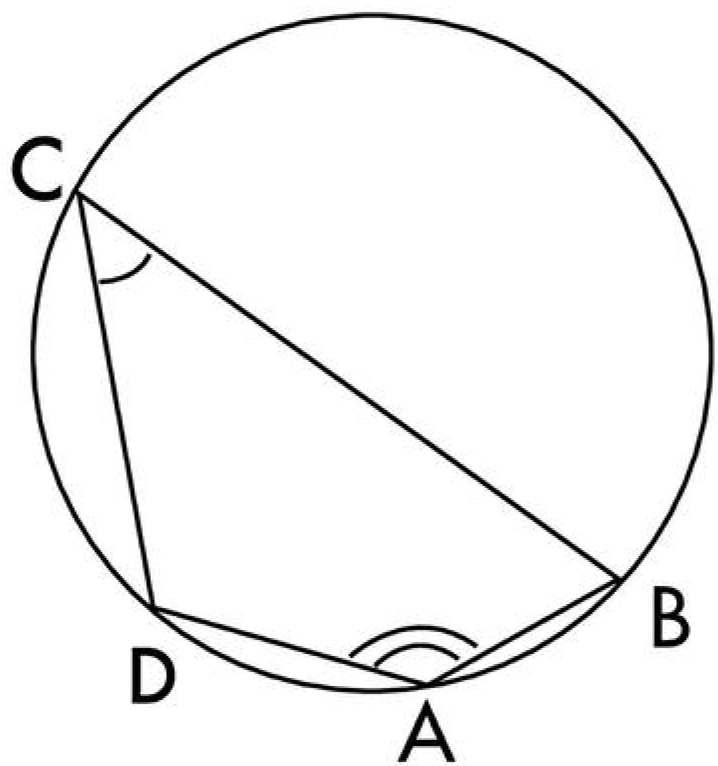
Le théorème de Ptolémée permet de caractériser un quadrilatère inscriptible en utilisant les distances mutuelles de ses quatre sommets. Mais on peut aussi reconnaître un quadrilatère inscriptible à ses angles. Il faut ici distinguer les quadrilatères selon qu'ils sont droits ou croisés.

Les quadrilatères droits : observons le quadrilatère ABCD, et plus particulièrement deux de ses sommets opposés, par exemple A et C. Ce sont des angles inscrits et les deux angles au centre associés couvrent la totalité du cercle, soit 360°. Par conséquent, la somme des mesures de A et de C est 180° ; on dit que ces angles sont supplémentaires.

On peut prouver que, réciproquement, lorsque deux angles opposés d'un quadrilatère droit sont supplémentaires, ce quadrilatère est inscriptible.

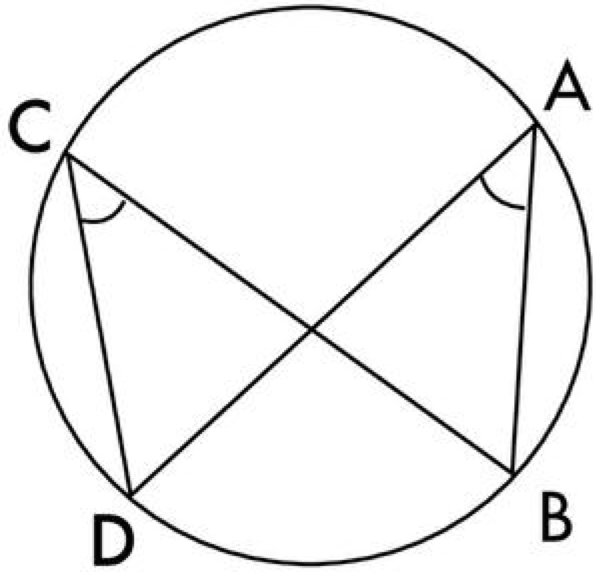
Il en résulte une conséquence amusante : comme les angles opposés d’un parallélogramme ont même mesure, un parallélogramme inscriptible a deux angles qui sont en même temps supplémentaires et de même mesure, autrement dit deux angles droits. C’est donc un rectangle :

Tout parallélogramme inscriptible est un rectangle.



Angles opposés d’un quadrilatère droit inscriptible.

Les quadrilatères croisés : observons le quadrilatère ABCD, et plus particulièrement deux de ses sommets opposés, par exemple A et C. Ce sont des angles inscrits et ils sont associés au même arc de cercle. Par conséquent, ils ont même mesure. On fait la même remarque sur les angles en B et D.



On peut prouver que, réciproquement, lorsque deux angles opposés d'un quadrilatère croisé ont même mesure, ce quadrilatère est inscriptible.

Le nombre π : des Babyloniens aux Égyptiens

Histoire

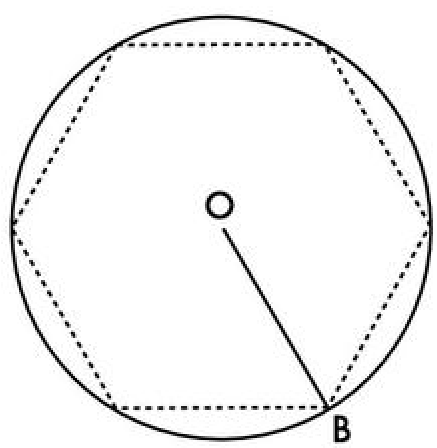
Vingt siècles avant notre ère, les Babyloniens savaient que le rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre était le même pour tous les cercles. Ce rapport est l'un des nombres les plus célèbres, que nous appelons aujourd'hui π, et cette constance s'exprime dans la formule $L = \pi D$, dans laquelle L désigne la circonférence et D le diamètre d'un même cercle.

La lettre π, qui se prononce « pi », est l'initiale du mot grec signifiant périmètre. Attribuée au mathématicien anglais William Jones (1675-1749), cette notation avait été employée par Ludolph Van Ceulen (1539-1610), mais c'est l'*Introduction à l'analyse infinitésimale*, publiée en 1748 par Euler, qui en généralisa l'usage.

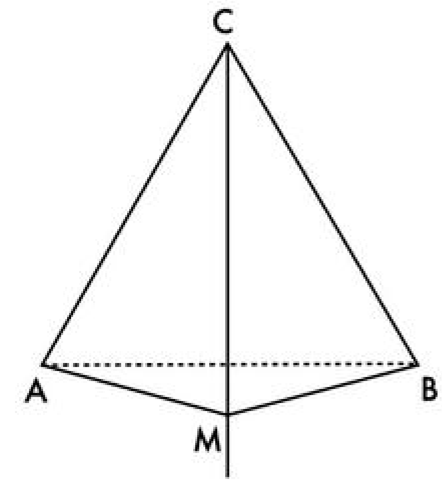
Les Babyloniens utilisaient pour ce rapport la valeur $3 + \frac{7}{60} + \frac{30}{3\,600}$, soit, dans notre notation moderne, environ 3,125. Au British Museum est conservé un manuscrit provenant du temple mortuaire de Ramsès II à Thèbes, appelé le papyrus Rhind (du nom de son acquéreur), ou papyrus d'Ahmès, du nom du scribe qui écrivit ce document vers 1650 avant J.-C. C'est en fait un recueil d'exercices et l'un d'eux propose la valeur $(\frac{16}{9})^2$, soit environ 3,16. On y trouve aussi une propriété mettant en jeu l'aire du disque.

Quête de la précision de la valeur de π

Que π soit défini comme la longueur d'un cercle de diamètre 1 ou comme l'aire limitée par un cercle de rayon 1, toute figure géométrique « proche » du cercle permet d'approcher ce nombre. Archimède est le premier à avoir proposé une méthode de calcul dont on peut pousser la précision à volonté. Il part d'un hexagone régulier, dont le côté est donc égal au rayon du cercle, et le périmètre à six fois le rayon, ou trois fois le diamètre (en somme, il donne 3 pour approximation de π).



Ensuite, il donne le moyen de calculer la longueur AM + MB à partir de AB, autrement dit de doubler le nombre de côtés du polygone régulier inscrit.



Avec une patience qui force l'admiration, il recommence ce doublement, avec des polygones de 12, 24, 48, 96 côtés. Comme il observe simultanément un polygone circonscrit, il peut donner un encadrement de la circonférence du cercle de rayon 1, entre $\frac{223}{71}$ et $\frac{220}{70}$.

Telle est la méthode d'Archimède, qui servira à tous les géomètres pendant dix-sept siècles. Une mention particulière et attendrie doit être faite à Ludolph Van Ceulen, qui consacra vingt ans de sa vie à calculer le périmètre de polygones réguliers de 15, 30, 60... et ainsi de suite en doublant 37 fois le nombre des côtés.

En hommage à ses efforts qui nous semblent aujourd'hui bien dérisoires, π fut parfois appelé la constante ludolphinienne. On grava sur sa tombe les décimales auxquelles il avait consacré tant d'efforts.

La nature de π

De siècle en siècle, la course à la précision de π s'intensifie. Naturellement, on a eu longtemps l'espoir de trouver une réponse exacte et simple : une valeur décimale ou une fraction. Certains auteurs anciens ont cru que $\frac{22}{7}$ et plus tard $\frac{355}{113}$ étaient la vraie valeur de π. Puis, les années passant et la liste des décimales s'allongeant, certains se sont demandé si cette recherche pouvait un jour finir.

Il a fallu attendre Lambert, en 1761, pour avoir la preuve que π ne peut pas s'écrire comme une fraction de deux nombres entiers. On dit que c'est un nombre irrationnel.

Par la suite, on a espéré trouver une équation algébrique à coefficients entiers, du type de $14x^3 - 3x^2 + 7x - 11 = 0$, dont π serait une racine (on aurait dit alors que c'était un nombre algébrique).

Il a fallu attendre 1881 pour que Lindemann prouve que c'était impossible, montrant du même coup l'impossibilité de construire une telle longueur à la règle et au compas, la célèbre quadrature du cercle. Ces découvertes n'ont pas mis fin à la recherche d'approximations de plus en plus poussées.

On ignore les méthodes utilisées avant Archimède. La sienne fut la seule connue jusqu'à Newton (1671), qui découvrit des séries (sommes infinies de termes de plus en plus petits) permettant de calculer des valeurs approchées sans support géométrique. La notion suivante présente quelques étapes de ces calculs.

Le calcul de π à travers les âges

Qui ?	Quand ?	Décimales exactes ou valeurs approchées
Égyptiens	– 2000	$\left(\frac{16}{9}\right)^2$
Babyloniens	– 2000	$3+\frac{1}{8}$
Bible	– 550	3 décimales
Archimède (6 côtés, puis 4 doublements)	– 250	$\frac{22}{7}$
Ptolémée (45 côtés, puis 4 doublements)	150	$3+\frac{8}{60}+\frac{30}{3\,600}$
Liu Hui (6 côtés, puis 9 doublements)	263	5 décimales
Zu Chong Chi	480	$\frac{355}{113}$
Aryabhata	499	4 décimales
Brahmapoutre	640	$\sqrt{10}$

Fibonacci	1220	3 décimales
Al-Kashi (6 côtés, puis 27 doublements)	1424	14 décimales
Viète (6 côtés, puis 16 doublements)	1579	9 décimales
Van Roomen (4 côtés, puis 28 doublements)	1593	15 décimales
Van Ceulen (15 côtés, puis 37 doublements)	1596	20 décimales
Van Ceulen (15 côtés, puis 58 doublements)	1610	35 décimales
Grienberger	1630	39 décimales
Sharp	1699	71 décimales
Machin	1706	100 décimales
De Lagny	1719	112 décimales
Vega	1789	126 décimales
Vega	1794	136 décimales
Rutherford	1841	152 décimales
Dahse	1844	200 décimales
Clausen	1847	248 décimales
Lehmann	1853	261 décimales

Shanks	1853	527 décimales
Ferguson	1945	530 décimales
Ferguson	1946	620 décimales (dernier calcul sans aide informatique)

Ensuite commença la course au gigantisme informatique. En 2002, une équipe de l'université de Tokyo publia plus de 1 200 milliards de décimales et la compétition se poursuit. Sous le pseudonyme de Houkouonchi, un chercheur a publié 13 300 milliards de décimales (octobre 2014). En novembre 2016, ce record était doublé.

La symétrie axiale

Peu différent de l'usage du vocabulaire courant, le vocabulaire mathématique donne le nom de symétries à deux transformations simples, la symétrie par rapport à une droite, ou symétrie axiale, et la symétrie par rapport à un point, ou symétrie centrale.

Une droite D est donnée, qui sera appelée l'axe de la symétrie. Si l'on prend dans le plan un point M arbitraire, on vérifie qu'il existe un point M' et un seul tel que D soit la médiatrice du segment [MM']. C'est ce point qui est appelé le symétrique de M par rapport à D.

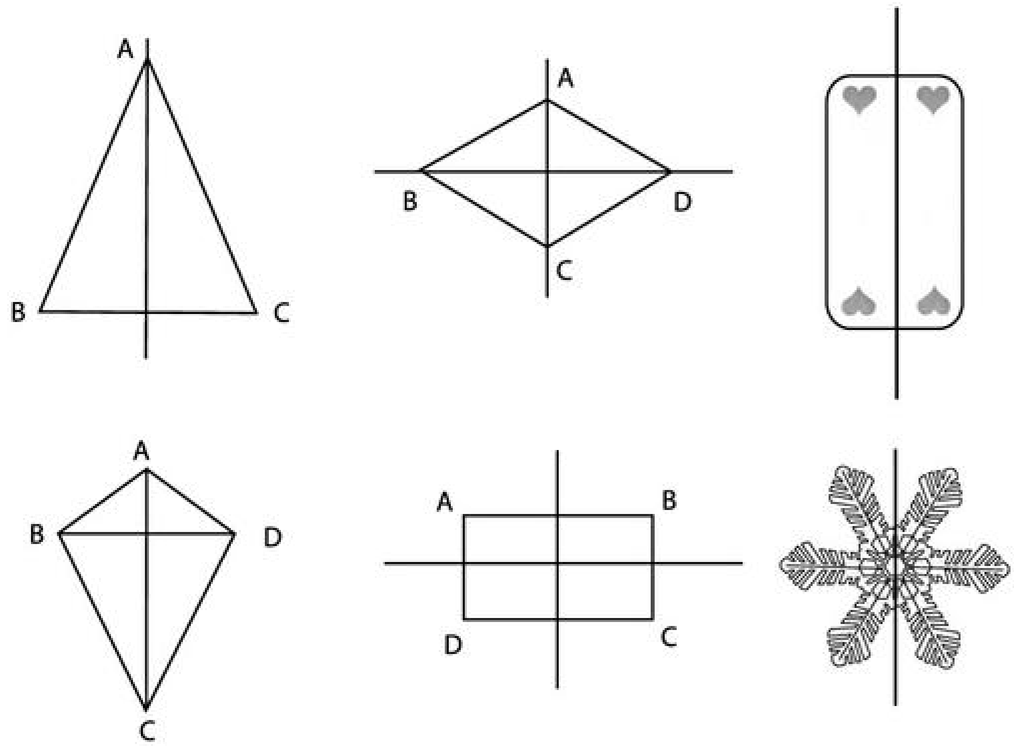
Réalisation matérielle : on matérialise souvent la transformation en imaginant qu'on plie la feuille de papier autour de la droite D. Le point M vient alors s'appliquer sur son symétrique.

Propriétés immédiates : on vérifie assez simplement quelques propriétés de cette transformation, appelée symétrie d'axe D :

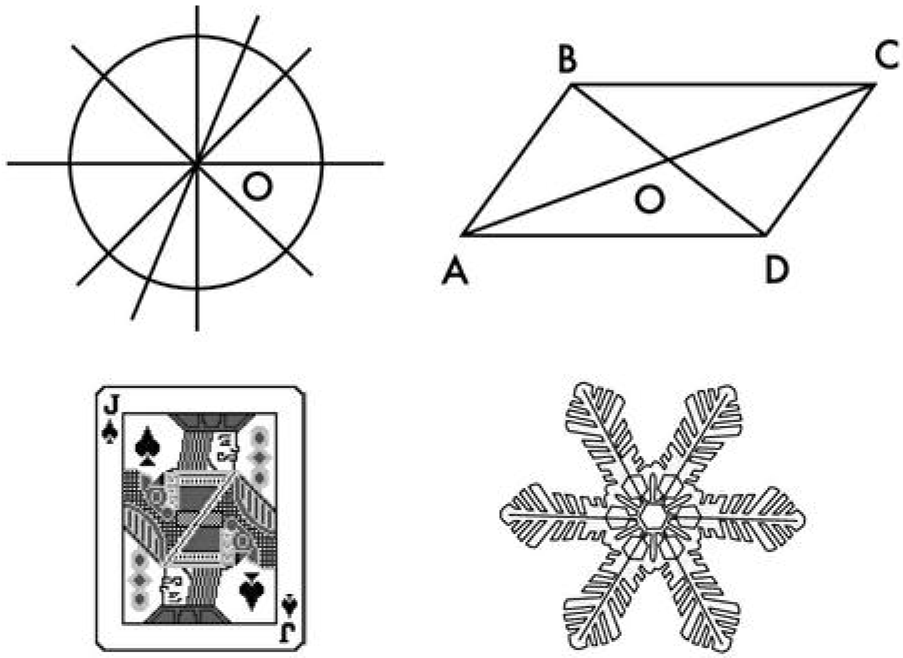
- Tout point de D est transformé en lui-même (on dit qu'il est invariant).
- Seuls les points de D sont invariants.
- La distance M'N' des images de deux points M et N est égale à la distance MN.

Cette dernière propriété exprime que les symétries axiales sont des isométries.

Axe de symétrie : lorsqu'une figure coïncide avec son image dans la symétrie par rapport à une droite D, cette droite est dite axe de symétrie de la figure. De nombreuses figures géométriques ou naturelles présentent un axe de symétrie, ou même plusieurs. En voici quelques-unes :



Quelques exemples d’axes de symétrie.



Quelques exemples de centres de symétries.

La symétrie centrale

Un point O est donné, qui sera appelé le centre de la symétrie. Si l'on prend dans le plan un point M arbitraire, on vérifie qu'il existe un point M' et un seul tel que O soit le milieu du segment [MM']. C'est ce point qui est appelé le symétrique de M par rapport à O.

On matérialise souvent la transformation en imaginant qu'on pique une épingle en O et qu'on fait subir à la feuille un demi-tour : le point M vient alors s'appliquer sur son symétrique.

Propriétés immédiates : on vérifie assez simplement quelques propriétés de cette transformation, appelée parfois demi-tour :

- Le point O est transformé en lui-même (il est invariant).
- Seul O est invariant.
- La distance M'N' des images de deux points M et N est égale à la distance MN.

Cette dernière propriété exprime que les symétries centrales sont des isométries.

Centre de symétrie : lorsqu'une figure coïncide avec son image dans la symétrie par rapport à un point O, ce point est dit centre de symétrie de la figure. De nombreuses figures géométriques ou naturelles présentent un centre de symétrie.

Composer des symétries : axes confondus, parallèles et perpendiculaires

Lorsqu'on effectue successivement deux transformations, on dit qu'on les compose. Une première transformation donne M' pour image d'un point M, une seconde donne M'' pour image de M', et la transformation qui donne M'' pour image de M est appelée composée des deux transformations.

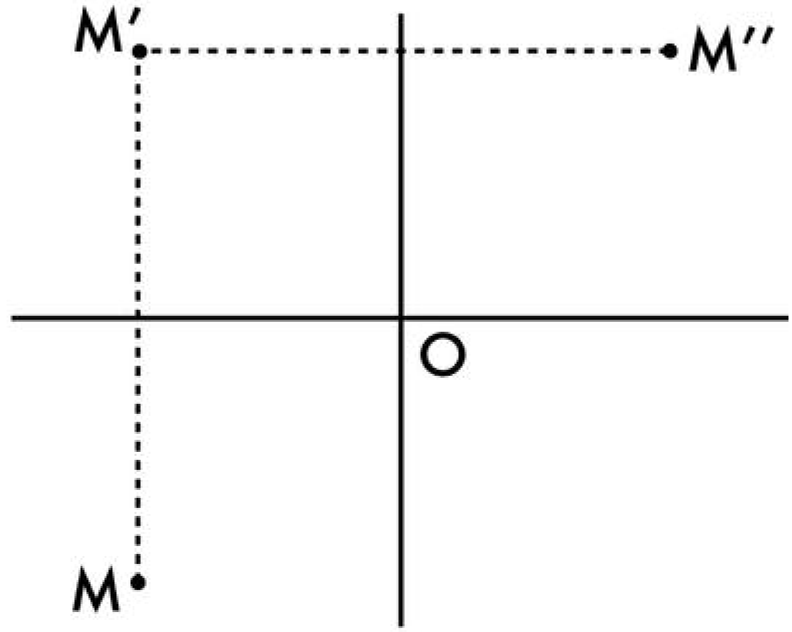
Symétries axiales – axes confondus : en utilisant la définition même de cette transformation, on voit que, si M' est l'image de M dans la symétrie d'axe D, alors M est l'image de M'. Autrement dit, la composée d'une symétrie axiale avec elle-même est l'identité.

Symétries axiales – axes parallèles : lorsqu'on compose deux symétries d'axes parallèles, on vérifie que la droite (MM'') a la même direction quel que soit M (elle est perpendiculaire aux axes des symétries) et que la distance MM'' est le double de la distance HH' des axes. C'est une transformation simple, qu'on appelle une translation.

Symétries axiales – axes perpendiculaires : lorsqu'on compose deux symétries d'axes perpendiculaires, on vérifie que M'' est le symétrique de M par rapport au point O commun aux deux axes.

D'où le résultat :

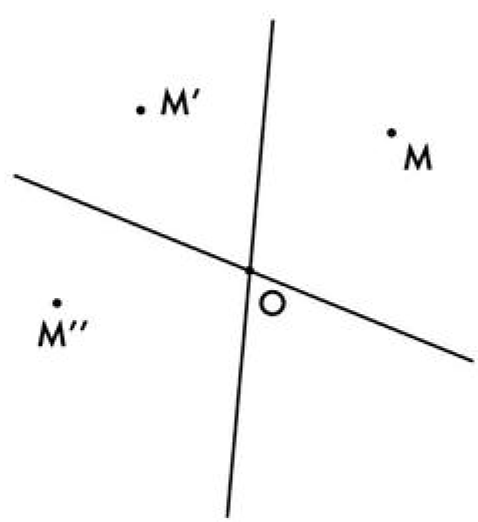
La composée de deux symétries d'axes perpendiculaires est la symétrie centrale par rapport au point d'intersection des axes.



Symétries d’axes perpendiculaires.

Composer des symétries : axes concourants et symétries centrales

Symétries axiales – axes concourants : lorsqu'on compose deux symétries d'axes concourants, on vérifie que les distances OM et OM'' sont égales et que l'angle des droites qui les portent a une mesure double de celle de l'angle des axes, donc indépendante du choix de M. C'est une transformation simple, qu'on appelle une rotation.

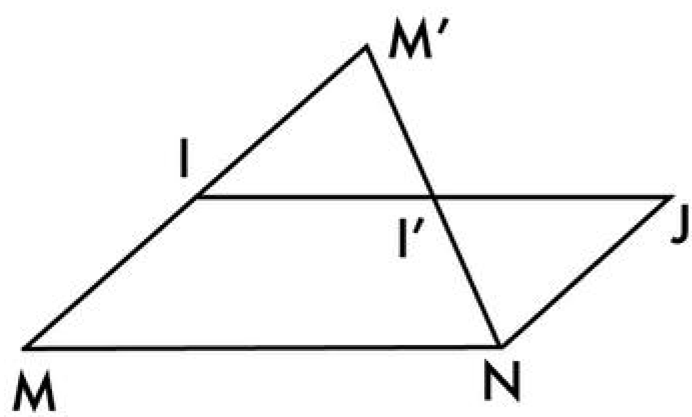


Symétries centrales : observons la figure suivante. Par la symétrie de centre I, M est transformé en M' ; par la symétrie de centre I', le point M'est transformé en N. Prolongeons le segment [II'] en [I'J] de même longueur.

On vérifie que le quadrilatère MNJI est un parallélogramme. Comme les points I et J sont indépendants de M, cette propriété exprime que N est l'image de M par une translation, celle qui transforme I en J.

Notons seulement le résultat :

La composée de deux symétries centrales est une translation.



Vecteurs et translations

La translation est une transformation du plan très intuitive : on fait glisser (à l'aide d'un papier calque) une figure sans la faire tourner. Il suffit donc de donner un point I et son image J pour savoir exactement comment déplacer la feuille de papier ; on appelle cela la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Cela s'exprime très simplement en écrivant :

On donne deux points I et J. La translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est la transformation qui, à tout point M, associe le point M' tel que MM'JI soit un parallélogramme.

La composée de deux symétries d'axes parallèles est une translation ; réciproquement, toute translation peut être regardée comme la composée de deux symétries d'axes parallèles : l'un de ces axes peut même être choisi arbitrairement parmi les droites perpendiculaires à (IJ).

La composée de deux symétries centrales est une translation ; réciproquement, toute translation peut être regardée comme la composée de deux symétries centrales : l'un des centres peut même être choisi arbitrairement. La démonstration est simple et amusante.

Soit un point I et son image J par la translation donnée ; marquons le milieu K du segment [IJ]. On sait alors que :

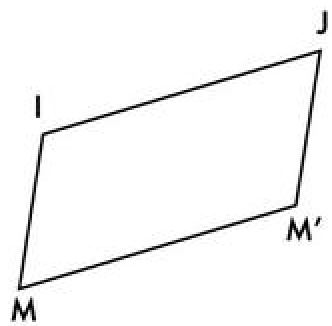
- La symétrie de centre I suivie de la symétrie de centre K d'une part est une translation, d'autre part transforme I en J. C'est donc la translation donnée.
- La symétrie de centre K suivie de la symétrie de centre J d'une part est une translation, et d'autre part transforme I en J. C'est donc la translation donnée.

On vérifie assez simplement quelques propriétés de la translation, hormis le cas banal où I = J, qui nous redonne l'identité.

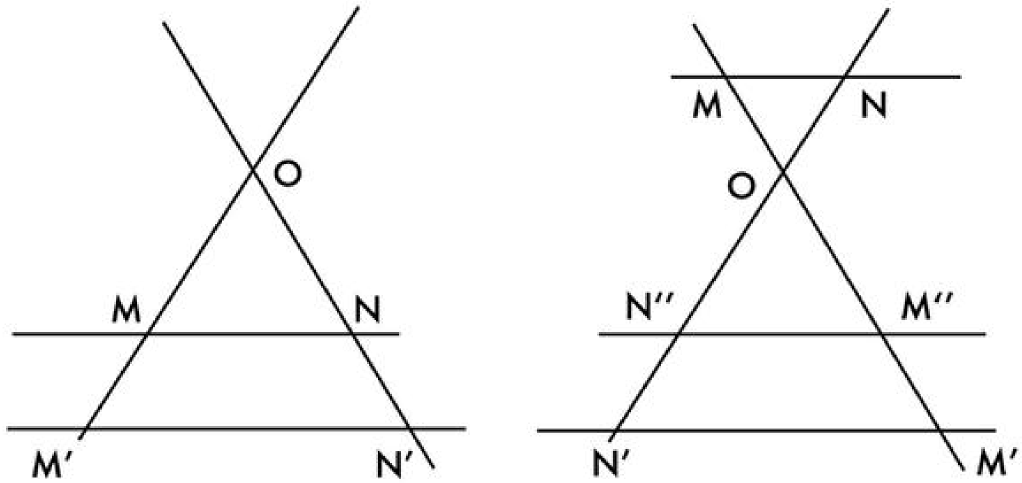
- Aucun point n'est invariant.
- L'image d'une droite est une droite parallèle.
- La distance M'N' des images de deux points M et N est égale à la distance MN.

Cette dernière propriété exprime que les translations sont des isométries.

La décomposition d’une translation en symétries centrales fournit un moyen élégant d’étudier la composée de deux translations.



Un exemple de translation.



Les constructions de Thalès.

Le théorème de Thalès

On trace deux droites se coupant en un point O et on les coupe par des droites (MN) et (M'N') qu'on sait parallèles. Le théorème de Thalès nous permet de conclure qu'il existe un nombre k tel que :

$$OM' = kOM$$

$$ON' = kON$$

Autrement dit, il existe une homothétie de centre O qui transforme M en M' et N en N'.

Dès lors, on peut aussi écrire : M’N’ = kMN.

La propriété est exacte aussi lorsque le point O est situé entre les deux parallèles : l’homothétie concernée est alors une homothétie de rapport négatif.

Il existe une généralisation, lorsque plus de deux droites parallèles coupent deux sécantes. Avec les notations de la figure, les segments découpés sur l’une des sécantes ont des longueurs proportionnelles aux segments correspondants découpés sur l’autre sécante, par exemple :

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{ON}{ON'} = \frac{MN}{MN'} = \ldots$$

Agrandissements ou réductions

Agrandir ou réduire une figure, c'est la transformer en sorte que toutes les dimensions se trouvent multipliées par un même nombre ; c'est par exemple ce que nous avons fait en rapprochant deux triangles semblables. Si ce nombre *k* est supérieur à 1, la figure est agrandie ; s'il est inférieur à 1, elle est réduite. C'est l'idée qui a donné naissance à une transformation particulièrement simple, appelée homothétie.

Un point O est donné, qui sera appelé le centre de l'homothétie. Si l'on prend dans le plan un point *M* arbitraire (autre que O), on peut tracer la demi-droite [O*M*), puis marquer sur cette demi-droite le point *M*' dont la distance à O est égale à kO*M*. Ce point *M*' est l'image de *M* dans l'homothétie de centre O et de rapport *k*. Par une convention commode, on déclare que l'image de O est O lui-même.

On vérifie assez simplement quelques propriétés de cette transformation :

- Le point O est transformé en lui-même (il est invariant).
- Seul O est invariant.
- La distance M'N' des images de deux points M et N est égale à k fois la distance MN.
- La droite (M'N') est parallèle à la droite (MN).

On voit ainsi que, hormis le cas évident $k = 1$ (et alors nous retrouvons la transformation identique, qui laisse tout point invariant), les homothéties ne sont pas des isométries.

Lorsqu'on dispose de deux points M et N et de leurs images M' et N', il est immédiat de retrouver le centre d'homothétie ; comme les points O, M, M' d'une part, O, N, N' d'autre part sont alignés, il suffit de tracer les droites (MM') et (NN') : le point O est leur intersection.

Ces propriétés admettent une réciproque qui fait depuis des décennies le bonheur des collégiens, le théorème de Thalès, connu et utilisé bien avant Thalès.

Cas d’un rapport négatif

Un point O est donné, qui sera encore appelé le centre de l’homothétie. Si l’on prend dans le plan un point *M* arbitraire (autre que O), on peut tracer la demi-droite [O*M*), puis marquer sur la demi-droite opposée le point *M*’ dont la distance à O est égale à *k*OM. Ce point *M*’ est l’image de M dans l’homothétie de centre O et de rapport – *k*. Par une convention commode, on déclare encore que l’image de O est O lui-même.

On vérifie assez simplement quelques propriétés de cette transformation, qu’on peut regarder comme l’homothétie de centre O et de rapport *k* suivie d’un demi-tour autour de O :

- Le point O est transformé en lui-même (il est invariant).
- Seul O est invariant.
- La distance *M*’N’ des images de deux points *M* et N est égale à *k* fois la distance MN.

- La droite (M’N’) est parallèle à la droite (MN).

On voit ainsi que, hormis le cas évident $k = 1$ (et alors nous retrouvons la symétrie de centre O, le demi-tour), les homothéties de rapport négatif ne sont pas non plus des isométries.

La sphère

La définition de cette surface est très voisine de celle du cercle, à la différence près qu'on se situe dans l'espace :

La sphère est l'ensemble des points situés à une distance donnée d'un point donné, appelé le centre de la sphère.

La distance de n'importe quel point de la sphère au centre est appelée le rayon. Suivant un abus de langage habituel, le mot rayon a un triple sens, exactement comme pour le cercle :

- le segment dont les extrémités sont un point de la sphère et le centre ;
- la longueur de ce segment ;
- la mesure de cette longueur avec une unité donnée.

De même que le disque est la portion de plan limitée par un cercle, on donne un nom à la partie de l'espace limitée par une sphère : on l'appelle une boule.

Il est bon de connaître les définitions suivantes :

- Tout segment joignant deux points d'une sphère est appelé une corde.
- Une corde qui passe par le centre est appelée un diamètre (ce terme a un triple sens, comme le mot rayon).

La sphère : sections planes

La configuration formée par une sphère et un plan peut revêtir plusieurs aspects :

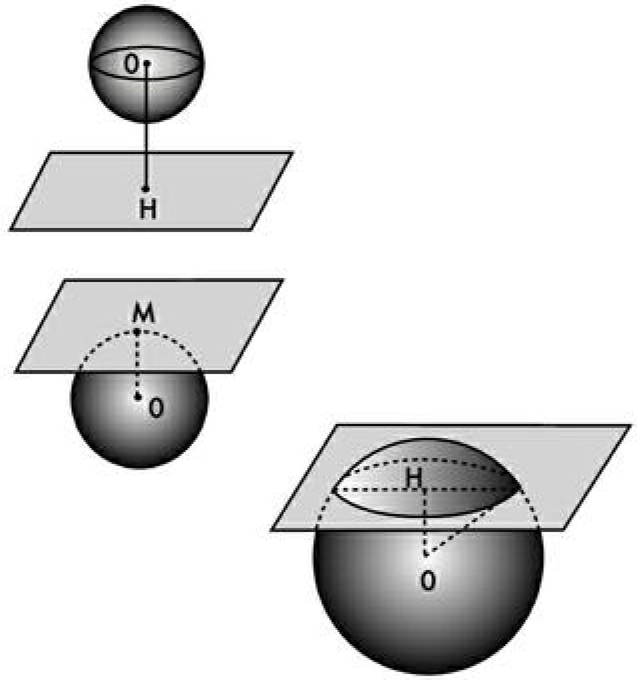
- Dans le premier cas, le plan et la sphère n’ont aucun point commun.
- Dans le deuxième cas, le plan et la sphère ont exactement un point commun : on dit le plan tangent à la sphère.
- Dans le troisième cas, la droite et la sphère ont des points communs et on prouve aisément qu’ils forment un cercle.

Les propriétés de ces figures se trouvent déjà dans les *Éléments* d’Euclide. Il y est démontré en particulier que le plan tangent à la sphère en un de ses points M est perpendiculaire au rayon en M, ce qui signifie que toute droite de ce plan passant par M forme un angle droit avec le rayon (OM).

Le cas d’un plan qui passe par le centre de la sphère mérite une mention particulière : on l’appelle plan diamétral et son intersection avec la sphère est appelée un grand cercle de la sphère.

Une remarque simple justifie ce qualificatif de « grand ». Si R désigne le rayon d'une sphère, la distance de deux points M et N quelconques de cette sphère est au plus égale à 2R. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer le triangle qu'ils forment avec le centre O de la sphère. Le côté [MN] de ce triangle est plus court que la somme des deux autres côtés, [OM] et [ON], soit 2R.

En conséquence, le diamètre d'un cercle tracé sur la sphère ne peut pas dépasser 2R, ce qui est justement le diamètre d'un grand cercle.



Différentes configurations formées par une sphère et un plan.

La sphère : surface et volume

On attribue à Archimède le calcul du volume de la boule ; il s'exprime en fonction du rayon R et du nombre π par la formule

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Archimède connaissait aussi une relation simple entre l'aire de la sphère de rayon R et l'aire (plane) limitée par un grand cercle, qui en est le quart ; on peut exprimer cela en donnant la formule de calcul de l'aire de la sphère de rayon R : $A = 4 \pi R^2$, ce qui est bien égal à quatre fois πR^2.

Pour nous qui apprenons les formules de calcul des volumes à l'école élémentaire, il n'y a pas de quoi s'émerveiller. Archimède a étudié la figure formée d'une boîte cylindrique et d'une boule de rayon R qui s'y ajuste parfaitement.

La base du cylindre est un disque de rayon R et d'aire πR^2, la hauteur du cylindre est 2R et le volume est donc le produit de ces nombres, soit $2\pi R^3$.

Le quotient du volume de la boule au volume de la boîte est donc $\frac{4/3\ \pi\ R^3}{2\ \pi\ R^3}$ soit 2/3.

Archimède était tellement fier d'avoir mis en évidence une relation si simple qu'il demanda que la figure correspondante fût gravée sur sa tombe.

La sphère terrestre : longitudes

Pour les astronomes grecs, la Terre est une boule et la sphère céleste tourne autour d'un diamètre de cette boule, la ligne des pôles. Le plan diamétral situé à égales distances des pôles est appelé plan équatorial et le grand cercle correspondant est l'équateur.

Dès lors, tout est en place pour repérer de façon précise un point à la surface du globe ; on définit des demi-plans méridiens, qui contiennent la ligne des pôles, et on choisit l'un d'eux pour origine. La longitude d'un point est simplement l'angle de son plan méridien avec le méridien origine (Greenwich), mesuré de 0 à 180°, soit vers l'ouest, soit vers l'est.

Sachant que le Soleil fait en apparence un tour complet en vingt-quatre heures, il devient très simple de déterminer une longitude : il suffit de mesurer le temps qui sépare le passage du Soleil au méridien d’un lieu et au méridien origine.

Simple en théorie, mais en pratique cela suppose qu’on dispose d’un « garde-temps » transportable, réglé à l’heure du méridien d’origine. De fait, c’est l’invention de ces garde-temps, ancêtres de nos horloges, qui a permis l’essor de la navigation de haute mer. Lorsqu’il était impossible de calculer une longitude, le seul moyen de connaître sa position était de rester à portée de vue d’une côte.

La sphère terrestre : latitudes

La détermination des latitudes est, par comparaison, beaucoup plus simple. Par la pensée, on coupe la Terre selon un méridien ; l'arc de méridien situé entre un point et l'équateur définit la latitude de ce point. Elle va de 0°, pour un point de l'équateur, à 90°, pour un pôle, et on précise Nord ou Sud, selon le sens de cet arc.

Pour mesurer la latitude, on vise une étoile éloignée dans la direction du pôle (dans notre hémisphère, l'étoile polaire). L'angle de cette direction avec la verticale du lieu est égal à la latitude.

Nous l'avons déjà mentionné : en déterminant les latitudes de deux points de la Terre dont la distance était connue, on a pu établir les premières estimations de la longueur d'un méridien et, par voie de conséquence, du rayon terrestre.

Longtemps d'ailleurs, le méridien de Paris a servi à définir l'unité légale de longueur, le mètre, tel que le quart de méridien mesure 10 000 000 mètres.

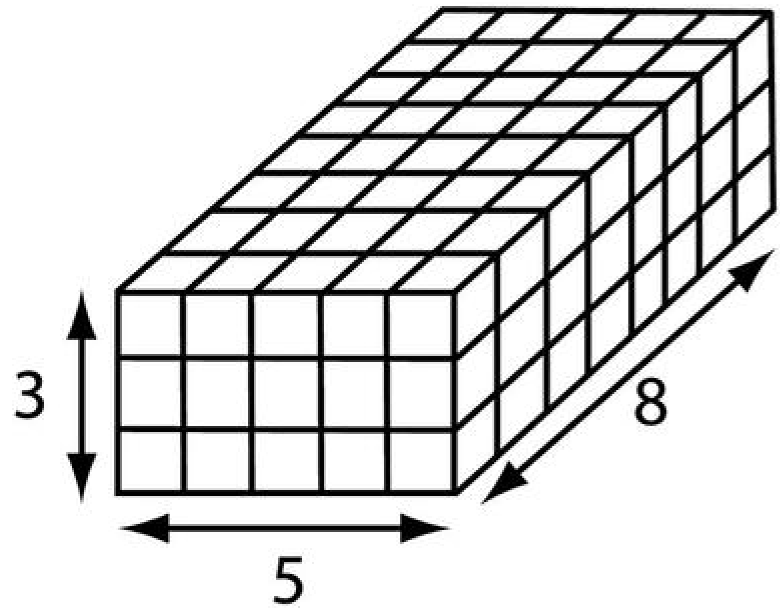
L'ensemble des points de la sphère terrestre de latitude donnée forme un parallèle : les parallèles sont des cercles (mais pas des grands cercles, à l'exception de l'équateur, qui est le parallèle de latitude 0).

Les pavés

Si la nature nous offre de nombreux solides en forme de boule, les pavés y sont beaucoup plus rares. Un pavé (appelé aussi parallélépipède rectangle) est un polyèdre (c'est-à-dire que toutes ses faces sont planes) qui se caractérise par le fait que ses faces n'ont que des angles droits.

Lorsque ces faces sont des carrés, le pavé est un cube, le plus simple de tous les pavés.

Ce sont probablement les blocs de pierre destinés aux plus anciennes constructions qui ont été nos premiers pavés. Plus faciles à extraire des falaises, plus faciles à transporter en les faisant glisser sur des rondins, plus faciles à empiler pour former des murs, ils auraient fait la fortune de leur inventeur si les brevets d'invention avaient existé alors.



Représentation du volume d'un pavé.

Les pavés : volumes

Une autre raison de l'intérêt des géomètres pour le pavé est la facilité, dans certains cas, d'en définir et d'en calculer le volume. Si les trois dimensions longueur, largeur et hauteur sont des multiples entiers de l'unité de longueur, l'idée surgit de prendre pour unité de volume le cube dont le côté est cette unité de longueur.

Il n'y a plus qu'à empiler ces cubes pour constater qu'on remplit exactement le pavé donné et à compter les nombres de cubes. Dans l'exemple de la figure de la page de gauche, nous avons trois couches, chacune étant constituée de cinq lignes de huit cubes, ce qui donne pour volume : $5 \times 3 \times 8 = 120$ unités.

Dans le cas d'un cube dont l'arête est mesurée par un nombre a, cela donne pour le volume, avec l'unité associée, la valeur a^3, qu'on prononce « a au cube ».

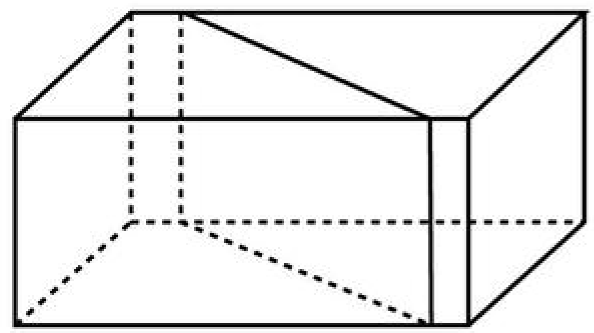
Comme pour l'aire du rectangle, la validité de cette formule s'étend de proche en proche à des cas plus compliqués, lorsque les dimensions du pavé ne sont plus des nombres entiers.

Les pavés : sections planes

Il est assez intuitif et simple à démontrer que toutes les sections d’un pavé par un plan parallèle à une arête sont des rectangles.

La démonstration, qu’on trouve elle aussi dans les *Éléments* d’Euclide, repose sur le « théorème de la porte tournante » : on observe une droite coupant un plan en un point O. Si cette droite est perpendiculaire à deux droites du plan passant par O, alors elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan passant par O.

Pour qu’une porte « tourne bien », il faut en ajuster les gonds en sorte que, dans deux positions, la porte soit correctement ajustée. Cela suffit pour qu’elle se ferme et s’ouvre dans toutes les positions, et sans problème.



Sections d’un pavé.

Les polyèdres réguliers

Le cube présente une sorte de symétrie assez fascinante. Ses six faces jouent des rôles parfaitement interchangeables et cela a donné naissance au jeu de dés : les six faces portent des points et, sauf superstition, il nous est sans doute indifférent de parier pour l'apparition de telle ou telle face.

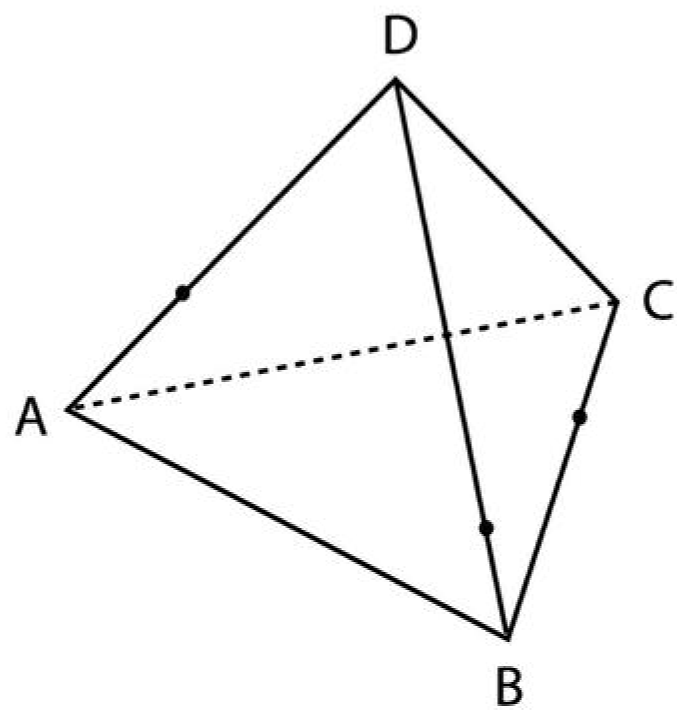
Un joueur invétéré se demandera s'il n'est pas possible, en gardant cette impartialité, d'imaginer d'autres jeux où les paris se feraient non entre six résultats mais entre cinq, sept, ou un nombre quelconque. Il demandera à son fournisseur des « superdés », dont les faces seraient des polygones réguliers, par exemple :

- des triangles équilatéraux ;
- des carrés ;
- des pentagones réguliers ;
- des hexagones réguliers, etc.

Il suffit d'essayer.

Le tétraèdre régulier : un jeu de casse-tête fréquent consiste à disposer six allumettes en sorte qu'elles forment quatre triangles. Dans le plan, c'est impossible. Dans l'espace, cela donne la configuration présentée dans la figure de la page suivante, le tétraèdre régulier.

Ce solide a six arêtes, toutes de même longueur, quatre faces, qui sont des triangles équilatéraux, et quatre sommets.



Le cube : il a douze arêtes, toutes de même longueur, six faces, qui sont des carrés, et huit sommets.

Les polyèdres à faces triangulaires

Les faces sont des triangles équilatéraux, dont les angles mesurent donc 60°. Combien d'arêtes peuvent aboutir en un sommet ?

- Trois arêtes, donc trois faces, dont la somme des angles en S est 180° : on retrouve notre tétraèdre régulier.
- Quatre arêtes, donc quatre faces, dont la somme des angles en S est 240° : il est assez facile de construire le polyèdre correspondant, qui est un octaèdre régulier, il a huit faces, six sommets, douze arêtes.
- Cinq arêtes, donc cinq faces, dont la somme des angles en S est 300° : il est un peu plus long de construire le polyèdre correspondant, qui est un icosaèdre régulier, il a vingt faces, douze sommets, trente arêtes.

- Six arêtes, donc six faces, dont la somme des angles en S est 360° : c'est impossible, car ces arêtes seraient dans un même plan.

À plus forte raison, il ne peut aboutir plus de six arêtes en un sommet, car la somme des angles dépasserait alors 360°.

Les polyèdres à faces carrées et pentagonales

Les faces sont des carrés, dont les angles mesurent donc 90°. Combien d'arêtes peuvent aboutir en un sommet ?

- Trois arêtes, donc trois faces, dont la somme des angles en S est 270° : on retrouve notre cube.
- Quatre arêtes, donc quatre faces, dont la somme des angles en S est 360° : c'est impossible, car ces arêtes seraient dans un même plan.

À plus forte raison, il ne peut aboutir plus de quatre arêtes en un sommet, car la somme des angles dépasserait alors 360°.

Les faces sont des pentagones réguliers, dont les angles mesurent donc 108°. Combien d'arêtes peuvent aboutir en un sommet ?

- Trois arêtes, donc trois faces, dont la somme des angles en S est 324° : on trouve un polyèdre régulier appelé dodécaèdre, il a douze faces, vingt sommets et trente arêtes.
- Quatre arêtes, donc quatre faces, dont la somme des angles en S serait 424° : c'est impossible à nouveau.

À plus forte raison, il ne peut aboutir plus de quatre arêtes en un sommet, car la somme des angles dépasserait toujours 360°.

Faut-il poursuivre en évoquant des faces hexagonales ? Chaque angle de chaque face mesurerait 120°, et comme il faut qu'au moins trois faces aboutissent en un sommet, nous aurions au moins 360° pour somme et ce serait déjà impossible.

À plus forte raison, les faces d'un polyèdre régulier ne peuvent avoir plus de six côtés. Autrement dit, nous avons fait le tour : il existe en tout et pour tout cinq polyèdres réguliers, qu'on appelle souvent les solides platoniciens.

Prismes et cylindres

Une courbe est dessinée dans un plan, le plus souvent un polygone ou un cercle, on l'appellera la directrice du cylindre. Une direction D est choisie en dehors du plan de la directrice. Et on définit une surface cylindrique comme engendrée par les droites parallèles à la direction choisie et passant par un point variable de la directrice. Ces droites sont les génératrices du cylindre.

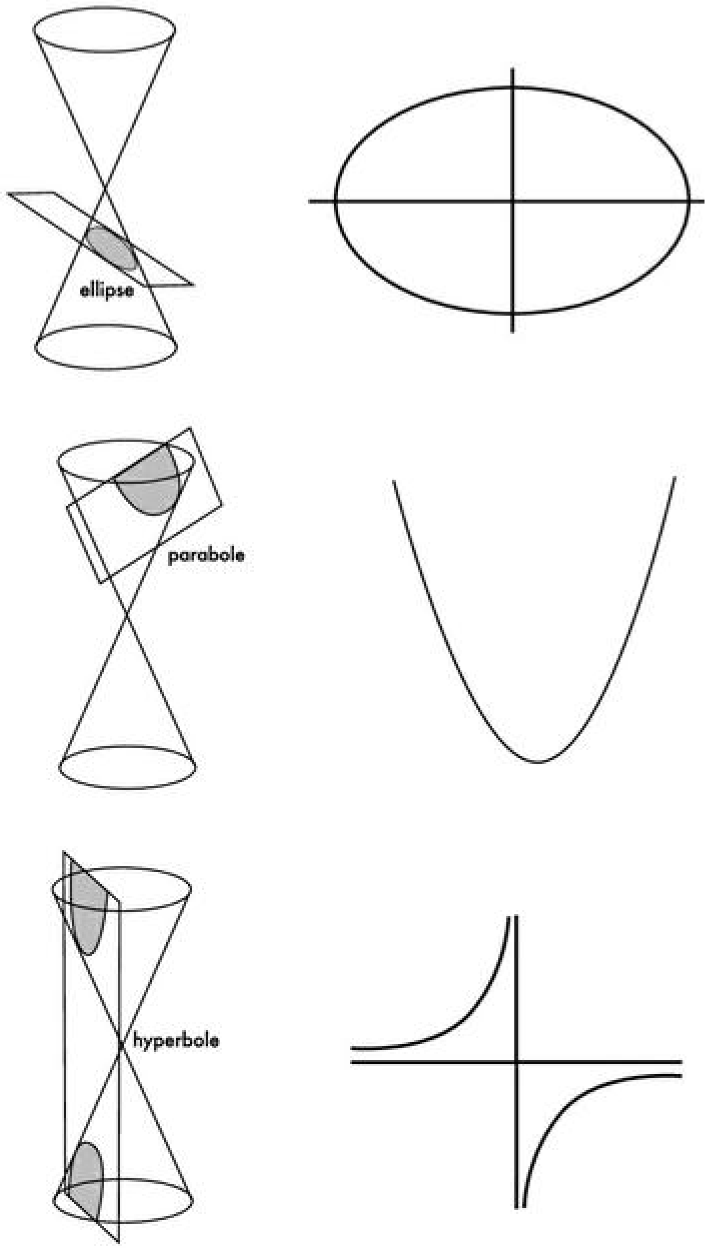
Souvent, on limite l'attention au solide limité par les génératrices et deux plans, celui de la directrice et un plan parallèle. Lorsque la directrice est un polygone, on parle plus volontiers de prisme, en réservant le nom de cylindre à des formes circulaires ou courbes.

Le volume d'un cylindre s'exprime par une formule très simple. La directrice limite une partie de plan appelée base du cylindre. La distance entre les plans qui limitent le cylindre est la hauteur du cylindre. Et le volume est tout simplement le produit de l'aire de la base par la hauteur ; c'est cette formule que nous avions rappelée à propos du cylindre qui orne la tombe d'Archimède.

La même formule vaut naturellement dans le cas particulier des prismes.

Les géomètres grecs qui trouvèrent cette formule avaient utilisé une méthode d'approximation, en découpant le prisme en colonnes très minces, qu'on pouvait approcher par des pavés. Mais, comme pour l'aire des triangles, certains esprits rigoureux se sentaient mal à l'aise devant une formule trouvée par des approximations.

N'était-il pas possible, comme pour nos puzzles, de découper le solide étudié et d'en réassembler les pièces pour former un cube ? La réponse est non, mais il a fallu attendre 1904 pour qu'un Suisse, Jean-Pierre Sydler, en donne une preuve, complétant une conjecture de Max Dehn, vieille de plus de soixante ans.



Différents cas de coniques dans l’espace et dans le plan de coupe.

Les cônes

Une courbe est dessinée dans un plan, le plus souvent un cercle ; on l'appellera la directrice du cône. Un point S est choisi en dehors du plan de la directrice, on l'appellera sommet du cône. Et on définit une surface conique comme une surface engendrée par les droites passant par le sommet et par un point variable de la directrice.

Volume du cône : la formule est aisée à retenir. Le volume d'un cône est le tiers du volume d'un cylindre qui aurait même base et même hauteur :

$$V = \frac{1}{3} B \times h$$

Sections planes : un livre entier d'Euclide est consacré à ces courbes qu'on obtient en coupant par un plan un cône à base circulaire et qu'on appelle les coniques.

Suivant la position du plan de coupe, on obtient des courbes d'apparences très différentes. Nous représentons ces trois cas dans l’espace et dans le plan de coupe.

Les pyramides

La pyramide est tout simplement un cas particulier de cône : lorsque la directrice est un polygone, la surface est dite pyramidale. Celle-ci se définit donc comme une surface engendrée par les droites passant par le sommet et par un point variable de la directrice.

Souvent, on ne prête attention qu'au solide limité par le sommet et la directrice. Les faces de ce solide sont planes et c'est donc un polyèdre.

Comment calculer le volume de la pyramide ? Comme pour n'importe quel cône, le volume d'une pyramide est le tiers du volume d'un prisme qui aurait même base et même hauteur :

$$V = \frac{1}{3} B \times h$$

Crédits iconographiques

p. 28, p. 57, p. 129, p. 221, p. 241, p. 256, p. 260, p. 271 : Wikimedia Commons.

p. 71, p. 107, p. 108, p. 114, p. 127, p. 130, p. 133, p. 149, p. 160, p. 163, p. 192, p. 193, p. 195, p. 196, p. 199, p. 201, p. 202, p. 204, p. 207, p. 217, p. 223, p. 233, p. 235, p. 239, p. 247, p. 248, p. 250, p. 259, p. 262, p. 266, p. 268, p. 269, p. 279, p. 280, p. 282, p. 284, p. 286, p. 288, p. 290, p. 292, p. 294, p. 298, p. 301, p. 303, p.306, p. 309, p. 311, p. 312, p. 314, p. 317, p. 321, p. 322, p. 324, p. 325, p. 331, p. 332, p. 335, p. 336, p. 337, p. 339, p. 340, p. 347, p. 352, p. 354, p. 356, p. 362 : *Les Maths pour les Nuls*.

Sommaire