

en poche  
Christelle Baratay

Les principales formules  
enfin à votre portée

# Mathématiques financières

Édition

2014/2015

Les points clés

de tous vos calculs  
financiers

 *Gualino*

lextenso éditions



en poche

Les principales formules  
enfin à votre portée

# Mathématiques financières

Édition  
**2014/2015**

**Les points clés**  
de tous vos calculs  
financiers

 *Gualino*

**lextenso** éditions

Retrouvez tous nos titres

**Defrénois - Gazette du Palais  
Gualino - Joly - LGDJ  
Montchrestien**

sur notre site

@ [www.lextenso-editions.fr](http://www.lextenso-editions.fr)

Retrouvez l'actualité

**Gualino éditeur**

sur Facebook



---

© Gualino éditeur, Lextenso éditions 2014  
70, rue du Gouverneur Général Éboué  
92131 Issy-les-Moulineaux cedex  
ISBN 978 - 2 - 297 - 04068 - 6  
ISSN 1962-6428

# SOMMAIRE

<b>1</b>	<b>Rappels mathématiques</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Les suites</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Les intérêts simples et l'escompte</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Les intérêts composés</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Les suites d'annuités</b>	<b>17</b>
<b>6</b>	<b>Les emprunts indivis</b>	<b>20</b>
<b>7</b>	<b>Les emprunts obligataires</b>	<b>25</b>
<b>8</b>	<b>La valeur des actions</b>	<b>32</b>
<b>9</b>	<b>Les rentes</b>	<b>39</b>
<b>10</b>	<b>Les projets d'investissement</b>	<b>42</b>

## Équation et inéquation

### Définitions

▶ Une **équation** est une égalité dans laquelle figure une ou plusieurs inconnues. Lorsque l'égalité est vérifiée, la ou les inconnues prennent différentes valeurs appelées solutions. Résoudre une équation revient à trouver toutes les solutions. L'ordre des termes n'a aucune importance (si  $a = b$  alors  $b = a$ ).

▶ Une **inéquation** est une inégalité dans laquelle figure une ou plusieurs inconnues. Elle peut prendre la forme  $a \leq b$  ou  $a \geq b$ .

### Les différents types d'équations et d'inéquations

#### Équation à une variable de degré un : $ax = b$

Si  $a \neq 0$  alors  $x = \frac{b}{a}$ . Il existe une solution et une seule.

Ce type d'équation se retrouve dans les problèmes relatifs à l'évaluation d'un capital à une date quelconque, dans le cas de l'équivalence de deux capitaux...

#### Équation à une variable de degré deux : $ax^2 + bx + c = 0$

Pour résoudre cette équation, il faut dans un premier temps calculer le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Si  $\Delta > 0$  alors l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si  $\Delta = 0$  alors  $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$  l'équation a une seule solution.

Si  $\Delta < 0$  il n'existe pas de solutions réelles à l'équation.

#### Équation à deux variables : $ax + by = c$

Il s'agit de l'équation d'une droite, sauf si  $a = b = 0$ .

Si  $b \neq 0$  alors  $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$  avec  $\frac{-a}{b}$  le **coefficient directeur**

(ou pente) de la droite et  $\frac{c}{b}$  l'ordonnée à l'origine.

#### Système de deux équations à deux variables :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ gx + hy = t \end{cases}$$

L'accolade signifie que les deux équations doivent être satisfaites en même temps. Pour ce faire, il existe deux méthodes :

▶ **la méthode par substitution** qui permet de remplacer une variable dans une équation par sa valeur tirée de l'autre équation.

Par exemple : 
$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

L'équation 2 peut s'écrire sous la forme  $y = 3 - x$  ; dans ce cas, en remplaçant  $y$  dans l'équation 1, celle-ci est transformée en une équation à une inconnue :  $2x + 4(3 - x) = 8$  d'où  $x = 2$  et donc  $y = 3 - 2 = 1$  ;

► **la méthode par élimination** (Gauss) qui consiste à remplacer une équation par une autre, en multipliant celle-ci par un nombre non nul de telle sorte que le coefficient d'au moins une variable soit le même dans l'autre équation du système.

Toujours avec le même exemple, l'équation 2 peut être multipliée par 2 ou par 4. Ensuite, à l'aide des combinaisons linéaires il sera possible de calculer  $x$  ou  $y$ , puis d'en déduire l'inconnue manquante.

Dans le cas présent, multiplions l'équation 2 par 2 :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

Puis effectuons la soustraction entre les deux équations, alors  $2y = 2$  d'où  $y = 1$  et  $x = 2$ .

Ce type de résolution est utile, par exemple, pour résoudre les problèmes relatifs à l'équivalence de deux effets de commerce.

Précisons qu'en contrôle de gestion, il est possible d'utiliser la **méthode graphique** qui consiste à rechercher l'existence d'un point d'intersection entre les deux droites.

### ■ Inéquation à deux variables : $ax + by \leq c$

Ce type de système se retrouve en contrôle de gestion. Pour une résolution par le calcul, il faut introduire des variables d'écart afin de transformer une inéquation en équation (méthode du simplexe).

La solution graphique nécessite la représentation de la droite  $ax + by = c$ , puis la détermination du demi-plan qui satisfait à l'inéquation.

## ■ Fonctions : $y = f(x)$

### ■ La fonction affine : $y = ax + b$

Cette fonction est une droite de pente  $a$ , croissante si  $a > 0$  et décroissante si  $a < 0$ .

### ■ La fonction logarithme népérien ( $\ln$ )

Il s'agit de la primitive de  $y = \frac{1}{x}$  pour  $x > 0$  qui s'annule pour  $x = 1$ . Elle est notée  $y = \ln(x)$ . Cette fonction est souvent utilisée en mathématiques financières afin de déterminer les durées. Ses propriétés sont les suivantes :

$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(x)^n = n \ln(x)$$

Parfois, il peut être fait référence au logarithme à base  $a$  (avec  $a > 0$ ) de  $x$  :  $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Le logarithme népérien est le logarithme à base  $e$  (exponentielle).

### ■ La fonction exponentielle : $y = e^x$

Il s'agit de la fonction telle que  $x = \ln(y)$ , on note  $y = e^x$ .

Ses propriétés sont les suivantes :

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

$$\ln(e^a) = a$$

$$e^{\ln(b)} = b$$

### ■ La fonction puissance : $y = a^x$

Cette fonction est définie par  $y = e^{x \ln(a)}$  pour tout  $a > 0$ .

## ■ Dérivées

Soit  $f(x)$  définie sur  $]a ; b[$ , on appelle nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$  la quantité  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  si elle existe ; notée  $f'(x_0)$ .

Si la dérivée est positive, alors la fonction est croissante ; si elle est négative, la fonction est décroissante.

Voici quelques dérivées :

Fonctions	Dérivées
$x^r$	$r x^{r-1}$
$u^r(x)$	$r u^{r-1}(x) u'(x)$
$\frac{1}{u(x)}$	$\frac{-u'(x)}{u^2(x)}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
A (constante)	0
x	1
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$e^x$	$e^x$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$

Si entre  $a$  et  $b$  la dérivée s'annule en  $x_0$  en changeant de signe, alors la fonction admet un extremum en  $x_0$  appelé *tangente*.

## ■ Exposants et fractions

Voici un tableau récapitulatif des principales propriétés :

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	Si $a^n = b$ alors $a = \sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$
$a^n a^m = a^{n+m}$	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
$(ab)^n = a^n b^n$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $ad = bc$
$(a^n)^m = a^{nm}$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	

## ■ Interpolation linéaire

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[a ; b]$  et  $c$  un nombre réel dans cet intervalle.

L'interpolation linéaire permet de trouver l'image de  $c$  par  $f$  quand celle-ci ne peut pas être calculée. Cette méthode consiste à remplacer  $f(c)$  par  $g(c)$  ou  $g$  est la fonction affine telle que :

$$g(a) = f(a)$$

$$g(b) = f(b)$$

La méthode remplace la courbe représentative de  $f$  sur  $[a ; b]$  par la droite (AB) et de ce fait :

$$f(c) = f(a) + (c - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Exemple :** Une personne décide d'investir dans un vélo pour 1 200 €. Le vendeur lui propose un crédit :

- 10 mensualités de 129,43 € chacune ;

- 1<sup>re</sup> mensualité, un mois après l'achat.

Quel est le taux mensuel équivalent correspondant à ce crédit ?

$$1\,200 = 129,43 \times \frac{1 - (1+i)^{-10}}{i} \text{ d'où } \frac{1 - (1+i)^{-10}}{i} = \frac{1\,200}{129,43} = 9,27142$$

En l'absence de solveur, il convient de procéder à une interpolation linéaire :

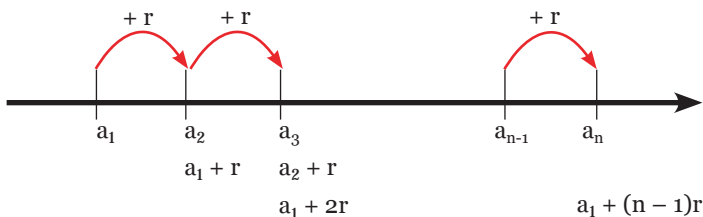
$i$	$a = 1\%$	$c = i\%$	$b = 1,5\%$
$\frac{1 - (1+i)^{-10}}{i}$	9,4713	9,27142	9,222

$$9,27142 = 9,4713 + (i - 0,01) \frac{9,222 - 9,4713}{0,015 - 0,01} \text{ d'où } i = 1,40\%$$

Les suites sont utilisées principalement lors des calculs de placements financiers.

## — Suites arithmétiques

Une suite en progression arithmétique est une suite numérique, dont chaque terme s'obtient en **ajoutant** au précédent un terme réel constant appelé la **raison**, notée  $r$ . L'ordre des termes est important, c'est pourquoi un rang lui est donné.



$$a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n - 1)r$$

avec  $a_n$  le  $n^{\text{ième}}$  terme,  $a_1$  le premier terme et  $n$  le nombre de terme.

- Si  $r > 0$ , alors la suite est croissante.
- Si  $r < 0$ , alors la suite est décroissante.
- Si  $r = 0$ , alors la suite est constante.

La somme  $S$  d'une suite arithmétique est :

$$S = \frac{\text{valeur du 1}^{\text{er}} \text{ terme} + \text{valeur du dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes}$$

$$= \frac{a_1 + a_n}{2} \times n$$

Les suites arithmétiques trouvent leur application lors d'un retrait ou d'un ajout d'une même valeur à chaque période, lors du calcul des intérêts simples.

**Exemple :** Monsieur Trésor signe un contrat de maintenance sur 10 ans. La valeur initiale est de 1 000 €. Il est envisagé de l'augmenter de 100 € par an. Combien aura-t-il décaissé à la fin du contrat ?

$a_1 = 1\,000$  ;  $a_2 = a_1 + 100 = 1\,100$ . Nous sommes en présence d'une suite arithmétique de raison  $r = 100$

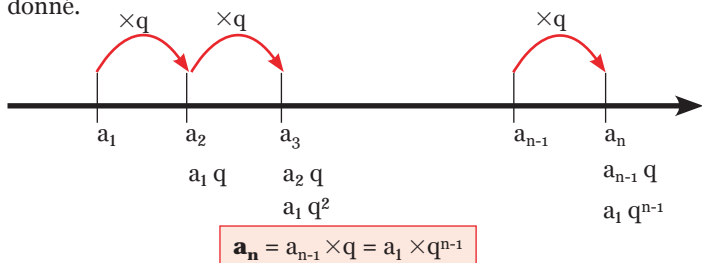
Pour connaître le montant total versé à la fin du contrat il convient de calculer  $a_{10} = a_1 + 9r = 1\,000 + 9 \times 100 = 1\,900$

$$S = \frac{1\,000 + 1\,900}{2} \times 10 = 14\,500 \text{ € montant versé à la fin du contrat.}$$

## — Suites géométriques

Une suite en progression géométrique est une suite numérique dont chaque terme s'obtient **en multipliant** le terme précédent

par un nombre réel constant non nul appelé la **raison**, notée  $q$ . L'ordre des termes est important, c'est pourquoi un rang lui est donné.



avec  $a_n$  le  $n^{\text{ème}}$  terme,  $a_1$  le premier terme et  $n$  le nombre de terme.

- Si  $q > 1$ , alors la suite est croissante.
- Si  $q < 1$ , alors la suite est décroissante.
- Si  $q = 1$ , alors la suite est constante.

La somme  $S$  d'une suite géométrique est :

$$S = \frac{q \times \text{valeur du dernier terme} - \text{valeur du 1}^{\text{er}} \text{ terme}}{q - 1}$$

$$= a_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ avec } q \neq 1$$

Ces suites trouvent leur application lorsqu'il est envisagé une augmentation constante chaque année (par exemple les salaires augmentent de 1 % chaque année, le calcul des intérêts composés).

**Exemple :** Monsieur Trésor signe un contrat de maintenance sur 10 ans. La valeur initiale est de 1 000 €. Il est envisagé de l'augmenter de 8 % par an. Combien aura-t-il décaissé à la fin du contrat ?

$a_1 = 1\,000$  ;  $a_2 = a_1 \times 1,08 = 1\,080$ . Nous sommes en présence d'une suite géométrique de raison  $q = 1,08$ .

$$S = 1\,000 \times \frac{1,08^{10} - 1}{1,08 - 1} = 14\,486,56 \text{ € montant versé à la fin du contrat.}$$

Parfois la suite peut être arithmétique et géométrique. Dans ce cas :

$$u_{n+1} = a u_n + b \text{ et } u_n = a^n \left( u_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$$

**Exemple :** Monsieur Trésor place sur un compte 600 € tous les mois. Chaque mois, il utilise 20 % de ce qu'il possède sur ce compte.

Quel montant peut-il y avoir au maximum sur ce compte ?

À la fin du premier mois,  $M_1 = 600 - 600 \times 20\% = 480$  ; fin du deuxième mois  $M_2 = (480 + 600) \times 0,8 = 864 \text{ €}$

$M_2 = (M_1 + 600) \times 0,80 = 0,80 M_2 + 480$ . Ceci correspond à une suite arithmétique et géométrique.

$$M_n = 0,8^{n-1} \left( 480 - \frac{480}{1-0,8} \right) + \frac{480}{1-0,8} = 0,8^{n-1} \times (-1\,920) + 1\,920$$

Quand  $n$  tend vers l'infini alors  $0,8^{n-1} = 0$  alors  $M_n = 1\,920 \text{ €}$  montant maximum du compte.

## Intérêts simples

Un capital placé ou prêté donne droit à une rémunération appelée **intérêt**. Celui-ci est fonction de la somme prêtée, de la durée et du taux d'intérêt.

Les intérêts simples concernent les opérations financières à court terme (par exemple le calcul des coupons d'obligation, le coût du découvert), ils ne sont pas incorporés au capital.

### Calcul des intérêts simples I

Avec C le capital placé, t le taux annuel et n la durée de placement en jours, l'intérêt I se calcule :

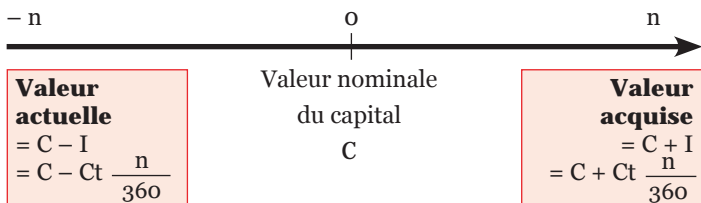
$$I = Ct \frac{n}{360}$$

▶ L'intérêt se calcule en général pour une année de 360 jours composée de 12 mois de 30 jours. Pour les contrats de date à date, le calcul se fait en nombre de jours réels mais toujours par rapport à 360. Pour les calculs de type livret A, seules les quinzaines complètes sont prises en compte.

▶ L'intérêt est à terme échu (**post-compté**) lorsqu'il est payé à l'échéance (agios du découvert par exemple), il est **précompté** (terme à échoir) s'il est payé le premier jour (cas de l'escompte).

### Valeur acquise et valeur actuelle

Il est possible de déterminer la valeur future d'une somme placée à un taux d'intérêt donné (*capitalisation ou valeur acquise*).



avec C la valeur nominale, t le taux d'intérêt et n la durée, la *valeur actuelle* permet d'exprimer aujourd'hui la valeur d'une somme encaissable ou payable dans le futur. Elle est utilisée par les banques afin de calculer le montant des effets escomptés.

#### Exemples :

1) M. X prête 1 000 € durant 3 mois au taux de 3 %. Quelle somme percevra-t-il au bout des 3 mois ?

$$\text{Valeur acquise} = 1\,000 + \frac{1\,000 \times 0,03 \times 90}{360} = 1\,007,50 \text{ €}$$

2) Mme Y doit payer 1 000 € dans 3 mois. Elle souhaite payer immédiatement au taux de 2 %. Quel est le montant du règlement anticipé ?

$$\text{Valeur actuelle} = 1\,000 - \frac{1\,000 \times 0,02 \times 90}{360} = 995 \text{ €}$$

## ■ Escompte

### ■ Calcul

► Parmi les différents modes de règlement, il existe la lettre de change (effet de commerce). Il s'agit d'un document engageant un débiteur à régler un montant déterminé à une date future (**échéance**). Lorsque le créancier a des besoins de trésorerie à court terme, il lui est possible de céder, avant l'échéance, la lettre de change à sa banque en contrepartie d'une rémunération appelée **escompte (E)**.

Il existe deux types d'escompte :

- *l'escompte rationnel* : il se calcule sur la somme effectivement prêtée ;
- *l'escompte commercial* : il est directement calculé sur la valeur nominale. C'est cet escompte dont il sera fait mention par la suite.

$$E = V \times t \times \frac{j}{360}$$

avec V la valeur nominale de l'effet, t le taux d'escompte et j le nombre de jours séparant la date de négociation et la date d'échéance. D'où :

- la valeur actuelle =  $V - E$
- agios (a) = escompte + frais + taxes
- valeur nette =  $V - a$

► Il est possible pour l'entreprise de calculer le taux réel de l'escompte i, taux qui tient compte des frais, à partir de la formule suivante :

$$a = V \times i \times \frac{j}{360} \text{ d'où } i = \frac{(a \times 360)}{V \times j}$$

**Exemple** : L'entreprise X détient une lettre de change de 12 500 € de valeur nominale dont l'échéance est le 5 mai. Le 15 mars elle négocie auprès de sa banque un escompte au taux de 9 %, commission d'endos 0,60 %, commission de manipulation 1,50 € HT par effet.

Calculer le montant de l'escompte, la valeur actuelle, le montant des agios ainsi que le taux réel de l'escompte.

$$\text{Escompte } E = 12\,500 \times 0,09 \times \frac{16 + 30 + 5}{360} = 159,38 \text{ €}$$

$$\text{Valeur actuelle} = 12\,500 - 159,38 = 12\,340,62 \text{ €}$$

Calcul des agios :

Escompte	159,38
Com. endos 0,6 % × 12 500 × $\frac{51}{360}$	10,62
Com. Manipulation	1,50
TVA	0,30
Agios	<u>171,80</u>

$$\text{Valeur nette} = 12\,500 - 171,80 = 12\,328,20 \text{ €}$$

$$\text{Taux réel} = \frac{360 \times 171,80}{12\,500 \times 51} = 9,70 \%$$

## ■ Équivalence des capitaux

▶ Deux capitaux sont équivalents si, escomptés au même taux, ils ont la même valeur actuelle à une certaine date (date d'équivalence). À intérêt simple, cette date est unique.

À la date  $t$ , la valeur actuelle 1 est égale à la valeur actuelle 2 d'où :

$$V_1 - \frac{V_1 t n_1}{360} = V_2 - \frac{V_2 t n_2}{360}$$

avec  $n$  la durée en jours,  $V$  la valeur nominale et  $t$  le taux d'escompte.

▶ Suite à cela, il peut être demandé de retrouver la date d'équivalence, le taux d'équivalence, la valeur nominale ou l'échéance.

**Exemple :** Le 1<sup>er</sup> avril, à quel taux d'escompte un effet de nominal 2 500 € à échéance le 15 juillet est-il équivalent à un effet de nominal 2 450 € à échéance le 15 mai ?

$$2\,500 - 2\,500 \times t \times \frac{29 + 31 + 30 + 15}{360} = 2\,450 - 2\,450 \times t \times \frac{29 + 15}{360}$$

$t = 11,63 \%$

## ■ Intérêts précomptés – intérêts post-comptés

▶ Lors de l'escompte, les intérêts sont payés d'avance (précomptés) à la différence du découvert où ceux-ci sont calculés en fin de période (post-comptés).

▶ Soit  $V$  la somme empruntée,  $i'$  le taux précompté et  $i$  le taux de l'intérêt simple post-compté alors :

Soit les intérêts  $I = V \times i' \times \frac{j}{360}$  et le montant perçu  $= V - V \times i' \times \frac{j}{360}$   
Si  $i'$  est annuel et  $j$  le nombre de jours, alors :

$$i = \frac{i'}{1 - i' \times \frac{j}{360}}$$

Si  $i'$  est mensuel et  $n$  le nombre de mois, alors :

$$i = \frac{i'}{1 - n i'}$$

**Exemple :** Une entreprise escompte 10 000 € sur 12 mois au taux de 0,5 % mensuel précompté. Y a-t-il équivalence entre les intérêts simples au taux précompté ou au taux post-compté ?

$$\text{Taux post-compté } i = \frac{0,005}{1 - 12 \times 0,005} = 0,00532 \text{ soit } 0,532 \%$$

$$\text{Intérêt précompté } I = 10\,000 \times 0,5\% \times 12 = 600$$

$$\text{Montant perçu} = 10\,000 - 600 = 9\,400 \text{ €}$$

Si l'entreprise décide d'emprunter aujourd'hui 9 400 € à 0,532 % intérêt post-compté, le montant des intérêts versés serait de :

$$I = 9\,400 \times 0,532\% \times 12 = 600$$

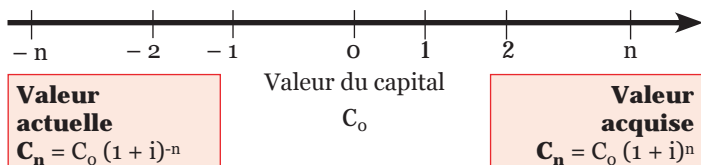
$$\text{Montant remboursé} = 9\,400 + 600 = 10\,000 \text{ €}$$

Il y a bien équivalence entre les deux taux.

## Intérêts composés

Un placement est fait à intérêts composés quand, à la fin de chaque période, les intérêts sont capitalisés et produisent des intérêts pendant les périodes ultérieures. Cette méthode est la plus utilisée.

Comme vu précédemment pour les intérêts simples, il est possible de calculer la valeur acquise ainsi que la valeur actuelle :



## Valeur acquise (capitalisation)

▶ Les intérêts augmentent d'une année sur l'autre car à la fin de chaque période ils sont incorporés au capital. Cette formule est utile pour calculer les intérêts acquis lors d'un placement, le montant de la valeur placée, la durée, le taux.

La valeur acquise d'un placement au taux  $i$  est :

$$C_n = C_0 (1 + i)^n$$

avec  $C_0$  la valeur du capital,  $i$  le taux d'intérêt et  $n$  la durée. La période de capitalisation doit correspondre à la période relative au taux. Si le taux est annuel alors  $n$  sera exprimé en années. Si le taux est mensuel,  $n$  sera exprimé en mois.

*Exemple* : Un capital de 10 000 € est placé pendant 3 ans au taux annuel de 4 %. Quelle est sa valeur acquise ?

$$C_3 = 10\,000 (1 + 0,04)^3 = 11\,248,64 \text{ €}$$

▶ À partir de cette formule de base, différents éléments peuvent être calculés :

– les **intérêts** sont calculés par simple soustraction :

$$I = C_0 (1 + i)^n - C_0$$

Dans l'exemple précédent  $I = 11\,248,64 - 10\,000 = 1\,248,64 \text{ €}$ .

– la **somme placée** est donnée par la formule suivante :

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + i)^n} = C_n \times (1 + i)^{-n}$$

*Exemple* : La somme placée est  $11\,248,64 (1,04)^{-3} = 10\,000 \text{ €}$

– la **durée** est calculée à partir de la formule suivante :

$$\mathbf{n} = \frac{\ln(C_n) - \ln(C_0)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{\ln(1+i)}$$

*Exemple* : En combien de temps le capital de 10 000 € placé à 4 % peut-il rapporter 12 166,53 € ?

$$\mathbf{n} = \frac{\ln\left(\frac{12\,166,53}{10\,000}\right)}{\ln(1,04)} = 5 \text{ ans}$$

– le **taux** est ainsi défini :  $\mathbf{i} = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{1/n} - 1$

*Exemple* : À quel taux peut-on obtenir une valeur acquise de 15 000 € avec un capital de 10 000 € au bout de 8 ans ?

$$\mathbf{i} = \left(\frac{15\,000}{10\,000}\right)^{1/8} - 1 = 5,20 \%$$

### ■ Valeur actuelle (actualisation)

Elle permet d'exprimer aujourd'hui la valeur d'une somme encaissable ou payable dans le futur. En finance, elle est très utile car la comparaison entre deux capitaux ne peut se faire qu'à la même date. La valeur actuelle d'une somme C au taux i est :

$$\mathbf{C_0} = C_n (1+i)^{-n}$$

avec  $C_n$  le capital de fin, i le taux d'intérêt et n la durée. La remarque concernant le taux et n est la même que pour la capitalisation.

*Exemple* : Quel est le capital aujourd'hui qui, placé à 4 % l'an donnera à la fin de la 5<sup>e</sup> année une valeur de 10 000 € ?

$$C_0 = 10\,000 (1 + 0,04)^{-5} = 8\,219,27 \text{ €}$$

*Exemple* : Un client hésite entre payer immédiatement 2 000 € ou régler en deux fois (1 100 € dans 1 an et 1 040 € dans 2 ans). Sachant que le taux d'actualisation est de 5 %, que lui conseillez-vous ?

$$\text{Valeur actuelle} = 1\,100 (1,05)^{-1} + 1\,040 (1,05)^{-2} = 1\,990,93 \text{ €}$$

Le crédit (1 990,93 €) est préférable au règlement comptant (2 000 €) même s'il conduit à payer 140 € d'intérêts.

### ■ Escompte à intérêts composés

Ce type d'escompte est utilisé pour des dettes dont les échéances sont lointaines.

Dans ce cas, la valeur actuelle  $V_0$  :

$$\mathbf{V_0 = valeur nominale (V) - escompte (E) = V (1 + i)^{-n}}$$
$$\text{D'où } \mathbf{E = V [1 - (1 + i)^{-n}] = V - V_0}$$

*Exemple* : Déterminer au taux de 3 % la valeur actuelle et le montant de l'escompte à intérêts composés d'un billet de trésorerie payable dans 3 ans et de valeur nominale 10 000 €.

$$\text{Valeur actuelle } V_0 = 10\,000 \times (1,03)^{-3} = 9\,151,42 \text{ €}$$

$$\text{Escompte } E = 10\,000 - 9\,151,42 = 848,58 \text{ €}$$

### ■ Équivalence des capitaux

Deux capitaux sont équivalents si, escomptés au même taux, ils ont la même valeur actuelle. Dans le cas des intérêts composés, la date d'équivalence est quelconque.

Au taux  $i$ , la valeur actuelle 1 est égale à la valeur actuelle 2.

$$\mathbf{V_1 (1 + i)^{-n_1} = V_2 (1 + i)^{-n_2}}$$

avec  $n$  la durée,  $V$  la valeur nominale et  $i$  le taux d'escompte.

*Exemple* : Un capital de 10 000 € payable dans 5 ans est payé par anticipation au bout de 2 ans au taux de 5 % à intérêts composés. Quel est le montant payé ?

$$10\,000 \times (1,05)^{-5} = V \times (1,05)^{-2}$$

$$V = 8\,638,38 \text{ €}$$

### ■ Taux équivalents et taux proportionnels

Les remboursements sont généralement supérieurs à 1 an. Le taux utilisé est le taux annuel. Mais les remboursements peuvent être mensuels, trimestriels ou semestriels. Dans ce cas, il est plus judicieux d'utiliser un taux correspondant à cette période. Il existe deux méthodes : le **taux proportionnel** et le **taux équivalent**.

#### ■ Taux proportionnels

Deux taux sont proportionnels quand leur rapport est égal au rapport de leurs périodes de capitalisation respectives.

Soit  $i_a$  le taux annuel, alors :

$$\mathbf{\text{Le taux semestriel } i_s = \frac{i_a}{2}}$$

$$\mathbf{\text{Le taux mensuel } i_m = \frac{i_a}{12}}$$

$$\mathbf{\text{Le taux trimestriel } i_t = \frac{i_a}{4}}$$

## Taux équivalents

Deux taux sont équivalents quand, pour une même durée de placement, ils conduisent à une même valeur acquise à intérêts composés.

### $i_a$ le taux annuel

$$i_s \text{ le taux semestriel : } (1 + i_a) = (1 + i_s)^2$$

$$i_t \text{ le taux trimestriel : } (1 + i_a) = (1 + i_t)^4$$

$$i_m \text{ le taux mensuel : } (1 + i_a) = (1 + i_m)^{12}$$

**Exemple :** Soit un placement de 2 000 € à 4 % annuel.

La valeur acquise fin de l'année 1 = 2 000 × (1,04) = 2 080

Calculons la valeur acquise en utilisant le taux trimestriel et comparons :

	Taux proportionnel	Taux équivalent
<b>Taux</b>	$\frac{4}{4} = 1 \%$	$(1,04)^{1/4} - 1 = 0,985 \%$
<b>Valeur acquise</b>	$2\,000 \times (1,01)^4 = 2\,081,20$	$2\,000 \times (1,00985)^4 = 2\,080$
<b>Différence</b>	1,20 €	0

Pour les emprunts, les banques utilisent le taux proportionnel ; les placements, quant à eux, sont effectués au taux équivalent.

**Exemple :**

1 - Quel est le taux mensuel équivalent à un taux annuel de 10 % ?

2 - Quel est le taux mensuel équivalent à un taux trimestriel de 6 % ?

3 - Une banque propose un compte rémunéré à 4 % les deux premières années, à 7 % les trois années suivantes et à 8 % ensuite. Ce compte est conservé 12 ans, quel est le taux annuel équivalent ? Quel est le taux trimestriel proportionnel ?

1 - Taux mensuel équivalent =  $1,10^{1/12} - 1 = 0,79 \%$

2 - Taux mensuel équivalent =  $1,06^{1/3} - 1 = 1,96 \%$

3 - Soit  $i$  le taux annuel équivalent alors  $(1 + i)^{12} = 1,04^2 \times 1,07^3 \times 1,08^7 = 2,2708$

D'où  $i = 2,2708^{1/12} - 1 = 7,07 \%$

Le taux trimestriel proportionnel est  $\frac{7,07}{4} = 1,77 \%$

Les versements effectués à intervalles de temps constant sont appelés **des annuités**.

### ■ Évaluation d'une suite d'annuités constantes de fin de période

Lorsque les annuités de chaque période sont identiques, l'annuité est dite **constante**. Dans ce cas, les formules des suites géométriques peuvent être appliquées.

#### ■ La valeur acquise

La valeur acquise est la somme des valeurs actualisées par chaque annuité lors du versement de la dernière annuité.

La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes de fin de période suit une progression géométrique de raison  $(1+i)^n$ . Le calcul de la valeur acquise peut être effectué à l'aide de la formule de la somme géométrique. Dans ce cas :

$$V_n = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \dots + a(1+i)^{n-1}$$

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

avec  $V_n$  la valeur acquise,  $n$  le nombre d'annuités,  $i$  le taux d'intérêt et  $a$  le montant de l'annuité constante.

**Exemple :** 1 000 € sont placés à intérêts composés chaque mois pendant 5 ans au taux de 2 %. La valeur acquise au bout des 5 ans est de :

$$V_5 = 1\,000 \times \frac{(1 + 0,02)^5 - 1}{0,02} = 5\,204 \text{ €}$$

#### ■ La valeur actuelle

La valeur actuelle est la somme des valeurs actuelles de chaque annuité évaluée une période avant le versement de la première annuité. Elle suit une progression géométrique de raison  $(1+i)^{-n}$ , d'où :

$$V_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \dots + a(1+i)^{-n}$$

$$V_0 = a \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

**Exemple :** Quelle somme pouvons-nous emprunter si nous nous engageons à la rembourser en 5 annualités de 1 000 € chacune, la première étant payée 1 an après la remise des fonds ? Taux : 2 %

$$V_0 = 1\,000 \times \frac{1 - (1 + 0,02)^{-5}}{0,02} = 4\,713 \text{ €}$$

## ■ Évaluation d'une suite d'annuités constantes de début de période

La formule de la somme des suites géométriques nous ramène toujours une période avant.

### ■ La valeur actuelle

La valeur actuelle nous donne la valeur en 0. Or, en cas de versement en début de période, la valeur actuelle nous donne la valeur en -1, il convient de ramener le tout à l'année 0 en multipliant le tout par  $(1+i)$ .

$$V_0 = a (1+i) \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

### ■ La valeur acquise

Le raisonnement est le même pour la valeur acquise :

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)$$

## ■ Évaluation d'une suite d'annuités en progression arithmétique de fin de période

### ■ La valeur acquise

La valeur acquise d'une suite d'annuités de fin de période de progression  $r$  est :

$$V_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times \left( a_1 + \frac{r}{i} \right) - \frac{nr}{i}$$

avec  $r$  la raison de la progression arithmétique,  $a_1$  la première annuité et  $i$  le taux d'actualisation.

**Exemple :** Calculer la valeur acquise d'une suite de 10 annuités de fin de période en progression arithmétique de raison 100, la première annuité étant de 1 000 € et le taux de 2 %.

$$V_n = \frac{1,02^{10} - 1}{0,02} \times \left( 1\,000 + \frac{100}{0,02} \right) - \frac{10 \times 100}{0,02} = 15\,698,33 \text{ €}$$

## ■ La valeur actuelle

La valeur actuelle d'une suite d'annuités de fin de période en progression arithmétique  $r$  est :

$$\mathbf{V_0 = V_n (1 + i)^{-n} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \times \left[ a_1 + \frac{r}{i} + nr \right] - \frac{nr}{i}}$$

*Exemple : valeur actuelle de l'énoncé précédent*

$$V_0 = 15\,698,33 (1,02)^{-10} = 12\,878 \text{ €}$$

$$V_0 = \frac{1 - 1,02^{-10}}{0,02} \times (1\,000 + \frac{100}{0,02} + 10 \times 100) - \frac{10 \times 100}{0,02} = 12\,878 \text{ €}$$

## ■ Évaluation d'une suite d'annuités en progression géométrique de fin de période

Nous sommes dans le cas où l'épargnant a la possibilité d'augmenter de  $r$  % ses placements chaque année.

### ■ La valeur acquise

Dans ce cas, la valeur acquise est :

$$\mathbf{V_n = a_1 \times \frac{(1 + r)^n - (1 + i)^n}{r - i}}$$

avec  $a_1$  la première annuité et  $i$  le taux d'intérêt.

*Exemple : Un épargnant place 1 000 € la première année. Les placements augmentent de 1 % chaque année. Le taux est de 3 %. Quelle est la valeur acquise au bout de 10 placements ?*

$$V_{10} = 1\,000 \times \frac{1,01^{10} - 1,03^{10}}{0,01 - 0,03} = 11\,965 \text{ €}$$

### ■ La valeur actuelle

La valeur actuelle d'une suite d'annuités en progression géométrique de fin de période est :

$$\mathbf{V_0 = V_n \times (1 + i)^{-n}}$$

## ■ Généralités

▶ Un emprunt indivis est un emprunt qui ne comprend qu'un seul prêteur. L'emprunteur rembourse le capital avec des intérêts. Chacune des **annuités** (remboursement) se décompose en **intérêts** du capital restant dû et en remboursement du capital emprunté (**amortissement**).

**Annuité** = intérêts du capital restant dû + amortissement

▶ Un emprunt se décompose en 5 variables :

- le montant de l'emprunt  $V$  ;
- la durée ;
- le mode de remboursement ;
- le montant des annuités  $a_i$  ;
- le taux annuel de l'emprunt  $i$ .

▶ Le coût de l'emprunt correspond au montant des intérêts versés. Les intérêts sont moindres lorsque les remboursements sont importants sur les premières années.

▶ Le taux le plus souvent utilisé est le taux proportionnel.

▶ Le tableau de remboursement d'emprunt est utile en finance. En effet, lors d'un choix de financement, la comparaison doit se faire à des dates identiques. Le montant de l'emprunt à la date 0 est égal à la somme des annuités versées actualisées. De plus, il fait apparaître :

- la date du remboursement ;
- le capital restant dû ( $V_n$  – amortissement  $n$ ) ;
- les intérêts payés ;
- le capital remboursé (amortissement  $A$ ) ;
- l'annuité (intérêts + amortissement).

Année	Capital restant dû	Intérêt Taux $i$	Amortissement	Annuité
1	$V_0$	$V_0 \times i$	$A_1$	$a_1 = V_0 i + A_1$
2	$V_1 = V_0 - A_1$	$V_1 \times i$	$A_2$	$a_2 = V_1 i + A_2$
...	...	...	...	...
$n$	$V_n = V_{n-1} - A_{n-1}$	$V_n \times i$	$A_n$	$a_n = V_n i + A_n$

Il ressort 5 propriétés de ce tableau de remboursement :

1) Il y a équivalence entre le capital emprunté et les annuités versées :

$$V_0 = a_1 (1 + i)^{-1} + a_2 (1 + i)^{-2} + \dots + a_n (1 + i)^{-n}$$

2) La somme des amortissements est égale au capital emprunté :

$$V_0 = \sum_{k=1}^n A_k$$

3) L'avant dernier capital restant dû est égal au dernier amortissement :

$$V_{n-1} = A_n$$

4) Il existe une relation entre annuités et amortissements :

$$a_{p+1} - a_p = A_{p+1} - A_p (1 + i)$$

5) La fraction du capital emprunté, remboursée au terme de la  $p^{\text{ième}}$  période ( $R_p$ ) est :

$$R_p = A_1 + A_2 + \dots + A_p = \sum_{k=1}^p A_k$$

## ■ Modes de remboursement

Posons :

- $V$  le capital emprunté ;
- $i$  le taux annuel de l'emprunt ;
- $N$  la durée ;
- $V_n$  le capital restant l'année  $n$  ;
- $A_n$  le capital remboursé l'année  $n$  ;
- $I_n$  les intérêts de  $n$  ;
- $a_n$  l'annuité de  $n$ .

### ■ Remboursement *in fine*

Le capital est remboursé en fin de période, les intérêts sont payés chaque année sur la durée de l'emprunt.

► Tous les ans sauf la dernière année :

$$V_i = V$$

$$I_i = a_i = i \times V$$

$$A_i = 0$$

► La dernière année :

$$V_n = V$$

$$I_n = i \times V$$

$$A_n = V$$

$$a_n = I_n + A_n = V (1 + i)$$

Le coût de l'emprunt est très élevé car l'emprunt est remboursé tard.

*Exemple* : Une entreprise a souscrit un emprunt bancaire de 100 000 € au taux de 4 %. Cet emprunt est remboursable *in fine* dans 5 ans.

Année	Capital restant dû	Intérêts taux $i$	Amortissement	Annuité
1	100 000	4 000		4 000
2	100 000	4 000		4 000
3	100 000	4 000		4 000
4	100 000	4 000		4 000
5	100 000	4 000	100 000	104 000

## Remboursement par amortissement constant

La même fraction de capital est remboursée chaque année.

▶ **L'amortissement**  $A = \frac{V}{N}$  d'où :

– les intérêts  $I_k = i \times V_k = i \times \frac{V}{N} \times (N - k + 1)$

– l'annuité  $a_k = I_k + A_k = \frac{V}{N} (1 + i (N - k + 1))$

– la dette amortie après le paiement de la  $p^{\text{ième}}$  annuité :  $R_p = p \times A$

– la dette encore vivante après la  $p^{\text{ième}}$  annuité :

$$V_p = (N - p) A$$

En cas de remboursement par amortissement constant, les annuités ainsi que les intérêts suivent une progression arithmétique de raison  $(-\frac{V}{N}i)$ .

▶ Le **coût de l'emprunt** correspond à la somme d'une suite arithmétique et est égal à :

$$\text{Coût de l'emprunt} = i \times V \times \frac{N + 1}{2}$$

**Exemple** : Une entreprise a souscrit un emprunt bancaire de 100 000 € au taux de 4 %. Cet emprunt est remboursé en 5 fractions égales.

Année	Capital restant dû	Intérêts taux $i$	Amortissement	Annuité
1	100 000	4 000	20 000	24 000
2	80 000	3 200	20 000	23 200
3	60 000	2 400	20 000	22 400
4	40 000	1 600	20 000	21 600
5	20 000	800	20 000	20 800

## Remboursement par annuité constante

La même annuité est payée chaque année.

$$\text{Annuité } a = V \times \frac{i}{1 - (1 + i)^{-N}}$$

Le capital restant dû :  $V_k = (1 + i) V_{k-1} - a = V \times \frac{1 - (1 + i)^{-N + k - 1}}{1 - (1 + i)^{-N}}$

Les intérêts :  $I_k = i \times V \times \frac{1 - (1 + i)^{-N + k - 1}}{1 - (1 + i)^{-N}}$

► Dans le cas d'un **remboursement par annuités constantes**, les amortissements suivent une progression géométrique de raison  $(1 + i)$  ; d'où :

– l'amortissement  $A_k = A_1 (1 + i)^{k-1} = i \times V \times \frac{(1 + i)^{-N + k - 1}}{1 - (1 + i)^{-N}}$

– le capital de début :  $V_0 = A_1 \times \frac{(1 + i)^N - 1}{i}$

– la dette amortie après le paiement de la  $p^{\text{ième}}$  annuité :

$$R_p = V_0 \times \frac{(1 + i)^p - 1}{(1 + i)^N - 1}$$

– la dette encore vivante après la  $p^{\text{ième}}$  annuité :

$$V_p = V_0 \times \frac{(1 + i)^N - (1 + i)^p}{(1 + i)^N - 1}$$

► **Le coût de l'emprunt** :  $N \times a - V = V \times \left( \frac{N \times i}{1 - (1 + i)^{-N}} - 1 \right)$

**Exemple** : Une entreprise a souscrit un emprunt bancaire de 100 000 € au taux de 4 %. Cet emprunt est remboursable en 5 annuités constantes.

Présenter le tableau de remboursement, retrouver la dette amortie après le paiement de la deuxième annuité ( $R_2$ ) ainsi que la dette encore vivante après le paiement de la troisième annuité ( $V_3$ ).

$$\text{Annuité} = 100\,000 \times \frac{0,04}{1 - 1,04^{-5}} = 22\,462,71 \text{ soit environ } 22\,463 \text{ €}$$

Année	Capital restant dû	Intérêts taux $i$	Amortissement	Annuité
1	100 000	4 000	18 463	22 463
2	81 537	3 262	19 201	22 463
3	62 336	2 494	19 969	22 463
4	42 367	1 695	20 768	22 463
5	21 599	864	21 599	22 463

$$R_2 = 100\,000 \times \frac{1,04^2 - 1}{1,04^5 - 1} = 37\,664 = 18\,463 + 19\,201 \text{ €}$$

$$V_3 = 100\,000 \times \frac{1,04^5 - 1,04^3}{1,04^5 - 1} = 42\,367 \text{ €}$$

**Exemple** : Pour financer, à 80 %, un matériel de 50 000 €, une entreprise contracte un emprunt le 01/01/N. le taux est de 4,5 %. Le remboursement s'échelonne sur 5 ans par le paiement d'une somme constante tous les trimestres à partir du 31/03/N.

Présenter les trois premières lignes, la dixième et la dernière ligne du tableau d'amortissement.

L'annuité  $a = 50\,000 \times 80 \% \times \frac{0,011}{1 - 1,011^{-20}} = 2\,239 \text{ €}$  avec le taux trimestriel  $i = 1,045^{1/4} - 1 = 1,10 \%$

	Capital restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuité
<b>1</b>	40 000	440	1 799	2 239
<b>2</b>	38 201	420	1 819	2 239
<b>3</b>	36 382	400	1 839	2 239
<b>10</b>	23 078	254	1 985	2 239
<b>20</b>	2 215	24	2 215	2 239

La dette vivante après la 9<sup>e</sup> annuité est de  $40\,000 \times \frac{1,011^{20} - 1,011^9}{1,011^{20} - 1} = 23\,078 \text{ €}$ .

L'amortissement de la 20<sup>e</sup> période =  $1\,799 \times 1,011^{19} = 2\,214,64$  soit  $2\,215 \text{ €}$  correspond au capital restant dû en début d'année.

### Autres types de remboursements

Il est possible de choisir d'autres modes de remboursement. Par exemple, l'entreprise peut décider d'augmenter régulièrement les remboursements ou diminuer les annuités.

► **Remboursement par annuités en progression géométrique ( $1 + r$ ) :**

$$\text{Annuité } a = V \times \frac{i - r}{1 - \left(\frac{1+r}{1+i}\right)^N}$$

► **Création d'un fonds d'amortissement :** seuls les intérêts sont payés chaque année, l'emprunteur décidant de placer ou non sur un compte la somme nécessaire au remboursement du capital. Ces sommes sont rémunérées à un taux  $r$  généralement inférieur au taux d'emprunt. Au final l'opération revient pour l'emprunteur à régler l'équivalent d'une annuité constante, mais cela lui laisse une liberté au niveau de sa trésorerie.

**Exemple :** Une personne a emprunté 45 000 €. Deux modalités de remboursement lui sont proposées :

1 – Versement de 5 annuités en progression arithmétique de raison  $r = 1\,000 \text{ €}$  et de taux  $i = 4,5 \%$

2 – Versement de 5 annuités en progression géométrique de 3 %, le taux  $i = 4 \%$   
Calculer chacune des annuités.

1 – En utilisant la formule de la valeur actuelle d'une suite en progression arithmétique (fiche 5) il est possible d'écrire :

$$V_0 = 45\,000 = \frac{1 - 1,045^{-5}}{0,045} \times \left(a + \frac{1\,000}{0,045} + 5 \times 1\,000\right) - \frac{1\,000 \times 5}{0,045}$$

d'où l'annuité  $a = 8\,338,58 \text{ €}$

2 – En utilisant la formule de la suite en progression géométrique, l'annuité sera :

$$a = 45\,000 \times \frac{0,04 - 0,03}{1 - \left(\frac{1+0,03}{1+0,04}\right)^5} = 9\,541,74 \text{ €}$$

## ■ Généralités

▶ Ce type d'emprunt s'adresse à de nombreux prêteurs, chacun recevant des titres représentant une fraction égale de l'emprunt, appelés **obligations**. Le risque est ainsi réparti entre les différents **obligataires**.

▶ Une entreprise, qui souhaite se financer à l'aide d'un emprunt obligataire, émettra N obligations d'une valeur nominale VN à un taux d'intérêt i. La valeur d'émission (VE) peut être différente de la valeur de remboursement (VR) d'où la constatation d'une **prime de remboursement** des obligations (PRO = VR – VE).

▶ Les modes de remboursement sont identiques à ceux des emprunts indivis. La difficulté porte sur le nombre de titres amortis chaque année, celui-ci est nécessairement un nombre entier, il convient d'arrondir le nombre théorique à l'entier le plus proche.

▶ Les titres sont négociables sur le **marché obligataire**. Ce marché est un marché à long terme sur lequel les obligations sont cotées. La cotation se fait **en pourcentage de la valeur nominale**. De plus, le **coupon** (intérêts courus) est donné au jour le jour.

*Exemple* : Une entreprise a émis le 1/01/N un emprunt obligataire de 10 000 obligations de 1 000 € au taux de 4 %.

Au 31 mars N, l'obligation est cotée 104 et le coupon est de 1 %. Quelle est la valeur totale de l'obligation au 31 mars ?

Valeur de l'obligation au pied du coupon :  $1\,000 \times 104\% = 1\,040 \text{ €}$

Coupon :  $1\,000 \times 1\% = 10 \text{ €}$

Valeur de l'obligation 1 050 €

## ■ Différents types d'émission et de remboursement

### ■ Émission – Remboursement au pair

Lorsque le remboursement ou l'émission se fait à la valeur nominale, on parle d'émission ou de remboursement **au pair**.

*Exemple* : Une entreprise émet un emprunt obligataire le 1<sup>er</sup> janvier N de 10 000 obligations de 200 € au taux de 4 % l'an remboursable par annuités constantes sur 5 ans.

Montant de l'annuité :  $10\,000 \times 200 \times \frac{0,04}{1 - 1,04^{-5}} = 449\,254 \text{ €}$

Montant de l'intérêt annuel unitaire :  $200 \times 4\% = 8 \text{ €}$

Pour la première année :

Intérêt =  $10\,000 \times 8 = 80\,000 \text{ €}$

Amortissement théorique =  $449\,254 - 80\,000 = 369\,254 \text{ €}$

Nombre d'obligations théoriques :  $\frac{369\,254}{200} = 1\,846,27 \text{ €}$

Amortissement réel =  $1\,847 \times 200 = 369\,400 \text{ €}$

Date	Nombre d'obligations vivantes	Intérêts	Amortissement théorique	Nombre d'obligations théoriques	Nombre d'obligations réelles	Amortissement réel	Annuité
1	10 000	80 000	369 254	1 846,27	1 847	369 400	449 400
2	8 153	65 224	384 030	1 920,15	1 920	384 000	449 224
3	6 233	49 864	399 390	1 996,95	1 997	399 400	449 264
4	4 236	33 888	415 366	2 076,83	2 077	415 400	449 288
5	2 159	17 272	431 982	2 159,91	2 159	431 800	449 072

### ■ Émission au pair – Remboursement au-dessus du pair

▶ Le remboursement est dit au-dessus du pair quand la valeur nominale d'une obligation est inférieure à sa valeur de remboursement.

Les intérêts sont calculés par rapport à la valeur nominale, les amortissements sont calculés sur la base de la valeur de remboursement.

▶ L'annuité est calculée en prenant comme taux d'intérêt un taux effectif  $r$  tel que :

$$r = \frac{C_i}{R}$$

avec  $C$  la valeur nominale et  $R$  la valeur de remboursement.

**Exemple :** Une entreprise émet un emprunt obligataire de 10 000 obligations de valeur nominale 200 € à 4,25 % remboursable à 212,50 € en 5 ans.

$$\text{Taux effectif } r = \frac{200 \times 0,0425}{212,50} = 4 \%$$

$$\text{Annuité : } 10\,000 \times 212,50 \times \frac{0,04}{1 - 1,04^{-5}} = 477\,332 \text{ €}$$

$$\text{Montant de l'intérêt annuel unitaire : } 200 \times 4,25 \% = 8,50 \text{ €}$$

Pour la première année :

$$\text{Intérêt} = 10\,000 \times 8,50 = 85\,000 \text{ €}$$

$$\text{Amortissement théorique : } 477\,332 - 85\,000 = 392\,332 \text{ €}$$

$$\text{Nombre d'obligations théoriques : } \frac{392\,332}{212,50} = 1\,846,27$$

$$\text{Amortissement réel : } 1\,846 \times 212,50 = 392\,275 \text{ €}$$

Date	Nombre d'obligations vivantes	Intérêts	Amortissement théorique	Nombre d'obligations théoriques	Nombre d'obligations réelles	Amortissement réel	Annuité
1	10 000	85 000	392 332	1 846,27	1 846	392 275	477 275
2	8 154	69 309	408 023	1 920,11	1 920	408 000	477 309
3	6 234	52 989	424 343	1 996,91	1 997	424 362,5	477 351,5
4	4 237	36 014,5	441 317,5	2 076,79	2 077	441 362,5	477 377
5	2 160	18 360	458 972	2 159,87	2 160	459 000	477 360

**Exemple** : Une société a émis un emprunt obligataire à un taux réel de 5 %, remboursable par annuités sensiblement constantes de 390 238,51 €. Le capital restant dû après le paiement de la dixième annuité est de 4 050 542,41 €. Le nombre d'obligations remboursées au premier tirage est de 1 047.

Trouver la durée de l'emprunt, le montant total à rembourser. Sachant que la prime de remboursement est de 550 000 €, déterminer la valeur de remboursement et la valeur d'émission. Si la valeur nominale est de 100 € déterminer le taux d'intérêt nominal.

**La durée de l'emprunt** : nous connaissons la valeur du capital res-

tant dû la 11<sup>e</sup> année, d'où :  $D_{10} = a \frac{1 - 1,05^{-x}}{0,05}$  avec  $x$  la durée restante jusqu'à la fin de l'emprunt.

$$\frac{1 - 1,05^{-x}}{0,05} = \frac{D_{10}}{a} = \frac{4\,050\,542,41}{390\,238,51}$$

$$-1,05^{-x} = 10,3797 \times 0,05 - 1 = -0,4810$$

$$-x \ln(1,05) = \ln(0,4810)$$

$$X = -\frac{\ln(0,4810)}{\ln(1,05)} \text{ d'où } x = 15 \text{ ans. La durée totale de l'emprunt}$$

est de 25 ans.

$$\text{Le montant à rembourser est de } 390\,238,51 \times \frac{1 - 1,05^{-25}}{0,05} = 5\,500\,000 \text{ €}$$

**La valeur de remboursement** se calculera à l'aide de l'amortissement. L'annuité est de 390 238,51 €, le montant de l'emprunt 5 500 000 € d'où des intérêts de  $5\,500\,000 \times 0,05 = 275\,000 \text{ €}$ .

Amortissement de la première année

$$= 390\,238,51 - 275\,000 = 115\,238,51 \text{ €}$$

$$= nb \text{ obligations amorties} \times \text{valeur remboursement}$$

$$= 1\,047 \times VR$$

$$\text{D'où } VR = 110 \text{ €}$$

**La valeur d'émission** : l'entreprise a fait un emprunt obligataire de

$$5\,500\,000 \text{ € soit } 50\,000 \text{ obligations } \left( \frac{5\,500\,000}{110} \right)$$

Le montant perçu s'élève à 4 950 000 € (5 500 000 – 550 000)

ce qui correspond à un prix d'émission de 99 €  $\left( \frac{4\,950\,000}{50\,000} \right)$

**Le taux d'intérêt nominal** : la valeur nominale étant différente de la valeur de remboursement, le calcul de l'annuité s'est

fait à l'aide du taux réel :  $r = \frac{C_i}{R}$  d'où  $0,05 = \frac{100i}{110}$  donc le taux d'intérêt nominal est de 5,5 %.

(Pour vérification : montant des intérêts de la première année :  $50\,000 \times 100 \times 5,5\% = 275\,000$  €)

## ■ Taux de rendement et taux de revient

► Les emprunts sont très souvent émis et remboursables à une valeur différente de la valeur nominale, or les intérêts sont calculés sur la valeur nominale. De ce fait, le taux de rendement est différent du taux d'intérêt nominal.

Le **taux de rendement** est le taux d'actualisation  $t$  tel que la somme versée par les obligataires soit équivalente à la suite d'annuités.

$$N \times VE = \sum_{i=1}^n a_i (1+t)^{-i}$$

avec  $N$  le nombre d'obligations,  $VE$  le prix d'émission et  $a_i$  les annuités.

**Exemple** : La société émet un emprunt obligataire de 5 000 obligations à 190 € de valeur nominale, 200 € au taux de 4 % remboursable sur 10 ans par annuité constante.

$$\text{Annuité} = 5\,000 \times 200 \times \frac{0,04}{1 - 1,04^{-10}} = 123\,290 \text{ €}$$

Montant versé lors de la souscription :  $5\,000 \times 190 = 950\,000$  €

$$950\,000 = 123\,290 \times \frac{1 - (1+t)^{-10}}{t} \text{ d'où un taux de rendement}$$

$t = 5,04\%$  (interpolation linéaire ou calculatrice)

En cas d'annuités constantes et de valeur de remboursement différente de la valeur nominale :

$$a = N \times VR \frac{VR}{1 - (1+r)^{-n}} \text{ et } r = \frac{C_i}{VR} \text{ d'où :}$$

$$VE = VR \times \frac{r}{1 - (1+r)^{-n}} \times \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$$

En cas d'amortissement constant, les annuités suivent une progression arithmétique de raison  $r' = -\frac{N_0 C_i}{n}$  d'où :

$$N \times VE = \left[ \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t} \times \left( a_1 + \frac{r'}{t} nr' \right) \right] - \frac{nr'}{t}$$

► La société en plus de la prime de remboursement supporte des frais. Le **taux de revient** est le taux d'actualisation  $x$  tel que la somme nette perçue par l'établissement débiteur moins  $F$  le montant des frais engagés à l'émission soit équivalente à la suite d'annuités.

$$N \times VE - F = \sum_{i=1}^n a_i (1+x)^{-i}$$

**Exemple** : Même énoncé que l'exemple précédent, les frais d'émission s'élèvent à 0,5 % de l'emprunt, soit 5 000 €.

Montant perçu :  $950\,000 - 5\,000 = 945\,000$  €

$$945\,000 = 123\,290 \times \frac{1 - (1+x)^{-10}}{x}$$

D'où un taux de revient  $x = 5,15$  % (interpolation linéaire ou calculatrice).

En cas d'annuités constantes :

$$VE - \frac{F}{N_0} = VR \frac{r}{1 - (1+r)^{-n}} \times \frac{1 - (1+x)^{-n}}{x}$$

En cas d'amortissement constant :

$$N \times VE - F = \left[ \frac{1 - (1+x)^{-n}}{x} (a_1 + \frac{r'}{x} nr') \right] - \frac{nr'}{x}$$

► Pour une obligation déterminée, le taux de rendement est fonction de la date de remboursement de cette obligation. Le taux de rendement d'une obligation remboursable au  $p$ ème tirage est :

$$VE = VR (1+t)^{-p} + VN \times i \times \frac{1 - (1+t)^{-p}}{t}$$

**Exemple** : Une entreprise émet un emprunt obligataire le 5/01/N de 40 000 obligations de valeur nominale 2 500 €. Le taux nominal est de 5 %, le prix d'émission de 2 400 €. Le remboursement se fait par annuités constantes sur 10 ans au pair à partir du 5/01/N+3.

Chaque année des lots d'une valeur globale de 600 000 € sont payés en même temps que le remboursement.

Les frais s'élèvent à 100 000 €. Les intérêts sont versés à compter du 05/01/N+1.

Calculer l'annuité de remboursement, le taux de rendement et le taux de revient.

**L'annuité**  $a = 40\,000 \times 2\,500 \times \frac{0,05}{1 - 1,05^{-10}} = 12\,950\,457,50$  € à partir de  $N+3$ .

En  $N+1$  et  $N+2$ , l'entreprise versera les intérêts :  $40\,000 \times 2\,500 \times 5\% = 5\,000\,000$  €

**Le taux de rendement  $t$  sera :**

$$40\,000 \times 2\,400 = 5\,000\,000 \frac{1 - (1+t)^{-2}}{t} + (12\,950\,457,50 + 600\,000) (1+t)^{-2} \frac{1 - (1+t)^{-10}}{t}$$

D'où  $t = 6,33\%$

**Le taux de revient  $r$  sera :**

$$40\,000 \times 2\,400 - 100\,000 = 5\,000\,000 \frac{1 - (1+r)^{-2}}{r} + (12\,950\,457,50 + 600\,000) (1+r)^{-2} \frac{1 - (1+r)^{-10}}{r}$$

D'où  $r = 6,34\%$

## ■ Risques

- ▶ Il existe différents risques inhérents aux emprunts :
  - le défaut de l'émetteur ;
  - le risque de liquidité : si l'offre est supérieure à la demande, alors la vente du titre va être difficile ;
  - le risque de taux : lorsque les taux augmentent alors la valeur de l'obligation diminue.
- ▶ Il est possible de calculer la durée de vie d'une obligation (la **duration**). La duration calcule la durée de vie moyenne d'une obligation non encore remboursée à la date considérée en tenant compte des flux intermédiaires liés à l'obligation. Il s'agit de la moyenne arithmétique pondérée des dates d'échéance des diverses annuités. Chaque date est pondérée par la valeur actuelle de l'annuité correspondante.

Plus cette durée est importante et plus le risque est élevé.

**Exemple :** Soit un emprunt de 1 000 obligations émis le 01/07/N de valeur nominale 1 000 € au taux de 5 %. Le prix de remboursement in fine est de 1 010 € dans 5 ans.

Calculer la duration à 5 %. Le montant des intérêts versés chaque année s'élève à  $1\,000 \times 5\% = 50$  €

Échéance	1	2	3	4	5
Pondération	$50 (1+i)^{-1}$	$50 (1+i)^{-2}$	$50 (1+i)^{-3}$	$50 (1+i)^{-4}$	$(50 + 1\,010) (1+i)^{-5}$

$$D = \frac{1 \times 50 \times 1,05^{-1} + 2 \times 50 \times 1,05^{-2} + \dots + 1\,060 \times 5 \times (1,05)^{-5}}{50 \times (1,05)^{-1} + 50 (1,05)^{-2} + \dots + 1\,060 (1,05)^{-5}}$$

$$= \frac{4\,585,12}{1\,007,84} = 4,55 \text{ soit } 4 \text{ ans } 1/2$$

- ▶ Pour un emprunt, il est intéressant de connaître la variation de l'obligation lorsque le taux du marché obligataire augmente de un point. Il s'agit de **la sensibilité**. Elle permet de connaître le degré d'exposition au risque de taux d'une obligation.

$$S = \frac{-D}{(1+i)} = \frac{C'}{C}$$

avec C la valeur de l'emprunt en fonction de i et C' la dérivée de C en fonction de i.

La sensibilité est très importante pour la gestion du portefeuille. Si le gestionnaire anticipe une baisse des taux d'intérêt, il recherchera des obligations à forte sensibilité.

*Suite de l'exemple : Recherchons la sensibilité de l'obligation au taux de 5 %.*

*Valeur de l'obligation à 5 % :*

$$50 \times \frac{1 - 1,05^{-5}}{0,05} + 1\,010 (1,05)^{-5} = 1\,007,84 \text{ €}$$

*Valeur de l'obligation à 6 % = 965,35 €*

$$\text{Soit une sensibilité } S = \frac{965,35 - 1\,007,84}{1\,007,84} = -4,22$$

*Si le taux passe de 5 à 6 % alors la valeur de l'obligation chute de 4,22 %.*

*Autre méthode :*

$$C' = -50 (1,05)^{-2} + 50 (-2) (1,05)^{-3} + \dots + 1\,060 (-5) (1,05)^{-6} = -4\,366,78$$

$$S = \frac{-4\,366,12}{1\,007,84} = -4,33 \text{ \% (différence due aux arrondis).}$$

## — Généralités

D'après Fisher « la valeur d'un actif résulte des flux de revenus qu'il va générer dans le futur ».

À la différence des obligations :

▶ l'action est un titre de propriété qui ouvre droit à des dividendes. Ceux-ci sont fonction des résultats réalisés. Il peut exister des actions de préférence ayant des caractéristiques particulières. Les actions peuvent se négocier sur le marché boursier ;

▶ il n'est pas possible de connaître les flux futurs avec certitude ; c'est pourquoi l'évaluation de l'action est plus subjective que celle des obligations. Cette subjectivité implique un risque plus important, d'où un marché boursier plus risqué que le marché obligataire.

## — Évaluation et indicateurs

### — Évaluation

Évaluer une action revient à calculer la valeur actuelle des flux générés par le titre dans le futur. Il existe différentes modalités d'évaluation :

▶ Le **cours boursier**, fonction de l'offre et de la demande, correspond au prix qui permet d'échanger les titres. Dans ce cas il existe un risque lié au marché.

#### ▶ Actualisation des dividendes

La valeur de l'action est :

$$V = D_1 (1 + i)^{-1} + D_2 (1 + i)^{-2} + \dots + (D_n + P) (1 + i)^{-n}$$

avec D les dividendes de chaque année, P le prix de vente futur et i le taux de rendement exigé par les actionnaires.

#### Si les dividendes sont constants :

– sur une **infinité d'années**, alors :  $V = \frac{D}{i}$

avec D le dividende et i le taux de rendement exigé par les actionnaires.

– sur **n années** :  $V = D \times \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} + P (1 + i)^{-n}$

avec P le prix du titre dans n années.

**Exemple** : Les dividendes d'une société sont de 7,50 €. La rentabilité attendue des actionnaires est de 7 %.

La valeur de l'action est de  $\frac{7,50}{0,07} = 107,14$  €.

#### Si les dividendes sont en augmentation de g % par an :

– sur **une infinité d'années** :  $V = \frac{D}{i - g}$  (Gordon Shapiro)

– sur ***n* années** :

$$V = D \times \frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g} + P(1+i)^{-n}$$

**Exemple** : La société décide d'appliquer un taux de croissance des dividendes de 5 %. Le premier dividende est de 8,30 €, le taux de rentabilité de 7 %.

La valeur de l'action est de  $\frac{8,30}{0,07-0,05} = 415 \text{ €}$

### ► Actualisation des bénéfices : modèle de Solomon

Le bénéfice augmente car les bénéfices non distribués sont réinvestis au taux de rentabilité  $r$ .

$$V = \frac{d B_1}{i - r(1-d)}$$

avec  $d$  le taux constant de distribution du bénéfice,  $r$  le taux de réinvestissement des bénéfices non distribués,  $i$  le taux exigé par les investisseurs et  $B_1$  le bénéfice de l'année 1.

**Exemple** : Le bénéfice de l'année 1 est de 23,70 €, la part des bénéfices distribués est de 40 %, le taux de réinvestissement  $r$  est de 3 % et le taux exigé par les investisseurs 7 %.

La valeur de l'action est :  $\frac{40\% \times 23,70}{0,07 - 0,03(1-0,4)} = 182,30 \text{ €}$

### ► Le modèle de Molodovski

Une société en croissance peut diviser son avenir en trois périodes :

- la première : le taux de croissance est de  $g$  % ;
- la deuxième : le taux de croissance diminue et devient  $g'$  ;
- la troisième : le dividende global reste constant  $g = 0$ .

### ■ Indicateurs

► Le **PER** (*Price Earning Ratio*) représente le nombre de fois où le bénéfice est pris en compte dans le cours de l'action. Il permet de mettre en évidence les actions surcotées ou sous-cotées.

$$\text{PER} = \frac{\text{Cours de l'action}}{\text{Bénéfice net par action}}$$

Plus le PER est élevé et plus le cours de l'action est important par rapport aux bénéfices. Pour être pertinent, il doit être comparé avec celui du secteur d'activité.

Lorsque le PER est inférieur au secteur, il est alors conseillé d'acheter car le coût de l'action est sous-évalué.

Lorsque le PER est supérieur, il est préférable de vendre car le cours est surévalué.

**Exemple** : Le capital social d'une société est de 25 000 000 € (actions de 100 €). Le bénéfice prévu pour l'exercice N est de 6 900 000 €. Au 15/07/N l'action est cotée 555 €. Le PER moyen du secteur d'activité est de 12. Que peut-on dire de cette société ?

Pour calculer le PER de l'année N, il faut prendre le bénéfice de l'année en cours.

Le capital est constitué de 250 000 actions, le bénéfice par action

$$\text{est de } 27,60 \text{ € } \left( \frac{6\,900\,000}{250\,000} \right)$$

Le PER de la société =  $\frac{555}{27,60} = 20,10$ . L'action vaut 20 fois son

bénéfice. Le PER moyen du secteur est de 12, donc l'action vaut cher. Le PER dépend des perspectives de croissance, du niveau de risque, du niveau d'endettement, de l'adaptation de l'entreprise au marché.

Souvent les bénéfices n'ont pas une croissance régulière dans le temps. En général, dans un premier temps leur croissance est irrégulière puis devient régulière. Les modèles vus précédemment ne peuvent pas être utilisés. **Bates** a mis en évidence une relation entre le PER et les bénéfices.

$$\text{PER}_n = \text{PER}_0 \times A - d \times B$$

$$\text{Et } A = \left[ \frac{1+t}{1+g} \right]^n \text{ et } B = \left[ \frac{1+g}{g-t} \right] \times (1-A)$$

avec  $d$  le taux de distribution,  $g$  le taux de croissance du bénéfice et  $t$  le taux de rentabilité exigé.

**Exemple** : Un investisseur souhaite vendre dans 5 ans une action qu'il possède. Cette action est valorisée à 12 fois ses bénéfices actuels. Le taux de croissance annuel du bénéfice est de 15 %. Le taux de rendement exigé est de 10 %, le taux de distribution de 8 %.

À quel PER doit-il vendre ses actions pour atteindre son objectif de rentabilité ?

$$A = \left( \frac{1,1}{1,15} \right)^5 = 0,8 \qquad B = \left( \frac{1,15}{0,15 - 0,10} \right) \times (1 - 0,8) = 4,584$$

$$\text{PER}_n = 12 \times 0,8 - 0,08 \times 4,584 = 9,23$$

Pour atteindre son objectif il faudra que le PER au moment de la vente soit de 9,23.

► **Le taux de distribution** : il s'agit de la part des bénéfices distribués aux actionnaires sous forme de dividendes :

$$d = \frac{D_k}{B_{k-1}}$$

avec  $D_k$  le dividende versé la  $k^{\text{ième}}$  année et  $B_{k-1}$  le bénéfice de la  $(k-1)^{\text{ième}}$  année.

► **Le délai de recouvrement** : il permet de calculer la durée minimale de conservation de l'action pour récupérer son investis-

sement. Il peut être rapproché du délai de récupération du capital investi calculé lors des choix d'investissement.

$$n = \frac{\ln\left(1 - \frac{\text{PER}_0}{d}(i - g)\right)}{\ln\left(\frac{1 + g}{1 + i}\right)}$$

avec  $d$  le dividende,  $i$  le taux de rendement exigé par les actionnaires,  $g$  le taux de croissance des dividendes et  $\text{PER}_0$  le PER actuel.

**Exemple :** Le PER actuel d'une action est de 25. Les dividendes versés en  $N$  sont de 2 € par action. Ils vont évoluer en progression géométrique de 4 % les années suivantes. Le taux de rendement exigé par les actionnaires est de 8 %. Quel est le délai de recouvrement de cet investissement ?

Le délai de recouvrement de cet investissement est de 18,36 ans :

$$n = \frac{\ln\left(1 - \frac{25}{2}(0,08 - 0,04)\right)}{\ln\left(\frac{1,04}{1,08}\right)} = 18,36 \text{ ans}$$

## ■ Rentabilité et risque

### ■ La rentabilité (R)

La rentabilité d'une action est calculée à partir des revenus procurés grâce à l'investissement. La rentabilité est :

$$R = \frac{C_1 - C_0 + D}{C_0}$$

avec  $C$  le cours de l'action et  $D$  le dividende.

La rentabilité moyenne arithmétique est  $R_j = \frac{\sum_{i=1}^n R_{ij}}{n}$

La moyenne géométrique est :  $R = [\prod_{i=1}^n (1 + R_i)]^{1/n} - 1$

L'utilisation de la moyenne géométrique est plus pertinente pour l'étude des données passées, en effet elle tient compte des intérêts composés.

**Exemple :** Les rentabilités du premier trimestre sont les suivantes :

Date	Rentabilités
Janvier	8 %
Février	- 2,50 %
Mars	- 0,50 %
Avril	7,60 %

Calculer les moyennes arithmétique et géométrique.

$$\text{Moyenne arithmétique : } R = \frac{(8 - 2,50 - 0,5 + 7,6)}{4} = 3,15 \%$$

$$\text{Moyenne géométrique : } R = (1,08 \times 0,975 \times 0,995 \times 1,076)^{1/4} - 1 = 3,04 \%$$

Il est possible de calculer la rentabilité en tenant compte des flux futurs. Dans ce cas, il convient de tenir compte du caractère aléatoire des flux :

Rentabilité attendue  $E(R) = \sum R_x p(R_x)$  avec  $p(R_x)$  la probabilité attachée à  $R_x$ .

**Exemple :** À la date 0 le cours de l'action est de 80 €. Les prévisions sont les suivantes pour l'année 1 :

Cours	Dividendes	Probabilité
64,80	0	0,3
83	1,56	0,4
95	4,76	0,3

$R_x$ (%)	$p(R_x)$	$R_x \cdot p(R_x)$
-19 (1)	0,3	-5,7
5,7 (2)	0,4	2,28
24,7 (3)	0,3	7,41
		$E(R_x) = 3,99$

$$(1) \frac{64,80 - 80}{80}$$

$$(2) \frac{83 - 80 + 1,56}{80}$$

$$(3) \frac{95 - 80 + 4,76}{80}$$

## Le risque

Il est lié à la conjoncture économique, au secteur d'activité et à la gestion de l'entreprise.

► Une action peut fluctuer : il est possible de mesurer le risque, la volatilité du titre à l'aide de l'écart-type ( $\sigma$ ). Plus l'écart-type est élevé et plus le risque est important. Cet élément permet de déterminer les intervalles de confiance.

$$\text{Var}(\mathbf{R}_x) = \sum R_x^2 p(R_x) - E(R_x)^2 \text{ et } \sigma = \sqrt{\text{Var} R_x}$$

**Intervalle à 66 % :**  $[E(R_x) - \sigma(R_x) ; E(R_x) + \sigma(R_x)]$

**Intervalle à 95 % :**  $[E(R_x) - 2\sigma(R_x) ; E(R_x) + 2\sigma(R_x)]$

**Exemple** : suite de l'exemple précédent

$R_x$	$p(R_x)$	$R_x^2$	$R_x^2 \cdot p(R_x)$
-19	0,3	361	108,3
5,7	0,4	32,49	12,996
24,7	0,3	610,09	183,027
			304,323

$$\text{Var}(R_x) = 304,323 - 3,99^2 = 288,40$$

$$\sigma = \sqrt{288,40} = 16,98 \%$$

La rentabilité moyenne est de 4 % et la volatilité de 16,98 %. Le titre a 95 % de chance que sa rentabilité se situe entre : [- 29,96 % ; 37,96 %].

► Le risque est constitué d'un risque de marché (**systematique**) et d'un **risque spécifique**. Le risque systematique concerne tous les titres, il ne peut pas être éliminé. Le risque spécifique est propre à chaque société, il peut être éliminé par la diversification.

Pour réduire le risque, l'investisseur peut diversifier son portefeuille. Il est possible de calculer le **coefficient de volatilité** ( $\beta$ ) propre à chaque titre. Il existe une relation entre la rentabilité du titre et la rentabilité du marché. Celle-ci est mise en évidence par la covariance. Le coefficient  $\beta$  permet de connaître la variation de l'action en fonction de la variation du marché. Il peut être rapproché de l'élasticité ou de la sensibilité.

$$\beta = \frac{\text{Cov}(R_x, R_m)}{\text{Var} R_m}$$

avec  $R_x$  la rentabilité du titre et  $R_m$  la rentabilité du marché :

$$\text{Cov}(R_x, R_m) = \frac{1}{n} (\sum [R_x - E(R_x)] [R_m - E(R_m)])$$

$$\text{Var}(R_m) = \frac{1}{n} \sum [R_m - E(R_m)]^2$$

Si  $\beta > 1$  alors le titre exagère à la hausse ou à la baisse les variations du marché, si  $\beta < 1$  le titre atténue les variations du marché.

**Exemple** : L'action  $i$  prend les valeurs suivantes :

	Cours $i$ ( $R_i$ )	$R_m$
Fin trimestre 1	59,50	32
Fin trimestre 2	65,20	34,20
Fin trimestre 3	66,30	36
Fin trimestre 4	74,10	38

	$R_i$	$R_m$	$R_m - E(R_m) = a$	$[R_m - E(R_m)]^2$	$R_i - E(R_i) = b$	$(a)(b)$
<b>Trim 1</b>	59,50	32,00	-3,05	9,31	-6,78	20,68
<b>Trim 2</b>	65,20	34,20	-0,85	0,72	-1,08	0,91
<b>Trim 3</b>	66,30	36,00	0,95	0,90	0,02	0,02
<b>Trim 4</b>	74,10	38,00	2,95	8,70	7,82	23,08
	66,28	35,05		19,63		44,69

$$E(R_i) = 66,28 \text{ et } E(R_m) = 35,05$$

$$\beta = \frac{\frac{1}{4} \times 44,69}{\frac{1}{4} \times 19,63} = 2,28 \text{ d'où } \beta > 1,$$

le titre fluctue plus que le marché... il est donc plus risqué.

► En gérant son portefeuille, une entreprise peut réduire le risque. Il lui suffit de **diversifier** ses titres en tenant compte des risques individuels de chacun.

Dans le cas d'un portefeuille constitué de deux titres, la rentabilité du portefeuille sera :

$R_p = a R_a + b R_b$  avec a et b les proportions dans le portefeuille et  $R_a$  et  $R_b$  les rentabilités de chaque titre.

L'écart-type sera :  $\sigma_p = \sqrt{\text{Var}(p)}$  avec  $\text{Var}(p) = a^2 \sigma_a^2 + b^2 \sigma_b^2 + 2 ab \text{cov}(AB)$

Si les titres sont indépendants alors la covariance est nulle.

**Exemple :**

	<b>Titre A</b>	<b>Titre B</b>
<b>E(R)</b>	0,06	0,09
<b><math>\sigma(R)</math></b>	0,14	0,18
<b>Proportion</b>	45 %	55 %

$$\text{Cov}(A,B) = -0,02$$

Calculer la rentabilité et le risque du portefeuille dans l'hypothèse où les titres sont indépendants puis dans le cas où ils sont dépendants.

Titres indépendants :  $E(R) = 0,06 \times 0,45 + 0,09 \times 0,55 = 7,95 \%$

$$\text{Var}(R_p) = 0,45^2 \times 0,14^2 + 0,55^2 \times 0,18^2 = 0,01377$$

$$\sigma(R_p) = 11,73 \%$$

Si les titres sont dépendants : l'espérance ne change pas.

$$\text{Var}(R_p) = 0,45^2 \times 0,14^2 + 0,55^2 \times 0,18^2 + 2 \times 0,45 \times 0,55 \times (-0,02) = 0,00387$$

$$\text{D'où } \sigma(R_p) = 6,22 \%$$

## ■ Généralités

Une rente est une suite de versements effectués à échéances fixes dont bénéficie le crédirentier. Si la durée de la rente est finie, il s'agit d'une **rente temporaire** ; si la durée est infinie d'une **rente perpétuelle**. Si la durée n'est pas connue, il s'agit d'une **rente aléatoire** (rente viagère par exemple).

Évaluer une rente revient à calculer à une date donnée la valeur du remboursement. Ce raisonnement se rapproche du remboursement d'un emprunt par annuité constante.

## ■ Rentes temporaires

### ■ Les rentes immédiates à termes constants

La date d'évaluation précède d'une période le premier des versements constants. La rente est négociée à l'origine.

$$R_0 = a \times \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

avec  $a$  le versement constant et  $R_0$  la valeur de la rente à la date 0.

*Exemple* : Le titulaire d'une rente de 20 termes annuels de 5 000 €, le premier terme échéant le 1<sup>er</sup> juillet  $N+3$ .

Quelle est la valeur de cette rente le 1<sup>er</sup> juillet  $N+2$  pour un taux d'intérêt de 3,5 % ?

$$R_0 = 5\,000 \times \frac{1 - (1,035)^{-20}}{0,035} = 71\,062 \text{ €}$$

### ■ Les rentes différées à termes constants

La date d'évaluation précède de  $p$  périodes la date d'origine. La rente est négociée avant son origine.

$$R_p = R_0 (1 + i)^{-p}$$

*Exemple* : Le titulaire de la rente précédente décide de la négocier le 1<sup>er</sup> juillet  $N$ . Quelle somme peut-il espérer recevoir ?

Il existe un différé de 2 ans entre  $N$  et  $N+2$ .

$$R_p = 71\,062 \times (1,035)^{-2} = 66\,337 \text{ €}$$

### ■ Les rentes anticipées à termes constants

La date d'évaluation est postérieure à la date d'origine de  $t$  fractions de périodes. La rente est négociée après son origine mais avant son premier versement.

$$R_t = R_0 (1 + i)^t$$

**Exemple** : Une personne souhaite obtenir une rente annuelle de 5 000 € pendant 20 ans à compter du 1<sup>er</sup> janvier  $N+1$ .

Quel capital devra-t-elle verser le 1<sup>er</sup> juillet  $N$  compte tenu d'un taux d'intérêt de 3,5 % ?

$$\text{Au 1<sup>er</sup> janvier } N, R_0 = 5\,000 \times \frac{1 - 1,035^{-20}}{0,035} = 71\,062 \text{ €}$$

Mais dans le cas présent l'anticipation n'est pas d'un an mais de 6 mois.

Pour respecter ses choix, la personne devra verser :

$$R_t = 71\,062 \times 1,035^{1/2} = 72\,295 \text{ €}$$

## ■ Rentes perpétuelles

### ■ Les rentes immédiates à termes constants

Dans ce cas, la date d'évaluation et la date d'origine sont confondues.

$$R_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \dots$$

Si  $n$  tend vers l'infini alors :  $R_0 = \frac{a}{i}$

**Exemple** : Un investisseur décide d'acheter des titres de valeur nominale de 1 000 € lui procurant une rente perpétuelle de 3 % le 15 juin de chaque année. Le cours des marchés étant de 3,5 %, quelle est la valeur d'achat ?

$n$  est infini, la valeur des titres est de :

$$R_0 = \frac{1\,000 \times 0,03}{0,035} = 857,14 \text{ €}$$

### ■ Les rentes différées et anticipées à termes constants

Elles se calculent de la même manière que les rentes temporaires.

## ■ Rentes fractionnées

Il est possible que la rente ne soit pas réglée annuellement mais sous forme de  $p$  versements constants durant cette période (par exemple trimestriellement, mensuellement).

Il faut tenir compte de cette périodicité pour évaluer la rente.

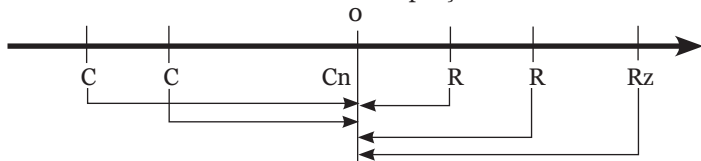
Soit  $RM_0$  la rente année 0 en tenant compte du versement mensuel :

$$RM_0 = R_0 \times \frac{\text{taux proportionnel mensuel}}{\text{taux équivalent mensuel}}$$

## Retraite par capitalisation

Il s'agit d'un placement. Un ou des versements (cotisations) sont effectués sur un compte produisant des intérêts pendant plusieurs années. Ensuite le bénéficiaire perçoit régulièrement un montant (retraite) prélevé sur ce dit compte.

Soit  $C$  les cotisations et  $R$  les retraites perçues.



L'année du dernier versement (cotisation) :

$$C \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} = R \times \frac{1 - (1+i)^z}{i}$$

avec  $n$  le nombre d'années de cotisations et  $z$  le nombre d'années de retraite. Or si la durée des cotisations est quantifiable, ce n'est pas le cas de la durée de la retraite. C'est pourquoi :

$$C \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{R}{i}$$

**Exemple :** Une personne de 32 ans souhaite se constituer une retraite personnelle. À partir de ses 62 ans et pendant 25 ans, elle désire disposer de 2 000 € par mois. Le placement constant s'effectue le 1<sup>er</sup> janvier de chaque année et le taux d'intérêt garanti est de 3,5 %. Combien doit-elle verser chaque année ?

Montant de la rente à la date 0 :

$$R_0 = 2\,000 \times 12 \times \frac{1 - 1,035^{-25}}{0,035} = 395\,556 \text{ €}$$

Il faut tenir compte du fait que cette rente sera perçue mensuellement :

$$\text{Taux proportionnel} = \frac{0,035}{12} = 0,29166 \%$$

$$\text{Taux équivalent} : i_m = \sqrt[12]{1,035} - 1 = 0,287 \%$$

$$RM_0 = 395\,556 \times \frac{0,29166}{0,287} = 401\,862 \text{ €}$$

Cette personne doit pendant 30 ans (de 32 à 62 ans) se constituer un capital de 401 862 €. Pour cela elle devra verser :

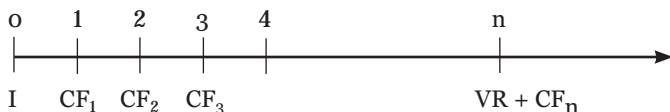
$$C \times \frac{1,035^{30} - 1}{0,035} = 401\,862 \text{ soit } C = 7\,784,60 \text{ € par an.}$$

## Différents éléments d'analyse

Pour savoir si un investissement est rentable ou non, il est possible d'utiliser différents indicateurs.

### La Valeur Actuelle Nette (VAN)

► Le fait pour l'entreprise d'investir lui permet chaque année de générer des **cash-flows** (des flux de trésorerie prévisionnels). À la fin du projet, l'entreprise peut revendre l'investissement (**valeur résiduelle**). Le projet est rentable lorsque la somme des cash-flows est supérieure au montant investi. Tous ces flux sont réalisés à des dates différentes, c'est pourquoi pour les comparer il convient de les actualiser. La **VAN** mesure l'avantage absolu susceptible d'être retiré d'un projet d'investissement. Le **projet est intéressant si sa VAN est positive**. En cas de choix entre différents projets, le plus intéressant est celui qui a **la VAN la plus élevée**.



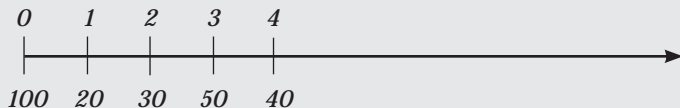
$$VAN = -I + \sum_{j=1}^n CF_j (1+i)^{-j} + VR (1+i)^{-n}$$

avec I l'investissement de départ, VR la valeur résiduelle, CF les cash-flows de chaque année et i le taux d'actualisation.

Si les cash-flows sont identiques, alors :

$$VAN = -I + CF \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} + VR (1+i)^{-n}$$

### Exemple :



Coût du capital 8 %

$$VAN = -100 + 20(1,08)^{-1} + 30(1,08)^{-2} + 50(1,08)^{-3} + 40(1,08)^{-4} \\ = 13,33 \text{ €}$$

Le projet est acceptable.

► Le taux d'actualisation est important car il a une incidence directe sur les différents indicateurs. Il correspond au coût du capital c'est-à-dire au taux moyen pondéré des différents financements de l'entreprise. Il exprime le niveau de risque pour l'entreprise.

$$\text{Coût du capital} = \frac{K_c \times \text{capitaux propres} + t \times \text{dettes financières}}{\text{Capitaux propres} + \text{dettes financières}}$$

avec  $K_c$  le coût des capitaux propres et t le taux moyen de la dette.

En cas d'inflation  $p$ , le taux d'actualisation utilisé sera le taux déflaté de  $(1 + i) \times (1 + p) - 1$ .

**Exemple** : Pour financer ses investissements, une entreprise dispose de 1 400 K€ de capitaux propres au coût de 7 % et 1 000 K€ de dettes financières à 5 %.

$$\text{Coût du capital} = \frac{0,07 \times 1\,400 + 0,05 \times 1\,000}{1\,400 + 1\,000} = 6,17\%$$

► Si l'entreprise doit choisir entre deux projets de **montants différents** alors le critère de la VAN n'est pas pertinent. Il faut privilégier **l'indice de profitabilité**.

### Le Taux Interne de Rentabilité (TIR)

Il s'agit du taux pour lequel il y a équivalence entre le capital investi et la somme des cash-flows (VAN nulle). C'est le taux auquel on peut accepter d'emprunter pour financer le projet. Pour qu'un projet soit acceptable, il faut que le TIR ( $x$ ) soit supérieur au taux de rentabilité minimum exigé par l'entreprise (taux d'actualisation).

$$\text{TIR } (x) \text{ est tel que } I = \sum_{j=1}^n \text{CF}_j (1+x)^{-j}$$

**Exemple** : Avec les données de l'exemple de la VAN :

$$-100 = 20(1+x)^{-1} + 30(1+x)^{-2} + 50(1+x)^{-3} + 40(1+x)^{-4}$$

D'où  $x$  (TIR) = 13,16 %

Le projet est acceptable car il rapporte 13,16 % alors que le minimum requis est de 8 %.

### Le délai de récupération du capital investi

Le délai de récupération est le temps au bout duquel le **capital investi est récupéré**. Le projet est rentable lorsque le capital est récupéré avant la fin du projet. Il est d'autant plus rentable que le délai est court. Les cash-flows sont actualisés chaque année, puis ajoutés les uns aux autres jusqu'à ce que le capital  $I$  soit recouvré.

**Exemple** : suite de l'exemple précédent

Années	1	2	3	4
<b>CF</b>	20	30	50	40
<b>CF actualisés</b>	$20(1,08)^{-1}$ 18,52	$30(1,08)^{-2}$ 25,72	$50(1,08)^{-3}$ 39,69	$40(1,08)^{-4}$ 29,40
<b>Somme CF</b>	18,52	44,24	83,93	113,33

À la fin de la 4<sup>e</sup> année, on récupère 113,33 €. Le capital est de 100, le calcul par interpolation linéaire donne :

$$d = 3 + \frac{100 - 83,93}{29,40} \times 12 = 3 \text{ ans } 6 \text{ mois et } 17 \text{ jours}$$

L'entreprise récupère son investissement de 100 au bout de 3 ans et demi. Le risque encouru est grand.

## Les projets d'investissements

## ■ L'Indice de Profitabilité (IP)

Ce critère est utilisé lorsque l'entreprise doit faire un choix entre des investissements dont les montants investis ne sont pas égaux. Il mesure **l'avantage acquis pour un euro investi**. **Le projet est acceptable lorsque l'indice est supérieur à 1.**

$$IP = \frac{VAN + I}{I}$$

*Exemple : dans le cas précédent*

$$IP = \frac{13,33 + 100}{100} = 1,1333$$

Pour 1 € décaissé le projet rapporte 1,1333 €. Le projet est acceptable.

## ■ Sélection des projets

▶ Lorsque **les projets ont la même durée**, les critères vus précédemment s'appliquent sans problème. Le projet qui rapporte le plus et le plus vite sera privilégié.

▶ Lorsque **les projets ont des durées de vie différentes**, il n'est pas pertinent de comparer les VAN car un projet court est moins risqué qu'un projet long. Dans ce cas, l'entreprise a la possibilité de :

- **renouveler à l'identique** les projets jusqu'à ce que les durées concordent, cette méthode n'est applicable que si la durée du projet le plus long est un multiple de la durée la plus courte. Par exemple le projet A a une durée de 8 ans et le projet B une durée de 4 ans. Le projet B sera renouvelé à l'identique (4 + 4 = 8). Si A dure 7 ans et B 2 ans alors A sera renouvelé 2 fois et B 7 fois (2×7 = 7×2 = 14) ;
- **s'aligner sur la durée la plus courte** et évaluer la valeur résiduelle du projet le plus long ;
- **calculer l'annuité constante équivalente** qui permet d'amortir un emprunt d'un montant égal à la VAN, dont la durée équivaut à la durée de l'emprunt avec un taux d'intérêt équivalent au taux d'actualisation. Cette solution est applicable en toute circonstance.

*Exemple : Une entreprise a le choix entre deux projets :*

	Projet A	Projet B
Montant	150 000 €	150 000 €
Cash-flows d'exploitation	40 000	70 000
Durée	6 ans	3 ans

Le coût du capital est de 8 %.

Quel choix préconisez-vous à l'entreprise ?

$$VAN \text{ à } 8 \% \text{ du projet A} = -150\,000 + 40\,000 \frac{1 - 1,08^{-6}}{0,08} = 34\,915 \text{ €}$$

$$VAN \text{ à } 8 \% \text{ du projet B} = 30\,397 \text{ €}$$

Le projet A semble préférable au projet B mais il n'est pas tenu compte du fait qu'après les 3 ans les capitaux investis dans le projet B seront

disponibles et pourront être investis dans un nouveau projet C qui améliorera la rentabilité du projet B.

**Renouvellement à l'identique du projet le plus court** : le projet B est réinvesti au bout des trois ans dans un projet C ayant les mêmes caractéristiques que B.

$$\begin{aligned} \text{VAN à 8 \% de B et C} &= -150\,000 + 70\,000 \frac{1 - 1,08^{-2}}{0,08} + [70\,000 - \\ &150\,000 + 70\,000 \frac{1 - 1,08^{-3}}{0,08}] (1,08)^{-3} \\ &= 30\,397 + 30\,397 (1,08)^{-3} = 54\,527 \text{ €} \end{aligned}$$

Dans ce cas le projet B est préférable à A.

**Alignement sur la durée la plus courte** : on supposera que la valeur résiduelle du projet A est de 60 000 € à l'époque 3.

$$\text{VAN du projet A à 8 \%} = -150\,000 + 40\,000 \frac{1 - 1,08^{-2}}{0,08} + 100\,000 \times (1,08)^{-3} = 713,81 \text{ €}$$

Dans ce cas le projet B est préférable.

**Annuité constante équivalente** :  $a = \text{VAN} \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$

$$\text{Annuité du projet A} = 34\,915 \frac{0,08}{1 - 1,08^{-6}} = 7\,552 \text{ €}$$

$$\text{Annuité du projet B} = 30\,397 \frac{0,08}{1 - 1,08^{-3}} = 11\,795 \text{ €}$$

Le projet B est préférable au projet A.

► Lorsqu'il y a **discordance entre les critères**, il convient de calculer un critère supplémentaire : la **VAN Globale**, le **TIR Global** ou l'**IP Global**. Il n'est pas utile de calculer les trois. En effet le critère global résout le problème de discordance.

Pour calculer ces critères, il est fait l'hypothèse que les flux sont réinvestis. Il convient dans un premier temps de calculer la **valeur acquise (A)** par les cash-flows réinvestis. Ensuite, il suffit de l'actualiser. La valeur acquise  $A = CF_n + CF_{n-1}(1 + i) + \dots + CF_1(1 + i)^{n-1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{VANG} &= A (1 + i)^{-n} - I \\ \text{TIRG (x) est tel que } I &= A (1 + x)^{-n} \\ \mathbf{IPG} &= \frac{A (1 + i)^{-n}}{I} = \frac{\mathbf{VANG} + I}{I} \end{aligned}$$

**Suite de l'exemple** : Le taux de réinvestissement est de 9 %

$$\text{Valeur acquise} = 40 + 50 (1,09) + 30 (1,09)^2 + 20 (1,09)^3 = 156,04 \text{ €}$$

$$\text{VANG} = 156,04 (1,08)^{-4} - 100 = 14,70 \text{ €}$$

$$\text{TIRG } 100 = 156,04 (1 + x)^{-4} \text{ d'où } x = 11,77 \%$$

$$\text{IPG} = \frac{156,04 (1,08)^{-4}}{100} = 1,147$$

Ces trois critères montrent que le projet est rentable.

## ■ Projet d'investissement et incertitude

### ■ Projet d'investissement en avenir aléatoire

Dans ce cas, il est possible de déterminer toutes les valeurs que les cash-flows peuvent prendre sur une période et de leur affecter une probabilité. La décision à prendre se fera en fonction de l'espérance mathématique de la VAN. Il est possible d'évaluer le risque en calculant la dispersion pour chaque décision.

$$E(\mathbf{CF}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{CF}_j p_j$$

$$\mathbf{Var}(\mathbf{CF}) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{CF}_j)^2 p_j - E(\mathbf{CF})^2$$

$$E(\mathbf{VAN}) = \sum_{j=1}^n E(\mathbf{CF}_j) (1+i)^{-j} - I$$

$$\mathbf{Var}(\mathbf{VAN}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{Var}(\mathbf{CF}_j) (1+i)^{-2j}$$

$$\sigma(\mathbf{VAN}) = \sqrt{\mathbf{Var}(\mathbf{VAN})}$$

#### Exemple :

Les cash-flows pour un projet de 100 sur 2 ans ont été évalués ainsi :

Année 1	Année 2
CF 60 probabilité de 0,3	CF 50 probabilité de 0,4
CF 70 probabilité de 0,4	CF 60 probabilité de 0,3
CF 80 probabilité de 0,3	CF 70 probabilité de 0,3

Taux d'actualisation 8 %

$$E(\mathbf{VAN}) = E(\mathbf{CF}_1) 1,08^{-1} + E(\mathbf{CF}_2) 1,08^{-2} - 100$$

$$E(\mathbf{CF}_1) = 60 \times 0,3 + 70 \times 0,4 + 80 \times 0,3 = 70 \text{ et } E(\mathbf{CF}_2) = 59$$

$$E(\mathbf{VAN}) = 15,40 \text{ €}$$

$$\mathbf{Var}(\mathbf{CF}_1) = 60^2 \times 0,3 + 70^2 \times 0,4 + 80^2 \times 0,3 - 70^2 = 60$$

$$\mathbf{Var}(\mathbf{CF}_2) = 69$$

$$\mathbf{Var}(\mathbf{VAN}) = 60(1,08)^{-2} + 69(1,08)^{-4} = 102,15$$

$$\sigma = \sqrt{102,15} = 10,10$$

L'espérance de la VAN est de 15,40, celle-ci peut varier de +/- 10,10 autour de la moyenne.

### ■ Projet d'investissement en avenir incertain

Dans ce cas, il est impossible de déterminer une probabilité pour chaque événement. Il n'existe pas une réponse unique, celle-ci dépend du comportement du décideur et de son aversion pour le risque. Il existe plusieurs critères :

► **le critère maximax** (ou dit optimiste) : il consiste à privilégier le gain et donc à choisir la VAN la plus élevée ;

► **le critère maximin** (ou de Wald) : critère de prudence, il privilégie la sécurité. La VAN minimale de chaque projet est prise et parmi elles c'est la plus élevée qui est retenue ;

► **le critère de Laplace** : il s'agit de retenir la meilleure espérance mathématique des VAN en partant de l'hypothèse que les cash-flows sont équiprobables ;

► **le critère de Savage** : le décideur est relativement prudent, il faut établir **la matrice des regrets**. Le regret est la différence entre le résultat le plus fort retenu et le résultat prévu. La bonne décision est celle qui minimise le regret maximal ;

► **le critère de Hurwicz** : il s'agit d'un critère moyen qui combine le maximax et le maximin. Il consiste à utiliser un coefficient d'optimisme ( $\alpha$ ). Pour chaque décision le plus fort résultat est pondéré de  $\alpha$ , et le plus faible de  $(1-\alpha)$ . La bonne décision est celle qui maximise le résultat moyen.

*Exemple* : Trois investissements A, B et C sont prévus. Les VAN prévisionnelles en tenant compte des différentes hypothèses sont les suivantes :

	Hypothèse 1	Hypothèse 2	Hypothèse 3
Investissement A	60	0	- 90
Investissement B	120	- 60	0
Investissement C	- 15	90	30

Le coefficient de pondération sera de 0,4.

**Critère maximax :**

Pour A la VAN la plus élevée est de 60, pour B : 120 et C : 90. Le choix se portera sur l'investissement B.

**Critère maximin (ou de Wald) :**

VAN la plus faible pour A : - 90, pour B : - 60 et pour C : - 15. Le choix se portera sur l'investissement C.

**Critère de Laplace :**

Pour A  $E(VAN) = 60/3 + 0/3 + (- 90/3) = -10$

Pour B  $E(VAN) = 20$  et pour C  $E(VAN) = 35$

Le choix se portera sur l'investissement C.

**Critère de Savage** : pour l'hypothèse 1 le meilleur investissement est B, pour l'hypothèse 2 il s'agit de C et pour l'hypothèse 3 ce sera C.

Le choix se portera sur l'investissement A.

**Critère de Hurwicz :**

Pour A :  $60 \times 0,40 + (- 90) \times 0,60 = - 30$

Pour B :  $120 \times 0,40 + (- 60) \times 0,60 = 12$

Pour C :  $90 \times 0,40 + (- 15) \times 0,60 = 27$

Le choix se portera sur C.



Cet ouvrage a été achevé d'imprimer  
dans les ateliers de Leitzaran (Espagne)

Numéro d'impression : 205 - Dépôt légal : Août 2014



en poche

Christelle Baratay

Édition  
2014/2015

# Mathématiques financières

Pour toujours  
avoir à portée de mains les  
**points clés qu'il faut  
connaître et appliquer**

Toutes les formules de mathématiques financières expliquées et illustrées de nombreux exemples :

- intérêts simples et composés,
- escompte,
- emprunts indivis et obligataires,
- valeur des actions,
- rentes,
- projets d'investissement.

Tout pour comprendre  
les calculs financiers  
utiles en finance  
et en gestion  
de l'entreprise



9 782297 040686

Prix : 4,80 €

ISBN 978-2-297-04068-6

[www.lextenso-editions.fr](http://www.lextenso-editions.fr)

 *Gualino*

lextenso éditions

Réussir  
mon cursus

