

# Les mathématiques financières

Joanne Hamet



© e-theque 2003



Finance

# Les mathématiques financières

Joanne Hamet

Professeur des Universités  
(Université Paris XII, IRG)

Référence e-theque : 2003A0004T  
ISBN : 2-7496-0064-2



©[e-theque](http://e-theque.com) 2003

e-theque - 167 rue Jean Jaurès - 59264 Onnaing

---

Toute reproduction même partielle, par quelque procédé que se soit est interdite sans autorisation. Une copie par xérogaphie, film, bande magnétique, ou autre procédé, constitue une contrefaçon passible des peines prévues par les articles L335-2 et L335-3 du Code de la Propriété intellectuelle.

## Résumé

Cet ouvrage fait le point sur les principales techniques utilisées en mathématiques financières. Il se décompose en quatre chapitres. Le premier chapitre détaille l'utilisation des intérêts simples pour les emprunts ou les placements à moins d'un an. Le second chapitre introduit la notion d'intérêt composé, utilisée pour les emprunts ou les placements à plus d'un an, ainsi que la notion d'annuité. Le troisième chapitre indique les principaux calculs utilisés dans le cadre des emprunts bancaires, particulièrement la construction des tableaux d'amortissement et le calcul du taux effectif global. Enfin, le quatrième et dernier chapitre constitue une introduction à la gestion obligataire.

## Sommaire

|   |           |
|---|-----------|
| <b>CHAPITRE 1. L'INTERET SIMPLE</b> .....   | <b>6</b>  |
| Section 1. Définition de l'intérêt simple.....  | 6         |
| Section 2. Terme échu, terme à échoir.....  | 7         |
| Section 3. Valeur acquise, valeur actuelle .....  | 7         |
| Section 4. Applications des intérêts simples.....                                       | 11        |
| <br>  |           |
| <b>CHAPITRE 2. L'INTERET COMPOSE</b> .....  | <b>20</b> |
| Section 1. Base de calcul des intérêts composés .....                                   | 20        |
| Section 2. Les annuités constantes.....   | 24        |
| Section 3. Annuités progressives .....  | 29        |
| Section 4. exercices d'application .....  | 32        |
| <br>  |           |
| <b>CHAPITRE 3. LES EMPRUNTS INDIVIS</b> .....   | <b>37</b> |
| Section 1. Les tableaux d'amortissement d'emprunts indivis.....                         | 38        |
| Section 2. Calcul du taux effectif d'un emprunt ou d'un placement .....                 | 42        |
| <br>  |           |
| <b>CHAPITRE 4. LES EMPRUNTS OBLIGATAIRES</b> .....                                      | <b>46</b> |
| Section 1. Caractéristiques et évaluation d'une obligation .....                        | 46        |
| Section 2. Calcul du taux de rendement actuariel d'une obligation .....                 | 49        |
| Section 3. Mesures de la sensibilité d'une obligation au risque de taux d'intérêt ..... | 52        |
| Section 4. Exercices d'application.....   | 56        |
| <br>  |           |
| <b>BIBLIOGRAPHIE :</b> .....  | <b>60</b> |

## Introduction

Les décisions d'investissement ou de financement impliquent d'additionner ou de comparer entre eux des flux financiers survenant à des dates différentes.

Pour cela, il est nécessaire de les actualiser en leur appliquant un taux d'intérêt.

Il est très fréquent, en finance, de devoir comparer des flux financiers survenant à des dates différentes. Prendre une décision d'investissement implique, par exemple, de comparer les sommes investies sur les premières années aux flux de trésorerie que l'on espère recevoir de l'investissement, au cours des années suivantes.

Or, additionner ou comparer simplement ces flux monétaires qui ne surviennent pas au même moment conduirait à des résultats erronés. Il n'est évidemment pas équivalent de recevoir 100 € aujourd'hui ou de recevoir la même somme l'année prochaine ! Les individus sont marqués par une *préférence naturelle pour le présent*, qui les conduit à exiger une rémunération pour se priver de disposer immédiatement d'une certaine somme d'argent : cette rémunération, ce loyer de l'argent, s'appelle *l'intérêt*.

Ce sont donc les *taux d'intérêt* qui permettent de lier entre eux, ou de comparer entre eux, des flux financiers survenant à des dates différentes.

Les taux d'intérêt sont déterminés sur les marchés de capitaux par l'offre et la demande de liquidités provenant des particuliers, des entreprises et du secteur public. Leur niveau dépend de plusieurs facteurs, et en particulier de l'échéance et de la liquidité de l'emprunt ou du placement, ainsi que de la qualité de l'emprunteur.

Les taux d'intérêt à moins d'un an sont déterminés sur le *marché monétaire*. Le marché monétaire publie plusieurs taux de référence qui sont utilisés pour déterminer le coût des emprunts ou le rendement des placements à court terme.

- **l'EONIA** (Euro Overnight Index Average) ou TEMPE (Taux Moyen Pondéré en Euro) correspond à une moyenne des taux sur le marché des dépôts interbancaires au jour le jour pratiqués par un panel de banques de premier plan de la zone euro. Par convention, il est calculé sur la base d'une année de 360 jours. Fin avril 2003, l'EONIA était à 2,64 %.
- **L'EURIBOR** (Euro Interbank Offered Rate) ou TIBEUR (Taux Interbancaire Offert en Euro) correspond à la moyenne arithmétique des taux offerts sur le marché interbancaire par un ensemble d'établissements de référence pour toutes les échéances de 1 à 12 mois (un taux Euribor valable pour une échéance d'une semaine est également publié). Il est calculé sur la base d'une année de 365 jours. Le 28 mai 2003, l'euribor 3 mois était à 2,294 %.

Pour obtenir davantage d'informations concernant l'EONIA et l'EURIBOR, consultez le site web [www.euribor.org](http://www.euribor.org).

Les taux d'intérêt à moyen et long terme (c'est-à-dire à plus d'un an) sont essentiellement déterminés sur le marché obligataire. Les taux de référence du marché obligataire sont :

- le **TMO**, établi par l'INSEE, et qui représente le taux moyen des émissions obligataires de première catégorie,
- le **TME**, publié par la Caisse des Dépôts, qui représente le taux moyen des emprunts d'Etat
- les **indices CNO-TEC** (TEC 2, TEC 5, TEC 7, TEC 10, TEC 20), publiés par le Trésor, qui représentent le taux de rendement actuariel d'une obligation fictive du Trésor d'échéance 2, 5, 7, 10 ou 20 ans.

Voir par exemple le  
site web :  
[www.guideducrédit.com](http://www.guideducrédit.com)

Ainsi, il n'existe pas un seul taux d'intérêt, mais une multitude de taux d'intérêt, en fonction de l'échéance, des caractéristiques de l'opération ou de la nature de l'emprunteur.

Cet ouvrage, qui s'adresse aussi bien à des étudiants de second cycle en économie ou gestion qu'à des professionnels, fait le point sur les techniques les plus couramment utilisées en mathématiques financières. Il se décompose en quatre chapitres. Le premier chapitre introduit la notion d'intérêt simple, utilisé pour les placements ou les emprunts à moins d'un an. Le second chapitre fait le point sur les intérêts composés, utilisés pour les opérations financières à plus d'un an. Le troisième chapitre présente les emprunts indivis. Enfin, le quatrième chapitre présente les emprunts obligataires.

## Chapitre 1. L'intérêt simple

### Section 1. Définition de l'intérêt simple

#### Définition

*On utilise l'intérêt simple pour des emprunts ou des placements à court terme, c'est-à-dire sur une durée inférieure à un an. L'intérêt est proportionnel à la durée de l'opération, et il est versé en une seule fois, au début ou à la fin de l'opération.*

#### Calcul de l'intérêt

Par convention, le taux d'intérêt pour une période de moins d'un an est calculé sur la base d'une année de 360 jours (12 mois de 30 jours). Cette convention contribue à afficher un taux annuel  $i$  légèrement plus faible que s'il était calculé sur la base d'une année de 365 jours.

Le montant de l'intérêt se mesure donc par :

$$I = V \times j \times i/360 \quad (1)$$

Où :

- $V$  représente le capital en euros ;
- $j$  représente le nombre de jours de placement ou d'emprunt.
- $i$  représente le taux d'intérêt pour 360 jours (taux d'intérêt annuel en base monétaire) ;
- $i/360$  représente donc le taux d'intérêt pour un jour ;

Le nombre de jours est calculé ici en nombre de jours exacts (sur une année de 365 ou 366 jours). On dit que l'on raisonne sur la base « exact / 360 » également appelée base monétaire.

#### Application

Quel est l'intérêt rapporté par un capital de 10.000 € placé du 10 mars au 20 juillet au taux de 4,5 % ?

**Solution :**

On compte 132 jours du 10 mars au 20 juillet  $(31-10+30+31+30+20)$

$$\rightarrow I = 10.000 \times 132 \times 4,5 \% / 360 = 165 \text{ €}$$

## Section 2. Terme échu, terme à échoir

- Lorsque l'intérêt est versé à la fin de l'opération, ce qui est le cas le plus courant, il est dit *postcompté* ou *à terme échu*.

- 

$$V \quad \longrightarrow \quad V + I$$

Ainsi, une somme  $V$  placée ou empruntée pendant  $j$  jours au taux  $i$  postcompté donnera lieu  $j$  jours plus tard à un remboursement de :

$$V_F = V + I$$

La plupart des opérations financières (découvert bancaire, compte sur livret, placement à terme... ) utilise l'intérêt postcompté.

- Lorsque l'intérêt est versé au début de l'opération, il est dit *précompté* ou *terme à échoir*.

$$V - I \quad \qquad \qquad V$$

Ainsi, une somme  $V$  empruntée sur  $j$  jours au taux  $i$  précompté ne donne lieu au début de l'opération qu'à un versement de :

$$V_0 = V - I$$

A l'échéance, l'emprunteur devra rembourser  $V$ .



C'est le cas notamment de l'escompte commercial, de certains certificats de dépôts ou de certains billets de trésorerie.

*L'intérêt précompté avantage le prêteur puisqu'il reçoit l'intérêt plus tôt, au début de la période de placement. L'intérêt postcompté avantage l'emprunteur puisqu'il verse l'intérêt plus tard, à la fin de la période d'emprunt.*

## Section 3. Valeur acquise, valeur actuelle

Pour comparer ou additionner des sommes versées ou reçues à des dates différentes, il est nécessaire de actualiser afin de les ramener en théorie à la même date.

L'actualisation consiste soit à calculer la valeur à une date future, que l'on appelle *valeur future* ou *valeur acquise*, d'une somme versée aujourd'hui, soit à calculer la valeur aujourd'hui, (la *valeur actuelle*) d'une somme à recevoir à une date future.

Le taux d'intérêt qui permet de passer de la valeur actuelle à une valeur future s'appelle le *taux d'actualisation*. Concrètement, le taux d'actualisation est soit un taux de placement, soit un taux d'emprunt, suivant la situation que l'on envisage.

**Le cas des intérêts postcomptés***Valeur acquise ou valeur future d'un capital  $V_0$ , à intérêt postcompté*

La valeur acquise ou valeur future d'un capital  $V_0$  placé au taux  $i$  pendant  $j$  jours est égale à la valeur initiale de ce capital augmenté de la valeur des intérêts.

$$V_F = V_0 \times (1 + i \times j / 360) \quad (9)$$

**Exemple :**

Un capital de 5.000 € a été placé à intérêt simple au taux de 5,5 % le 1<sup>er</sup> octobre. Quelle est sa valeur acquise le 10 novembre ?

**Solution :**

Il y a 40 jours entre le 1<sup>er</sup> octobre et le 10 novembre.

$$V_T = 5.000 \times (1 + 5,5 \% \times 40/360) = 5\,030,56 \text{ €}.$$

*Valeur actuelle d'un capital  $V_F$  à recevoir dans  $j$  jours, à intérêt postcompté*

Pour calculer la valeur actuelle d'un capital, on utilise un procédé inverse à celui utilisé pour calculer la valeur future :

$$V_0 = V_F / (1 + i \times j / 360) \quad (10)$$

**Exemple :**

Quelle est la valeur actuelle, au taux d'actualisation de 5 %, d'un capital de 500 euros à recevoir dans 25 jours ?

**Solution :**

$$V_0 = 500 / (1 + 5\% \times 25/360) = 498,27 \text{ €}.$$

**Le cas des intérêts précomptés***Valeur actuelle d'une somme  $V_F$  à payer ou à recevoir dans  $j$  jours au taux  $i$  précompté*

La valeur actuelle d'une somme  $V_F$  à recevoir ou à payer dans  $j$  jours au taux  $i$  précompté est égale à la valeur de cette somme diminuée de la valeur des intérêts.

$$V_0 = V_F \times (1 - i \times j / 360) \quad (11)$$

**Exemple :**

Une entreprise émet sur le marché monétaire des billets de trésorerie d'un montant nominal de 150 000 euros, d'échéance 90 jours et de taux facial 3,5 % précompté.

Quel est le prix d'émission du billet de trésorerie ?

**Solution :**

$$V_0 = 150\,000 \times (1 - 3,5\% \times 90 / 360) = 148\,687,50 \text{ €}$$

*Valeur acquise par une somme  $V_0$  placée ou empruntée sur  $j$  jours au taux  $i$  précompté*

Pour calculer la valeur acquise d'une somme  $V_0$  placée ou empruntée à taux précompté, on utilise un procédé inverse de celui utilisé pour calculer la valeur actuelle :

$$V_F = V_0 / (1 - i \times j / 360) \quad (12)$$

**Exemple :**

Une entreprise a besoin d'un financement d'au moins 30 000 000 € et souhaite émettre sur le marché monétaire des billets de trésorerie de valeur nominale 150 000 €, d'échéance 180 jours et de taux facial 4,5 % précompté. Combien de billets de trésorerie doit-elle émettre ?

**Solution :**

Si l'entreprise émettait 200 billets de trésorerie (30 000 000 / 150 000), elle n'obtiendrait aujourd'hui qu'un financement de : 30 000 000 (1 - 4,5 % x 180 / 360) = 29 325 000 €. Pour obtenir au moins 30 000 000 euros, elle doit donc emprunter un montant correspondant à la valeur future des 30 000 000 € dont elle a besoin aujourd'hui :

$$V_F = 30\,000\,000 / (1 - 4,5\% \times 180 / 360) = 30\,690\,537,08 \text{ €}.$$

Les billets de trésorerie étant d'une valeur nominale de 150 000 €, il lui faudra émettre 205 billets pour obtenir un peu plus de 30 millions d'euros.

## Comparaison entre intérêts pré et postcomptés

Lorsque une entreprise étudie différentes possibilités de financement, elle peut être amenée à comparer un taux d'intérêt précompté et un taux d'intérêt postcompté.

Or, on ne peut pas comparer directement un intérêt postcompté et un intérêt précompté puisqu'ils ne correspondent pas à un versement à la même période.

Ainsi, lorsqu'une entreprise emprunte 1000 € sur 360 jours au taux postcompté de 5 %, elle reçoit 1000 € immédiatement et remboursera 1050 €, 360 jours plus tard. Si le taux d'intérêt de 5 % est précompté et non plus postcompté, l'entreprise ne reçoit que 950 € immédiatement et remboursera 1000 € un an plus tard.

Le coût de l'emprunt est de 50 € dans les deux cas, mais il est versé plus tôt dans le cas des intérêts précomptés.

Pour comparer entre eux un taux postcompté et un taux précompté, il est nécessaire de calculer *l'intérêt postcompté équivalent* au taux d'intérêt précompté.

### Taux postcompté équivalent à un taux précompté

Soit  $i_{\text{post}}$  le taux d'intérêt postcompté équivalent au taux d'intérêt précompté  $i_{\text{pre}}$ .

Puisque les deux taux sont équivalents, la valeur acquise par une somme de 1 € au taux  $i_{\text{post}}$  doit être égale à la valeur acquise par cette même somme de 1 € au taux  $i_{\text{pre}}$  :

$$1 + j \times i_{\text{post}}/360 = 1 / (1 - j \times i_{\text{pre}}/360)$$

$$\Rightarrow i_{\text{post}} \times j/360 = 1 / (1 - i_{\text{pre}} \times j/360) - 1$$

$$\Rightarrow i_{\text{post}} \times j/360 = [1 - (1 - i_{\text{pre}} \times j/360)] / (1 - i_{\text{pre}} \times j/360)$$

$$\Rightarrow i_{\text{post}} \times j/360 = i_{\text{pre}} \times j/360 / (1 - i_{\text{pre}} \times j/360)$$

$$i_{\text{post}} = i_{\text{pre}} / (1 - i_{\text{pre}} \times j/360) \quad (13)$$

On remarque que,  $(1 - i_{\text{pre}} \times j/360)$  étant toujours inférieur à 1 :

$$i_{\text{post}} > i_{\text{pre}}$$

A coût d'emprunt identique, un taux d'intérêt précompté paraît plus faible qu'un taux d'intérêt postcompté.

A coût d'emprunt identique, un taux d'intérêt précompté apparaîtra donc plus faible qu'un taux d'intérêt postcompté.

En effet, les intérêts postcomptés s'appliquent à la valeur initiale ( $V_0$ ) alors que les intérêts précomptés s'appliquent à la valeur finale ( $V_F$ ), qui est toujours plus élevée que  $V_0$ .

**Exemple :** Une grande entreprise a besoin d'un financement sur 180 jours. Elle a la possibilité d'emprunter sur le marché monétaire à 3,3 %, intérêts postcomptés, ou d'émettre des billets de trésorerie à 3,25 %, intérêts précomptés. Quelle source de doit-elle sélectionner ?

**Solution :**

Calculons le taux postcompté équivalent au taux de 3,2 % précompté :

$$i_{\text{post}} = 3,25 \% / (1 - 3,25 \% \times 180 / 360) = 3,30 \%$$

Bien que le fait de précompter les intérêts conduise à faire apparaître un taux d'intérêt plus faible que s'il était postcompté (3,25 % au lieu de 3,30 %), en fait les deux sources de financement ont ici un coût équivalent. Il faut cependant garder à l'esprit que les intérêts des billets de trésorerie seront prélevés dès le début de la période d'emprunt.

Si la société lève cent millions d'euros sous forme de billets de trésorerie, par exemple, elle ne recevra que :

$$V_0 = 100\,000\,000 \times (1 - 180 \times 3,25 \% / 360) = 98\,375\,000 \text{ €}$$

Si elle a réellement besoin de 100 000 000 €, elle doit emprunter davantage.

## Section 4. Applications des intérêts simples

L'intérêt simple est utilisé pour la plupart des opérations à court terme : sur le marché monétaire, pour les crédits à court terme accordés par les banques, pour l'escompte d'effets de commerce, pour la gestion des comptes courants et d'épargne.

### La tenue d'un compte courant

#### *Le découvert bancaire*

Les entreprises ont fréquemment recours au *découvert bancaire* (ou avance en compte courant). Un plafond de découvert est négocié annuellement entre la banque et l'entreprise.

Le taux d'intérêt du découvert est plus élevé que celui d'autres sources de financement à court terme comme l'escompte mais l'entreprise a néanmoins intérêt à avoir recours au découvert pour ses besoins de financement aléatoires. En effet, le découvert bancaire se caractérise par sa souplesse d'utilisation : il n'est soumis ni à un montant minimal, ni à une autorisation de la banque. L'escompte peut

ainsi se révéler, en pratique, plus coûteuse que l'avance en compte courant du fait d'une certaine rigidité concernant le montant escompté et la durée de l'escompte.

Les intérêts débiteurs sont généralement comptabilisés par trimestre.

Le tableau ci-dessous donne le relevé bancaire d'une PME au premier trimestre :

Solde précédent en euros : + 200

| Date opérat° | Date valeur | Libellé opération     | débit euros | crédit euros |
|--------------|-------------|-----------------------|-------------|--------------|
| 17/01        | 17/01       | Dépôt espèces         |             | 16 000       |
| 18/01        | 16/01       | Chèque n°01512        | 15 000      |              |
| 21/01        | 1/01        | Commissions bancaires | 300         |              |
| 8/02         | 07/02       | Virement bancaire     | 6 000       |              |
| 18/02        | 17/02       | Retrait d'espèces     | 500         |              |
| 5/03         | 03/03       | Chèque n°01514        | 1 000       |              |
| 07/03        | 11/03       | Remise chèques        |             | 9 900        |
| 21/03        | 21/03       | Retrait d'espèces     | 1 000       |              |

On observe qu'à chaque opération correspond deux dates : la date à laquelle l'opération a effectivement eu lieu et la *date de valeur* à laquelle la banque considère que l'opération a eu lieu (la date de valeur).

Les dates de valeur avaient à l'origine pour objet de permettre à la banque de financer les immobilisations de trésorerie résultant par exemple du recouvrement des chèques ou du décaissement des fonds pour le compte de son client. Les procédures de virement s'étant considérablement accélérées, certaines dates de valeur ne correspondent plus, à l'heure actuelle, à un coût réellement supporté par la banque.

Dans notre exemple, les dates de valeur appliquées par la banque sont les suivantes :

- ✓ versement d'espèces : jour de comptabilisation,
- ✓ retrait d'espèces à l'agence : jour de comptabilisation,
- ✓ retrait d'espèces aux distributeurs de billets : un jour calendaire,
- ✓ remise de chèques : 2 jours ouvrés,
- ✓ paiement par chèques : 2 jours calendaires,
- ✓ virement bancaire : 1 jour calendaire.

La présence des dates de valeur constitue un coût que le client ne doit pas négliger. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, un chèque déposé le

vendredi soir ne sera crédité que le mardi suivant, voire le mercredi si le lundi est férié.

On supposera par ailleurs que les conditions de la banque sont les suivantes :

- ✓ intérêt sur le découvert autorisé : 7,75 %,
- ✓ commission de plus fort découvert : 0,06 % sur le plus fort découvert de chaque mois,
- ✓ commission de tenue de compte : 20 € par mois,
- ✓ commission de mouvement : 0,60 % du montant des opérations au débit du compte.

Afin de calculer le montant des agios, il est nécessaire de reclasser les opérations par dates de valeur et de calculer le nombre de jours débiteurs.

Solde précédent en euros : + 200

| Nb jours débiteurs | Date valeur | Libellé opération                                | débit euros | crédit euros | Solde    |
|--------------------|-------------|--|-------------|--------------|----------|
| 15                 | 1/01        | Intérêts débiteurs du 3 <sup>ème</sup> trimestre | 300         |              | - 100    |
| 1                  | 16/01       | Chèque n°01512                                   | 15 000      |              | - 15 100 |
|                    | 17/01       | Dépôt espèces                                    |             | 16 000       | + 900    |
| 10                 | 07/02       | Virement bancaire                                | 6 000       |              | - 5 100  |
| 14                 | 17/02       | Retrait d'espèces                                | 500         |              | - 5 600  |
| 8                  | 03/03       | Chèque n°01514                                   | 1 000       |              | - 6 600  |
|                    | 11/03       | Remise chèques                                   |             | 9.900        | + 3 300  |
|                    | 21/03       | Retrait d'espèces                                | 1 000       |              | + 2 300  |

Montant des agios :

$$I = (100 \times 15 + 15100 \times 1 + 5100 \times 10 + 5600 \times 14 + 6600 \times 8) \times 7,75\% / 360$$

$$I = 42,80 \text{ €}$$

Commission de plus fort découvert H.T. :

$$C1 = 15\,100 \times 0,06\% = 9,06 \text{ €}.$$

$$\text{Soit T.T.C : } 9,06 \times 1,196 = 10,94 \text{ €}.$$

Commission de tenue de compte pour le trimestre :

$$C2 = 20 \times 3 \times 1,196 = 71,76 \text{ € T.T.C.}$$

Commission de mouvement T.T.C. :

$$C3 = (100 + 15100 + 5100 + 5600 + 6600) \times 0,6\% \times 1,196 = 233,22 \text{ €}$$

$$\text{Total agios + commissions : } 358,72 \text{ €}.$$

Ces frais seront débités à la date de valeur du 1<sup>er</sup> avril.

### Le taux effectif global

L'arrêté de compte trimestriel doit mentionner le taux effectif global (T.E.G.) qui a été appliqué. Le T.E.G. comprend les intérêts, commissions ou rémunérations de toutes nature afférents à l'utilisation du découvert.

Il est calculé de la façon suivante :

$$\text{TEG} = \frac{I + C1}{S} \times n$$

où :

- I est le montant total des agios
- C1 est le montant de la commission de découvert
- S est la somme de tous les soldes débiteurs en valeur multipliés par leur durée en jours
- n représente le nombre de jours de l'année (365 ou 366).

Dans notre exemple :

$$\text{TEG} = (42,80 + 9,06) / 198\,800 \times 365 = 9,52 \%$$

### La tenue d'un compte d'épargne

Sur un livret d'épargne (livret de Caisse d'Epargne, livret A, livret d'Epargne Populaire, Codévi, compte d'Epargne Logement, livret Jeune...), la date de valeur est le 1<sup>er</sup> ou le 16 qui suit la date d'opération. Pour les retraits, elle est le 1<sup>er</sup> ou le 16 qui précède la date d'opération.

L'unité de temps est la quinzaine. Le taux d'intérêt donné étant un taux d'intérêt annuel, le taux par quinzaine est calculé en divisant ce taux annuel par 24. L'intérêt rapporté par une somme V placée pendant n quinzaines au taux annuel i est donc :

$$I = Vni / 24.$$

Par exemple, un versement de 10 000 € le 23 mars retiré le 28 juillet sur un Codévi ne rapporte intérêt que du 1<sup>er</sup> avril au 16 juillet, soit 7 quinzaines. Sous l'hypothèse que le Codévi est rémunéré à 3 %, l'intérêt reçu est :

$$I = 10\,000 \times 7 \times 3\% / 24 = 87,50 \text{ €}.$$

Application :

Les opérations effectuées au cours de l'année N sur un livret de caisse d'épargne sont les suivantes :

8 juin : ouverture d'un livret avec un versement de 1 000 euros

8 septembre : versement de 5 000 euros

12 octobre : retrait de 2.000 euros

18 novembre : versement de 5.000 euros

20 décembre : retrait de 2.000 euros.

Calculez les intérêts perçus au 1<sup>er</sup> janvier N+1, au taux de 3 %.

| Date        | Date valeur              | Durée | Mouvement | Solde   |
|-------------|--------------------------|-------|-----------|---------|
| 8 juin      | 16 juin                  | 6     | + 1 000   | + 1 000 |
| 8 septembre | 16 septembre             | 1     | + 5000    | + 6 000 |
| 12 octobre  | 1 <sup>er</sup> octobre  | 4     | - 2000    | + 4 000 |
| 18 novembre | 1 <sup>er</sup> décembre | 1     | + 5000    | + 9 000 |
| 20 décembre | 16 décembre              | 1     | - 2000    | + 7 000 |

Calcul du montant des intérêts :

$$[1000 \times 6 + 6\,000 + 4\,000 \times 4 + 9\,000 + 7\,000] \times 3\% / 24 = 55 \text{ €}.$$

## L'escompte

L'escompte désigne la négociation, ou la mobilisation, d'une créance avant sa date d'échéance. Ainsi, plutôt que d'attendre le paiement de son client, une société peut escompter sa créance auprès de la banque et en obtenir un paiement immédiat, déduction faite d'une charge d'intérêt et de commissions pour le service rendu.

Les intérêts sont donc *précomptés* puisqu'ils sont déduits au début de la période.

Le taux d'escompte est fixé par chaque banque à partir de son taux de base bancaire (T.B.B.) qu'elle augmente d'un certain nombre de points selon les risques encourus. Elle peut prélever un minimum d'escompte pour les effets d'une valeur nominale peu élevée. Par ailleurs, elle ajoute des commissions diverses, ainsi qu'un ou deux jours « de banque » qui viennent augmenter nombre de jours écoulés entre la remise de l'effet et sa date d'échéance.

Application :

La société ARIANE adresse le 19 mai à la société HELIOS une facture de 100 000 euros, à régler le 31 juillet. Le 6 juin, la société ARIANE demande à sa banque d'escompter la créance qu'elle possède sur HELIOS de façon à satisfaire un besoin de trésorerie.

Après examen du dossier, la banque accepte l'opération.

Les conditions offertes par la banque sont les suivantes :

- ✓ taux d'escompte : 6,75 %
- ✓ un jour de banque
- ✓ commission d'endos : 0,6 % par an, calculée prorata temporis sur le montant nominal de l'effet. Minimum décompté : 10 jours.
- ✓ Commission d'intervention : 13,90 € par effet.
- ✓ Commission de service : 2,84 € par effet.

La T.V.A est de 19,60 %.

- a. Calculez le net de la négociation, c'est-à-dire le montant que la banque remet à la société ARIANE en échange de sa créance sur HELIOS.
- b. Calculez le taux réel d'escompte, TVA incluse et TVA déduite.
- c. Calculez le taux effectif d'emprunt pour la société ARIANE.
- d. Calculez le taux de rendement de l'opération pour la banque, en supposant que la commission de service et la commission d'intervention correspondent à des frais réellement engagés.

*Calcul du net de la négociation :*

- Calcul du nombre de jours entre le 6 juin et le 31 juillet :  
 $j = 30 - 6 + 31 = 55$  jours  
A ce nombre de jours effectifs, il faut ajouter un jour de banque, soit 56 jours.
- Calcul de l'escompte :  $100\ 000 \times 6,75\ \% \times 56 / 360 = 1\ 050$  €
- Calcul des commissions :  
Commission d'endos :  $100\ 000 \times 0,6\ \% \times 56 / 360 = 93,33$  €  
La commission d'endos n'est pas soumise à la TVA.  
Commission d'intervention :  $13,90 \times 1,196 = 16,62$  € T.T.C.  
Commission de service :  $2,84 \times 1,196 = 3,40$  € T.T.C.
- Total frais d'escompte : 1 163,35 €  
Net de la négociation :  $100\ 000 - 1\ 163,35 = 98\ 836,65$  €.

*Calcul du taux réel d'escompte*

Le **taux réel d'escompte** est un taux à intérêts précomptés, incluant les commissions et les jours de valeur. Il permet de comparer les conditions d'escompte de plusieurs banques entre elles. C'est le taux précompté qui, appliqué à la valeur nominale de l'effet et à la vraie durée de l'escompte, donne un intérêt égal au montant total des agios (commissions incluses).

$$100\ 000 \times i \times 55 / 360 = 1\ 163,35 \text{ €}$$

$$i = 1\ 163,35 \times 360 / (100\ 000 \times 55)$$

$$\Rightarrow \quad i = 7,61 \text{ \%}.$$

Le taux réel d'escompte est plus élevé que le taux nominal annoncé par la banque, puisqu'il inclut le coût induit par la comptabilisation d'un jour supplémentaire, ainsi que les différentes commissions.

On remarque que la valeur actuelle de la créance au taux réel d'escompte correspond au net de la négociation :

$$100\ 000 \times (1 - 55 \times 7,61\ \% / 360) = 98\ 837 \text{ €}.$$

Sachant que la TVA peut être récupérée, la société ARIANE peut s'intéresser au taux réel d'escompte, TVA déduite :

$$100\ 000 \times i \times 55 / 360 = 1050 + 93,33 + 13,90 + 2,84$$

$$i = 1\ 160,07 \times 360 / (100\ 000 \times 55)$$

$$\Rightarrow \quad i = 7,59 \text{ \%}.$$

**Calcul du taux effectif d'emprunt pour ARIANE**

Afin de choisir entre la remise d'un effet à l'escompte ou une autre source de financement à court terme, une entreprise évalue le coût de cette opération, c'est-à-dire son taux ou son taux effectif d'emprunt.

Dans notre exemple, l'Ariane reçoit 98 836,65 € sur 55 jours, payant de ce fait un intérêt de 1 163,35 €.

Le taux de revient de cette opération,  $t$ , est tel que :

$$98\,836,65 \times t \times 55 / 360 = 1\,163,35 \text{ €.}$$

$$\Rightarrow t = 7,70 \text{ \%}.$$

$t$  est également le taux d'intérêt postcompté équivalent au taux réel d'escompte.

$$t = 7,61 \text{ \%} / (1 - 7,61 \text{ \%} \times 55/360) = 7,70 \text{ \%}.$$

**Taux de rendement de l'opération pour la banque**

Celle-ci avance la somme de 98 836,65 € sur 55 jours. Elle prélève des frais de 1 163,35 €, mais 20,02 € (le montant de la commission de service et de la commission d'intervention) correspondent à des frais réellement engagés. La banque ne tire donc de l'opération qu'un bénéfice de 1 143,33 €. Le rendement de l'opération,  $r$ , est tel que :

$$98\,836,65 \text{ €} \times r \times 55 / 360 = 1\,143,33 \text{ €.}$$

$$\Rightarrow r = 7,57 \text{ \%}.$$

**Calcul du net de la négociation et du taux réel d'un bordereau d'escompte**

On parle de *taux réel du bordereau d'escompte* lorsque plusieurs effets sont remis à l'escompte en même temps. Il s'agit du taux réel moyen de l'opération.

Application :

Une entreprise remet à l'escompte le 24 octobre les effets de commerce suivants :

- ✓ un effet de 21.500 € dont l'échéance est le 12 décembre
- ✓ un effet de 8.600 € dont l'échéance est le 28 novembre
- ✓ un effet de 13.200 € dont l'échéance est le 2 novembre

Les conditions offertes par la banque sont les suivantes :

- ✓ taux d'escompte : 7,75 %. Minimum décompté : 10 jours francs.
- ✓ commission d'endos : 0,6 % calculée prorata temporis sur le montant nominal de l'effet.
- ✓ commission de service HT : 3 € par effet
- ✓ commission de bordereau HT : 5,75 € par effet
- ✓ majoration de deux jours de banque.

Calculer le net de la négociation et le taux réel du bordereau d'escompte (TVA incluse).

**Solution :**

- Taux d'escompte, endos compris :  $7,75 \% + 0,6 \% = 7,81 \%$ .
- Calcul du nombre de jours calendaires :
  - entre le 24 octobre et le 12 décembre :  $7 + 30 + 12 = 49$
  - entre le 24 octobre et le 28 novembre :  $7 + 28 = 35$
  - entre le 24 octobre et le 2 novembre :  $7 + 2 = 9$

La banque applique un minimum de 10 jours francs et ajoute un jour de banque. Le nombre de jours à prendre en compte est donc le suivant:

effet 1 : 51 jours

effet 2 : 37 jours

effet 3 : 12 jours.

- Calcul des agios (commission d'endos comprise) :  
 $(21\,500 \times 51 + 8\,600 \times 37 + 13\,200 \times 12) \times 0,0781 / 360 = 341,28 \text{ €}$
- Commissions T.T.C. :  
 $(5,75 + 3) \times 3 \times 1,196 = 31,40 \text{ €}$

**Total agios : 372,68 €.**

**Net de la négociation :**

$(21\,500 + 8\,600 + 13\,200) - 372,68 = 42\,927,33 \text{ €}.$

**Taux réel du bordereau d'escompte :**

$(21\,500 \times 49 + 8\,600 \times 35 + 13\,200 \times 9) \times i / 360 = 372,68$

$\Rightarrow i = 9,11 \%$ .

## Chapitre 2. L'intérêt composé

Pour les opérations financières à long terme (plus d'un an), le créancier peut considérer l'intérêt produit par son capital en fin d'année comme un nouveau capital productif d'intérêt. L'intérêt n'est donc plus proportionnel à la durée de placement, comme c'était le cas pour les intérêts simples.

### Section 1. Base de calcul des intérêts composés

#### Valeur acquise par une somme $V_0$ placée au taux $i$ pendant $T$ périodes

$$V_T = V_0 \times (1+i)^T \quad (1)$$

Les périodes sont généralement des années (avec  $i$  un taux annuel). On peut également s'agir de mois (avec  $i$  un taux mensuel), de trimestres (avec  $i$  un taux trimestriel)...

#### Exemple :

Quelle est la valeur acquise par une somme de 1 000 euros placée au taux annuel de 5 % pendant 10 ans ?

**Solution :**

$$V_{10} = 1\,000 \times (1 + 0,05)^{10} = 1\,628,89 \text{ €}.$$

#### Valeur actuelle d'une somme $V_T$ à recevoir dans $T$ périodes

En réorganisant la formule (1), on peut écrire :

$$V_0 = V_T \times (1+i)^{-T} \quad (2)$$

$V_0$  représente par exemple la somme qu'il faut placer au taux  $i$  pour obtenir un capital donné  $V_T$  au bout de  $T$  périodes.

#### Exemple :

Combien faut-il placer aujourd'hui, au taux de 4,5 %, pour obtenir une somme de 100 000 € au bout de 5 ans ?

**Solution :**

$$V_0 = 100\,000 \times (1 + 4,5\%)^{-5} = 80\,245,10 \text{ €}.$$

## Taux proportionnel, taux équivalent

La formule de la valeur acquise à intérêts composés suppose que l'unité de temps utilisée pour calculer le nombre de périodes soit la même que l'unité de temps utilisée pour calculer le taux d'intérêt, et corresponde également à la période de capitalisation. Dans les deux exemples ci-dessus, nous avons un taux d'intérêt annuel et une durée calculée en années. La capitalisation était également annuelle, c'est-à-dire que chaque année, les intérêts reçus étaient intégrés au capital et productifs d'intérêts l'année suivante.

On peut également avoir une capitalisation mensuelle (avec un taux mensuel et un certain nombre de mois), trimestrielle (avec un taux trimestriel et un certain nombre de trimestres)...

Si l'unité de temps utilisée pour le calcul des intérêts ne correspond pas à l'unité de temps utilisée pour la capitalisation (par exemple si on nous indique un taux d'intérêt annuel alors que la capitalisation est mensuelle), il faut calculer le *taux équivalent*.

### *Taux mensuel équivalent à un taux annuel*

Cherchons le taux  $i_m$  valable pour un mois, autrement dit pour  $1/12^{\text{ème}}$  d'année, équivalent au taux annuel  $i_a$ .

Si on place 1 € pendant 1 an au taux annuel  $i_a$ , on obtiendra  $(1+i_a)$  au bout d'un an.

Si on place 1 € pendant 12 mois au taux mensuel  $i_m$ , à capitalisation mensuelle, on obtiendra  $(1+i_m)^{12}$  au bout d'un an.

Si les deux taux d'intérêts sont équivalents, ils doivent permettre d'obtenir la même somme au bout d'un an, d'où l'égalité :

$$(1+i_a) = (1+i_m)^{12}$$

Cette égalité permet de calculer  $i_m$  :  $i_m = (1+i_a)^{1/12} - 1$ .

**Généralisation**

Soit un taux d'intérêt  $i$  valable pour une période  $p$ . Le taux équivalent  $i'$  valable pour une sous période  $p' = p/k$ , se calcule de la façon suivante :

$$i' = (1+i)^{1/k} - 1 \quad (3)$$

Soit un taux d'intérêt  $i$  valable pour une période  $p$ . Le taux équivalent  $i'$  valable pour une période  $p' = kp$ , se calcule de la façon suivante :

$$i' = (1+i)^k - 1 \quad (4)$$

**Exemple :** Calculez le taux mensuel équivalent à un taux annuel de 10 %.

**Solution :**

$$i_m = (1+0,1)^{1/12} - 1 = 0,8 \%$$

Vérification : le taux annuel équivalent à un taux mensuel de 0,8 % se calcule de la façon suivante :

$$i_a = (1+0,8\%)^{12} - 1 = 0,1 = 10 \%$$

**Exemple :** Soit un taux d'intérêt annuel de 6 %. On place une somme de 100 € à capitalisation mensuelle. Combien recevra-t-on au bout de 15 mois ?

**Solution :**

$$i_m = 1,06^{1/12} - 1 = 0,49 \%$$

La somme que l'on recevra au bout de 15 mois se calculera alors de la façon suivante :  $V_{15} = 100 \times (1 + 0,49\%)^{15} = 107,56 \text{ €}$ .

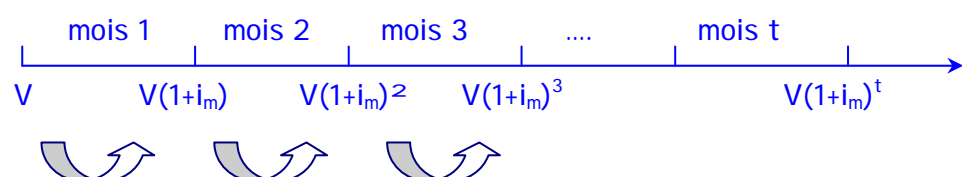
**Remarque :**

On peut obtenir un résultat identique à partir du calcul suivant :

$$V_{15} = 100 \times (1 + 6\%)^{15/12} = 107,56 \text{ €}$$

Il est important de bien conserver à l'esprit que lorsque l'on calcule un taux mensuel équivalent à un taux annuel donné, on suppose, implicitement, que la capitalisation des intérêts est mensuelle, c'est-à-dire les intérêts perçus au cours d'un mois donné sont intégrés au capital à la fin de ce mois.

**Schéma 1 :**



Si ce n'est pas le cas, si la capitalisation est annuelle par exemple, il conviendra d'utiliser les intérêts simples et de calculer le taux proportionnel.

Soit un taux d'intérêt  $i$  valable pour une période  $p$ . Le taux proportionnel  $i'$  valable pour une sous période  $p' = p/k$ , se calcule de la façon suivante :

$$i' = i/k \quad (5)$$

**Exemple :**

- Calculez le taux trimestriel équivalent à un taux annuel de 5 %.
- Calculez le taux trimestriel proportionnel à un taux annuel de 5 %.

**Solution :**

a.  $i_t = (1+0,05)^{1/4}-1 = 1,23 \%$

b. Taux trimestriel proportionnel à un taux de 5 % :  $5 \% / 4 = 1,25 \%$

On remarque que le taux proportionnel est légèrement supérieur au taux équivalent.

### Calcul de la valeur acquise sur un nombre non entier de périodes

**Exemple :**

On place un capital de 100 € à un taux annuel de 5 % pendant 6 ans ½. Combien obtient-on à l'issue de ce placement ?

Il existe deux méthodes de calcul :

**méthode commerciale** : elle consiste à utiliser les intérêts composés sur toute la durée de placement :

$$V_{6,5} = 100 \times (1 + 0,05)^{6,5} = 137,31 \text{ €}$$

**méthode rationnelle** : elle consiste à utiliser les intérêts composés pour les périodes entières, puis les intérêts simples pour la dernière fraction de période.

on calcule la valeur acquise par le capital au bout de 6 ans :

$$V_6 = 100 \times (1 + 0,05)^6 = 134 \text{ €}$$

On suppose que les 134 € sont placés pendant 6 mois à intérêts simples :

$$V_{6,5} = 134 \times (1 + 0,05 / 2) = 137,35 \text{ €}.$$

Cette méthode est peu utilisée en pratique, on lui préfère la méthode commerciale.

On remarque que le résultat obtenu par la méthode commerciale est légèrement inférieur à celui de la solution rationnelle. C'est toujours le cas : la méthode commerciale sous-estime légèrement le montant des intérêts.

## Section 2. Les annuités constantes

Les produits de placement ou les crédits proposés par les établissements financiers impliquent fréquemment des engagements de versements égaux et réguliers :

- ✓ plan d'épargne logement
- ✓ plan d'épargne retraite
- ✓ plan d'assurance vie
- ✓ emprunt...

Ces versements sont désignés sous le terme générique d'**annuités** même si leur fréquence est autre qu'annuelle (versements mensuels, trimestriels, bisannuels...)

Il existe des formules simples pour calculer la valeur acquise et la valeur actuelle d'une série de flux égaux, à taux constant. Ces valeurs peuvent également être trouvées dans les tables financières.

### Valeur acquise par une série de versements égaux, à taux constant

#### *Versements de fin de période*

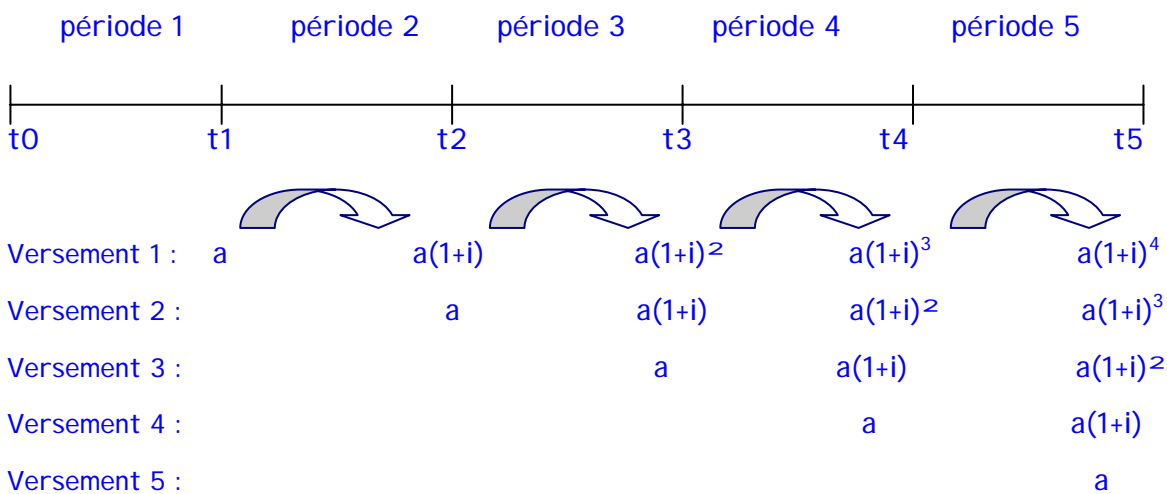
Imaginons 5 versements d'un montant  $a$ , de la période 1 à la période 5, chaque versement étant placé au taux  $i$ . On suppose les versements effectués à la fin de chaque période (la période 1 allant de la date  $t_0$  à la date  $t_1$ ).

le premier versement, effectué à la fin de la période 1, rapporte  $a(1+i)^4$  à la fin de la période 5,

le versement de la période 2, qui n'est placé que pendant 3 périodes, ne rapporte donc que  $a(1+i)^3$  à la fin de la période 5,

le versement de la période 5 rapporte  $a$ .

Schéma 2 :



La valeur acquise par cette série de cinq versements à la fin de la cinquième période correspond à la somme des valeurs acquises de chaque versement, autrement dit, à la somme des valeurs inscrites sur le schéma ci-dessus à la date t5 :

$$V_5 = a(1+i)^4 + a(1+i)^3 + a(1+i)^2 + a(1+i) + a.$$

De manière générale, on peut écrire que la valeur acquise par n versements d'un montant a au moment du dernier versement se calcule de la façon suivante :

$$V_n = a \sum_{t=1}^n (1+i)^{n-t}$$

On remarque que  $V_n$  est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique, de premier terme a et de raison (1+i). Il existe des formules simplificatrices pour calculer ce type de somme.

*Théorème* : la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme a et de raison r est :

$$S_n = a \frac{1-r^n}{1-r}$$

Ce théorème se démontre par récurrence :

- montrons que ce théorème est vrai pour n = 1 :

$$S_1 = a \frac{1-r^1}{1-r} = a$$

- montrons que si ce théorème est vrai pour  $n$ , alors il est vrai pour  $n+1$  :

Si  $S_n = a \frac{1-r^n}{1-r}$ , alors :

$$S_{n+1} = a \frac{1-r^n}{1-r} + ar^n = a \frac{1-r^n + (1-r)r^n}{1-r} = a \frac{1-r^n + r^n - r^{n+1}}{1-r} = a \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Donc, ce théorème est vrai quel que soit  $n$ .

En remplaçant  $r$  par  $(1+i)$  et en simplifiant, on obtient :

$$V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (6)$$

Cette formule permet de calculer directement la valeur acquise par une série de  $n$  annuités de montant  $a$  placées au taux  $i$ , au moment du dernier versement.

La valeur acquise par une série de  $n$  annuités de fin de période se calcule par la formule :

$$V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

**Exemple :**

Quelle est, au taux annuel de 3,5 %, la valeur acquise par une suite de 8 annuités de 5 000 euros, au moment du dernier versement ?

Solution :

$$V_n = 5000 \frac{(1+3,5\%)^8 - 1}{3,5\%} = 45\,258,43 \text{ €.}$$

### Annuités de début de période

Il arrive assez fréquemment que l'on souhaite calculer la valeur acquise par une série de  $n$  annuités, non pas au moment du dernier versement, mais une période après le dernier versement. C'est le cas notamment d'un particulier qui souscrirait un plan d'épargne logement et qui souhaiterait calculer la valeur de son épargne, une période après sa dernière annuité.

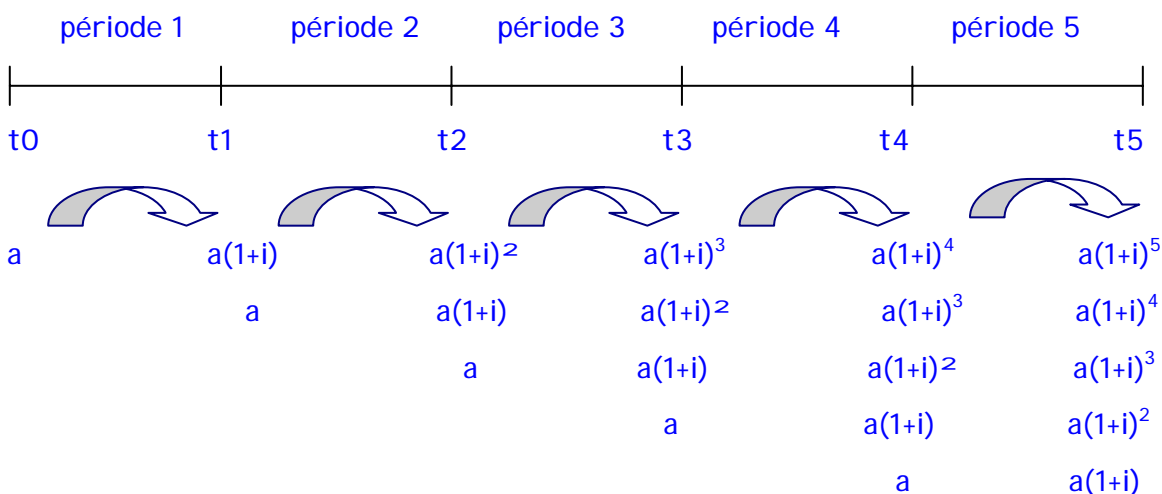
Ce type d'opérations est fréquemment désigné sous l'appellation d'annuités de début de période.

Dans ce cas, chaque versement est resté placé une période de plus que dans le cas des annuités de fin de période (voir schéma ci-dessous).

La valeur acquise se calcule donc de la façon suivante :

$$V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i) \quad (7)$$

Schéma 3 :



**Exemple :** Quelle est, au taux annuel de 3,5 %, la valeur acquise par une suite de 8 annuités de 5 000 euros, un an après dernier versement ?

**Solution :**

$$V_n = 5000 \frac{(1 + 3,5\%)^8 - 1}{3,5\%} (1 + 3,5\%) = 46\,842,48 \text{ €}.$$

### Valeur actuelle d'une série d'annuités constantes

#### Annuités de fin de période

La valeur actuelle d'une série d'annuités de fin de période se calcule à partir de la formule permettant de calculer la valeur acquise.

Sachant que  $V_0 = V_n(1+i)^{-n}$

Et que  $V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ ,

on peut montrer très facilement que :

$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \quad (8)$$

Cette valeur actuelle est calculée en  $t_0$ , c'est-à-dire d'après le schéma 2, un an avant le premier versement.

Lorsque les annuités sont versées en début de période,  $t_0$  correspond à la date du premier versement, et on utilise la formule suivante :

$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} (1+i) \quad (9)$$

**Exemple 1 :** Calculez la valeur actuelle d'une suite de 10 annuités de 1000 €, un an avant le premier versement, au taux de 4,5 %.

**Solution :**

$$V_0 = 1000 \frac{1 - (1 + 4,5\%)^{-10}}{4,5\%} = 7912,72 \text{ €}.$$

**Exemple 2 :** Calculez, au taux de 0,5 %, la valeur actuelle d'une suite de 36 annuités de 100 €, versées en début de période

**Solution :**

$$V_0 = 100 \frac{1 - (1 + 0,5\%)^{-36}}{0,5\%} (1 + 0,5\%) = 3303,54 \text{ €}.$$

### Rente perpétuelle de flux constants

Une rente perpétuelle est une suite infinie de versements. Le calcul de la valeur acquise n'a alors aucun sens, mais on peut calculer la valeur actuelle.

Dans le cas de versements de fin de période (le premier versement a lieu dans une période), la valeur actuelle d'une rente perpétuelle se calcule de la façon suivante :

$$V_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Cette formule se simplifie et on obtient :  $V_0 = \frac{a}{i}$ . (10)

**Exemple 1** Evaluez une rente perpétuelle de 500 € par an au taux de 4 %, un an avant le premier versement.

**Solution :**

$$V_0 = 500/0,04 = 12\,500 \text{ €}.$$

Cette rente s'appelle une rente perpétuelle immédiate.

## Exemple 2

Evaluez la rente précédente au moment du premier versement.

**Solution :**

$$V_0 = 12\,500 \times 1,04 = 13\,000 \text{ €.}$$

## Section 3. Annuités progressives

Certaines formules de placement ou d'emprunt proposent de faire varier progressivement les annuités de façon à les adapter à l'évolution des capacités de paiement d'une entreprise ou d'un particulier.

Les annuités en progression arithmétique augmentent ainsi, à chaque période, d'un même montant  $r$  en euros.

Les annuités en progression géométrique augmentent quant à elle d'un même pourcentage à chaque période.

### Annuités variant en progression arithmétique

*Valeur acquise par une série d'annuités variant en progression arithmétique*

#### Exemple :

Monsieur X dépose chaque année, au premier janvier, une petite somme d'argent sur le compte épargne de son fils, rémunéré au taux  $i$ . La première année, le versement était d'un montant  $a$ , et Monsieur X augmente chaque année son versement de  $r$  euros. De quelle somme son fils pourra-t-il disposer au moment du nième versement ?

La valeur acquise de cette série d'annuités se calcule de la façon suivante :

$$V_n = a_1(1+i)^{n-1} + a_2(1+i)^{n-2} + \dots + a_n$$

$$\text{où } a_1 = a, a_2 = a+r, \dots, a_n = a + (n-1)r$$

Pour simplifier cette somme, l'astuce est de faire apparaître le terme constant,  $r$ , dans l'équation, en lieu et place des annuités  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Pour cela, on remarque que  $r$  correspond à la différence entre deux annuités successives :

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}.$$

Pour faire apparaître  $r$  dans l'équation, on procède de la façon suivante :

$$V_n = a_1(1+i)^{n-1} + a_2(1+i)^{n-2} + \dots + a_{n-1}(1+i) + a_n$$

$$V_n(1+i) = a_1(1+i)^n + a_2(1+i)^{n-1} + a_3(1+i)^{n-2} + \dots + a_n(1+i)$$

$$\Rightarrow V_n(1+i) - V_n = a_1(1+i)^n + (a_2-a_1)(1+i)^{n-1} + \dots + (a_n-a_{n-1})(1+i) - a_n$$

$$\Rightarrow iV_n = a_1(1+i)^n + r(1+i)^{n-1} + \dots + r(1+i) + r - a_1 - nr$$

On reconnaît en rouge la somme des  $n$  premiers termes d'une suite géométrique, de premier terme  $r$  et de raison  $(1+i)$ , qui se simplifie de la façon suivante :

$$r(1+i)^{n-1} + \dots + r(1+i) + r = r \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$iV_n = a_1[(1+i)^n - 1] + r \frac{(1+i)^n - 1}{i} - nr$$

$$iV_n = [a_1 + r/i] [(1+i)^n - 1] - nr$$

$$V_n = \left[ a_1 + \frac{r}{i} \right] \cdot \frac{[(1+i)^n - 1]}{i} - \frac{nr}{i} \quad (11)$$

### Valeur actuelle d'une suite d'annuités variant en progression arithmétique

La valeur actuelle d'une suite d'annuités variant en progression arithmétique se calcule à partir de la formule de la valeur acquise.

Sachant que :

$$V_n = \left[ a_1 + \frac{r}{i} \right] \cdot \frac{[(1+i)^n - 1]}{i} - \frac{nr}{i}$$

et que :

$$V_0 = \frac{V_n}{(1+i)^n}$$

On peut écrire, après simplification :

$$V_0 = \left[ a_1 + \frac{r}{i} \right] \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{nr}{i(1+i)^n} \quad (12)$$

### Valeur actuelle d'une rente perpétuelle variant en progression arithmétique

La valeur actuelle d'une rente perpétuelle variant en progression arithmétique est la limite de l'équation précédente lorsque  $n$  tend vers l'infini.

$$V_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ a_1 + \frac{r}{i} \right] \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{nr}{i(1+i)^n}$$

Cette formule se simplifie et l'on obtient :

$$V_0 = \left[ a_1 + \frac{r}{i} \right] \cdot \frac{1}{i} = \frac{a_1}{i} + \frac{r}{i^2} \quad (13)$$

## Annuités variant en progression géométrique

Valeur acquise par une série d'annuités variant en progression géométrique

### Exemple

Un épargnant ouvre un plan d'assurance-vie sur lequel il dépose un montant initial  $a$ . Il envisage d'accroître son versement de  $q$  pourcent par an. De combien disposera-t-il au bout du nième versement ?

Comme dans le cas précédent, la valeur acquise par cette série d'annuités se calcule à partir de l'équation suivante :

$$V_n = a_1(1+i)^{n-1} + a_2(1+i)^{n-2} + \dots + a_n$$

Les montants des versements  $a_1, a_2 \dots a_n$  sont les suivants :

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 &= a.(1+q) \\ &\dots \\ a_n &= a.(1+q)^{n-1} \end{aligned}$$

Ainsi, la formule permettant de calculer la valeur acquise de cette série d'annuités devient :

$$V_n = a(1+i)^{n-1} + a(1+q)(1+i)^{n-2} + a(1+q)^2(1+i)^{n-3} + \dots + a.(1+q)^{n-1}$$

Soit, en mettant  $a(1+i)^{n-1}$  en facteur :

$$V_n = a(1+i)^{n-1} [1 + \frac{(1+q)}{(1+i)} + [\frac{(1+q)}{(1+i)}]^2 + \dots + [\frac{(1+q)}{(1+i)}]^{n-1}]$$

On reconnaît en rouge la somme des  $n$  premiers termes d'une suite géométrique de 1er terme 1 et de raison  $(1+q)/(1+i)$  :

$$V_n = a(1+i)^{n-1} \frac{1 - \left(\frac{1+q}{1+i}\right)^n}{1 - \frac{1+q}{1+i}}$$

Soit :

$$V_n = a \frac{(1+i)^{n-1} - \frac{(1+q)^n}{(1+i)}}{1 - \frac{1+q}{1+i}}$$

D'où, après simplification :

$$V_n = a \frac{(1+i)^n - (1+q)^n}{i - q} \tag{14}$$

Lorsque  $q=0$ , on reconnaît la formule classique de la valeur acquise par une série de  $n$  annuités de fin de période d'un montant  $a$ .

*Valeur actuelle d'une suite d'annuités variant en progression géométrique*

Comme précédemment, la formule permettant de calculer la valeur actuelle d'une suite d'annuités variant en progression géométrique s'obtient à partir de la formule de la valeur acquise :

$$V_0 = \frac{V_n}{(1+i)^n} = \frac{a}{(1+i)^n} \frac{(1+i)^n - (1+q)^n}{i-q} = a \frac{1 - \left(\frac{1+q}{1+i}\right)^n}{i-q} \quad (15)$$

*Valeur actuelle d'une rente perpétuelle variant en progression géométrique*

C'est la limite de la formule précédente lorsque  $n$  tend vers l'infini :

$$V_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1 - \left(\frac{1+q}{1+i}\right)^n}{i-q}$$

Cette limite n'est finie que si  $q \leq i$ . Dans ce cas :

$$V_0 = \frac{a}{i-q} \quad (16)$$

**Section 4. exercices d'application**

**Exercice 1 :** L'entreprise X envisage de rénover l'un de ses bâtiments dans 6 ans. Elle souhaiterait autant que possible ne pas avoir à emprunter pour cette opération. Elle décide donc de placer, à la fin de chaque année, la somme de 10 000 € sur un compte rémunéré à 5,5 %. De quelle somme disposera-t-elle au bout de 6 ans ?

**Solution :**

Il s'agit de déterminer la valeur acquise d'une série de 6 annuités de fin de période, au taux de 5,5 % :

$$V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 10.000 \frac{(1+5,5\%)^6 - 1}{5,5\%} = 68.880,51 \text{ €}.$$

---

**Exercice 2 :** Un particulier décide de constituer une épargne en vue de disposer, dans 5 ans, d'une somme de 30.000 €. Sachant que le produit de placement choisi rapporte un intérêt annuel de 4,6 %, combien doit-il placer à la fin de chaque mois ?

---

**Solution :**

Les flux financiers sont versés sur le compte épargne avec une périodicité mensuelle.

Il faut donc en premier lieu calculer le taux mensuel équivalent au taux annuel de 4,6 % :

$$i_m = (1 + 4,6 \%)^{1/12} - 1 = 0,375 \%$$

Il s'agit en second lieu de trouver la mensualité qui permet, au taux de 0,375 %, d'obtenir une valeur acquise de 30 000 € au bout de 5 ans (autrement dit, au bout de 60 mensualités).

La formule à utiliser est la suivante :

$$V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

C'est à qui nous intéresse, il faut donc réorganiser cette formule de la façon suivante :

$$a = \frac{iV_n}{(1+i)^n - 1} = \frac{0,375\% \times 30.000}{(1+0,375\%)^{50} - 1} = 446,79 \text{ €}$$

### Exercice 3 :

En fin de compte, ce particulier ne peut pas verser plus de 200 € par mois sur son compte. Combien de mensualités devra-t-il verser pour atteindre la somme de 30.000 € ?

**Solution :**

Il s'agit cette fois de calculer le nombre d'annuités  $n$  lorsque l'on connaît la valeur finale  $V_n$ , le taux d'intérêt  $i$  et l'annuité  $a$ .

On reprend donc la formule de la valeur acquise d'une suite de  $n$  annuités constantes :

$$V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\Rightarrow (1+i)^n = \frac{iV_n}{a} + 1$$

$$\Rightarrow n \ln(1+i) = \ln\left(\frac{iV_n}{a} + 1\right)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{iV_n}{a} + 1\right)}{\ln(1+i)}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{0,375\% \times 30.000}{200} + 1\right)}{\ln(1+0,375\%)} = 119,23$$

Il faudra donc 120 annuités à Monsieur X pour obtenir la somme de 30 000 euros, soit dix ans de versements.

**Exercice 4 :**

Une chaîne de distribution vous propose d'acheter un téléviseur en 12 mensualités d'un montant de 29 €. Le taux mensuel du crédit est de 0,4 %. Quelle est la valeur actuelle de cette série de flux, en supposant :

- que le premier versement a lieu un mois après l'achat du téléviseur.
- que le premier versement a lieu au moment de l'achat du téléviseur.

**Solution :**

a. La première situation correspond à des mensualités de fin de période puisque l'on cherche à calculer la valeur actuelle un mois avant le premier versement. La valeur actuelle de la série de versements correspond donc à l'équation suivante :

$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = 29 \frac{1 - (1 + 0,4\%)^{-12}}{0,4\%} = 339,12 \text{ €}.$$

c. La seconde situation correspond à des mensualités de début de période, puisque l'on cherche à calculer la valeur actuelle au moment du premier versement :

$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} (1+i) = 339,12 \times 1,004 = 340,47 \text{ €}.$$

**Exercice 5 :**

Vous emménagez dans un nouvel appartement et souhaitez emprunter 5 000 € pour financer vos frais d'installation. Votre banque se propose de vous prêter cette somme sur 48 mois à un taux proportionnel de 4,29 %. Quelle est la somme que vous devrez déboursier chaque mois pour rembourser cet emprunt ? On suppose que le premier remboursement a lieu un mois après la mise à disposition des fonds.

**Solution :**

taux mensuel proportionnel à un taux annuel de 4,29 % :

$$im = 4,29 \% / 12 = 0,3575 \%$$

$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$\Rightarrow a = \frac{V_0 i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{5000 \times 0,3575\%}{1 - (1 + 0,3575\%)^{-48}} = 113,55 \text{ €}$$

**Exercice 6 :**

Enfin, vous souhaitez emprunter sur une plus courte période et vous déclarez prêt à déboursier jusqu'à 200 € par mois. Quelle sera alors la durée de l'emprunt ?

$$(1+i)^{-n} = 1 - \frac{i.V_0}{a}$$
$$\Rightarrow -n \ln(1+i) = \ln\left(1 - \frac{i.V_0}{a}\right)$$
$$\Rightarrow n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{i.V_0}{a}\right)}{\ln(1+i)}$$
$$\Rightarrow n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{0,3575\% \cdot 5000}{200}\right)}{\ln(1 + 0,3575\%)}$$
$$\Rightarrow n = 23,99$$

Ce qui fait 24 annuités.

**Exercice 7 :**

---

Un versement de 1 000 € par an rapporte 18 000 € au moment du quinzième versement. Calculez le taux d'intérêt de ce placement.

---

**Solution :**

La formule permettant de relier les 15 versements de 1000 euros et leur valeur actuelle de 18 000 euros est la suivante :

$$1.000 \frac{(1+i)^{15} - 1}{i} = 18.000$$
$$\Rightarrow \frac{(1+i)^{15} - 1}{i} = 18$$

Il n'est pas possible d'extraire  $i$  de cette équation. Les calculatrices financières ou scientifiques permettent de résoudre ce genre de problème. Une autre solution est de procéder par tâtonnement.

Calculons par exemple la valeur de  $\frac{(1+i)^{15} - 1}{i}$  sous l'hypothèse d'un taux d'intérêt  $i$  égal à 3 % :

$$\frac{(1 + 3\%)^{15} - 1}{3\%} = 18,5989$$

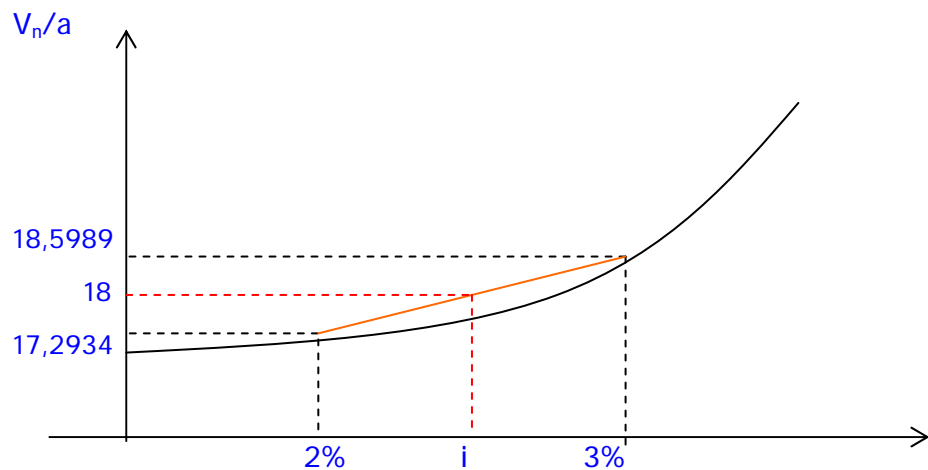
On obtient une valeur légèrement supérieure à 18, il faut donc essayer un taux d'intérêt plus faible.

Prenons l'hypothèse d'un taux d'intérêt  $i$  égal à 2 % :

$$\frac{(1 + 2\%)^{15} - 1}{2\%} = 17,2934$$

Le taux d'intérêt du placement est donc compris entre 2 % et 3%.

Pour l'approcher plus précisément, il est possible de procéder à une interpolation linéaire :



Le principe de l'interpolation linéaire (qui découle du théorème de Thalès en mathématiques) est que :

$$\frac{i - 2\%}{3\% - 2\%} = \frac{18 - 17,2934}{18,5989 - 17,2934}$$

$$\Leftrightarrow i = 2\% + \frac{[18 - 17,2934]}{[18,5989 - 17,2934]} \times 1\% = 2,54\%$$

L'interpolation linéaire a pour effet de sous-estimer légèrement le montant de l'intérêt qui est en réalité de 2,55 %.

### Exercice 8 :

Un emprunt de 100 000 € effectué aujourd'hui doit être remboursé par une suite de 20 annuités de 6 615 €, la première venant à échéance dans un an. Calculez le taux d'intérêt appliqué à cet emprunt

**Solution :**

$$V_0 = a \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$\Leftrightarrow 100.000 = 6.615 \frac{1 - (1 + i)^{-20}}{i}$$

Une calculatrice financière ou scientifique, ou un tableur, permettent de calculer directement  $i = 2,83 \%$ .

Comme précédemment, ce résultat peut être approché par un tâtonnement suivi d'une interpolation linéaire.

### Chapitre 3. Les emprunts indivis

Les emprunts indivis, ainsi appelés parce qu'ils sont contractés auprès d'un seul créancier (généralement une banque) s'opposent aux emprunts obligataires contractés auprès de plusieurs créanciers, et qui seront étudiés dans le chapitre 4. Cependant, tout comme les emprunts obligataires, les emprunts indivis se manifestent par un flux positif au moment de la signature du contrat de prêt, puis par une série de flux de remboursement négatifs.

On distingue habituellement trois formes de remboursement :

- le remboursement in fine : seuls les intérêts sont payés régulièrement, le capital est remboursé en une seule fois à la fin de la durée de vie de l'emprunt ;
- le remboursement par amortissements constants : à chaque échéance, l'emprunteur rembourse une part constante du capital. Les intérêts versés décroissent de période en période, et les versements également ;
- le remboursement par annuités (mensualités, trimestrialités) constantes : les annuités ne varient pas sur la durée de vie de l'emprunt. Au cours de la vie de l'emprunt, la part de l'annuité constituant le remboursement du capital augmente et la charge d'intérêt diminue.

Il s'agit des trois formes de remboursement les plus simples, mais d'autres formules peuvent être adoptées : annuités progressives, dégressives, évoluant par seuil, différé d'amortissement... En général, les grandes entreprises privilégient les emprunts in fine ou par amortissement constant, alors que les particuliers et les PME préfèrent les annuités constantes.

## Section 1. Les tableaux d'amortissement d'emprunts indivis

### Notations

Dans la suite de ce chapitre, on notera :

- ✓  $C_0$  le capital emprunté à la date 0 (au début de la période 1) ;
- ✓  $i$  le taux d'intérêt nominal de l'emprunt ;
- ✓  $N$  le nombre d'annuités payables à terme échu ;
- ✓  $C_{n-1}$  le capital restant dû à la date  $n-1$ , correspondant au début de la période  $n$  ;
- ✓  $V_n$  le capital restant dû à la date  $n$ , c'est-à-dire à la fin de la période  $n$  ;
- ✓  $A_n$  le versement total de la période  $n$  ;
- ✓  $I_n$  la part de  $A_n$  constituant le paiement de la charge d'intérêt ;
- ✓  $R_n$  la part d'amortissement comprise dans  $A_n$  ;
- ✓  $F$  le coût global du crédit.

Par construction :

$$V_n = C_n.$$

$$A_n = I_n + R_n.$$

$$I_n = C_{n-1} \cdot i.$$

$\sum_{n=1}^N R_n = C_0$  : la somme des amortissements doit correspondre au montant emprunté.

$V_N = 0$  : à la fin de la période  $N$ , le capital doit être entièrement remboursé.

$\sum_{n=1}^N I_n = F$  La somme des flux d'intérêt correspond au coût global du crédit (il faut y ajouter, s'il y a lieu, les frais de dossier).

### Construction des tableaux d'amortissement

Les tableaux d'amortissement doivent obligatoirement être fournis par tout établissement financier accordant un prêt à une entreprise ou à un particulier. En effet, les emprunteurs en ont besoin pour distinguer la part de l'annuité qui constitue le versement des charges financières et la part de l'annuité qui constitue le remboursement du capital, les charges financières étant fiscalement déductibles.

*Les emprunts in fine*

Les emprunts in fine sont remboursés en totalité à la fin de l'opération. En revanche, les intérêts sont versés à la fin de chaque période.

**Exemple :** Construisez le tableau d'amortissement d'un emprunt de 100 000 € au taux de 6,5 %, remboursable in fine et de durée de vie 5 ans.

$$C_0 = 100\ 000\ €$$

$$i = 6,5\ \%$$

$$n = 5\ \text{ans.}$$

L'emprunt étant in fine, la totalité du capital emprunté est remboursée à l'issue de la cinquième année. Chaque année, les intérêts dus sur ce capital, soit 6 500 €, sont versés à la banque.

| Année        | Capital dû en début de période | Intérêt                 | Amortissement du capital | Annuité           | Capital restant dû    |
|--------------|--------------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------|-----------------------|
| n            | $C_{n-1} = V_{n-1}$            | $I_n = C_{n-1} \cdot i$ | $R_n$                    | $A_n = I_n + R_n$ | $V_n = C_{n-1} - R_n$ |
| 1            | 100 000                        | 6 500                   | 0                        | 6 500             | 100 000               |
| 2            | 100 000                        | 6 500                   | 0                        | 6 500             | 100 000               |
| 3            | 100 000                        | 6 500                   | 0                        | 6 500             | 100 000               |
| 4            | 100 000                        | 6 500                   | 0                        | 6 500             | 100 000               |
| 5            | 100 000                        | 6 500                   | 100 000                  | 106 500           | 0                     |
| <b>TOTAL</b> |                                | <b>32 500</b>           | <b>100 000</b>           | <b>132 500</b>    |                       |

*Les emprunts à amortissements constants*

**Exemple :** Construisez le tableau d'amortissement d'un emprunt de 100 000 € au taux de 6,5 %, remboursable en 5 amortissements constants et de durée de vie 5 ans.

Cette fois, une somme constante de 200 000 € est remboursée chaque année. Du fait que le capital restant dû diminue régulièrement, le montant des intérêts diminue également. Ainsi, le montant des annuités est de plus en plus faible.

| Années       | Capital dû en début de période | Intérêts                           | Amortissement du capital | Annuités                            | Capital restant dû             |
|--------------|--------------------------------|------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|
| n            | C <sub>n</sub>                 | I <sub>n</sub> = C <sub>n</sub> .i | R <sub>n</sub>           | a = I <sub>n</sub> + R <sub>n</sub> | C <sub>n</sub> -R <sub>n</sub> |
| 1            | 100 000                        | 6 500                              | 20 000                   | 26 500                              | 80 000                         |
| 2            | 80 000                         | 5 200                              | 20 000                   | 25 200                              | 60 000                         |
| 3            | 60 000                         | 3 900                              | 20 000                   | 23 900                              | 40 000                         |
| 4            | 40 000                         | 2 600                              | 20 000                   | 22 600                              | 20 000                         |
| 5            | 20 000                         | 1 300                              | 20 000                   | 21 300                              | 0                              |
| <b>TOTAL</b> |                                | <b>195 000</b>                     | <b>100 000</b>           | <b>119 500</b>                      |                                |

### Les emprunts à annuités constantes

L'avantage principal des emprunts à annuités constantes est qu'ils évitent à l'emprunteur de faire face à des versements importants aux échéances de remboursement. C'est pour cette raison que les emprunts à annuités constantes sont presque toujours proposés aux particuliers et aux PME.

#### Exemple :

Construisez le tableau d'amortissement d'un emprunt de 100 000 € au taux de 6,5 %, remboursable par annuités constantes et de durée de vie 5 ans.

Pour construire un tableau d'amortissement d'emprunt à annuités constantes, il faut dans un premier temps calculer le montant de l'annuité, suivant la formule :

$$a = V_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Dans notre exemple :

$$a = 100.000 \frac{6,5\%}{1 - (1 + 6,5\%)^{-5}} = 20.656,84 \text{ €} .$$

| Années       | Capital dû | Annuités          | Intérêts         | Amortissement<br>du capital | Capital<br>restant dû |
|--------------|------------|-------------------|------------------|-----------------------------|-----------------------|
| n            | $C_{n-1}$  | a                 | $C_{n-1}.i$      | $A_n = a-Ci$                | $V_n = C-(a-Ci)$      |
| 1            | 100 000,00 | 24 063,45         | 6 500,00         | 17 563,45                   | 82 436,55             |
| 2            | 82 436,55  | 24 063,45         | 5 358,38         | 18 705,07                   | 63 731,48             |
| 3            | 63 731,48  | 24 063,45         | 4 142,55         | 19 920,90                   | 43 810,57             |
| 4            | 43 810,57  | 24 063,45         | 2 847,69         | 21 215,76                   | 22 594,81             |
| 5            | 22 594,81  | 24 063,47         | 1 468,66         | 22 594,79                   | 0,00                  |
| <b>TOTAL</b> |            | <b>120 317,25</b> | <b>20 317,27</b> | <b>100 000,00</b>           |                       |

Ce tableau appelle quelques remarques :

- le montant des intérêts décroît car il dépend du capital restant dû, qui décroît lui-même en fonction des amortissements ;
- les amortissements augmentent chaque année pour que l'annuité reste constante ;
- dans la pratique, il est assez rare qu'un particulier ou une entreprise contracte un emprunt remboursable annuellement. La plupart du temps, les remboursements se font par mensualités, trimestrialités ou semestrialités constantes. Les remboursements sont calculés suivant la même méthode.

### Emprunts à annuités constantes, mais à amortissement différé

Il existe deux formules d'emprunt à amortissement différé :

Pendant quelques périodes, l'emprunteur ne paie que l'intérêt du capital emprunté. Le différé de remboursement permet à l'emprunteur de diminuer temporairement la charge liée à l'emprunt (mais le coût global de l'emprunt est évidemment plus élevé). Cette formule est souvent utilisée pour les crédits d'équipement accordés aux entreprises.

**Exemple :**

Un emprunt de 100.000 € à 6% avec un différé de 3 ans puis des annuités constantes pendant 6 ans donne lieu au tableau d'amortissement suivant :

Au bout de la période de différé de 3 ans, le capital restant dû est toujours de 100.000 € ; l'annuité est donc la suivante :

$$a = 100.000 \frac{6\%}{1 - (1 + 6\%)^{-5}} = 23.739,64$$

| Années | Capital dû | Annuités  | Intérêts | Amortissement<br>du capital | Capital<br>restant dû |
|--------|------------|-----------|----------|-----------------------------|-----------------------|
| n      | C          | A         | Ci       | a-Ci                        | C-(a-Ci)              |
| 1      | 100.000    | 6.000     | 6.000    | 0                           | 100.000               |
| 2      | 100.000    | 6.000     | 6.000    | 0                           | 100.000               |
| 3      | 100.000    | 6.000     | 6.000    | 0                           | 100.000               |
| 4      | 100.000    | 23.739,64 | 6.000    | 17.739,64                   | 82.260,36             |
| 5      | 82.260,36  | 23.739,64 | 4.935,62 | 18.804,02                   | 63.456,34             |
| 6      | 63.456,34  | 23.739,64 | 3.807,38 | 19.932,26                   | 43.524,08             |
| 7      | 43.524,08  | 23.739,64 | 2.611,44 | 21.128,19                   | 22.395,88             |
| 8      | 22.395,88  | 23.739,64 | 1343,75  | 22.395,88                   | 0                     |

- Pendant la période de différé de remboursement, l'emprunteur ne verse rien. Cette formule est souvent utilisée pour les prêts étudiants (avec un différé d'amortissement correspondant à la durée des études), ou pour les ventes à crédit de certains biens d'équipement.

| Années | Capital dû | Annuités | Intérêts | Amortissement<br>du capital | Capital<br>restant dû |
|--------|------------|----------|----------|-----------------------------|-----------------------|
| n      | C          | A        | Ci       | a-Ci                        | C-(a-Ci)              |
| 1      | 100000     | 0        | 6000     | 0                           | 106000                |
| 2      | 106000     | 0        | 6360     | 0                           | 112360                |
| 3      | 112360     | 0        | 6741,6   | 0                           | 119101,6              |
| 4      | 119101,6   | 28274,29 | 7146,10  | 21128,20                    | 97973,40              |
| 5      | 97973,4049 | 28274,29 | 5878,40  | 22395,89                    | 75577,52              |
| 6      | 75577,518  | 28274,29 | 4534,65  | 23739,64                    | 51837,88              |
| 7      | 51837,878  | 28274,29 | 3110,27  | 25164,02                    | 26673,86              |
| 8      | 26673,8596 | 28274,29 | 1600,43  | 26673,86                    | 0,00                  |

## Section 2. Calcul du taux effectif d'un emprunt ou d'un placement

### Le taux actuariel

#### Définition

le **taux actuariel** d'une opération financière générant une suite de flux de trésorerie (positifs ou négatifs) de l'année 0 à l'année T est le taux  $i_a$  tel que la valeur actualisée de cette suite de flux de trésorerie soit nulle. On l'appelle également le **taux de rendement interne** ou **taux effectif**.

$$\sum_{t=0}^T \frac{\text{Flux}_t}{(1+i_a)^t} = 0$$

Par convention, il est calculé sur la base d'une année de 365 ou 366 jours. Si les flux ont une périodicité autre qu'annuelle, il faut en premier lieu calculer un taux actuariel par période. Ce taux peut ensuite être ramené à une base annuelle par la méthode du taux équivalent.

*Calcul du taux actuariel lorsque la valeur actuelle et la valeur acquise sont connues.*

La relation liant la valeur actuelle et la valeur acquise d'une série de flux financiers est la suivante :  $V_n = V_0 (1 + i_a)^n$

On peut donc facilement calculer  $i_a$  :  $i_a = (V_n / V_0)^{1/n} - 1$

n correspond ici à un nombre d'années. Si la durée de placement ne correspond pas à un nombre d'années pleines, il faut l'exprimer en fractions d'années grâce à l'opération suivante :

$$n = \text{nombre exact de jours} / 365 \text{ ou } 366$$

*Calcul du taux actuariel à partir de la série de flux générée par le projet.*

**Exemple 1 :**

un particulier investit dans un portefeuille d'actions 10 000 € en fin de période 1 et 5 000 € en fin de période 3. Il reçoit 500 € de dividendes en fin de période 2, 700 € en fin de période 3, 800 € en fin de période 4 et revend son portefeuille en fin de période 5, pour un bénéfice de 18.000 €. Quel est le taux actuariel de l'opération ?

Les flux nets de cette opération financière sont les suivants :

période 1 : - 10 000

période 2 : + 500

période 3 : - 4 300

période 4 : + 800

période 5 : + 18 000

Le taux actuariel de l'opération est solution de l'équation suivante :

$$-\frac{10.000}{(1+i_a)^1} + \frac{500}{(1+i_a)^2} - \frac{4.300}{(1+i_a)^3} + \frac{800}{(1+i_a)^4} + \frac{18.000}{(1+i_a)^5} = 0$$

Une calculatrice financière ou scientifique, ou un tableur, permettent de calculer  $i_a$  par tâtonnement :

$$i_a = 9,50 \%$$

**Exemple 2 :**

Le 9 mai de l'année  $n$ , un investisseur place 10 000 € dans un fonds commun de placement lui rapportant des dividendes de 300 € par an, versés le 31 décembre. Le 31 décembre de l'année  $n+8$ , il liquide son placement pour la somme de 9 800 € (dernier dividende de 200 € inclus). Calculez le rendement actuariel de son placement

Cette fois, l'investissement initial n'est pas effectué à la même date que les flux financiers subséquents.

Nombre de jours entre le 9 mai et le 31 décembre : 236 jours.

Le taux actuariel correspond donc à l'équation suivante :

$$- 10\,000(1+i_a)^{236/365} + 300 + 300/(1+i_a) + 300/(1+i_a)^2 + \dots + 300/(1+i_a)^7 + (9\,800)/(1+i_a)^8 = 0$$

Cette équation peut également s'écrire :

$$- 10\,000(1+i_a)^{236/365} + 200(1+i_a) \cdot [1 - (1+i_a)^{-8}]/i_a + (9\,800)/(1+i_a)^8 = 0$$

Cette équation doit être résolue par tâtonnement. On trouve  $i_a = 2,61\%$

**Le taux effectif global**

Les établissements de crédit ont l'obligation de mentionner le taux effectif global (T.E.G) dans les contrats de prêt.

Traditionnellement en France, le T.E.G. était un taux proportionnel. Dans un souci d'harmonisation européenne, le décret n°2002-927 du 10 juin 2002 a modifié sa méthode de calcul.

Le TEG est donc à présent un taux actuariel annuel, calculé à partir du taux de période selon la méthode d'équivalence.

Le *taux de période* (la *période* correspondant à la fréquence des versements de l'emprunteur) est calculé par la méthode actuarielle : c'est le taux postcompté, à intérêt composés, qui égalise d'une part, la valeur actuelle des sommes prêtées et d'autre part, la valeur actuelle de tous les versements dus par l'emprunteur en capital, intérêt et frais divers (frais de dossier, commissions, assurances...)

**Exemple :**

Un particulier effectue auprès d'un établissement financier un emprunt de 36 000 € remboursables par mensualités constantes de 456 € hors assurance pendant 10 ans. L'assurance décès invalidité est de 5 € par mois. Les frais de dossier, payables à la mise à disposition des fonds, sont de 250 €. Calculez le Taux Effectif Global de l'opération.

Le montant dont dispose réellement l'emprunteur est de 35 750 €. Par ailleurs, ses mensualités sont en réalité de 461 €. Le taux actuariel mensuel de cette opération,  $i_m$ , se calcule donc de la façon suivante :

$$35.750 = 461 \frac{1 - (1 + i_m)^{-120}}{i_m}$$

On en déduit :  $i_m = 0,78 \%$ .

Par la méthode du taux équivalent, on trouve un T.E.G. de : 9,84 %.

## Chapitre 4. Les emprunts obligataires

### Section 1. Caractéristiques et évaluation d'une obligation

#### Les caractéristiques d'une obligation

Une obligation est caractérisée par :

- sa **valeur nominale** : c'est le montant qui est prêté par l'acheteur de l'obligation.
- son **taux d'intérêt nominal** ou facial : c'est le taux qui permet de calculer les coupons qui seront versés chaque année au propriétaire de l'obligation. Ce taux peut être fixe ou variable (les taux variables sont indexés sur un taux de référence comme l'EURIBOR, le TMO...)
- le **prix de l'émission** : c'est le prix auquel le titre est émis sur le marché primaire. Il ne correspond à la valeur nominale que si le taux nominal est égal au taux de rendement en vigueur sur le marché (on dit alors que l'obligation est émise au pair). Lorsqu'il est inférieur à la valeur nominale, on dit qu'il existe une **prime d'émission**.
- sa **date de souscription** : c'est la date à laquelle le souscripteur est débité du prix d'émission.
- sa **date de jouissance** : c'est la date à partir de laquelle sont calculés les intérêts. La jouissance peut être différée ou anticipée.
- sa **durée de vie** : dans les faits, elle est comprise entre 2 et 30 ans.
- la **valeur de remboursement** : l'obligation est remboursée au pair (à sa valeur nominale) ou avec une prime de remboursement (au-dessus du pair).

les **modalités d'amortissement** : à l'heure actuelle, la quasi-totalité des emprunts obligataires est remboursable in fine ; cependant, comme pour les emprunts indivis, il existe trois modalités d'amortissement, in fine, par amortissements constants ou par annuités constantes.

## Evaluation d'une obligation à l'émission

### Définition :

Le prix d'une obligation est égal à la somme des flux qu'elle rapporte, actualisés au taux de rendement à l'échéance de l'obligation. On peut estimer le taux de rendement à l'échéance de l'obligation par le taux de rendement actuariel des obligations existant sur le marché et ayant les mêmes caractéristiques.

Ainsi, pour une obligation in fine:

$$P = \frac{C_1}{(1+r)} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_{N-1}}{(1+r)^{N-1}} + \frac{C_N + R}{(1+r)^N} \quad (1)$$

Où :

- P est le prix d'émission de l'obligation
- $C_1, C_2, \dots, C_N$  représentent les coupons versés par l'obligation
- R représente la valeur de remboursement

N représente la durée de vie de l'obligation.

### Exemple :

Calculez le prix d'émission d'une obligation in fine de nominal 1000 €, de taux nominal 3 %, de maturité 5 ans remboursée au pair, si le taux de rendement sur le marché est de 3,5 % pour les obligations de mêmes caractéristiques.

**Solution :**

$$P = 30(1+3,5\%)^{-1} + 30(1+3,5\%)^{-2} + \dots + 1030(1+3,5\%)^{-5}$$

$$P = 977,42 \text{ €}.$$

## Evaluation d'une obligation en cours de vie

Si on évalue une obligation au lendemain du détachement d'un coupon, l'équation précédente est toujours valable :

$$P_t = \frac{C_{t+1}}{(1+r)} + \frac{C_{t+2}}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_N + R}{(1+r)^{N-t}} \quad (2)$$

Lorsque l'on évalue une obligation entre deux dates de détachement d'un coupon (par exemple, j jours après le détachement du coupon t), on devrait normalement prendre en compte le temps écoulé depuis le dernier détachement de la façon suivante :

$$P_{t+j/365} = (1+r)^{j/365} \left[ \frac{C_{t+1}}{(1+r)} + \frac{C_{t+2}}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_N + R}{(1+r)^{N-t}} \right] \quad (3)$$

Dans la réalité, les obligations sont cotées sur le marché « au pied du coupon » selon la formule (2).

Le temps écoulé depuis le versement du coupon de la date  $t$  est pris en compte par l'intermédiaire d'une somme que l'acheteur verse au vendeur de l'obligation, et que l'on appelle le coupon couru :

$$CC = C_{t+1,j}/365 \quad (4)$$

Avec  $C_{t+1}$  le prochain coupon et  $j$  le nombre de jours écoulés depuis le dernier détachement.

Les journaux financiers cotent les obligations "au pied du coupon" et en pourcentage de la valeur nominale. Le montant du coupon couru s'il est indiqué, est également exprimé en pourcentage de la valeur nominale.

### Exemple :

Calculez le prix d'une obligation in fine de nominal 1000 €, de taux nominal 3 %, de durée de vie 5 ans, remboursée au pair, 98 jours après le détachement du premier coupon, en supposant que le taux de rendement sur le marché est de 3,5 % pour les obligations de mêmes caractéristiques.

### Solution :

La valeur pied de coupon de cette obligation se calcule de la façon suivante :

$$P_1 = \frac{30}{(1+3,5\%)} + \frac{30}{(1+3,5\%)^2} + \frac{30}{(1+3,5\%)^3} + \frac{1030}{(1+3,5\%)^4} = 981,63 \text{ €}$$

Cette obligation cotera donc 98,163 % dans les journaux financiers. On dit que le titre subit une *décote*, puisqu'il est inférieur à 100 %. Dans le cas contraire, on aurait dit que le titre présentait une *surcote*.

La valeur du coupon couru se calcule de la façon suivante :

$$CC = 30 \times 98/365 = 8,05 \text{ €}.$$

Le prix de cette obligation correspond à sa valeur pied de coupon, plus la valeur du coupon couru, soit 989,68 €.

## Section 2. Calcul du taux de rendement actuariel d'une obligation

Lorsque l'on connaît son prix ainsi que la série de flux financiers qu'elle rapporte, il est possible de calculer le taux de rendement actuariel d'une obligation. Le taux de rendement actuariel est important pour comparer entre elles les performances de plusieurs obligations.

### Taux de rendement brut d'une obligation in fine

Le taux actuariel brut, ou taux de rendement à l'échéance, est le taux de rendement (hors frais de transaction et fiscalité) pour un investisseur qui achèterait immédiatement l'obligation pour la conserver jusqu'à l'échéance.

#### Exemple :

Calculez le taux actuariel brut à l'émission d'une obligation in fine, de valeur nominale 1000 €, émise et remboursée au pair, de durée de vie 5 ans et de taux nominal 3,5 %.

Les obligations émises et remboursées au pair offrent un taux de rendement à l'échéance égal au taux nominal.

#### Solution :

Le taux actuariel brut de cette obligation est le taux  $r$  tel que :

$$-1000 + 35(1+r)^{-1} + 35(1+r)^{-2} + 35(1+r)^{-3} + 35(1+r)^{-4} + 1035(1+r)^{-5} = 0$$

On vérifie aisément que  $r = 3,5 \%$ . Dans ce cas précis, le taux actuariel brut est égal au taux nominal de l'obligation. Ceci est dû au fait que cette obligation est émise et remboursée au pair. Elle ne comporte donc ni prime d'émission, ni prime de remboursement.

Si l'obligation avait été émise à 98 % par exemple, le taux de rendement actuariel aurait été solution de l'équation suivante :

$$-980 + 35(1+r)^{-1} + 35(1+r)^{-2} + 35(1+r)^{-3} + 35(1+r)^{-4} + 1035(1+r)^{-5} = 0$$

Cette fois,  $r = 3,95 \%$ .

L'existence d'une prime d'émission a contribué à augmenter le taux de rendement actuariel.

Le taux actuariel brut sert à comparer plusieurs placements financiers entre eux. En conséquence, en principe, toutes les obligations de mêmes caractéristiques doivent avoir le même taux actuariel. Si ce n'est pas le cas, des arbitrages se font sur le marché : les investisseurs vendent les titres qui ont un faible rendement à l'échéance (faisant ainsi baisser leur prix et augmenter leur

rendement) pour acheter les titres les plus rentables (faisant ainsi monter leur prix et baisser leur rendement).

Ainsi, une différence de taux actuariel brut entre deux obligations doit en principe s'expliquer par une différence de maturité, de risque ou de liquidité entre les deux emprunts.

On observe sur le marché que les prix des obligations s'adaptent au taux de rendement à l'échéance exigé par le marché : une augmentation des taux d'intérêt entraîne une baisse des prix sur le marché obligataire.

### Taux actuariel brut d'une obligation remboursée par amortissement constant

Lorsque l'obligation est remboursable par amortissements constants ou par annuités constantes, le problème est un peu plus complexe car à chaque échéance de remboursement, l'investisseur a une probabilité d'être remboursé.

#### Exemple :

Le 1<sup>er</sup> janvier 2004, une société émet à 97 % un emprunt obligataire, de valeur nominale 1000 €, de taux facial 3 %, de durée de vie 9 ans, remboursable au pair en 3 amortissements constants en 2007, 2010 et 2013. Calculez le taux de rendement actuariel de cet emprunt.

En pratique, les titres de cet emprunt obligataire seront équitablement répartis en trois tranches que l'on peut appeler tranche A, tranche B et tranche C. Le premier janvier 2007, lors de la première échéance de remboursement, l'une de ces trois tranches sera tirée au sort et toutes les obligations appartenant à cette tranche seront remboursées. L'entreprise procédera de la même façon le 1<sup>er</sup> janvier 2010. Le premier janvier 2013, les obligations appartenant à la dernière tranche encore en vie seront remboursées.

A priori, au moment de l'émission, un investisseur a donc autant de probabilité d'être remboursé en 2007 qu'en 2010 ou en 2013. Il faut donc calculer un taux de rendement actuariel moyen, ou espéré. Une solution est de supposer qu'il achète un titre de chaque tranche. Il est alors certain que l'une de ses obligations sera remboursée en 2007, une autre en 2010 et une autre en 2013.

Les flux financiers liés à son investissement sont alors les suivants (on suppose que le titre 1 est remboursé en 2007, le titre 2 en 2010 et le titre 3 en 2013) :

| année   | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| titre 1 | 30   | 30   | 1030 |      |      |      |      |      |      |
| titre 2 | 30   | 30   | 30   | 30   | 30   | 1030 |      |      |      |
| titre 3 | 30   | 30   | 30   | 30   | 30   | 30   | 30   | 30   | 1030 |
| total : | 90   | 90   | 1090 | 60   | 60   | 1060 | 30   | 30   | 1030 |

Le taux actuariel brut correspond à l'équation suivante :

$$-2910 + \frac{90}{1+r} + \frac{90}{(1+r)^2} + \frac{1090}{(1+r)^3} + \frac{60}{(1+r)^4} + \frac{60}{(1+r)^5} + \frac{1060}{(1+r)^6} + \frac{30}{(1+r)^7} + \frac{30}{(1+r)^8} + \frac{1030}{(1+r)^9} = 0$$

Après calcul, on trouve  $r = 3,57 \%$ .

### Calcul du rendement actuariel d'une obligation remboursée par annuités constantes

Lorsque l'obligation est remboursable par annuités constantes, une difficulté supplémentaire s'ajoute du fait que l'émetteur ne peut rembourser qu'un nombre entier d'obligations.

#### Exemple :

Une entreprise émet un emprunt obligataire de 30 000 000 € divisé en obligations de 1000 € de nominal. La taux nominal de cet emprunt est de 4 % et sa maturité est de 10 ans. Ces obligations, remboursées au pair et par annuités constantes, sont émises à 97 %.

Calcul de l'annuité constante :

$$a = \frac{V_0 i}{1 - (1+i)^{-n}} = \frac{30.000.000 \times 4\%}{1 - 1,04^{-10}} = 3.698.728,33 \text{ €}$$

| Années | Capital dû | Annuité théorique | Intérêts                | Amortissement théorique | Obligations remboursés | Annuité réelle |
|--------|------------|-------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|----------------|
| n      | $C_{n-1}$  | A                 | $I_n = C_{n-1} \cdot i$ | $R_n = A - I_n$         | k                      | $A_n$          |
| 1      | 30 000 000 | 3 698 728         | 1 200 000               | 2 498 728               | 2 499                  | 3 699 000      |
| 2      | 27 501 000 | 3 698 728         | 1 100 040               | 2 598 688               | 2 599                  | 3 699 040      |
| 3      | 24 902 000 | 3 698 728         | 996 080                 | 2 702 648               | 2 703                  | 3 699 080      |
| 4      | 22 199 000 | 3 698 728         | 887 960                 | 2 810 768               | 2 811                  | 3 698 960      |
| 5      | 19 388 000 | 3 698 728         | 775 520                 | 2 923 208               | 2 923                  | 3 698 520      |
| 6      | 16 465 000 | 3 698 728         | 658 600                 | 3 040 128               | 3 040                  | 3 698 600      |
| 7      | 13 425 000 | 3 698 728         | 537 000                 | 3 161 728               | 3 162                  | 3 699 000      |
| 8      | 10 263 000 | 3 698 728         | 410 520                 | 3 288 208               | 3 288                  | 3 698 520      |
| 9      | 6 975 000  | 3 698 728         | 279 000                 | 3 419 728               | 3 420                  | 3 699 000      |
| 10     | 3 555 000  | 3 698 728         | 142 200                 | 3 556 528               | 3 555                  | 3 697 200      |

#### Explication du tableau :

Pour construire le tableau d'amortissement d'un emprunt obligataire remboursable par annuités constantes, il est nécessaire de déterminer la méthode d'arrondi permettant de calculer le nombre d'obligations à rembourser à chaque échéance. Deux méthodes sont utilisées :

- la première méthode consiste à arrondir l'amortissement au nombre entier d'obligations directement inférieur ; la dernière annuité sera alors plus importante que les autres ;

- la seconde méthode, qui est adoptée dans le tableau ci-dessus, consiste à arrondir l'amortissement au nombre entier d'obligations le plus proche ; les annuités réelles seront alors soit légèrement inférieures, soit légèrement supérieures à l'annuité constante théorique, suivant les années ; à la dernière échéance, toutes les obligations encore en vie sont remboursées.

Le taux de rendement actuariel de cet emprunt à l'émission se calcule à partir de l'équation suivante :

$$29\,100\,000 = \frac{3\,699\,000}{(1+r)} + \frac{3\,699\,040}{(1+r)^2} + \dots + \frac{3\,697\,200}{(1+r)^{10}}$$

On en déduit  $r = 4,62\%$ .

Ce taux de rendement actuariel peut également être calculé à partir de l'annuité constante théorique :

$$3.698.728 \frac{1 - (1+r)^{-10}}{r} = 29.100.000$$

$r = 4,62\%$

### Section 3. Mesures de la sensibilité d'une obligation au risque de taux d'intérêt

La formule permettant de calculer le prix d'une obligation in fine à taux fixe suggère que la valeur des obligations est très sensible au niveau des taux d'intérêt sur le marché.

$$P = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \frac{C}{(1+r)^4} + \dots + \frac{R+C}{(1+r)^n} \quad (5)$$

Lorsque les taux d'intérêt augmentent sur le marché, les prix des obligations à taux fixe baissent, et vice versa.

Ainsi les investisseurs achetant des obligations à taux fixe subissent-ils un risque de taux d'intérêt.

Si les taux d'intérêt augmentent sur le marché, ces investisseurs sont pénalisés dans la mesure où ils détiennent des titres financiers qui rapportent moins que les titres nouvellement émis sur le marché.

Bien entendu, ils peuvent toujours revendre les obligations qu'ils détiennent pour acquérir des obligations nouvelles, offrant un coupon plus attractif. Mais ils vendront leurs titres avec une décote, et subiront alors une moins value.

Les investisseurs comme les emprunteurs ont besoin d'évaluer leur risque de taux d'intérêt, c'est pourquoi différentes mesures de risque ont été développées.

## La sensibilité

**Définition :** La sensibilité d'un titre désigne l'intensité avec laquelle les variations de prix du titre suivent les variations des taux d'intérêt.

*Calcul de la sensibilité d'une obligation in fine à taux fixe.*

Calculer la sensibilité du titre revient à calculer la variation de P pour une augmentation ou une baisse donnée par exemple de 1 point des taux d'intérêt.

**Exemple :** Soit une obligation in fine, de valeur nominale 100 €, de maturité 10 ans et de taux nominal 5 %, remboursée au pair. Calculez la sensibilité de cette obligation pour un passage des taux d'intérêt de 5 à 6 %.

Si les taux d'intérêt sont à 5 %, cette obligation vaut 100 € par définition.

Si les taux d'intérêt sont à 6 %, elle ne vaudra plus que :

$$P = 5 \times 1,06^{-1} + 5 \times 1,06^{-2} + \dots + 105 \times 1,06^{-10} = 92,64 \text{ €}.$$

Une augmentation de un point des taux d'intérêt a donc entraîné pour cette obligation une baisse de prix de 7,36 €.

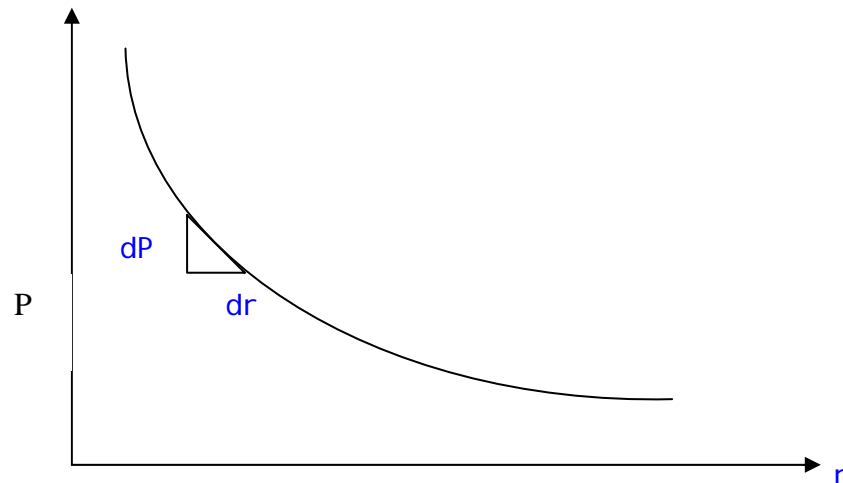
Il est d'usage de calculer cette baisse des prix non pas en euros, mais en pourcentage, et de la rapporter à la variation de taux envisagée.

La sensibilité de cette obligation pourra alors se calculer par la formule suivante :

$$S = \frac{dP/P}{dr} = \frac{-7,36/100}{1\%} = -7,36$$

Ainsi, dans notre exemple, une hausse de 1 % des taux d'intérêt a entraîné une baisse de prix de 7,36 %.

Si on observe un peu plus attentivement le graphique du prix d'une obligation à taux fixe en fonction des taux d'intérêt, on s'aperçoit que  $dP/dr$  correspond tout simplement, lorsque  $dr$  est très petit, à la pente de la courbe représentative de la fonction de prix. Or, cette pente se calcule de façon générale par la dérivée de la fonction de prix (5) par rapport à  $r$ .



La dérivée de  $P$  par rapport à  $r$  se calcule ainsi :

$$\delta P / \delta(r) = \delta P / \delta(1+r) \times \delta(1+r) / \delta(r).$$

$$\delta(1+r) / \delta(r) = 1.$$

$$\Rightarrow \delta P / \delta(r) = \delta P / \delta(1+r)$$

$$\text{Or } \delta P / \delta(1+r) = -\{C(1+r)^{-2} + 2C(1+r)^{-3} + \dots + n(C+R)(1+r)^{-(n+1)}\}.$$

La sensibilité peut donc se calculer par la formule :

$$(\delta P / P) / \delta(1+r) = -\{C(1+r)^{-2} + 2C(1+r)^{-3} + \dots + n(C+R)(1+r)^{-(n+1)}\} / P.$$

## La duration

La duration représente la durée de vie moyenne de tous les flux actualisés au taux du marché.

La duration d'une obligation à taux fixe remboursable in fine se calcule donc de la façon suivante :

$$D = \frac{1 \frac{C}{(1+r)} + 2 \frac{C}{(1+r)^2} + \dots + n \frac{C+R}{(1+r)^n}}{\frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C+R}{(1+r)^n}} \quad (6)$$

Le dénominateur se simplifie et l'on obtient :

$$D = \frac{1 \frac{C}{(1+r)} + 2 \frac{C}{(1+r)^2} + \dots + n \frac{C+R}{(1+r)^n}}{P}$$

On reconnaît là une formule assez proche de la sensibilité calculée plus haut. En fait :

$$D = - \frac{S}{1+r}. \quad (7)$$

La duration a cependant une interprétation plus concrète que la sensibilité. Il s'agit en effet de la durée pendant laquelle il faut détenir un titre financier pour être immunisé contre le risque de taux d'intérêt.

L'idée sous-jacente au concept de duration est la suivante : une hausse des taux d'intérêt entraîne une baisse du prix d'une obligation, ce qui est négatif pour l'investisseur. En revanche, l'investisseur a par ailleurs la possibilité de réinvestir les coupons reçus à un taux plus intéressant : il gagne donc d'un côté même s'il perd de l'autre. Il existe un moment dans la vie du titre où le gain lié au réinvestissement des coupons compense exactement la perte en capital : c'est la duration.

La méthode la plus simple pour immuniser un titre est de le conserver un temps juste égal à sa duration en réinvestissant tous les coupons.

On peut utiliser la duration pour immuniser un portefeuille d'obligations contre le risque de taux d'intérêt : il suffit de composer un portefeuille tel que la duration corresponde exactement à l'horizon de placement de l'investisseur. C'est d'autant plus facile que la duration possède une propriété intéressante:

**la duration d'un portefeuille d'obligations est égale à la moyenne des durations des titres qui le composent.**

## Section 4. Exercices d'application

**Exercice 1 :** Soient quatre obligations de degré de liquidité équivalente, émises par le même émetteur. Complétez les informations manquantes.

|                       | Obligation 1    | Obligation 2    | Obligation 3                          | Obligation 4                          |
|-----------------------|-----------------|-----------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| Valeur nominale       | 1000            | 1000            | 1000                                  | 1000                                  |
| Prix d'émission       | 960             | ?               | 1000                                  | 980                                   |
| Taux facial           | 5,5 %           | 0 %             | ?                                     | ?                                     |
| Durée de vie          | 10 ans          | 10 ans          | 10 ans                                | 10 ans                                |
| Mode de remboursement | In fine au pair | In fine au pair | En 5 amortissements constants au pair | En 2 amortissements constants au pair |

**Solution :**

Les quatre obligations ont des caractéristiques similaires : même degré de liquidité, même durée de vie, et même risque puisqu'elles proviennent du même émetteur. Elles doivent donc avoir le même rendement actuariel.

**Calcul du rendement actuariel  $i_a$  de l'obligation 1 :**

Il est tel que :  $-960 + 55(1+i_a)^{-1} + \dots + 1055(1+i_a)^{-10} = 0$

Après calcul, on trouve  $i_a = 6,04 \%$ .

**Calcul du prix d'émission de l'obligation 2 :**

L'obligation 2 a un taux facial nul ; cette catégorie d'obligation, relativement rare en France, s'appelle une obligation zéro coupon.

Les obligations zéro coupon ne versent qu'un seul flux financier, le flux de remboursement, à l'échéance de l'obligation. Le rendement de ce produit financier se trouve donc intégralement dans la prime d'émission. Pour que le rendement actuariel brut de cette obligation soit de 6,4 %, il faut que le prix d'émission corresponde à la valeur actuelle, à ce taux, du montant remboursé dans 10 ans.

$$P = 1000(1 + 6,04 \%)^{-10} = 556,05 \text{ €}.$$

**Calcul du taux facial de l'obligation 3 :**

L'obligation 3 est émise et remboursée au pair. Son taux nominal doit donc être égal à son rendement à l'échéance, soit 6,04 %.

**Calcul du taux facial de l'obligation 4 :**

Soit  $C$  le coupon versé par l'obligation 4. Le rendement à l'échéance de cette obligation,  $i_a$ , est solution de l'équation suivante :

$$-960 + 2C(1+i_a)^{-1} + 2C(1+i_a)^{-2} + \dots + (2C+1000)(1+i_a)^{-5} + C(1+i_a)^{-6} + \dots + (C+1000)(1+i_a)^{-10} = 0$$

Cette équation est obtenue en considérant deux obligations dont l'une est supposée remboursée l'année 5 et l'autre l'année 10.

Il est possible de sortir C de cette égalité :

$$C = [1960 - 1000(1+i_a)^{-5} - 1000(1+i_a)^{-10}] / [2(1+i_a)^{-1} + \dots + 2(1+i_a)^{-5} + (1+i_a)^{-6} + \dots + (1+i_a)^{-10}].$$

Comme l'obligation 4 est supposée avoir un rendement à l'échéance de 6,04 %, on peut écrire :

$$C = [1960 - 1000(1+6,04\%)^{-5} - 1000(1+6,04\%)^{-10}] / [2(1+6,04\%)^{-1} + \dots + 2(1+6,04\%)^{-5} + (1+6,04\%)^{-6} + \dots + (1+6,04\%)^{-10}].$$

On en déduit  $C = 56,94$ .

Donc le taux facial  $i$  est égal à  $56,94/1000 = 5,69\%$ .

## Exercice 2 :

Un investisseur achète, le 30 janvier 2004, 1 000 OAT (Obligations Assimilables du Trésor), ayant les caractéristiques suivantes :

- valeur nominale : 1 €,
- taux facial 3,75 %,
- échéance : 1/06/2015
- détachement du coupon le 01/06
- remboursement au pair

Ces OAT sont cotées sur le marché à 102 %.

- a. Que pouvez-vous dire du niveau des taux sur le marché ?
- b. Calculez le montant à déboursier pour l'investisseur
- c. Calculez le rendement actuariel brut de cette OAT au moment de l'achat.

### Solution :

- a. L'obligation présente une surcote. Cela signifie que les taux d'intérêt sur le marché sont inférieurs à 3,75 % pour une échéance de l'ordre de 10 ans.
- b. L'investisseur devra déboursier la valeur pied de coupon des obligations, plus le coupon couru.

Calcul de la valeur pied de coupon :

$$1\ 000 \times 102\% = 1\ 020\ \text{€}.$$

Calcul du nombre de jours écoulés depuis le versement du dernier coupon :

Le dernier coupon a été versé le 1<sup>er</sup> juin et nous sommes le 30 janvier.  $(30 - 1) + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 30 = 243$  jours.

Le coupon couru est donc de :  $3,75 \% \times 243 / 365 = 2,5 \%$ ,

soit 25 € pour 1 000 obligations.

Le montant à déboursier pour l'investisseur est donc de 1 045 €.

c. Le rendement actuariel brut de cette obligation au moment de l'achat se calcule de la façon suivante :

$$-\frac{1045}{(1+i_a)^{243/365}} + \frac{37,5}{(1+i_a)} + \dots + \frac{37,5}{(1+i_a)^{11}} + \frac{1037,5}{(1+i_a)^{12}} = 0$$

Par tâtonnement, on obtient :  $i_a = 3,53 \%$ .

### Exercice 3 :

Soit une obligation in fine, d'une valeur nominale de 100 €, remboursable dans quatre ans et versant un taux nominal de 3 %.

- Calculez la duration de cette obligation en supposant que le taux d'intérêt du marché est de 3,5 %.
- Un investisseur achète cette obligation dans l'intention de la détenir un temps juste égal à sa duration, en réinvestissant au taux du marché tous les coupons qu'il reçoit. Calculez la valeur finale de son portefeuille en supposant :
  - que les taux restent à 3,5 %,
  - qu'ils passent à 4 % immédiatement après l'achat
  - qu'ils passent à 3 % immédiatement après l'achat

### Solution :

Calcul du prix de l'obligation :

$$P = \frac{3}{1,035} + \frac{3}{1,035^2} + \frac{3}{1,035^3} + \frac{103}{1,035^4} = 98,16 \text{ €}.$$

Calcul de la duration de l'obligation :

$$D = \frac{\frac{3}{1,035} + \frac{6}{1,035^2} + \frac{9}{1,035^3} + \frac{412}{1,035^4}}{98,16} = 3,83$$

Un investisseur décide de détenir cette obligation pendant 3,83 années.

Soit  $r$  le taux du marché, la valeur finale de son portefeuille se calcule de la façon suivante :

$$V = 3(1+r)^{2,83} + 3(1+r)^{1,83} + 3(1+r)^{0,83} + 103(1+r)^{-0,17}$$

Le dernier terme de cette somme correspond à la valeur de revente de l'obligation, 0,17 année avant le dernier versement de 103 €.

$$\text{Si } r = 3,5 \% \quad \Rightarrow \quad V = 111,99 \text{ €}$$

$$\text{Si } r = 4 \% \quad \Rightarrow \quad V = 111,99 \text{ €}$$

$$\text{Si } r = 3 \% \quad \Rightarrow \quad V = 111,99 \text{ €}$$

Quel que soit le niveau des taux d'intérêt, la valeur finale du portefeuille reste la même. En décidant de détenir cette obligation pendant 3,83 ans, l'investisseur s'est donc immunisé contre le risque de taux d'intérêt.

## **Bibliographie :**

« Mathématiques financières » Edith Ginglinger et Jean-Marie Hasquenoph, collection Economica Poche.

« Mathématiques Financières », Catherine Deffains-Crapsky, collection Lexi-Fac, Bréal.

« Mathématiques Financières », Michel Piermay, Alain Lazimi, Olivier Hereil, collection Economica Gestion.

« Méthodes Quantitatives appliquées à la gestion », Serge Métails, les Editions d'Organisation Université.

## **Pour en savoir plus :**

« Mathématiques des marchés financiers », Jean-Marcel Dalbarade, Editions Eska.