CHAPITRE 1 MATRICES ET SYSTEMES LINEAIRES

I. RESUME DE COURS

I. Matrices

I.1) Définition et vocabulaire

1) Une matrice de dimension n×p est un tableau rectangulaire de nombres (réels ou complexes) comportant n lignes et p colonnes.

Ces nombres sont appelés coefficients de la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \textbf{ où } A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{i\in\{1,2,\dots,n\} \\ j\in\{1,2,\dots,p\}}} .$$

Le coefficient $a_{i,j}$ est à l'intersection entre la ligne i et la colonne j.

2) Une matrice ligne est une matrice comportant une seule ligne.
$\mathbf{A = (a_1, a_2, \dots, a_p)}$.

3) Une matrice colonne est une matrice comportant une seule colonne. $\mathbf{B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}}$

4) Une matrice carrée est une matrice qui a le même nombre de ligne et le même nombre de colonne. On notera dans ce cas *n* le nombre de lignes et de colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

5) Les éléments de la diagonale (diagonale principale) dans une matrice carrée sont les éléments du type $a_{i,i}$ **.**

6) Une matrice diagonale est une matrice carrée dont les coefficients en dehors de la diagonale principale sont nuls. Les coefficients de la diagonale peuvent être ou ne pas être nuls. C'est-à-dire si $i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$ **.**

7) Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée à coefficients dont les valeurs sous la diagonale principale sont nulles :

***A* est triangulaire supérieure si et seulement si :** $i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$

8) Une matrice triangulaire inférieure est une matrice carrée à coefficients dont les valeurs au-dessus de la diagonale principale sont nulles :

***A* est triangulaire inférieure si et seulement si :** $i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$

9) La matrice identité ou matrice unité est une matrice carrée avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

10) La matrice transposée de A est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A. On la note A^T **.**

Si A est de dimension n × p, alors A^T **est de dimension p × n.**

I.2) Opérations sur les matrices

1) Addition de matrices

Définition 1 :
On appelle somme de deux matrices A et B de même dimension la matrice obtenue en additionnant les coefficients situés aux mêmes emplacements.
Cette matrice est notée A + B.

Propriétés
Soient A,B et C des matrices de même dimension
1) Associativité : $(A + B)+C = A + (B + C) = A + B + C$
2) Commutativité : $A + B = B + A$.

2) Multiplication d'une matrice par un réel

Définition :

On appelle produit d'une matrice A par un réel k la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients de A par k.

Cette matrice est notée k × A ou kA.

Remarques :

La matrice (−1) × A est notée −A et est appelée matrice opposée de A.

On définit la soustraction de deux matrices par : A − B = A + (−B).

3) Multiplication de vecteur-ligne par vecteur-colonne

Définition :

A étant une matrice ligne de dimension 1×p et B une matrice colonne de dimension p×1, on appelle produit A × B le nombre obtenu en multipliant le premier élément de A par le premier élément de B, le deuxième élément de A par le deuxième élément de B, etc. puis en ajoutant tous ces produits.

$$A=(a_1,a_2,...,a_p),\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \Rightarrow A\times B=a_1\times b_1+a_2\times b_2+...+a_p\times b_p$$

Remarque :

Il faut que A ait autant de colonnes que B de lignes pour que le produit soit possible.

4) Multiplication d'une matrice n × p par une matrice colonne

Définition :

A étant une matrice de dimension n × p et B une matrice colonne de dimension

p × 1, on appelle produit A × B la une matrice colonne de dimension n × 1 obtenu en multipliant chaque ligne de A par la matrice colonne B.

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \ ; \ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \\ \vdots \\ \mathbf{b_p} \end{pmatrix}$$

$$A\times B=\begin{pmatrix} a_{1,1}\times b_1+a_{1,2}\times b_2+\ldots+a_{1,p}\times b_p \\ a_{2,1}\times b_1+a_{2,2}\times b_2+\ldots+a_{2,p}\times b_p \\ \vdots \\ a_{n,1}\times b_1+a_{n,2}\times b_2+\ldots+a_{n,p}\times b_p \end{pmatrix}$$

Remarque :

Il faut que A ait autant de colonnes que B de lignes pour que le produit soit possible.

<u>5) Multiplication d'une matrice ligne 1 × n par une matrice n × p</u>

Définition :

A étant une matrice ligne de dimension 1 × n et B une matrice de dimension n × p, On appelle produit A × B la une matrice ligne de dimension 1 × n obtenue en multipliant la matrice A par chaque colonne de la matrice B.

$$\mathbf{A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)} \ ; B=\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix}$$

$$A\times B=\left(a_1\times b_{1,1}+a_2\times b_{2,1}+\ldots+a_n\times b_{n,1}, a_1\times b_{1,2}+a_2\times b_{2,2}+\ldots+a_n\times b_{n,2},\ldots, a_1\times b_{1,p}+a_2\times b_{2,p}+\ldots+a_n\times b_{n,p}\right)$$

6) Multiplication de deux matrices quelconques

Définition :

A étant une matrice de dimension n×p et B une matrice de dimension p×m. On appelle produit A × B la matrice de dimension n × m obtenu en multipliant chaque ligne de A par chaque colonne de B.

Plus précisément, le coefficient de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne du produit A × B est obtenu en multipliant la $i^{ème}$ ligne de A par la $j^{ème}$ colonne de B.

Remarques :

1) Pour pouvoir faire le produit de deux matrices $A\times B$, il faut absolument que le nombre de colonne de A (celle de gauche) soit identique aux nombres de lignes de B (celle de droite).

2) Le produit A × B a autant de lignes que A et autant de colonnes que B.

3) La possibilité de faire le produit $A\times B$ n'implique pas celle de $B\times A$.

4) Pour toute matrice A carré de taille n : $A\times I_n = I_n\times A = A$. C'est-à-dire que la matrice unité a le même rôle que le nombre 1 dans la multiplication.

7) Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Définitions :

Soit A une matrice carrée d'ordre 2.

Dire que B est la matrice inverse de A signifie que : AB = BA = I_2.

où I_2 désigne la matrice unité d'ordre 2.

Dans ce cas, on admettra que B est unique et on notera B = A^{-1}.

Le nombre $\Delta = ad - bc$ **est appelé déterminant de la matrice carrée** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On note $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **est inversible si et seulement si** $ad - bc \neq 0$.
Dans ce cas, son inverse est la matrice $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Remarque :

Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est différent de zéro.

<u>Application</u>

Résolution de systèmes de 2 équations à 2 inconnues (Cas général)

Le système $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ **peut s'écrire sous la forme** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.
soit $AX = B$**, où** $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **et** $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **et** $B=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.
Si A est inversible, on obtient : $X = A^{-1}B$.

8) Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Soit $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. **Le déterminant de A est noté** $\det(A)=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Il est calculé par la formule $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=aei+dhc+gbf-gec-dbi-ahf$.

Il est obtenu en développant suivant une ligne ou une colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

II. Systèmes d'équations linéaires

1- Définitions et propriétés

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

1. On appelle système linéaire de p équations à n inconnues tout système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \ldots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

Où $a_{i,j}$ **et** b_i **sont des réels donnés ;** $1 \le i \le p$ **et** $1 \le j \le n$ **.**

2. Le coefficient de l'inconnue x_j **dans l'équation numéro i est** $a_{i,j}$ **: Le premier indice indique le numéro de l'équation le deuxième indice indique le numéro de l'inconnue dont il est le coefficient.**

Le système linéaire (S) **est dit homogène si pour tout i ;** $b_i = 0$ **. Un système homogène possède toujours une solution : la solution évidente (ou triviale) :** $(0,0,...,0)$.

3. La matrice A du système (S) **est le tableau à n lignes et m colonnes composé des coefficients des inconnues du système :**

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

4. La matrice complète M du système (S) **est la matrice :**

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} & b_p \end{array}\right)$$

2. Solutions d'un système linéaire

1. Une solution d'un système linéaire (S) **est un n-uplet** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **de nombres réels ou complexes vérifiant simultanément les équations de** (S)**.**

Autrement dit, la suite $(p_1, p_2, ..., p_n)$ **est une solution su système si en remplaçant** x_i **par** p_i **pour tous les indices i, toutes les équations du système sont vérifiées.**

2. Un système linéaire (S) peut ne pas avoir de solution comme il peut en avoir une seule ou une infinité.

3. Deux systèmes linéaires $(S_1)\text{et}(S_2)$ sont dits équivalents si toute solution de (S_1) est solution de (S_2) et réciproquement.

3. Système carré

1. Un système linéaire de p équations à n inconnues est dit carré si n=p.

2. Un système carré est appelé système de Cramer, s'il possède une solution unique. C'est le cas de déterminant non nul. Sinon, le système n'est pas un système de Cramer, il peut n'avoir aucune solution ou bien une infinité de solutions.

3. Dans un système carré, le déterminant du système est calculé à partir du tableau de nombres suivant :

4.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\cdots\cdots a_{1,j}\cdots\cdots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}\cdots\cdots a_{2,j}\cdots\cdots a_{2,n} \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2}\cdots\cdots a_{i,j}\cdots\cdots a_{i,n} \\ \vdots & \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2}\cdots\cdots a_{n,j}\cdots\cdots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Méthode particulière : On peut calculer le déterminant selon la règle de Sarrus

5. Un système carré est dit triangulaire supérieur à diagonale unité si : $a_{i,j} = 0 \text{ pour } i > j \text{ et } a_{i,i} = 1$ avec $1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq n$.

<u>Théorème</u>

Un système triangulaire à diagonale unité admet une solution unique.

4. Résolution d'un système linéaire

4.1. Opérations élémentaires : notation et définitions

On note de haut en bas $L_1, L_2, \ldots, L_p$ **les p équations ou lignes d'un système.**

On définit sur ces lignes les opérations suivantes dites élémentaires :

a) **Permutation de deux lignes :** $L_i \leftrightarrow L_j$

b) **Multiplication d'une ligne par un réel ou un complexe non nul :** $L_i \leftarrow \mu L_i$ $(\mu \neq 0)$

c) **Addition à une ligne d'un multiple d'une autre :**
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j (i \neq j)$

Théorème

Etant donné un système linéaire, on obtient un système équivalent en effectuant une succession d'opérations élémentaires.

Un système triangulaire à diagonale unité admet une solution unique.

4.2. Méthode du pivot de Gauss :

La méthode du Pivot de Gauss consiste à faire une succession d'opérations élémentaires pour résoudre des systèmes d'équations linéaires quelconques.

Elle a pour objectif de "triangulariser" le système, c'est à dire : obtenir un système équivalent (qui possède les mêmes solutions) mais tel que pour chaque ligne, la ligne qui la suit possède au moins une inconnue de moins.

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Dans ce QCM, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

1) Que vaut le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?

- **A.** $ad - cb$
- **B.** $ab - cd$
- **C.** $ac - bd$
- **D.** $cb - ad$

2) Soient A et B des matrices carrées de même ordre. B est l'inverse de A. Laquelle de ces propositions est fausse ?

- **A.** $B = A^{-1}$
- **B.** $B^{-1} = A^{-1}$
- **C.** $BA = I_n$
- **D.** $AB = I_n$

3) Si A est une matrice inversible telle que $AX = B$, alors on a :

- **A.** $X = B \times A^{-1}$
- **B.** $X^{-1} = A^{-1} \times B$
- **C.** $X = A^{-1} \times B$
- **D.** $X^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

4) La multiplication matricielle est associative. Laquelle de ces formules illustre cette propriété ?

- **A.** $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- **B.** $A \times B = B \times A$
- **C.** $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- **D.** $(A \times B) + C = A \times C + B \times C$

5) La multiplication matricielle est distributive par rapport à l'addition. Laquelle de ces formules illustre cette propriété ?

- **A.** $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- **B.** $(A + B) \times C = C \times A + C \times B$
- **C.** $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- **D.** $(A + B) + C = (A + C) + B$

QCM 2

Dans ce QCM, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

1) Soient A et B des matrices carrées de même ordre. I la matrice unité.
Laquelle de ces propositions est fausse ?

A. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

B. $(A+I)^2 = A^2 + 2A + I$

C. $(A+B)^2 = (B+A)^2$

D. $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$

2) Soit A et B deux matrices.

A. Si la somme $A+B$ est définie, alors le produit AB est défini.
B. Si la somme $A+B$ est définie, alors le produit BA est défini.
C. Si le produit AB est défini, alors la somme $A+B$ est définie.
D. Si les produits AB et BA sont définis, alors la somme $A+B$ est définie.

3) Soit A une matrice, ${}^tA$ la transposée de A.

A. Le produit $A \times A$ est toujours défini.
B. La somme $A + {}^tA$ est toujours définie
C. Le produit $A \times {}^tA$ est toujours défini.
D. Si A est carrée alors $A \times {}^tA = {}^tA \times A$.

4) Soit S un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues.

A. Le système S a forcément une infinité de solutions.
B. Si les deux équations ont le même premier membre, alors le système S a une infinité de solutions.
C. L'ensemble des solutions du système S est forcément une droite affine.
D. Si le système S a une solution, alors il en a une infinité.

5) Quelle relation a, b et c doivent-ils satisfaire pour que le système

$$\begin{cases} 2x - 4y + 10z = a \\ 4x - 5y + 8z = b \\ -2x + y + 2z = c \end{cases}$$

ait des solutions ?

A. $a - b - c = 0$
B. $a + b + c = 0$
C. $2a + b - 3c = 0$
D. Toutes les valeurs de a, b et c conviennent.

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

Soit les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **;** $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer les produits suivants : AB et BA

2) Que peut-on conclure ?

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ **.**

1) Calculer $A^3 - A$.

2) En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1} .

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

Déterminer la matrice inverse A^{-1} de A puis en déduire les solutions des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x - 10y = 4 \\ -2x + 8y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 10y = 1.5 \\ -2x + 8y = -0.4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 10y = 15 \\ -2x + 8y = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 10y = 1.25 \\ -2x + 8y = 0.5 \end{cases}$

Exercice 4

Résoudre le système suivant en utilisant la méthode du déterminant

$$(S) = \begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ 2x - y + z = -6 \\ 3x + 5y - 7z = -2 \end{cases}$$

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1° Montrer que $A^2 = A + 2I_3$. **Montrer que** $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3$$

2° On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que $A = M - I_3$ **et que** $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = 3^{k-1} M$

b) En déduire que $A^n = (-1)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k 3^{k-1} (-1)^{n-k} \right) M$ **puis que**

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} M + (-1)^n I_3$$

3° a) Montrer que $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ **et** $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $AP = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **puis que** $A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 10 & -6 \end{pmatrix}$

1) Déterminer la matrice M telle que $A = M - I_3$.

2) Vérifier que M^2 est la matrice nulle. En déduire A^2.

3) Déduire A^{-1}

4) Résoudre le système $\begin{cases} -2x - 2y + z = -7 \\ 3x + 5y - 3z = 14 \\ 5x + 10y - 6z = 26 \end{cases}$

Exercice 2

On considère les matrices

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $P \times Q$ et $Q \times P$ puis en déduire que les matrices P et Q sont inverses l'une de l'autre.

2) Vérifier que $Q \times A \times P = B$ et montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a

$B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix}$.

3) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $A^n = P \times B^n \times Q$ et en déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 3

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} -27 & 12 & -6 & -3 \\ -25 & 0 & -50 & -75 \\ -1 & 6 & 22 & -39 \\ 20 & 30 & 10 & 30 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le produit MB .

2) Sachant que $AM = \lambda I_4$, c'est-à-dire que $AM = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$; calculer la valeur du nombre réel λ.

3) En déduire la matrice inverse de A.

4) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -5x + y + 2t = 3 \\ 2x + y + z + 4t = 15 \\ x - 2y + 3z - t = -9 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

Exercice 4

On considère les matrices : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer $M^2 = M \times M$. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$

2. a) Vérifier que : $M^3 = M^2 + 8M + 6I$

b) Exprimer M^4 sous la forme : $M^4 = \alpha M^2 + \beta M + \gamma I$ où α, β et γ sont des entiers naturels à déterminer.

3) En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1}.

4) On cherche à déterminer trois entiers a, b et c tels que la courbe de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ passe par les points $A(1,1), B(-1,-1)$ et $C(2,5)$.

a) Montrer que ça revient à trouver les entiers a, b et c tels que :

$$M \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

b) Déterminer alors ces entiers.

Exercice 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_2$ où I_2 est la matrice identité d'ordre 2 .

2) En déduire une expression de A^3 sous la forme $\alpha A + \beta I_2$ où α et β des réels.

3) On considère les suites numériques (r_n) et (s_n) définies par

$$\begin{cases} r_0 = 0 \text{ et } s_0 = 1 \\ r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n \end{cases}.$$

a) Calculer r_1, s_1 ; r_2, s_2; r_3 et s_3.

b) Vérifier que $A^2 = r_2A + s_2I_2$ et $A^3 = r_3A + s_3I_2$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n , $A^n = r_nA + s_nI_2$. (On admet que $A^0 = I_2$)

4) Démontrer que la suite (k_n) définie par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison -1 .

En déduire l'expression de k_n en fonction de n.

5) On admet que la suite (t_n) définie par $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison2.

a) Déduire l'expression de t_n en fonction de n.

b)Déduire des questions précédentes, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n

c)En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression des coefficients de la matrice A^n .

Exercice 6 (traduit)

Deux ouvriers accomplissent un travail. Si les deux ouvriers travaillent simultanément ils peuvent achever ce travail en 12h. Si chacun fait la moitié du travail seul le travail se termine en 25h.	يقوم عاملان بإنجاز عمل معين بحيث إذا عملا معا في آن واحد يمكنهما إكماله في 12 ساعة. أما إذا قام كل واحد منهما بإنجاز نصف العمل فإن العمل يكتمل خلال 25 ساعة.
a) Quel est le temps nécessaire à chaque ouvrier pour accomplir le travail seul ?	a) ما هو الزمن اللازم لكل عامل لكي يكمل العمل وحده؟
b) Si le travail est rémunéré à 15000 UM et si les deux ouvriers travaillent simultanément et sont payés au prorata de leurs efforts, quelle serait le montant mérité par chacun ?	b) إذا كان العمل مقابل 15000 أوقية وكان العاملان يعملان في آن واحد وكانت أجرة كل منهما حسب جهده، فما هو المبلغ المستحق لكل واحد منهما؟

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

$$A\times B=\begin{pmatrix}4&8\\1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3&9\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&44\\5&11\end{pmatrix}$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}3&9\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4&8\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&42\\5&10\end{pmatrix}$$

$B\times A\neq A\times B$.

La multiplication des matrices n'est pas commutative.

Corrigé 2

$$A^2=A\times A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\1&-2&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\1&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-4&2\\1&-1&-1\\1&2&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{pmatrix}3&-4&2\\1&-1&-1\\1&2&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\1&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&2\\0&3&1\\1&-2&4\end{pmatrix}$$

$$A^3-A=\begin{pmatrix}5&0&2\\0&3&1\\1&-2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\1&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$A^3-A=4I_3$

On en déduit que $\frac{1}{4}(A^3-A)=I_3$. Donc $\frac{1}{4}(A^2-I)\times A=I_3$. D'où A est inversible et son inverse est la matrice $A^{-1}=\frac{1}{4}(A^2-I)$

$$A^{-1}=\frac{1}{4}(A^2-I)=\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}3&-4&2\\1&-1&-1\\1&2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-4&2\\1&-2&-1\\1&2&-1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-4&2\\1&-2&-1\\1&2&-1\end{pmatrix}$$

On peut écrire: $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

Verification:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-4&2\\1&-2&-1\\1&2&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\1&-2&0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$

Corrigé 3

1) Pour calculer la matrice inverse de A, on a :

$$\det A=\begin{vmatrix}3&-10\\-2&8\end{vmatrix}=3\times8-(-2)\times(-10)=4\ .$$

Comme $\det A\neq 0$ alors A est inversible et son inverse est

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}8&10\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

2) On peut remarquer que la matrice associée aux quatre systèmes est A .
D'où la déduction de la résolution de ces systèmes.

On considère la matrice colonne $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

a) Soit $B_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. Résoudre le système $\begin{cases} 3x - 10y = 4 \\ -2x + 8y = 7 \end{cases}$ équivaut à résoudre l'équation $AX = B_2$.

La solution de ce système est

$$X = A^{-1} \times B_1 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 4 + \frac{5}{2}\times 7 \\ \frac{1}{2}\times 4 + \frac{3}{4}\times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{51}{2} \\ \frac{29}{4} \end{pmatrix}.$$

La solution de ce système est donc $\begin{cases} x = \frac{51}{2} \\ y = \frac{29}{4} \end{cases}$

b) Soit $B_2 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -0.4 \end{pmatrix}$. Résoudre le système $\begin{cases} 3x - 10y = 1.5 \\ -2x + 8y = -0.4 \end{cases}$ équivaut à résoudre l'équation $AX = B_2$.

La solution de ce système est

$$X = A^{-1} \times B_2 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1.5 \\ -0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 1.5 + \frac{5}{2}\times(-0.4) \\ \frac{1}{2}\times 1.5 + \frac{3}{4}\times(-0.4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.45 \end{pmatrix}.$$

La solution de ce système est donc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0.45 \end{cases}$

c) Soit $B_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix}$. Résoudre le système $\begin{cases} 3x - 10y = 15 \\ -2x + 8y = -5 \end{cases}$ équivaut à résoudre l'équation $AX = B_3$.

La solution de ce système est

$$X = A^{-1} \times B_3 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 15 + \frac{5}{2}\times(-5) \\ \frac{1}{2}\times 15 + \frac{3}{4}\times(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.5 \\ 3.75 \end{pmatrix}.$$

La solution de ce système est donc $\begin{cases} x = 17.5 \\ y = 3.75 \end{cases}$

d) Soit $B_3 = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 0.5 \end{pmatrix}$. Résoudre le système $\begin{cases} 3x - 10y = 1.25 \\ -2x + 8y = 0.5 \end{cases}$ équivaut à résoudre l'équation $AX = B_4$.

La solution de ce système est

$$X = A^{-1} \times B_3 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1.25 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 1.25 + \frac{5}{2}\times 0.5 \\ \frac{1}{2}\times 1.25 + \frac{3}{4}\times 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solution de ce système est donc $\begin{cases} x = 3.75 \\ y = 1 \end{cases}$

Corrigé 4

On a :

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} + 2\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7.$$

Le système admet une solution unique.

$$\det_X = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -6 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -3\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} + 6\times\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \Rightarrow$$

$$x = \frac{\det_x}{\det(S)} = \frac{-14}{7} = -2$$

$$\det_Y = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \\ 3 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 35 \Rightarrow$$

$$y = \frac{\det_y}{\det(S)} = \frac{35}{7} = 5$$

$$\det_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 21 \Rightarrow$$

$z = \dfrac{\det_z}{\det(S)} = \dfrac{21}{7} = 3$. La solution du système (S) est le triplet $(-2;5;3)$.

Corrigé 5

1) On a

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=A+2I_3.$$

Montrons par récurrence que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}A+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3$$

On a : $A^0=I_3=0\times A+1\times I_3=\dfrac{2^0-(-1)^0}{3}A+\dfrac{2^0+2(-1)^0}{3}I_3$**, donc la proposition est vraie pour** $n=0$**.**

Si on suppose que $A^n=\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}A+\dfrac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3$ **alors**

$$A^{n+1}=A^n\times A=\left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}A+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3\right)\times A=\frac{2^n-(-1)^n}{3}A^2+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}A$$

$$=\frac{2^n-(-1)^n}{3}\left(\frac{2^2-(-1)^2}{3}A+\frac{2^2+2(-1)^2}{3}I_3\right)+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}A$$

$$=\frac{2^n-(-1)^n}{3}(A+2I_3)+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}A$$

$$=\left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}\right)A+\frac{2^n-(-1)^n}{3}.2I_3$$

$$=\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}A+\frac{2^{n+1}+2(-1)^{n+1}}{3}I_3$$

Ce qui prouve que la propriété est vraie pour $n+1$**.**

Conclusion :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}A+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3$$

2° a) $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ d'où $A=M-I_3$

Par conséquence on a : $M=A+I_3$. Comme la matrice identité permutent avec toutes les autres matrices, on a donc :

$$M^k=\left(A+I_3\right)^k=\sum_{p=0}^{k}C_k^pA^pI_3^{k-p}=\sum_{p=0}^{k}C_k^pA^p .$$

D'après la question précédente on a : $A^p=\dfrac{2^p-(-1)^p}{3}A+\dfrac{2^p+2(-1)^p}{3}I_3$ **ce qui entraine que**

$$M^k=\sum_{p=0}^{k}C_k^p\left(\frac{2^p-(-1)^p}{3}A+\frac{2^p+2(-1)^p}{3}I_3\right)=$$

$$\frac{1}{3}A\left(\sum_{p=0}^{k}C_k^p2^p-\sum_{p=0}^{k}C_k^p(-1)^p\right)+\frac{1}{3}I_3\left(\sum_{p=0}^{k}C_k^p2^p+2\sum_{p=0}^{k}C_k^p(-1)^p\right)$$

Or on a $\sum_{p=0}^{k}C_k^p2^p=(1+2)^k=3^k$; $\sum_{p=0}^{k}C_k^p(-1)^p=(1-1)^k=0$.

D'où $M^k=\frac{1}{3}A\left(3^k-0\right)+\frac{1}{3}I_3\left(3^k+2\times0\right)=3^{k-1}\left(A+I_3\right)=3^{k-1}.M$

b) Puisque $A=M-I_3$**, on a**

$$A^n=\left(M-I_3\right)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kM^kI_3^{n-k}\Leftrightarrow$$

$$A^n=(-1)^nI_3+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kM^kI_3^{n-k}\Leftrightarrow$$

$$A^n=(-1)^nI_3+\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k3^{k-1}\right)M .$$

En écrivant 3^{k-1} **sous la forme** $\frac{1}{3}.3^k$**, On trouve**

$$A^n=(-1)^nI_3+\frac{1}{3}M\sum_{k=1}^{n}C_n^k3^k(-1)^{n-k}\Leftrightarrow$$

$$A^n=(-1)^nI_3+\frac{1}{3}MI_3+\frac{1}{3}M\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k3^{k-1}(-1)^{n-k}-(-1)^n\right)\Leftrightarrow$$

$$A^n=(-1)^nI_3+\frac{1}{3}M\left[(3-1)^n-(-1)^n\right] .$$

Par conséquence on a : $A^n = (-1)^n I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} M$

3. a) On a :

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix};$$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\text{et } A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

b) $$AP = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}$$

en plus on a

$$P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que $AP = P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Si on pose $B = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$**, cette dernière relation s'écrit :** $AP = PB$.

Donc $A^2P = A(AP) = A(PB) = (AP)B = (PB)B = PB^2$

On montre facilement par récurrence que $A^n.P = P.B^n$ (1).

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Elle est évidement vraie pour $n = 1$ et on vient de le prouver pour $n = 2$.

Si on suppose que $B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ alors

$$B^{n+1} = B^n.B = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ce qui achève la démonstration.

La relation (1) nous donne alors que :

$$A^n.P = P.B^n = P.\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = P.\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

CHAPITRE 2 NOMBRES COMPLEXES

I. RESUME DE COURS

Le nombre i

Il existe dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ un élément n'appartenant pas à $\mathbb{R}$, noté i tel que $i^2 = -1$.

Le nombre i est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $x^2 + 1 = 0$.

On a alors : $\boxed{i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad \frac{1}{i} = -i}$.

Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient a , b , a' et b' des réels. $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$.

1) $(a + ib = a' + ib') \Leftrightarrow (a = a' ; b = b')$	4) $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$
2) $z + z' = a + a' + i(b + b')$	5) $(a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$
3) $zz' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$	6) $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$
7) $a + ib \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a - ib}{(a+ib)(a-ib)} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$	

Définitions et vocabulaire

Soient a et b des réels et $z = a + ib$.

Forme algébrique de z	L'écriture $z = a + ib$
Partie réelle de z	$\mathrm{Re}(z) = a$
Partie imaginaire de z	$\mathrm{Im}(z) = b$
Le conjugué de z	$\bar{z} = a - ib$
Le module de z	$\lvert z\rvert = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument de z où $z \neq 0$. On note $\arg z$	$\arg z = \theta \Rightarrow \left(\cos\theta = \dfrac{a}{\lvert z\rvert}, \quad \sin\theta = \dfrac{b}{\lvert z\rvert}\right)$
Forme trigonométrique de z avec $(z \neq 0 ; \arg z = \theta)$	$z = \lvert z\rvert(\cos\theta + i\sin\theta)$
Forme exponentielle de z avec $(z \neq 0 ; \arg z = \theta)$	$z = \lvert z\rvert e^{i\theta}$

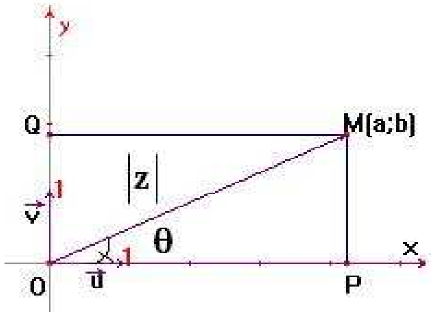
Représentation géométrique des nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soient a et b des réels.

A tout nombre complexe $z=a+ib$, on peut associer le point $M(a;b)$ du plan.

Le plan est appelé le plan complexe.

Le point image du nombre complexe $z=a+ib$	$M(a;b)$
Le vecteur image du nombre complexe $z=a+ib$	$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
L'affixe du point $M(a;b)$ et du vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$	**Le nombre complexe $z=a+ib$**
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$	**Le nombre z_B-z_A**
L'affixe du milieu du segment $[AB]$	**Le nombre $\frac{z_A+z_B}{2}$**
La distance AB	$AB=\lvert z_B-z_A\rvert$



Conjugué d'un nombre complexe

Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et z , z_1 , z_2 des nombres complexes.

1) $z=a+ib\Rightarrow\bar{z}=a-ib$	**7)** $\bar{\bar{z}}=z$
2) $z=a+ib\Rightarrow z\bar{z}=a^2+b^2$	**8)** $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
3) z est réel $\Leftrightarrow\bar{z}=z$	**9)** $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$
4) z est imaginaire pur $\Leftrightarrow\bar{z}=-z$	**10)** $\overline{z^n}=\left(\bar{z}\right)^n,\quad n\in Z$
5) $Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$	**11)** $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)}=\frac{1}{\overline{z_1}},\quad z_1\neq 0$
6) $Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$	**12)** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\quad z_2\neq 0$

Module d'un nombre complexe

Soient $a,b \in \mathbb{R}$ et z , z_1 , z_2 des nombres complexes.

1) $\lvert z\rvert = \sqrt{z\bar{z}}$	7) $\left\lvert \frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$, $z \neq 0$
2) $z = a + ib \Rightarrow \lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	8) $\left\lvert \frac{z_1}{z_2}\right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$, $z_2 \neq 0$
3) $\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$	9) $\lvert z_1 + z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$
4) $\lvert \bar{z}\rvert = \lvert -z\rvert = \lvert z\rvert$	**(L'inégalité triangulaire)**
5) $\lvert z_1 z_2\rvert = \lvert z_1\rvert \lvert z_2\rvert$	10) $AB = \lvert z_B - z_A\rvert$
6) $\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$, $n \in Z$	

Argument d'un nombre complexe

Soient z , z_1 , z_2 des nombres complexes non nuls.

1) $\arg \bar{z} = \arg \frac{1}{z} = -\arg z$	5) **z est réel** $\Leftrightarrow \arg z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
2) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$	6) **z est imaginaire pur** $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
3) $\arg z^n = n \arg z$, $n \in Z$	**Soient** A,B,C,D **des points tels que** $AB \neq 0, CD \neq 0$.
4) $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$	7) $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB})$ $[2\pi]$
	8) $\arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$ $[2\pi]$

Notation exponentielle e^{ix}

Soient x et y des réels.

1) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$	7) $e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$
2) $\frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix} = \cos x - i \sin x$	8) $\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$
3) $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$	9) $\left(e^{ix}\right)^n = e^{inx}$, $n \in Z$
4) $e^{i\pi} = -1$	10) $\lvert e^{ix}\rvert = 1$
5) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$	11) **Si** $z = \lambda e^{ix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, **alors**
6) $e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$	$\begin{cases} \lambda > 0 \Rightarrow \arg z = x \\ \lambda < 0 \Rightarrow \arg z = \pi + x \end{cases}$

Formules d'Euler – Formule de Moivre

Formules d'Euler	**Soit** $x \in IR$ $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$; $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
Formule de Moivre	**Soit** $x \in IR$ **et** $n \in Z$; $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$

Les formules d'Euler permettent dans certains cas de transformer un polynôme en $\cos x$ **et** $\sin x$ **en une somme de cosinus et de sinus des multiples de x (linéarisation).**

La formule de Moivre permet d'exprimer $\cos nx$ **et** $\sin nx$ **pour** $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ **sous forme d'un polynôme en** $\cos x$ **et** $\sin x$.

Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

1. Cas particulier : équation à coefficients réels

$az^2 + bz + c = 0$ **où** $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$.

❖ **Le discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$	**deux solutions réelles distinctes**	$z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ **et** $z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	**une solution réelle double**	$z_1 = z_2 = \dfrac{-b}{2a}$
$\Delta < 0$	**deux solutions complexes conjuguées :**	$z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$ **et** $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$

2. Equation à coefficients complexes $a, b, c \in \mathbb{C}$; $a \neq 0$.

❖ **Le discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$

❖ **Les racines carrées du discriminant sont les nombres complexes** $\delta = x + iy$ **et** $-\delta = -x - iy$ **tel que** $\delta^2 = \Delta$ **avec** $x; y \in IR$:

$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \lvert\Delta\rvert \\ x^2 - y^2 = Re(\Delta) \\ 2xy = Im(\Delta) \end{cases}$	**Les solutions de l'équation** $az^2 + bz + c = 0$: $z_1 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ **et** $z_2 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$

3. Somme et produit des solutions:

Somme : $s = z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$; **Produit:** $p = z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Soient $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ et $Z\in\mathbb{C}$, $(Z\neq 0)$.

① Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n=1$ sont les nombres $z_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$. Ces solutions sont appelées racines n-ièmes de l'unité (de 1).

② Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n=Z$ sont les nombres $z_k=\sqrt[n]{|Z|}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ où $k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$; $\theta=\arg Z$. Ces solutions sont appelées racines n-ièmes du nombre complexe non nul Z.

③ Tout nombre Z non nul admet n racines n-ièmes distincts deux à deux de même modules.

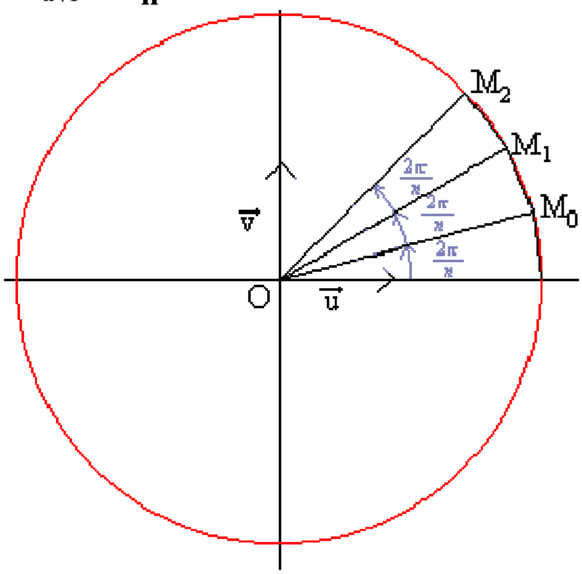
④ On obtient les n racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul en multipliant l'une quelconque d'entre elles par les n racines n-ièmes de l'unité:

Si $z_0^n=Z$, alors $z_k=z_0e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$.

⑤ La somme des n racines n-ièmes d'un nombre complexe Z $(Z\neq 0)$ est nulle.

⑥ Dans le plan complexe, les images des n racines n-ièmes d'un nombre complexe sont situées sur le même cercle de centre O et de rayon $r=\sqrt[n]{|Z|}$. Ces points sont les sommets d'un polygone régulier.

⑦ Si M_k est l'image du racine n-ième z_k de Z avec $\arg Z=\theta$, alors : $OM_k=\sqrt[n]{|Z|}$ et $(\overrightarrow{OM_k};\overrightarrow{OM_{k+1}})=\frac{2\pi}{n}$.



Applications géométriques des nombres complexes

1) Nature d'un triangle

Soit ABC un triangle. On pose $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

Nature du triangle ABC	Relation caractéristique
Equilatéral	$Z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Rectangle en A	Z est un imaginaire pur
Rectangle isocèle en A	$Z = i$ ou $Z = -i$
Isocèle en A	$\|Z\| = 1$

2) Alignement et orthogonalité

Soient A,B,C,D des points du plan.

Relation complexe	Interprétation géométrique
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel	A,B,C sont alignés($A \neq B, A \neq C$)
$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est réel	Les droites (AB) et (CD) sont parallèles, $(A \neq B; C \neq D)$(
$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \pm i$	$AB = CD$ et $(AB) \perp (CD)$ où ($A \neq B, C \neq D$)
$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur	$(AB) \perp (CD)$ où ($A \neq B, C \neq D$)
$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \lambda e^{i\theta}; \lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \theta\ [2\pi]$ et $CD = \lambda AB$
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_D}{z_C - z_D}$ est réel	A,B,C,D sont alignés ou cocycliques

3) Lieux géométriques simples

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Considérons un point variable M d'affixe z. Le point M' d'affixe z'. Les points A,B,Ω sont fixes et d'affixes respectives a,b,ω.

Relation complexe	Ensemble des points M
$\lvert z-\omega\rvert = r\ ,\ r>0$	**Cercle de centre Ω et de rayon r**
$\lvert z-a\rvert = \lvert z-b\rvert$	**Médiatrice de $[AB]$**
$\arg\frac{z-a}{z-b}=\frac{\pi}{2}\quad[\pi]$	**Cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B**
Le nombre $\frac{z-a}{z-b}$ est imaginaire pur	**Cercle de diamètre $[AB]$ privé de B**
$\arg\frac{z-a}{z-b}=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$	**Demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B**
$\arg\frac{z-a}{z-b}=0\quad[\pi]$	**Droite (AB) privée de A et B**
Le nombre $\frac{z-a}{z-b}$ est réel	**Droite (AB) privée de B**
$\left\lvert\frac{z-a}{z-b}\right\rvert = k\ ,\ \ k>0;k\neq 1$	**Cercle centré sur (AB) de diamètre [IJ] tel que** $I=\text{bar}\{(A,1);(B,k)\};J=\text{bar}\{(A,1);(B,-k)\}$
$\arg\frac{z-a}{z-b}=\alpha\quad[\pi]\ ,\ \alpha\neq 0\quad[\pi]$	**Cercle passant par A et B privé de A et B**
$\arg\frac{z-a}{z-b}=\alpha\quad[2\pi]$, $\alpha\neq 0\quad[\pi]$	**Arc capable d'extrémités A et B exclues**

Nombres complexes et transformations

1.Expressions complexes des transformations usuelles

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Considérons la transformation qui associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe z'.

Transformation	Ecriture complexe
Translation de vecteur d'affixe z_0	$z' = z + z_0$
Homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Symétrie de centre Ω d'affixe ω	$z' - \omega = -(z - \omega)$
Rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle de mesure θ	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$
Symétrie d'axe x'x	$z' = \overline{z}$
Symétrie d'axe y'y	$z' = -\overline{z}$
Similitude directe de centre Ω d'affixe ω, de rapport k , $k \in \mathbb{R}^{\bullet}$ et d'angle de mesure θ .	$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$

2) Etude de l'expression $z' = az + b$ où $a, b \in \mathbb{C} ; a \neq 0$

Soient f la transformation qui associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = az + b$.

		Transformation
$a = 1$		Translation de vecteur d'affixe b
$a \neq 1$		f admet un unique point invariant Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$
	$a \in IR^*$	Homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport a
	$\lvert a \rvert = 1$	Rotation de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ et d'angle de mesure $\theta = \arg a$
	$a = -1$	Symétrie centrale de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{2}$
	Cas général	Similitude directe de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$, de rapport $k = \lvert a \rvert$ et d'angle de mesure $\theta = \arg a$

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses A	B	C	D
1	Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z, alors	$\bar{z}=\frac{1}{z}$	$\bar{z}=-z$	$z\bar{z}=i$	$\bar{z}=z$
2	Si $z=-1+2e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors la forme exponentielle de z est :	$e^{i\frac{\pi}{2}}$	$\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$	$i\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$	$\left(-1+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$
3	Si $z+\lvert z\rvert=2+4i$, alors	$z=-3+4i$	$z=-3-4i$	$z=4i$	$z=-4+3i$
4	Si $z=(1-i)e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors	$\arg z=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$	$\arg z=\pi+\frac{\pi}{6}$	$\arg z=\frac{\pi}{6}$	$\arg z=-\frac{\pi}{12}$
5	Si $z=4+(1-5i)i$, alors la partie réelle de z est	9	8	4	-1
6	Si $z_1=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_2=-2\,e^{i\frac{\pi}{2}}$, alors le rapport $\frac{z_2}{z_1}$ est égal à	$\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$	$-1-i$	$1-i$

QCM 2

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner la réponse qui lui correspond.

	Questions	Réponses A	B	C	D
1	La forme algébrique de $\frac{2+5i}{3-2i}$ est	$2+5i$	$\frac{-4}{13}+\frac{19}{13}i$	$\frac{16}{13}+\frac{19}{13}i$	$\frac{6}{5}+2i$
2	Le module de $\frac{\left(2-2i\sqrt{3}\right)^2}{(1+i)(2i)^3}$ est	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{8}$	$\sqrt{2}$
3	Si $\frac{\pi}{4}$ est un argument de z, alors le nombre $z^3e^{i\frac{\pi}{4}}$ est	réel positif	imaginaire pur	réel négatif	d'argument $\frac{\pi}{4}$
4	Si $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors le triangle *ABC* est :	isocèle et non rectangle	équilatéral	rectangle et isocèle	rectangle et non isocèle
5	L'ensemble des points *M* d'affixe *z* tels que $\left\lvert\frac{z-1+2i}{2+3i}\right\rvert=\sqrt{13}$ est :	un cercle	la médiatrice d'un segment	une droite privée d'un point	un cercle privé de deux points
6	Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\theta\in\mathbb{R}^*$. La forme algébrique de $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est :	$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$	$\cos\left(\theta^n\right)+i\sin\left(\theta^n\right)$	$n\cos\theta+in\sin\theta$	$e^{in\theta}$

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres :

$z_1 = (3+2i)(2-3i), \quad z_2 = \dfrac{1+5i}{5-i},$

$z_3 = 2-3i+\dfrac{2i+4}{2+3i}, \quad z_4 = (1+2i)(3-5i)(1-2i),$

$z_5 = \dfrac{3-5i}{5+i}+\dfrac{4-3i}{3+i}, \quad z_6 = \dfrac{2+5i}{4-i}+\dfrac{4+i}{2-5i},$

$z_7 = (1-2i)^3, \quad z_8 = \dfrac{2+3i}{3i}+\dfrac{5i}{3-2i}$

Exercice 2

On pose $f(z) = (3-2i)z^2+(5-i)z+2+5i$

Calculer et donner la forme algébrique de chacun des nombres :
$f(i), \quad f(3+2i), \quad f(1+i), \quad f(5-i)$

Exercice 3

On pose $f(z) = (5+i)z+(1+2i)\bar{z}+4-3i$ **où** $\bar{z}$ **désigne le conjugué de z**

Calculer et donner la forme algébrique de chacun des nombres :
$f(5-i), \quad f(1+2i), \quad f(3+4i), \quad f(5+3i)$

Exercice 4

Soit $f(z) = \dfrac{(1-2i)z+2+3i}{(3-2i)z-2-5i}$ **où z est un nombre complexe.**

1) Calculer et donner la forme algébrique de chacun des nombres :

$f(5+i), \quad f(2i), \quad f(3+2i), \quad f(1-i)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations

$f(z)=1, \qquad f(z)=\dfrac{3}{2}.$

Ecrire les solutions sous forme algébrique.

Exercice 5

Soit

$$Z_1 = (1+5i)^{2020} + (1-5i)^{2020}$$
$$Z_2 = (1+5i)^{2020} - (1-5i)^{2020}$$

Montrer que Z_1 est réel et Z_2 imaginaire pur.

Exercice 6

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivant:

$z_1 = 4-3i, \quad z_2 = (3+i)(2+5i),$

$z_3 = \dfrac{2+4i}{2+3i}, \quad z_4 = (1+2i)(3-5i)(1-2i),$

$z_5 = \dfrac{(3-5i)(5+2i)^3}{(2+5i)^4}$

Exercice 7

Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants:

$z_1 = 4+4i, \quad z_2 = 3+i\sqrt{3}, \quad z_3 = \dfrac{4+4i}{3+i\sqrt{3}},$

$z_4 = (4+4i)(3+i\sqrt{3}), \quad z_5 = \dfrac{(3-i\sqrt{3})(4+4i)^3}{(3+i\sqrt{3})^4}.$

Exercice 8

En utilisant les résultats de l'exercice précédent, écrire chacun des nombres suivants sous forme trigonométrique et exponentielle.

$z_1 = 4+4i, \quad z_2 = 3+i\sqrt{3}, \quad z_3 = \dfrac{4+4i}{3+i\sqrt{3}},$

$z_4 = (4+4i)(3+i\sqrt{3}), \quad z_5 = \dfrac{(3-i\sqrt{3})(4+4i)^3}{(3+i\sqrt{3})^4}.$

Exercice 9

Soit $z_1 = 4+4i,\ z_2 = 3+i\sqrt{3}$ **,** $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2},\ z_4 = z_1 z_2$

1) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.

2.a) Donner les formes trigonométrique et algébrique de z_3 .

b) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$**.**

3.a) Donner les formes trigonométrique et algébrique de z_4 **.**

b) En déduire $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$**.**

Exercice 10 (Bac)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$**.**

1.a)Résoudre dans $\mathbb{C}$ **l'équation** $E_1 : z^2 + 2z + 10 = 0$

On note z_1 **et** z_2 **ses solutions avec** $\operatorname{Im} z_2 \leq 0$ **.**

b)Résoudre dans $\mathbb{C}$ **l'équation** $E_2 : z^2 - 4z + 20 = 0$

On note z_3 **et** z_4 **ses solutions avec** $\operatorname{Im} z_4 \leq 0$ **.**

2) On considère les points A, B, K **, L et E d'affixes respectives** $z_A = z_1$ **,** $z_B = z_2$ **,** $z_K = z_3$**,** $z_L = z_4$ **et** $z_E = z_3 - 2i$**.**

a) Placer les points A , B, K, L **, et** E **dans le repère** $(O;\vec{u},\vec{v})$**.**

b) Ecrire $z_E = z_3 - 2i$ **sous forme algébrique et trigonométrique.**

c) Déterminer la nature du quadrilatère ABLE **et du triangle** AKE**.**

3) Pour tout nombre complexe z **tel que** $z \neq -1+3i$ **on pose :** $f(z) = \frac{z-2-4i}{z+1-3i}$**.**

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles des points M **du plan d'affixe** z **dans chacun des cas suivants :**

Γ_1 **tel que** $|f(z)| = 1$**.**

Γ_2 **tel que** $|f(z) - 1| = \sqrt{10}$ **.**

Exercice 11

1. On pose $P(z) = z^3 - 5z^2 + 12z - 8$ **où** z **est un nombre complexe.**

a) Calculer $P(1)$**.**

b) Déterminer a et b **tels que pour tout** z **de** $\mathbb{C}$ **on a:** $P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$**.**

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$**, l'équation :** $P(z) = 0$**.**

2. On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_1=1$, $z_2=2+2i$ et $z_3=2-2i$.

a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres z_1, z_2 et z_3.

b) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

3.a) Ecrire le nombre $\dfrac{z_2}{z_3}$ sous forme algébrique. En déduire la nature du triangle OBC.

b) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que $\left|\dfrac{z-1}{z-2-2i}\right|=1$.

Exercice 12

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 3 cm).

On désigne par A ; B et C les points d'affixes respectives 1+5i ;-1+i et 3i.

Soit f l'application qui à tout point M du plan P, distinct de C, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=\dfrac{3iz+6+4i}{z-3i}$. On note $f(M)=M'$.

1) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

a) $|z'|=3$

b) $|z'-3i|=3$

c) $z'\in\mathbb{R}$

d) $\arg z'=\dfrac{\pi}{3}\quad[2\pi]$

e) $\arg z'=\dfrac{\pi}{2}\quad[\pi]$.

2) Montrer que les points A ;B ;M et M' sont cocycliques ou alignés .

Exercice 13

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z)=z^3-(11+6i)z^2+(28+38i)z-12-60i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z)=(z-3)(z^2+az+b).$$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

c) Soient les points A , B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $\operatorname{Im}(z_A)<\operatorname{Im}(z_B)<\operatorname{Im}(z_C)$. Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$ et placer les points A ,B ,C et G.

2) Pour tout réel k différent de 2, on définit l'application f_k du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+(3-k)\overrightarrow{MC}.$$

a) Pour quelles valeurs de k , l'application f_k est une translation? Déterminer alors son vecteur.

b) On suppose que $k\in\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$. Montrer que f_k admet un unique point invariant Ω_k . Reconnaître alors f_k et donner ses éléments caractéristiques en fonction de k.

c) Déterminer et construire le lieu géométrique des points Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$. Reconnaître Ω_1 .

d) Pour $k=1$; déterminer et construire le lieu géométrique du point R centre de gravité du triangle AMM' lorsque M décrit le cercle Γ de centre G passant par C.

3) Pour tout point M du plan on pose $\varphi(M)=2MA^2-2MB^2+2MC^2$ et Γ_m l'ensemble des points M tels que $\varphi(M)=k$, où k est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de k, la nature de Γ_m .

b) Déterminer et construire Γ_m pour $k=10$

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante sachant qu'elle admet une racine réelle :

$$z^3-(6+3i)z^2+(21+19i)z-26(1+i)=0$$

Exercice 15 (Bac)

Dans $\mathbb{C}$ on donne : $a=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$

1) Calculer a^2. Donner le module et un argument de a^2.

2) En déduire le module et un argument de a.

3) En déduire $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$.

4) Donner les entiers naturels n tels que a^n soit réel.

Exercice 16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.) On pose :

$P(z)=z^3-(11+6i)z^2+(28+38i)z-12-60i$ où z est un nombre complexe.

1) Calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$P(z)=(z-3)(z^2+az+b)$.

2) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

Exercice 17

Pour tout nombre complexe z on pose :
$P(z)=z^3-(1+2\cos\theta)z^2+(1+2\cos\theta)z-1$ où $\theta\in[0;2\pi[$.

Calculer $P(1)$ puis déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2 de l'équation $P(z)=0$ sachant que z_0 est réel, et $\operatorname{Im} z_1 \geq 0$ si $\sin\theta \geq 0$.

Exercice 18

Dans le plan orienté, on considère deux triangles ABC et DEF équilatéraux directs. Les points G et H tels que EDBG et CDFH soient des parallélogrammes. Soient a,b,c,d,e,f,g et h les affixes respectives des points A,B,C,D,E,F,G et H.

1) Exprimer $c-a$ en fonction de $b-a$, puis $f-d$ en fonction de $e-d$.

2) Exprimer g en fonction de b,d et e ; puis h en fonction de c,d et f.

3) Démontrer que le triangle AGH est équilatéral.

Exercice 19

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(1+4i)z^2-(9-i)z-6+18i$.

1.a) Calculer $P(3i)$ et déterminer les nombres a et b tels que $\forall z\in\mathbb{C}$:
$P(z)=(z-3i)(z^2+az+b)$

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$.

c) On considère les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ tels que $|z_C|\le|z_B|\le|z_A|$. Placer les points A, B et C et déterminer la nature du triangle ABC.

d) Soit $A'=\text{bar}\left\{(A;-5),(B;6),(C;12)\right\}$. Vérifier que l'affixe de A' est $z_{A'}=-3+i$. Placer A'.

2° On considère l'ellipse Γ de sommets A, A' et B.

a) Déterminer le centre I et l'excentricité de Γ.

b) Ecrire une équation cartésienne de Γ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

c) Préciser les points d'intersection de Γ avec l'axe (Ox).

d) Déterminer les foyers et les directrices de Γ puis construire Γ.

Exercice 20

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(7+3i)z^2+(12+15i)z-4-18i$.

1.a) Calculer $P(2)$ et déterminer les nombres a et b tels que $\forall z\in\mathbb{C}$:
$P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$.

c) On considère les points A, B et D images des solutions de l'équation $P(z)=0$ tels que $\text{Im}(z_A)\le\text{Im}(z_B)\le\text{Im}(z_D)$. Placer les points A, B et D et déterminer la nature du triangle ABD.

2.a) Déterminer le barycentre du système $\left\{(A;9),(B;-6),(C;2)\right\}$, où C est le symétrique de A par rapport à (BD).

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $9MA^2-6MB^2+2MC^2=-10$.

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que $4MA^2-6MB^2+2MC^2=-10$

d) Déterminer et construire l'ensemble Γ_3 des points M du plan tels que $\left(9\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=10$.

3° Soit $S^0=id$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $S^{n+1}=S\circ S^n$ où S est la similitude directe qui transforme A en B et B en D.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S^{2018}

b) Justifier que $S^{2020^{2020}}$ est une homothétie de rapport positif.

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose:

$P(z) = z^3 - (4+8i)z^2 + (-16+20i)z + 24 + 8i$.

1.a) Calculer $P(2i)$.

b) Déterminer les complexes α et β tels que pour tout complexe z on a:

$P(z) = (z-2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$

c) Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 2

Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et $z_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$.

1) Ecrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.

2) Ecrire z_3 sous forme algébrique.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

4) Justifier les affirmations suivantes :

Le nombre $(z_1)^{2019}$ est réel.

Le nombre $(z_2)^{2019}$ est imaginaire pur.

Exercice 3

Déterminer suivant les valeurs de θ ($\theta \in [0;2\pi[$) le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivant:

$z_1 = \cos\theta + i(1+\sin\theta)$,

$z_2 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$,

$z_3 = 1 + \sin\theta - i\cos\theta$

$z_4 = 1 + i\tan\theta$

$z_5 = \dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta}$,

$z_6 = \dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$.

Exercice 4

1) Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 + (2-2i)z^2 + (2-4i)z - 4i$.

a) Calculer $P(2i)$.

b) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z on a: $P(z) = (z-2i)(z^2+az+b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $P(z) = 0$.

2) On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1-i$, $z_B = 2i$ et $z_C = -1+i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

c) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|z+1-i| = 3$.

Exercice 5

Soit $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $\alpha = z + z^2 + z^4$.

1) Calculer $\alpha + \overline{\alpha}$ et $\alpha\overline{\alpha}$.

2) En déduire que : $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{8\pi}{7} = -\dfrac{1}{2}$;

et que $\sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{8\pi}{7} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Exercice 6

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1+2i$ on pose : $f(z)=\dfrac{z-3-i}{z-1-2i}$.

1) Calculer le nombre $\alpha = f(1+3i)$ puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.

2) On considère les deux points A et B d'affixes respectives $z_A = 1+2i$ et $z_B = 3+i$.

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles Γ_k des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) Γ_1 tel que $|f(z)|=1$; b) Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur. ;

c) Γ_3 tel que $f(z)$ soit réel ; d) Γ_4 tel que $|f(z)-1|=\sqrt{5}$.

3.a) Déterminer et représenter dans le repère précédent un point C tel que le triangle ABC soit rectangle isocèle en C (deux solutions possibles).

b) Vérifier que C est commun entre Γ_1 et Γ_2 .

Exercice 7

Simplifier les expressions suivantes:

1) $$\begin{aligned} C_n &= 1+\cos x+\cos 2x+\cdots\cos nx \\ S_n &= \sin x+\sin 2x+\cdots\sin nx \end{aligned}$$ **; (On pourra calculer $C_n + iS_n$)**

2) $$\begin{aligned} C_n &= \cos^2 x + \cos^2 x\cos 2x+\cdots+\cos^n x\cos nx \\ S_n &= \cos x\sin x + \cos^2 x\sin 2x+\cdots+\cos^n x\sin nx \end{aligned}$$ **; (On pourra calculer $C_n + iS_n$).**

Exercice 8

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2-2z-2-4i=0$

2) On considère le polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par : $P(z)=z^3-(2+2i)z^2-2z-8+4i$.

a) Calculer $P(2i)$ et déterminer deux réels a et b tels que $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$

b) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=(1+i)^2$, $z_B=\dfrac{5+5i}{2+i}$ et $z_C=\dfrac{1-5i}{2+3i}$.

a) Donner la forme algébrique de z_A, z_B et z_C

b) Placer les points A, B et C

c) Déterminer et construire l'affixe du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

4) Soit f l'application définie pour tout complexe $z\neq 3+i$ par $f(z)=\dfrac{(1-i)z+2}{z-3-i}$

Montrer que pour tout $z\neq 3+i$, on a : $f(z)=(1-i)\dfrac{z+1+i}{z-3-i}$

5) Déterminer et construire les ensembles de points M dans chacun des cas suivants :

a. Γ_1 tel que $|f(z)|=\sqrt{2}$.

b. Γ_2 tel que $\arg(f(z))=\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$

c. Γ_3 tel que $\arg(f(z))=\dfrac{3\pi}{4}\ [\pi]$

d. Γ_4 tel que $|f(z)-1+i|=2\sqrt{10}$.

Exercice 9

On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f_a l'application qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que : $z'=(a+\dfrac{1}{2}i)z+4-4a-2i,\qquad a\in\mathbb{C}$

1) Reconnaître l'application f_a et la caractériser pour chacune des valeurs suivantes du nombre complexe a :

a) $a=1-\frac{1}{2}i$ b) $a=2-\frac{1}{2}i$ c) $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $a=\frac{1}{2}$

2) Dans la suite de l'exercice on suppose que $a\in\mathbb{R}$ et on note $\theta=\arg(a+\frac{1}{2}i)$.

Soit les points $M_0(3;0)$ et $\Omega(4;0)$. Pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}$ on pose $M_{n+1}=f_a(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

a) Calculer et écrire sous forme algébrique : z_1 et z_2 en fonction de a.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $z_n=4-(a+\frac{1}{2}i)^n$.

c) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose : $V_n=|z_n-4|$. Pour quelles valeurs de θ ; la suite (V_n) est elle convergente ?

d) Calculer en fonction de n : et $S_n=\sum_{k=0}^{n}d_k$.

e) Pour $a=\frac{1}{2}$; déterminer la nature du triangle ΩM_nM_{n+1}. Placer les points M_0 ; M_1 et M_2. Calculer S_n et $\lim_{n\to\infty}S_n$ puis interpréter géométriquement.

Exercice 10 (Bac)

On considère un triangle ABC de sens direct et on construit à l'extérieur de ce triangle trois triangles ACQ, BAR et CBP rectangle et isocèle respectivement en A, B et C. Soient P', Q' et R' les milieux respectifs des segments [BP], [CQ] et [AR].

L'objectif de cette partie est de montrer que les triangles ABC, PQR et P'Q'R' sont de même centre de gravité. On considère le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soient a, b, c, p, q, r, p', q' et r' les affixes respectives des points A, B, C, P, Q, R, P', Q' et R'.

1) Faire une construction illustrant les données précédentes.

2.a) Montrer que $p'=\frac{b-ic}{1-i}$ puis écrire q' en fonction de a et c ; r' en fonction de a et b .

b) Calculer $p'+q'+r'$ en fonction de a , b et c puis en déduire que les triangles ABC et $P'Q'R'$ ont le même centre de gravité G d'affixe g .

3) Exprimer chacun des complexes p , q et r en fonction de a , b et c puis montrer que les triangles ABC et PQR ont le même centre de gravité G.

Exercice 11 (Bac)

1) Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose: $P(z)=z^3+(2-2i)z^2+(-2-8i)z-8+4i$.

a) Calculer $P(2i)$.

b) Résoudre l'équation $P(z)=0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère la transformation f d'expression : $z'=\frac{1}{3}iz+\frac{2}{3}+2i$.

a) Montrer que f est une similitude directe. Préciser le centre A , le rapport et un angle de f.

b) Calculer l'affixe z_C du point C image de B(-1,-3) par f. Vérifier que le triangle ABC est rectangle. Placer les points A , B et C sur la figure.

c) Calculer l'affixe z_G du point G barycentre du système $S=\{(A,2);(B,3);(C,-1)\}$.

3.a) Déterminer puis construire les trois ensembles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 des points M du plan définis par :

$$M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow 2MA^2+3MB^2-MC^2=16$$

$$M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow MB^2-MC^2=16$$

$$M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow (2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$$

b) Que peut-on dire à propos de la position relative des ensembles Γ_2 et Γ_3 ?

Exercice 12 (Bac)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(4+8i)z^2+(-14+24i)z+32+4i$.

1.a) Calculer $P(2i)$ et déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$.

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$. On note z_1, z_2 et z_3 ses solutions avec $|z_1|<|z_2|<|z_3|$.

c) Soit A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3. Déterminer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O,5);(A,-7);(C,4)\}$. Placer A, B ,C et G sur la figure.

2) Pour tout nombre complexe z on pose : $Q(z)=z^2-(4+6i)z-2+16i$.

On note Γ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Q(z)$ soit imaginaire pur (ou nul).

a) En posant $z=x+iy$, donner une équation cartésienne de Γ et montrer que Γ est une conique de centre G.

b) Préciser les sommets et l'excentricité de Γ puis la construire dans le repère précédent.

Exercice 13 (Bac)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) Pour tout nombre complexe z on pose $P(z)=z^3-(5+4i)z^2+(7+10i)z+5-10i$.

Calculer $P(i)$ puis déterminer les solutions $z_0; z_1$ et z_2 de l'équation $P(z)=0$ avec $\mathrm{Re}(z_0)<\mathrm{Re}(z_1)<\mathrm{Re}(z_2)$.

2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_0; z_1 et z_2 .

a) Déterminer la nature du triangle ABC .

b) Soit G le barycentre du système $\{(A,13);(B,-3);(C,2)\}$. Déterminer l'affixe du point G.

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que $13\,MA^2-3\,MB^2+2\,MC^2=12$

3) On considère l'hyperbole H de centre G qui passe par C et dont A est un sommet.

a) Déterminer le 2$^{\text{ème}}$ sommet de H.

b) Vérifier que l'équation de H peut s'écrire sous la forme $x^2-3(y-2)^2=-3$.

c) Donner l'équation réduite de H puis déterminer ses foyers, ses asymptotes et son excentricité et la construire.

Exercice 14 (Bac - traduit)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose :

$$P(z) = z^3 - (9-i)z^2 + (28-5i)z - 32 + 4i \ .$$

1.a) Calculer $P(4)$.

b) Déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = (z-4)(z^2 + az + b)$. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$.

2) On considère les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ tels que $z_A = 4$, $\operatorname{Im} z_B > 0$ et $\operatorname{Im} z_C < 0$.

a) Donner l'expression complexe de la similitude directe s de centre C qui transforme A en B. Déterminer le rapport et un angle de s.

b) Soit $g = s \circ s$. Pour tout point $M(x,y)$ on note $g(M) = M'$; et $M'(x',y')$. Ecrire x' y' en fonction de x et y.

3) Pour tout nombre complexe z on pose :

$$Q(z) = z^2 - (5-i)z + 8 - i \ .$$

On note Γ l'ensemble des points M d'affixe z tels que soit imaginaire pur (ou nul).

a) En posant $z = x + iy$, donner une équation cartésienne de Γ et montrer que Γ est une hyperbole de centre $\Omega(\frac{5}{2},-\frac{1}{2})$.

b) Préciser les sommets et les asymptotes de Γ puis la construire.

نعتبر المستوي العقدي منسوبا إلى مرجع قائم ومنتظم $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) لكل عدد عقدي z نضع :

$$P(z) = z^3 - (9-i)z^2 + (28-5i)z - 32 + 4i$$

a.1) احسب $P(4)$ ثم حدد العددين a و b بحيث يكون لكل z من $\mathbb{C}$:
$P(z) = (z-4)(z^2 + az + b)$.

b)حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة $P(z) = 0$.

2) نعتبر النقط A ؛ B وC صور حلول المعادلة $P(z) = 0$ مع $z_A = 4$ ؛ $\operatorname{Im} z_B > 0$ و $\operatorname{Im} z_C < 0$.

a) أعط العبارة العقدية للتشابه المباشر s الذي مركزه C وينقل A إلى B .

b) حدد نسبة وزاوية s.

3) لكل عدد عقدي نضع:
$Q(z) = z^2 - (5-i)z + 8 - i$. ولتكن Γ مجموعة النقط Mذات اللاحق z بحيث يكون $Q(z)$ تخيليا بحتا (أو معدوما).

a) بوضع $z = x + iy$ ،أعط معادلة كرتيزية للمجموعة Γ وبين أن Γ قطع زائد مركزه النقطة $\Omega(\frac{5}{2},-\frac{1}{2})$.

b) حدد القمتين والمقاربين للقطع Γ ثم مثله.

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

$z_1 = (3+2i)(2-3i)$
$= 6-9i+4i+6i^2$
$= 6-9i+4i-6$
$= 12-5i.$

$z_2 = \dfrac{1+5i}{5-i}$
$= \dfrac{(1+5i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}$

$z_2 = \dfrac{5+i+25i-5}{25+1} = \dfrac{26i}{26} = i.$

$z_3 = 2-3i+\dfrac{2i+4}{2+3i} = \dfrac{(2-3i)(2+3i)+2i+4}{2+3i}$
$= \dfrac{4+9+2i+4}{2+3i} = \dfrac{17+2i}{2+3i}$

$= \dfrac{(17+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{34-51i+4i+6}{4+9}$

$z_3 = \dfrac{40}{13}-\dfrac{47}{13}i.$

$z_4 = (1+2i)(3-5i)(1-2i) = (1+2i)(1-2i)(3-5i)$
$= 5(3-5i)$
$z_4 = 15-25i.$

$z_5 = \dfrac{3-5i}{5+i}+\dfrac{4-3i}{3+i} = \dfrac{(3-5i)(3+i)+(5+i)(4-3i)}{(5+i)(3+i)}$
$= \dfrac{9+3i-15i+5+20-15i+4i+3}{15+5i+3i-1}$

$z_5 = \dfrac{37-23i}{14+8i} = \dfrac{(37-23i)(14-8i)}{(14+8i)(14-8i)}$
$= \dfrac{334-618i}{196+64}$

$z_5 = \dfrac{334}{260}-\dfrac{618}{260}i.$

$$z_6=\frac{2+5i}{4-i}+\frac{4+i}{2-5i}=\frac{(2+5i)(2-5i)+(4-i)(4+i)}{(4-i)(2-5i)}$$

$$=\frac{4+25+16+1}{8-20i-2i-5}=\frac{46}{3-22i}\times\frac{3+22i}{3+22i}$$

$$z_6=\frac{138+1012i}{9+484}=\frac{138}{493}+\frac{1012}{493}i.$$

$$z_7=(1-2i)^3=(1-2i)(1-2i)^2=(1-2i)(1-4i-4)$$

$$=(1-2i)(-3-4i)=-3-4i+6i-8$$

$$z_7=-11+2i.$$

$$z_8=\frac{2+3i}{3i}+\frac{5i}{3-2i}=\frac{(2+3i)(3-2i)+(3i)(5i)}{3i(3-2i)}$$

$$=\frac{6-4i+9i+6-15}{9i+6}=\frac{-3+5i}{6+9i}\times\frac{6-9i}{6-9i}$$

$$=\frac{-18+27i+30i+45}{36+81}$$

$$=\frac{27+57i}{117}$$

$$z_8=\frac{27}{117}+\frac{57}{117}i.$$

Enfin $z_8=\frac{3}{13}+\frac{19}{39}i$

Corrigé 2

On a : $f(z)=(3-2i)z^2+(5-i)z+2+5i$

$$f(i)=(3-2i)(i)^2+(5-i)i+2+5i$$
$$=-3+2i+5i+1+2+5i$$
$$=12i.$$

$$f(3+2i)=(3-2i)(3+2i)^2+(5-i)(3+2i)+2+5i$$
$$=(9+4)(3+2i)+15+10i-3i+2+2+5i$$
$$=13(3+2i)+19+12i$$
$$=39+26i+19+12i$$
$$=58+38i.$$

$$\begin{aligned} f(1+i) &= (3-2i)(1+i)^2 + (5-i)(1+i) + 2 + 5i \\ &= (3-2i)(2i) + 5 + 5i - i + 1 + 2 + 5i \\ &= 6i + 4 + 8 + 9i \\ &= 12 + 15i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(5-i) &= (3-2i)(5-i)^2 + (5-i)^2 + 2 + 5i \\ &= (3-2i)(25-10i-1) + (25-10i-1) + 2 + 5i \\ &= (3-2i)(24-10i) + 26 - 5i \\ &= 72 - 30i - 48i - 20 + 26 - 5i \\ &= 78 - 83i. \end{aligned}$$

Corrigé 3

On a $f(z) = (5+i)z + (1+2i)\bar{z} + 4 - 3i$

On remplace z par sa valeur dans chaque cas :

$$\begin{aligned} f(5-i) &= (5+i)(5-i) + (1+2i)\,(\overline{5-i}) + 4 - 3i \\ &= 25 + 1 + (1+2i)(5+i) + 4 - 3i \\ &= 30 + 5 + i + 10i - 2 - 3i \\ &= 33 + 8i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1+2i) &= (5+i)(1+2i) + (1+2i)(\overline{1+2i}) + 4 - 3i \\ &= 5 + 10i + i - 2 + 1 + 4 + 4 - 3i \\ &= 12 + 8i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3+4i) &= (5+i)(3+4i) + (1+2i)(\overline{3+4i}) + 4 - 3i \\ &= 15 + 20i + 3i - 4 + (1+2i)(3-4i) + 4 - 3i \\ &= 15 + 20i + 3 - 4i + 6i + 8 \\ &= 26 + 22i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(5+3i) &= (5+i)(5+3i) + (1+2i)(\overline{5+3i}) + 4 - 3i \\ &= 25 + 15i + 5i - 3 + (1+2i)(5-3i) + 4 - 3i \\ &= 26 + 17i + 5 - 3i + 10i + 6 \\ &= 37 + 24i. \end{aligned}$$

Corrigé 4

On a

$$\begin{aligned} f(5+i) &= \frac{(1-2i)(5+i) + 2 + 3i}{(3-2i)(5+i) - 2 - 5i} \\ &= \frac{5 + i - 10i + 2 + 2 + 3i}{15 + 3i - 10i + 2 - 2 - 5i} \end{aligned}$$

$$=\frac{9-6i}{15-12i}=\frac{9-6i}{15-12i}\times\frac{15+12i}{15+12i}$$
$$=\frac{135+108i-90i+72}{225+144}$$

$$=\frac{207+18i}{369}\quad=\frac{207}{369}+\frac{18}{369}i$$

$$f(5+i)=\frac{23}{41}+\frac{2}{41}i$$

$$f(2i)=\frac{(1-2i)(2i)+2+3i}{(3-2i)(2i)-2-5i}=\frac{2i+4+2+3i}{6i+4-2-5i}$$

$$=\frac{6+5i}{2+i}=\frac{6+5i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}$$
$$=\frac{12-6i+10i+5}{4+1}$$

$$=\frac{17+4i}{5}\quad=\frac{17}{5}+\frac{4}{5}i.$$

$$f(3+2i)=\frac{(1-2i)(3+2i)+2+3i}{(3-2i)(3+2i)-2-5i}$$
$$=\frac{3+2i-6i+4+2+3i}{9+4-2-5i}$$

$$=\frac{9-i}{11-5i}\times\frac{11+5i}{11+5i}=\frac{99+45i-11i+5}{121+25}$$

$$=\frac{104+34i}{146}=\frac{104}{146}+\frac{34}{146}i$$
$$=\frac{52}{73}+\frac{17}{73}i.$$

$$f(1-i)=\frac{(1-2i)(1-i)+2+3i}{(3-2i)(1-i)-2-5i}$$
$$=\frac{1-i-2i-2+2+3i}{3-3i-2i-2-2-5i}$$

$$=\frac{1}{-1-10i}\times\frac{-1+10i}{-1+10i}=\frac{-1+10i}{1+100}$$

$$=\frac{-1+10i}{101}$$
$$=\frac{-1}{101}+\frac{10}{101}i.$$

$$f(z)=1 \Rightarrow \frac{(1-2i)z+2+3i}{(3-2i)z-2-5i}=1$$
$$\Rightarrow (1-2i)z+2+3i=(3-2i)z-2-5i$$
$$\Rightarrow [(1-2i)-(3-2i)]z=-2-5i-2-3i$$
$$\Rightarrow -2z=-4-8i$$
$$\Rightarrow z=2+4i.$$

$$f(z)=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(1-2i)z+2+3i}{(3-2i)z-2-5i}=\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow 2\big((1-2i)z+2+3i\big)=3\big((3-2i)z-2-5i\big)$$
$$\Rightarrow (2-4i)z+4+6i=(9-6i)z-6-15i$$
$$\Rightarrow [(2-4i)-(9-6i)]z=-6-15i-4-6i$$
$$\Rightarrow (-7+2i)z=-10-21i$$
$$\Rightarrow z=\frac{-10-21i}{-7+2i}$$
$$\Rightarrow z=\frac{-10-21i}{-7+2i}\times\frac{-7-2i}{-7-2i}$$
$$\Rightarrow z=\frac{70+20i+147i-42}{49+4}$$
$$\Rightarrow z=\frac{28+167i}{53}$$
$$\Rightarrow z=\frac{28}{53}+\frac{167i}{53}.$$

Corrigé 5

Pour montrer que Z_1 est réel, il suffit de montrer que $\overline{Z_1}=Z_1$.

On a

$$\overline{Z_1}=\overline{(1+5i)^{2020}+(1-5i)^{2020}}$$
$$=\overline{(1+5i)^{2020}}+\overline{(1-5i)^{2020}}$$
$$=(\overline{1+5i})^{2020}+(\overline{1-5i})^{2020}$$
$$=(1-5i)^{2020}+(1+5i)^{2020}$$
$$=(1+5i)^{2020}+(1-5i)^{2020}$$
$$=Z_1$$

Alors Z_1 est réel.

Pour montrer que Z_2 est imaginaire pur, il suffit de montrer que $\overline{Z_2}=-Z_2$.

$$\begin{aligned}\overline{Z_2} &= \overline{(1+5i)^{2020}-(1-5i)^{2020}}\\ &= \overline{(1+5i)^{2020}}-\overline{(1-5i)^{2020}}\\ &= (\overline{1+5i})^{2020}-(\overline{1-5i})^{2020}\\ &= (1-5i)^{2020}-(1+5i)^{2020}\\ &= -\left((1+5i)^{2020}-(1-5i)^{2020}\right)\\ &= -Z_2\end{aligned}$$

Alors Z_2 **est imaginaire pur.**

Corrigé 6

On utilise les propriétés des modules :

$|z_1| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5,$

$|z_2| = |3+i||2+5i| = \sqrt{9+1}\times\sqrt{4+25} = \sqrt{290},$

$|z_3| = \left|\dfrac{2+4i}{2+3i}\right| = \dfrac{|2+4i|}{|2+3i|} = \dfrac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{4+9}} = \sqrt{\dfrac{20}{13}},$

$$\begin{aligned}|z_4| &= |(1+2i)(3-5i)(1-2i)| = |1+2i||3-5i||1-2i|\\ &= \sqrt{1+4}\times\sqrt{9+25}\times\sqrt{1+4} = 5\sqrt{34},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|z_5| &= \left|\frac{(3-5i)(5+2i)^3}{(2+5i)^4}\right| = \frac{|(3-5i)|\left|(5+2i)^3\right|}{\left|(2+5i)^4\right|}\\ &= \frac{\sqrt{9+25}\times(\sqrt{25+4})^3}{(\sqrt{4+25})^4} = \sqrt{\frac{34}{29}}.\end{aligned}$$

Corrigé 7

1) On a

$z_1 = 4+4i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

On note $\arg z_1 = \theta_1$ **. Alors :**

$$\begin{cases}\cos\theta_1 = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta_1 = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

2) On a $z_2 = 3+i\sqrt{3} \Rightarrow |z_2| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

On note $\arg z_2 = \theta_2$ **. Alors :**

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

3) On constate que $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$ **.**

Alors $|z_3| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

et $\arg z_3 = \arg\dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{12}$

4) On constate que $z_4 = z_1 z_2$ **.**

Alors $|z_4| = |z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 4\sqrt{2}\times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{6}$ **,**

$\arg z_4 = \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{12}$

5) On constate que $z_5 = \dfrac{\overline{z_2}\, z_1^3}{z_2^4}$ **. Alors**

$|z_5| = \left|\dfrac{\overline{z_2}\, z_1^3}{z_2^4}\right| = \dfrac{|\overline{z_2}||z_1^3|}{|z_2^4|} = \dfrac{|z_2||z_1|^3}{|z_2|^4} = \dfrac{2\sqrt{3}(4\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{3})^4}$ $|z_5| = \dfrac{16}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$$\begin{aligned} \arg z_5 &= \arg\frac{\overline{z_2}\, z_1^3}{z_2^4} = \arg\overline{z_2}\, z_1^3 - \arg z_2^4 \\ &= \arg\overline{z_2} + \arg z_1^3 - \arg z_2^4 \\ &= -\arg z_2 + 3\arg z_1 - 4\arg z_2 \end{aligned}$$

$\arg z_5 = 3\arg z_1 - 5\arg z_2 = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{5\pi}{6}$.**. Alors** $\arg z_5 = \dfrac{-\pi}{12}$.

Corrigé 8

D'après l'exercice précédent :

1) $|z_1| = 4\sqrt{2}$ **et** $\arg z_1 = \dfrac{\pi}{4}$

Forme trigonométrique : $z_1 = 4\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})$

ou $z_1 = 4\sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}})$

Forme exponentielle : $z_1 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) $|z_2| = 2\sqrt{3}$ **et** $\arg z_2 = \frac{\pi}{6}$ ؛

Forme trigonométrique : $z_2 = 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

Ou $z_2 = 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$.

Forme exponentielle : $z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

3) $|z_3| = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ **et** $\arg z_3 = \frac{\pi}{12}$ ؛

Forme trigonométrique : $z_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$.

Forme exponentielle : $z_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

4) $|z_4| = 8\sqrt{6}$ **et** $\arg z_4 = \frac{5\pi}{12}$ ؛

Forme trigonométrique : $z_4 = 8\sqrt{6}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$.

Forme exponentielle : $z_4 = 8\sqrt{6}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

5) $|z_5| = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ **et** $\arg z_5 = \frac{-\pi}{12}$ ؛

Forme trigonométrique : $z_5 = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{-\pi}{12} + i\sin\frac{-\pi}{12})$.

Forme exponentielle : $z_5 = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

Corrigé 9

1) Forme trigonométrique de z_1 **et** z_2 **:**

D'après l'exercice précédent on a :

$z_1 = 4\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ **, et** $z_2 = 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

2.a) Forme trigonométrique de z_3 **:**

D'après l'exercice précédent on a : $z_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$ (*)

Pour écrire z_3 **sous la forme algébrique, on multiplie par le conjugué du dénominateur :** $z_3 = \frac{4+4i}{3+i\sqrt{3}} \times \frac{3-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$

On obtient : $z_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{3} + \frac{3-\sqrt{3}}{3}i$ (**)

b) Par comparaison des écritures (*) **et** (**) **du nombre** z_3 **on obtient :**

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}+3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}-3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3.a) D'après l'exercice précédent on a :

$z_4 = 8\sqrt{6}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$ (*)

Pour la forme algébrique de z_4 **, on développe :**

$z_4 = (4+4i)(3+i\sqrt{3})$

$z_4 = 12 - 4\sqrt{3} + (12+4\sqrt{3})i$ (**)

b) Par comparaison des écritures (*) **et** (**) **du nombre** z_4 **on obtient :**

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{12-4\sqrt{3}}{8\sqrt{6}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{12+4\sqrt{3}}{8\sqrt{6}} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Corrigé 10

1) Résolutions d'équations:

a) E_1 $z^2 + 2z + 10 = 0$

Le discriminant : $\Delta = 2^2 - 4\times1\times10 = -36 = (6i)^2$

Les solutions z_1 **et** z_2 **avec** $\operatorname{Im} z_2 \leq 0$**:**

$$z_1=\frac{-2+6i}{2}=-1+3i \text{ **et** } z_2=\frac{-2-6i}{2}=-1-3i$$

Ensemble de solution : $\boxed{S_1=\{-1+3i,-1-3i\}}$

b) E_2 **:** $z^2-4z+20=0$

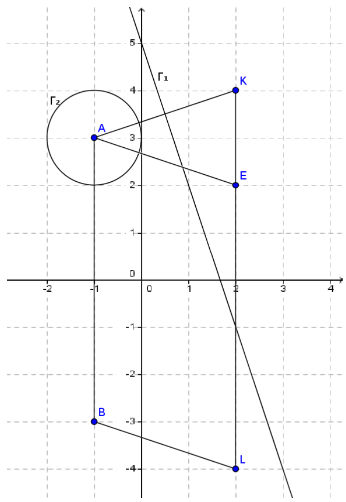
$$\Delta=4^2-4\times1\times20=16-80=-64=(8i)^2$$

Les solutions z_3 et z_4 avec $\mathrm{Im}\, z_4\le 0$ **:**

$$z_3=\frac{4+8i}{2}=2+4i \text{ **et** } z_4=\frac{4-8i}{2}=2-4i$$

Ensemble de solution : $\boxed{S_2=\{2+4i,2-4i\}}$

2.a) Représentation des points :



$z_A=z_1=-1+3i\Rightarrow A(-1,3)$ **,** $z_B=z_2=-1-3i\Rightarrow B(-1,-3)$

$z_K=z_3=2+4i\Rightarrow K(2,4)$ **,** $z_L=z_4=2-4i\Rightarrow L(2,-4)$

$z_E=z_3-2i=2+4i-2i=2+2i\Rightarrow E(2,2)$

b) Forme algébrique de z_E :

$z_E=z_3-2i=2+4i-2i\Rightarrow \boxed{z_E=2+2i}$

Forme trigonométrique :

$$z_E=2+2i\Rightarrow |z_E|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$z_E=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow \boxed{z_E=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

c) Nature du quadrilatère ABLE **:**

D'après la figure, il semble que ABLE est un parallélogramme. Pour la démonstration on a :

$$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=-1-3i+1-3i=-6i$$

$$z_{\overrightarrow{EL}}=z_L-z_E=2-4i-2-2i=-6i$$

$$z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{EL}}\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EL}$$

Alors ABLE est un parallélogramme.

Nature du triangle AKE **:**

D'après la figure, il semble que AKE est isocèle en A. Pour la démonstration on a :

$AK = |z_K - z_A| = |2+4i+1-3i| = |3+i| = \sqrt{10}$

$AE = |z_E - z_A| = |2+2i+1-3i| = |3-i| = \sqrt{10}$

AK=AE. Alors le triangle AKE est isocèle en A.

3.a) L'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)|=1$:

On a $f(z) = \dfrac{z-2-4i}{z+1-3i}$**. On constate que** $f(z) = \dfrac{z-z_K}{z-z_A}$ **.**

Alors : $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-z_K}{z-z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-z_K| = |z-z_A| \Leftrightarrow MK = MA$

D'où l'ensemble Γ_1 est la médiatrice du segment $[AK]$.

Pour la construction, voir la figure.

b)L'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)-1| = \sqrt{10}$:

On a $|f(z)-1| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-2-4i}{z+1-3i} - 1\right| = \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{z-2-4i-z-1+3i}{z+1-3i}\right| = \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{-3-i}{z+1-3i}\right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \dfrac{|-3-i|}{|z+1-3i|} = \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{10}}{|z-z_A|} = \sqrt{10} \qquad \Leftrightarrow |z-z_A| = 1 \qquad \Leftrightarrow AM = 1$

Alors Γ_2 est le cercle de centre A et de rayon 1.

Pour la construction, voir la figure.

Corrigé 11

On a pour tout nombre complexe z : $\mathbf{P(z) = z^3 - 5z^2 + 12z - 8}$

1. a) En remplaçant z par 1 on obtient :

$\mathbf{P(1) = (1)^3 - 5(1) + 12(1) - 8 = -4 + 4 = 0}$

b) <u>1^{ère} méthode : identification</u>

Pour déterminer a et b tels que : $\mathbf{P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)}$**, on utilise une identification (Développer, réduire, ordonner le second membre et identifier) :**

$$(z-1)(z^2+az+b)=z^3+az^2+bz-z^2-az-b$$
$$=z^3+(a-1)z^2+(b-a)z-b$$

<u>Par identification :</u>

$z^3-5z^2+12z-8=z^3+(a-1)z^2+(b-a)z-b$, **pour tout** $z\in\mathbb{C}$; **on obtient le**

système : $\begin{cases} a-1=-5 \\ b-a=12 \\ -b=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=8 \end{cases}$

Alors, pour tout $z\in\mathbb{C}$; $P(z) = (z-1)(z^2-4z+8)$

<u>2ème méthode : Division euclidienne</u>

$$\begin{array}{r|l} z^3-5z^2+12z-8 & z-1 \\ \hline z^3-z^2 & z^2-4z+8 \\ -4z^2+12z-8 & \\ -4z^2+4z & \\ 8z-8 & \\ 8z-8 & \\ 0 & \end{array}$$

On en déduit que, pour tout $z\in\mathbb{C}$; $P(z) = (z-1)(z^2-4z+8)$

soit $a=-4$ **et** $b=8$.

<u>3ème méthode : Tableau d'Horner</u>

L'utilisation du tableau d'Horner permet à la fois de calculer $P(1)$ **et factoriser** $P(z)$ **, (si** $P(1)=0$ **) :**

	1	-5	12	-8
1		1	-4	8
	1	-4	8	0

D'où : $a=-4$ **,** $b=8$ **,** $P(1)=0$ **et** $P(z) = (z-1)(z^2-4z+8)$

c) L'équation $P(z)=0$ **équivaut** $z-1=0$ **ou** $z^2-4z+8=0$.

*** Si** $z-1=0$ **on obtient la solution** $z_1=1$

***Si** $z^2-4z+8=0$, **on a** $\Delta=16-32=-16=(4i)^2$

Les solutions de cette équation sont : $z_2 = \frac{4+4i}{2} = 2+2i$; $z_3 = \frac{4-4i}{2} = 2-2i$

(Ces solutions sont conjuguées car les coefficients sont réels et le discriminant est négatif).

L'ensemble de solutions de l'équation $P(z)=0$ est : $S = \{1; 2+2i; 2-2i\}$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Les points A, B et C sont d'affixes : $z_A = 1$, $z_B = 2+2i$ et $z_C = 2-2i$.

a) Calcul de modules arguments :

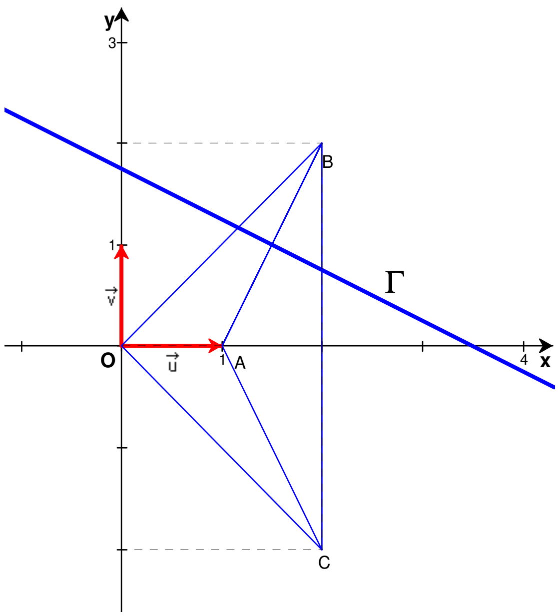
$|z_1| = |1| = 1$, $\arg z_1 = 0 \ [2\pi]$

$|z_2| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$, $\arg z_2 = \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$

$|z_3| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8}$, $\arg z_3 = \frac{-\pi}{4} \ [2\pi]$

b) Représentation des points :

Les points A,B et C ont pour affixes Les points $z_A = 1$, $z_B = 2+2i$ et $z_C = 2-2i$. Alors $A(1;0)$, $B(2;2)$ et $C(2;-2)$.



3.a) On a :

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{2+2i}{2-2i}$$
$$= \frac{1+i}{1-i}$$
$$= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{2i}{2}$$
$$= i$$

On remarque que $\frac{z_2}{z_3}=\frac{z_B-z_O}{z_C-z_O}$. Alors $\frac{z_B-z_O}{z_C-z_O}=i$, d'où le triangle OBC est rectangle isocèle en O.

b) Pour déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que $\left|\frac{z-1}{z-2-2i}\right|=1$, on constate que cette égalité peut s'écrire : $\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|=1$

Alors $M\in\Gamma \Leftrightarrow |z-z_A|=|z-z_B| \Leftrightarrow AM=BM$

D'où l'ensemble Γ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Méthode 2 : Equation de Γ

On pose $z=x+iy$;

$$M\in\Gamma \Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{z-2-2i}\right|=1$$

$$\Leftrightarrow |z-1|=|z-2-2i|$$

$$\Leftrightarrow |x-1+iy|=|x-2+(y-2)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=(x-2)^2+(y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=x^2-4x+4+y^2-4y+4$$

$$\Leftrightarrow 2x+4y-7=0$$

D'où l'ensemble Γ est la droite d'équation $2x+4y-7=0$.

Remarque :

L'équation $2x+4y-7=0$ représente la médiatrice du segment $[AB]$.

Corrigé 12

1) Ensembles de points

a)Soit E_1 l'ensemble des points M du plan tels que $|z'|=3$.

On a : $|z'|=3 \Rightarrow \left|\frac{3iz+6+4i}{z-3i}\right|=3$. Alors $\left|\frac{3i\left(z+\frac{6+4i}{3i}\right)}{z-3i}\right|=3$.

d'où $|3i|\left|\dfrac{z+\dfrac{6+4i}{3i}}{z-3i}\right|=3$

$\left|\dfrac{z+\dfrac{4}{3}-2i}{z-3i}\right|=1$. E_1 donc, est la médiatrice du segment $[DC]$ où $D(-\dfrac{4}{3},2)$.

b) Soit E_2 l'ensemble des points M du plan tels que $|z'-3i|=3$. On a :

$|z'-3i|=3 \Rightarrow \left|\dfrac{3iz+6+4i}{z-3i}-3i\right|=3 \Leftrightarrow \left|\dfrac{3iz+6+4i-3iz-9}{z-3i}\right|=3$

$\left|\dfrac{-3+4i}{z-3i}\right|=3 \Leftrightarrow \dfrac{5}{|z-3i|}=3 \Leftrightarrow |z-3i|=\dfrac{5}{3}$ soit $|z_M-z_c|=\dfrac{5}{3}$

E_2 donc, est le cercle de centre C et de rayon $\dfrac{5}{3}$.

c) Soit E_3 l'ensemble des points M du plan tels que $z'\in\mathbb{R}$. On a :

$z'\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(z'=0 \text{ ou } \arg\dfrac{3iz+6+4i}{z-3i}=0\ [\pi]\right)$

Soit $z'=0\Leftrightarrow 3iz+6+4i=0 \Leftrightarrow z=-\dfrac{4}{3}+2i \Leftrightarrow M=D$

Soit $\arg\dfrac{3iz+6+4i}{z-3i}=0\ [\pi] \Leftrightarrow \arg 3i+\arg\dfrac{z+\dfrac{6+4i}{3i}}{z-3i}=0[\pi] \Leftrightarrow$

$\arg\dfrac{z+\dfrac{4}{3}-2i}{z-3i}=\dfrac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow$

$\arg\dfrac{z_M-z_D}{z_M-z_C}=\dfrac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD})=\dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

M appartient au cercle de diamètre $[CD]$ privé de C et D. En particulier si M est en D, $z'=0$.

Enfin, E_3 est le cercle de diamètre $[CD]$ privé de C.

d) Soit E_4 l'ensemble des points M du plan tels que $\arg z'=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$. On a :

$\arg z'=\dfrac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow \arg 3i+\arg\dfrac{z+\dfrac{6+4i}{3i}}{z-3i}=\dfrac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}+\arg\dfrac{z+\dfrac{4}{3}-2i}{z-3i}=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \arg\frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

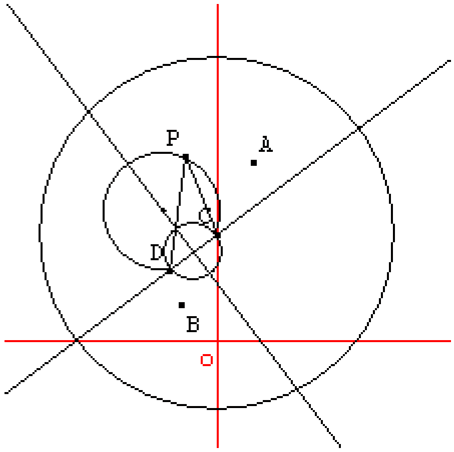
E_4 donc, est un arc (de sens indirect) d'un cercle d'extrémités C et D exclues.

e) Soit E_5 l'ensemble des points M du plan tels que $\arg z' = \frac{\pi}{2}[\pi]$. On a :

$\arg z' = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \arg\frac{z + \frac{4}{3} - 2i}{z - 3i} = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = 0[\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = 0[\pi]$

E_5 donc, est la droite (CD) privée de C et D.



2) Pour montrer que les points A ;B ;M et M' sont cocycliques ou alignés, il suffit de montrer que le nombre Z tel que : $Z = \frac{z' - z_A}{z' - z_B} \times \frac{z - z_B}{z - z_A}$ soit réel.

On a : $Z = \dfrac{\dfrac{3iz + 6 + 4i}{z - 3i} - 1 - 5i}{\dfrac{3iz + 6 + 4i}{z - 3i} + 1 - i} \times \dfrac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i} \Leftrightarrow$

$Z = \dfrac{\dfrac{3iz + 6 + 4i - z + 3i - 5iz - 15}{z - 3i}}{\dfrac{3iz + 6 + 4i + z - 3i - iz - 3}{z - 3i}} \times \dfrac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i}$

$\Leftrightarrow Z = \dfrac{-2iz - z + 7i - 9}{2iz + z + i + 3} \times \dfrac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i} \Leftrightarrow Z = \dfrac{(-2i - 1)z + 7i - 9}{(2i + 1)z + i + 3} \times \dfrac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i}$

$$\Leftrightarrow Z=\frac{(-2i-1)\left(z+\frac{7i-9}{-2i-1}\right)}{(2i+1)\left(z+\frac{i+3}{2i+1}\right)}\times\frac{z+1-i}{z-1-5i}\Leftrightarrow Z=\frac{-\left(z+\frac{7i-9}{-2i-1}\right)}{z+\frac{i+3}{2i+1}}\times\frac{z+1-i}{z-1-5i}$$

$$Z=\frac{-(z-1-5i)}{z+1-i}\times\frac{z+1-i}{z-1-5i}$$

$Z=-1$ d'où $Z\in\mathbb{R}^*$

Alors les points A,B,M et M' sont cocycliques ou alignés.

Corrigé 13

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z)=z^3-(11+6i)z^2+(28+38i)z-12-60i$ où z est un nombre complexe.

a)Pour calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$P(z)=(z-3)(z^2+az+b)$, on peut utiliser la division euclidienne, une identification ou le <u>tableau d'Horner :</u>

	1	$-11-6i$	$28+38i$	$-12-60i$
3		3	$-24-18i$	$12+60i$
	1	$-8-6i$	$4+20i$	0

Alors, $P(3)=0$ et pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z)=(z-3)(z^2+(-8-6i)z+4+20i)$.

Donc $a=-8-6i$ et $b=4+20i$.

b) L'équation $P(z)=0$ équivaut à $z-3=0$ ou $z^2+(-8-6i)z+4+20i=0$

On a $z-3=0\Leftrightarrow z=3$.

Le discriminent de l'équation du second degré est

$$\Delta=(-8-6i)^2-4(4+20i)=64-36+96i-16-80i$$

$\Delta=12+16i=(4+2i)^2$. Donc $\delta=4+2i$.

Les solutions sont

$$z_1=\frac{8+6i+4+2i}{2}=6+4i \text{ et } z_2=\frac{8+6i-4-2i}{2}=2+2i.$$

<u>Conclusion :</u> L'ensemble de solutions de l'équation $P(z)=0$ est $S=\{3,\quad 6+4i,\quad 2+2i\}$.

c) Les points A, B et C sont les images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $Im(z_A)<Im(z_B)<Im(z_C)$. Donc $z_A=3$, $z_B=2+2i$ et $z_C=6+4i$.

G barycentre du système $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$. G est alors le quatrième sommet du parallélogramme ABCG.

L'affixe de G est : $z_G = \dfrac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2-2+2}$

$z_G = \dfrac{2(3)-2(2+2i)+2(6+4i)}{2} = \dfrac{14+4i}{2} = 7+2i$

2) L'application f_k du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC}.$$

Cette question sera traitée par deux méthodes : Calcul vectoriel ou nombres complexes

<u>Méthode1 : Calcul vectoriel</u>

a) L'application f_k est une translation si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est constant.

La fonction vectorielle de Leibniz $(M \mapsto 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC})$ est constante si et seulement si le poids du système $\{(A;2),(B;-2),(C;3-k)\}$ est nul. Ce qui équivaut à $3-k=0$. Soit $k=3$.

Alors, f_k est une translation si et seulement si $k=3$. On obtient son vecteur en remplaçant M dans l'expression vectorielle $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC}$ par n'importe quel point. Pour M en C on obtient $\vec{v} = 2\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BA}$.

b) Si $k \neq 3$, le poids du système $\{(A;2),(B;-2),(C;3-k)\}$ est non nul. Donc ce système admet un barycentre G_k et on a pour tout point M du plan $2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC} = (3-k)\overrightarrow{MG_k}$. D'où :

$f_k(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = (3-k)\overrightarrow{MG_k}$.

$f_k(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_k} + \overrightarrow{G_kM'} = (3-k)\overrightarrow{MG_k}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{G_kM'} = (2-k)\overrightarrow{MG_k}$

Enfin , $f_k(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{G_kM'} = (k-2)\overrightarrow{G_kM}$

Particulièrement, pour $k=2$ on a : $f_2(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{G_2M'}=\vec{0} \Leftrightarrow M'=G_2$ donc l'application f_2 est constante.

G_2 est le barycentre du système $\{(A;2),(B;-2),(C;1)\}$. Alors $\overrightarrow{CG_2} = 2\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BA}$. Donc $\overrightarrow{CG_2} = 2\overrightarrow{CG}$. Alors G_2 est le symétrique de C par rapport à G.

Maintenant, si $k \in \mathbb{R}\setminus\{2;3\}$ et M un point invariant par f_k, alors $f_k(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{G_kM} = (k-2)\overrightarrow{G_kM} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_kM} = \vec{0} \Leftrightarrow M = G_k$. D'où f_k admet un unique point invariant $\Omega_k = G_k = \text{bar}\{(A;2),(B;-2),(C;3-k)\}$.

f_k est l'homothétie de centre Ω_k et de rapport $k-2$.

c) On a $\Omega_k = G_k = \text{bar}\{(A;2),(B;-2),(C;3-k)\}$

Donc $2\overrightarrow{\Omega_kA} - 2\overrightarrow{\Omega_kB} + (3-k)\overrightarrow{\Omega_kC} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{BA} + (3-k)\overrightarrow{\Omega_kC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{\Omega_k C} = \frac{2}{3-k}\overrightarrow{AB}$

Alors Ω_k est situé sur la droite passant par C et parallèle à (AB).

Comme $\frac{2}{3-k} \neq 0$ et $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, on a $\overrightarrow{\Omega_k C} \neq \vec{0}$ donc $\Omega_k \neq C$.

Comme $k \neq 2$, on a $\overrightarrow{\Omega_k C} \neq 2\overrightarrow{AB}$ donc $\Omega_k \neq G_2$ où G_2 est le point tel que $\overrightarrow{G_2 C} = 2\overrightarrow{AB}$. G_2 est le symétrique de C par rapport à G. C'est aussi le quatrième sommet du parallélogramme ABGG_2.

Conclusion : Le lieu géométrique des points Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$ est la droite passant par C et parallèle à (AB) privée de C et G_2.

d) Le centre de gravité R du triangle AMM' est le barycentre du système $\{(A;1),(M;1),(M';1)\}$. Alors pour tout point M du plan on a, pour $k = 1$:

$3\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MA} + \cancel{\overrightarrow{MM}} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + (2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{BC}$

D'où $3\overrightarrow{MR} - 3\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{BC}$.

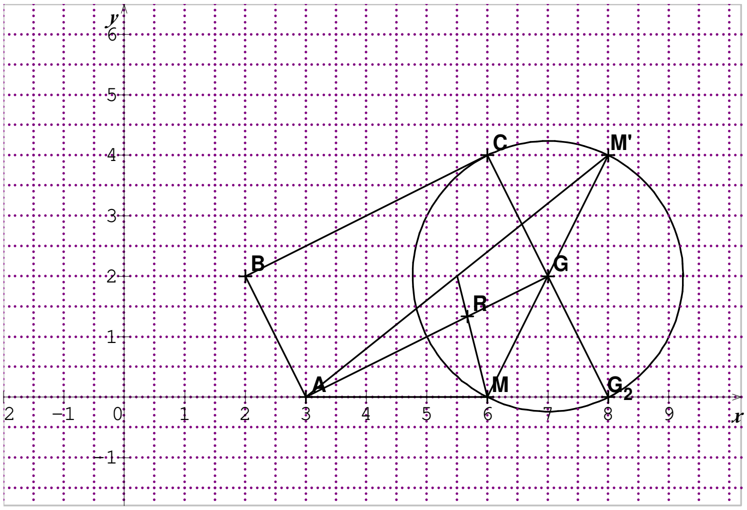
Enfin $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. D'où le centre de gravité R du triangle AMM' est un point fixe indépendant de la position de M. Le lieu géométrique de R est un point fixe.

On peut aussi remarquer que, pour $k = 1$, la transformation f_k est l'homothétie de centre $\Omega_1 = \mathrm{bar}\{(A;2),(B;-2),(C;2)\} = G$ et de rapport $k - 2 = -1$. Alors c'est une symétrie centrale de centre G. Donc G est le milieu du segment $[MM']$.

D'où le barycentre R du système $\{(A;1),(M;1),(M';1)\}$ est celui de $\{(A;1),(G;2)\}$.

Donc $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. Comme $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC}$ on retrouve le résultat précédent $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Le centre de gravité R du triangle AMM' est fixe car le milieu G des points variables M et M' est un point fixe.



<u>Méthode2 : Nombres complexes</u>

a) On désigne par z et z' les affixes respectives de M et M'.

$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow z' - z = 2(z_A - z) - 2(z_B - z) + (3-k)(z_C - z)$

$\Leftrightarrow z' - z = 2(3-z) - 2(2+2i-z) + (3-k)(6+4i-z)$

$\Leftrightarrow z' = z + 6 - 2z - 4 - 4i + 2z + 18 - 6k + 12i - 4ki - (3-k)z$

$\Leftrightarrow z' = (k-2)z + 20 - 6k + (8-4k)i$

Une expression de type $z' = az + b$ **avec** $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$ **.**

Si $k = 3$**, on a** $z' = z + 2 - 4i$ **donc** f_3 **est une translation dont le vecteur a pour affixe** $2 - 4i$ **. Soit** $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$**.**

Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{2;3\}$**, alors** $k - 2 \neq 0$ **et** $k - 2 \neq 1$**. Les points invariants sont d'affixes z vérifiant** $z' = z$ **.**

$$z' = z \Leftrightarrow z = (k-2)z + 20 - 6k + (8-4k)i \Leftrightarrow z = \frac{20 - 6k + (8-4k)i}{3-k}$$

D'où f_k **admet un unique point invariant** Ω_k **d'affixe** $z_k = \dfrac{20 - 6k + (8-4k)i}{3-k}$**.**

D'après la forme complexe $z' = (k-2)z + 20 - 6k + (8-4k)i$ **,** f_k **est l'homothétie de centre** Ω_k **et de rapport** $k - 2$ **.**

c) L'affixe de Ω_k **est** $z_k = \dfrac{20 - 6k + (8-4k)i}{3-k} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{20-6k}{3-k} = \dfrac{6k-20}{k-3} \\ y_k = \dfrac{8-4k}{3-k} = \dfrac{4k-8}{k-3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_k = 6 - \dfrac{2}{k-3} \\ y_k = 4 + \dfrac{4}{k-3} \end{cases} \Rightarrow 2x + y - 16 = 0$$ **. C'est l'équation d'une droite** Δ **.**

Comme $(x_k,y_k)=\left(6-\frac{2}{k-3},4+\frac{4}{k-3}\right)$ **avec** $\frac{2}{k-3}\neq 0$ **et** $\frac{4}{k-3}\neq 0$. **On a alors** $(x_k,y_k)\neq(6,4)$. **D'où** $\Omega_k\neq C(6,4)$.

Comme $k\neq 2,$ **on a** $(x_k,y_k)\neq(x_2,y_2)\Leftrightarrow$ $(x_k,y_k)\neq\left(6-\frac{2}{2-3},4+\frac{4}{2-3}\right)\Rightarrow(x_k,y_k)\neq(8,0)$, **donc** $\Omega_k\neq G_2(8,0)$.

Conclusion : Le lieu géométrique des points Ω_k **lorsque** k **décrit** $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$ **est la droite** Δ **d'équation** $2x+y-16=0$ **privée de** $C(6,4)$ **et** $G_2(8,0)$.

*** Pour** $k=1$, $\Omega_1=G_1=\text{bar}\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$. **C'est le quatrième sommet du parallélogramme** $ABCG_1$, **avec** $\begin{cases} x_1=\frac{14}{2}=7\\ y_1=\frac{4}{2}=2\end{cases}$. **D'où** $\Omega_1(7,2)$.

d) L'affixe de M' est $z'=(k-2)z+20-6k+(8-4k)i$. **Pour** $k=1$, **on a** $z'=-z+14+4i$. **Alors l'affixe du point R centre de gravité du triangle** AMM' **est**

$$z_R=\frac{z_A+z+z'}{3}$$

$$z_R=\frac{z+(-z+14+4i)+3}{3}$$

$z_R=\frac{17+4i}{3}=\frac{17}{3}+\frac{4}{3}i$. **Alors lorsque** M **décrit le cercle** Γ **de centre G passant par C, le point R reste fixe.**

3) Pour tout point M **du plan on a** $\varphi(M)=2MA^2-2MB^2+2MC^2$ **et** Γ_m **l'ensemble des points** M **tels que** $\varphi(M)=m$, **où** m **est un réel.**

La somme des coefficients est égale à 2 (non nulle). Le barycentre G de ce système est le point $\Omega_1(7,2)$.

Alors, par transformation d'écriture on obtient l'écriture réduite $\varphi(M)=2MG^2+\varphi(G)$.

Donc $M\in\Gamma_m\Leftrightarrow 2MG^2+\varphi(G)=m$

soit $MG^2=\frac{m-\varphi(G)}{2}$.

Calculons $\varphi(G)$ **:**

On a $\varphi(G)=2GA^2-2GB^2+2GC^2$. **On remarque que G est le point** $\Omega_1(7,2)$.

Donc : $GA^2=|z_A-z_G|^2=|3-7-2i|^2=|-4-2i|^2=20$

$GB^2=|z_B-z_G|^2=|2+2i-7-2i|^2=|-5|^2=25$

$GC^2=|z_C-z_G|^2=|6+4i-7-2i|^2=|-1+2i|^2=5$.

Alors $\varphi(G)=2GA^2-2GB^2+2GC^2$

$\varphi(G) = 2\times 20 - 2\times 25 + 2\times 5$

Enfin $\varphi(G) = 0$**. D'où** $M \in \Gamma_m \Leftrightarrow MG^2 = \frac{m}{2}$ **.**

Discussion suivant les valeurs de m:

$m < 0$ **:** Γ_m **est l'ensemble vide.**

$m = 0$ **:** Γ_m **est le point G**

$m > 0$ **:** Γ_m **est le cercle de centre G et de rayon** $r = \sqrt{\frac{m}{2}}$ **.**

b) D'après les résultats précédents, pour $m = 10$**, l'ensemble est un cercle de centre G et de rayon** $r = \sqrt{\frac{m}{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}$**. Comme** $GC^2 = 5$**, ce cercle passe par C. Donc** Γ_{10} **est le cercle de centre G passant par C.**

Corrigé 14

- **Soit** $z_0 = \alpha\ ,\alpha \in \mathbb{R}$ **la solution réelle de l'équation**

$$E:\quad z^3 - (6+3i)z^2 + (21+19i)z - 26(1+i) = 0$$

Alors : $\alpha^3 - (6+3i)\alpha^2 + (21+19i)\alpha - 26(1+i) = 0$

$$\alpha^3 - 6\alpha^2 - 3i\alpha^2 + 21\alpha + 19i\alpha - 26 - 26i = 0$$
$$\alpha^3 - 6\alpha^2 + 21\alpha - 26 + (-3\alpha^2 + 19\alpha - 26)i = 0$$

- **On résout le système :**

$$\begin{cases} \alpha^3 - 6\alpha^2 + 21\alpha - 26 = 0 & (1) \\ -3\alpha^2 + 19\alpha - 26 = 0 & (2) \end{cases}$$

D'après (2) **On trouve :** $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \frac{13}{3}$**.**

En remplaçant dans (1) **on trouve que** $\alpha_1 = 2$ **vérifie** (1) **et** $\alpha_2 = \frac{13}{3}$ **ne vérifie pas** (1) **Alors** $z_0 = 2$

- **On pose** $P(z) = z^3 - (6+3i)z^2 + (21+19i)z - 26(1+i)$

On factorise par $(z-2)$ **:**

On utilise le tableau d'Horner ;

	1	-6-3i	21+19i	-26-26i
2		2	-8-6i	26+26i
	1	-4-3i	13+13i	0

Alors : $P(z) = (z-2)(z^2 + (-4-3i)z + 13 + 13i)$

- **Résolvons l'équation :** $z^2 - (4+3i)z + 13 + 13i = 0$

$\Delta = (4+3i)^2 - 52 - 52i = -45 - 28i$.

Par le calcul on obtient une racine carrée $\delta = 2 - 7i$.

Les racines de l'équation du second degré :

$$z_1 = \frac{4+3i+2-7i}{2} = 3-2i; \quad z_2 = \frac{4+3i-2+7i}{2} = 1+5i$$

- **Ensemble de solution :** $S = \{2, 3-2i, 1+5i\}$

Corrigé 15

1) On a : $$a^2 = \left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)^2$$

$$a^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} + 2i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2}} - \frac{2+\sqrt{3}}{2} \quad a^2 = \frac{-2\sqrt{3}}{2} + 2i\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow a^2 = -\sqrt{3} + i$$

- **Module :** $|a^2| = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} \Rightarrow |a^2| = 2$

- **Argument : Soit** θ **un réel tel que** $\arg a^2 = \theta$

Alors : $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \arg a^2 = \frac{5\pi}{6}$.

2.a) Module et argument de a **:**

- **Module :** $|a^2| = 2 \Rightarrow |a| = \sqrt{2}$

- **Argument :** $\arg a^2 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow 2\arg a = \frac{5\pi}{6}$

$$\arg a = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \{0, 1\}$$

Soit $k = 0 \Rightarrow \arg a = \frac{5\pi}{12}$

Soit $k = 1 \Rightarrow \arg a = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$.

Comme $\mathrm{Re}(a) > 0$ et $\mathrm{Im}(a) > 0$, $\arg a \neq \frac{17\pi}{12}$. Enfin , $\arg a = \frac{5\pi}{12}$.

3) D'après ce qui précède, on déduit que :

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

4) Le nombre a^n est réel si et seulement si $\arg a^n = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$:

$$\arg a^n = k\pi \Leftrightarrow \frac{5n\pi}{12} = k\pi \Leftrightarrow 5n = 12k \Leftrightarrow n = \frac{12k}{5}$$

n est un entier naturel et le nombre 12 n'est pas divisible par 5, donc k est divisible par 5. On prend $k = 5k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.

$$\arg a^n = k\pi \Leftrightarrow n = 12 \times \frac{k}{5} \Leftrightarrow n = 12k'$$

Alors, l'ensemble des valeurs de n tels que a^n soit réel c'est les multiples de 12.

Corrigé 16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z) = z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i)z - 12 - 60i$ où z est un nombre complexe.

a)Pour calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que:

$P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$, on peut utiliser la division euclidienne, une identification ou le <u>tableau d'Horner :</u>

	1	$-11-6i$	$28+38i$	$-12-60i$
3		3	$-24-18i$	$12+60i$
	1	$-8-6i$	$4+20i$	0

Alors, $P(3)=0$ et pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z)=(z-3)(z^2+(-8-6i)z+4+20i)$.

Donc $a=-8-6i$ et $b=4+20i$.

b) L'équation $P(z)=0$ équivaut à $z-3=0$ ou $z^2+(-8-6i)z+4+20i=0$

On a $z-3=0 \Leftrightarrow z=3$.

Le discriminant de l'équation du second degré est

$\Delta=(-8-6i)^2-4(4+20i)=64-36+96i-16-80i$

$\Delta=12+16i=(4+2i)^2$. Donc $\delta=4+2i$.

Les solutions sont : $z_1=\dfrac{8+6i+4+2i}{2}=6+4i$ et $z_2=\dfrac{8+6i-4-2i}{2}=2+2i$.

<u>**Conclusion :**</u> L'ensemble de solutions de l'équation $P(z)=0$ est $S=\{3, \quad 6+4i, \quad 2+2i\}$.

Corrigé 17

Pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=z^3-(1+2\cos\theta)z^2+(1+2\cos\theta)z-1$ où $\theta\in[0;2\pi[$.

1.a) Calcul de $P(1)$:

$P(1)=1-(1+2\cos\theta)\times1^2+(1+2\cos\theta)\times1-1=0$

- Pour résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$, on factorise $P(z)$ et pour cela on peut utiliser la division euclidienne , une identification ,ou bien le tableau d'Horner : 1 est une racine du polynôme P

	1	$-1-2\cos\theta$	$1+2\cos\theta$	-1
1		1	$-2\cos\theta$	1
	1	$-2\cos\theta$	1	0

Alors Pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z-1)(z^2-2\cos\theta z+1)$

$P(z)=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2-2\cos\theta z+1)=0$

soit $z-1=0 \Rightarrow z_0=1\in\mathbb{R}$

ou $z^2-2\cos\theta z+1=0$

Résolvons l'équation : $z^2-2\cos\theta z+1=0$

$$\Delta' = (-\cos)^2 - 1\times 1$$
$$= \cos^2\theta - 1$$
$$= -(1-\cos^2\theta)$$
$$=(i\sin\theta)^2$$

Donc

$$z' = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$z'' = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Si $\sin\theta \geq 0$, $\mathrm{Im}(z_1) \geq 0 \Rightarrow z_1 = z' = \cos\theta + i\sin\theta$ **et** $z_2 = \cos\theta - i\sin\theta$.

Donc l'ensemble de solutions de l'équation $P(z) = 0$ **dans** $\mathbb{C}$ **est :** $S = \{1;\cos\theta + i\sin\theta;\cos\theta - i\sin\theta\}$.

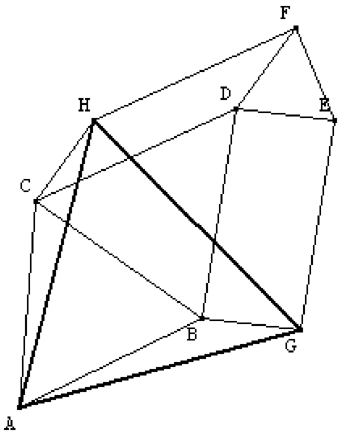
Corrigé 18

1) ABC est équilatéral direct :

$$\Rightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (c-a) = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

DEF est équilatéral direct :

$$\Rightarrow \frac{f-d}{e-d} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (f-d) = e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$$



2) EDBG est un Parallélogramme

$\Rightarrow \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DE} \Rightarrow g-b = e-d \Rightarrow g = b+e-d$

DCHF est un parallélogramme $\Rightarrow h-c = f-d$
$\Rightarrow h = c+f-d$

3) On calcule $\dfrac{h-a}{g-a}$

$g-a = b-a+e-d$, $h-a = c-a+f-d$

$$h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) + e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$$

$$h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a+e-d) \Rightarrow h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$$

$\dfrac{h-a}{g-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\Rightarrow$ **AGH est équilatéral direct.**

Corrigé 19

1.a) Pour calculer P(3i) on remplace z par 3i :

$$\begin{aligned} P(3i) &= (3i)^3 - (1+4i)(3i)^2 - (9-i)(3i) - 6 + 18i \\ &= -27i + 9 + 36i - 27i - 3 - 6 + 18i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Alors le nombre $3i$ est une racine de P .

Donc ils existent deux nombres complexes a et b tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-3i)(z^2+az+b)$.

Utilisons le tableau d'Horner pour les déterminer :

	1	-1-4i	-9+i	-6+18i
3i		3i	-3i+3	-18i+6
	1	-1-i	-6-2i	0

D'où $a = -1-i$ et $b = -6-2i$

Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-3i)\left(z^2 - (1+i)z - 6 - 2i\right)$

b) On a $P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 3i = 0$ ou $z^2 - (1+i)z - 6 - 2i = 0$.

D'une part $z - 3i = 0 \Leftrightarrow z = 3i$

D'autre part, le discriminant de l'équation $z^2 - (1+i)z - 6 - 2i = 0$ est

$$\Delta = (1+i)^2 + 4(6+2i) = 24 + 10i = 25 - 1 + 2\times 5\times i = (5+i)^2$$

D'où $\delta = 5 + i$ est une racine carrée de Δ .

Alors les solutions de cette équation sont

$$z' = \frac{1+i+(5+i)}{2} = 3+i \text{ et } z'' = \frac{1+i-(5+i)}{2} = -2.$$

<u>**Conclusion**</u> **: L'ensemble de solutions de l'équation $P(z) = 0$ est**

$$S = \{-2, 3i, 3+i\}$$

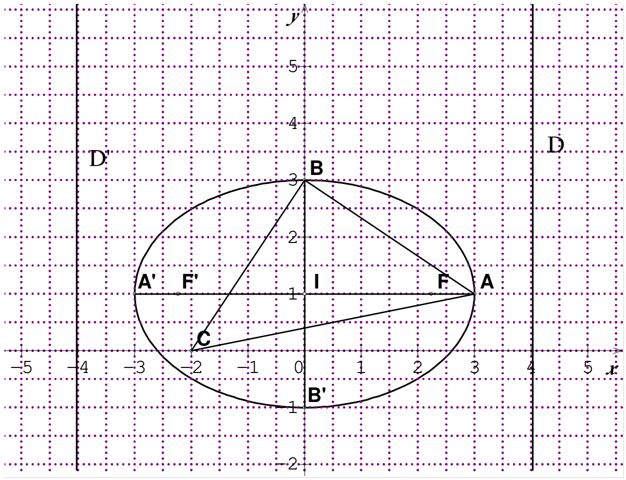
c) En remarquant que $|-2|<|3i|<|3+i|$; on a alors $z_A = 3+i;\ z_B = 3i$ et $z_C = -2$.

Construction :

$z_A = 3+i \Rightarrow A(3;1)$

$z_B = 3i \Rightarrow B(0;3)$

$z_C = -2 \Rightarrow C(-2;0)$



On a $\dfrac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \dfrac{3i - (3+i)}{3i - (-2)} = \dfrac{-3+2i}{2+3i} = \dfrac{i(3i+2)}{2+3i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et

$\dfrac{BA}{BC} = 1$. D'où le triangle ABC est rectangle isocèle direct en B.

d) Le point A' est le barycentre du système $\{(A;-5),(B;6),(C;12)\}$. Alors L'affixe de A' est $z_{A'} = \dfrac{-5z_A + 6z_B + 12z_C}{-5+6+12}$

$z_{A'} = \dfrac{-5(3+i)+6(3i)+12(-2)}{-5+6+12}$

$z_{A'} = \dfrac{-39+13i}{13}$

Donc : $z_{A'} = -3+i$ et $A'(-3;1)$

2.a) Puisque les points $A,\ A'$ et B sont des sommets de l'ellipse Γ , et B appartient à la médiatrice du segment $[AA']$, donc la droite (AA') est un axe de Γ et par suite le centre de Γ est le milieu I de $[AA']$.

Son affixe est $z_I = \dfrac{z_A + z_{A'}}{2}$

$$z_I = \frac{3+i+(-3+i)}{2}$$

$$z_I = i$$

Alors le centre de Γ est le point $I(0,1)$.

Les demi-longueurs des axes sont $a = IA = |z_A - z_I| = ||3 + i - i| = |3| = 3$ et $b = IB = |z_B - z_I| = |3i - i| = |2i| = 2$ donc $a > b$, d'où $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ et par conséquent l'excentricité de Γ est $e = \dfrac{c}{a} \Rightarrow e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

b) Le centre de Γ est le point $I(0,1)$. Ses demi-longueurs des axes sont $a = 3$ et $b = 2$. Alors, une équation cartésienne de Γ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est

$$\frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$$

C'est-à-dire : $$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

c) Pour déterminer les coordonnées (x,y) des points d'intersection de Γ avec (Ox), on résout le système :

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1 \end{cases}$$

Ceci équivaut à $$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{1}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{9} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = \dfrac{27}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{27}{4}} \end{cases}$$

Donc Γ coupe (Ox) en deux points $M\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$ et $N\left(\dfrac{-3\sqrt{3}}{2},0\right)$.

d) Dans le repère $(I;\vec{i},\vec{j})$, l'équation réduite de Γ est $\dfrac{X^2}{9}+\dfrac{Y^2}{4}=1$; avec

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y-1 \end{cases}$$

Les foyers de Γ sont $F(c;0)$ et $F'(-c;0)$ avec $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

Donc $F(\sqrt{5};0)$ et $F'(-\sqrt{5};0)$.

Les directrices de Γ sont les droites D et D' d'équations respectives

$$X=\frac{a^2}{c} \text{ et } X=-\frac{a^2}{c}.$$

Donc $X=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$ et $X=-\dfrac{9}{\sqrt{5}}$.

Alors dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

Les foyers : $F(\sqrt{5};1)$ et $F'(-\sqrt{5};1)$ car $Y=y-1 \Rightarrow y=Y+1$.

Les directrices ont pour équations: $x=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$ et $x=-\dfrac{9}{\sqrt{5}}$ car $X=x$.

Pour la construction voir la figure précédente.

Corrigé 20

1.a) $P(z)=z^3-(7+3i)z^2+(12+15i)z-4-18i$

$P(2)=2^3-(7+3i)2^2+(12+15i)2-4-18i=8-28-12i+24+30i-4-18i=0$.

Alors le nombre 2 est une racine de P . Donc ils existent deux nombres complexes a et b tels que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$. Uutilisons le tableau d'Horner pour les déterminer :

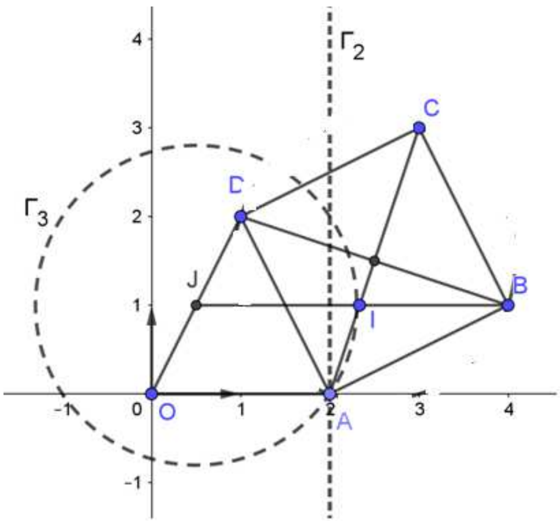
	1	-7-3i	12+15i	-4-18i
2		2	-10-6i	4+18i
	1	-5-3i	2+9i	0

D'où $a=-5-3i$ **et** $b=2+9i$

Alors pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=(z-2)\left(z^2-(5+3i)z+2+9i\right)$

b) $P(z)=0 \Leftrightarrow z=2$ **ou** $z^2-(5+3i)z+2+9i=0$. **Pour cette dernière équation on a** $\Delta=(5+3i)^2-4(2+9i)=8-6i=(3-i)^2$, **donc ses solutions sont** $z_1=\dfrac{(5+3i)+(3-i)}{2}=4+i$ **et** $z_2=\dfrac{(5+3i)-(3-i)}{2}=1+2i$. **D'où les solutions de l'équation** $P(z)=0$ **sont** $z_0=2;\ z_1=4+i$ **et** $z_2=1+2i$.

c) Comme $\mathrm{Im}(z_0)\le \mathrm{Im}(z_1)\le \mathrm{Im}(z_2)$ **alors** $z_A=2;\ z_B=4+i$ **et** $z_D=1+2i$.



On a $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{1+2i-2}{4+i-2}=\dfrac{-1+2i}{2+i}=\dfrac{i(i+2)}{2+i}=i$, **d'où le triangle ABD est rectangle isocèle et direct en A.**

2° a) Le point C est donc un sommet du carré ABCD alors son affixe est $z_C=-z_A+z_B+z_D=3+3i$, **donc l'affixe du barycentre du système**

$\{(A;9),(B;-6),(C;2)\}$ est $\frac{9z_A-6z_B+2z_C}{9-6+2}=\frac{18-24-6i+6+6i}{5}=0$. D'où O est le barycentre du système $\{(A;9),(B;-6),(C;2)\}$.

b) Soit $\varphi(M)=9MA^2-6MB^2+2MC^2$. Pour tout point M du plan, on a $\varphi(M)=5MO^2+9OA^2-6OB^2+2OC^2$ donc

$\varphi(M)=5MO^2+36-102+36=5MO^2-30$.

Alors $M\in\Gamma_1\Leftrightarrow\varphi(M)=-10\Leftrightarrow 5MO^2=20\Leftrightarrow MO^2=4$.

Donc Γ_1 est le cercle de centre O et de rayon 2, il passe par A.

c) Soit $\psi(M)=4MA^2-6MB^2+2MC^2$.

On remarque que $\psi(A)=4AA^2-6AB^2+2AC^2=-10$, donc $A\in\Gamma_2$

Pour tout point M du plan, on a $\psi(M)=2\overrightarrow{MA}.\vec{u}+\psi(A)=2\overrightarrow{MA}.\vec{u}-10$ avec $\vec{u}=4\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{IB}$ où I est le barycentre du système $\{(A;2),(C;1)\}$,

donc $z_I=\frac{2z_A+z_C}{3}=\frac{7}{3}+i$. Alors $\psi(M)=12\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IB}-10$

$M\in\Gamma_2\Leftrightarrow\psi(M)=-10\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IB}=0$. Donc Γ_2 est la droite perpendiculaire à (IB) passant par A.

d) Soit $\sigma(M)=\left(9\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=5\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MD}$

Soit J le milieu de $[OD]$, L'affixe de J est donc $z_J=\frac{1}{2}z_D=\frac{1}{2}+i$ alors

$\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MD}=MJ^2-\frac{1}{4}OD^2=MJ^2-\frac{5}{4}$.

Pour tout point M du plan on a donc $\sigma(M)=5MJ^2-\frac{25}{4}$ et alors

$M\in\Gamma_3\Leftrightarrow 5MJ^2-\frac{25}{4}=10\Leftrightarrow MJ^2=\frac{13}{4}$

Alors Γ_3 est le cercle de centre J et de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{13}$. Or $AJ^2=\frac{13}{4}$ donc le cercle Γ_3 passe par A.

3°a) L'écriture complexe de S est de la forme $z'=az+b$ avec

$$\begin{cases} S(A)=B \\ S(B)=D \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_B + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4+i = 2a+b \\ 1+2i = a(4+i)+b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1+i \\ b = 6-i \end{cases}$$

Donc l'écriture complexe de S est $z' = (-1+i)z + 6 - i$.

Donc le rapport de S est $|-1+i| = \sqrt{2}$,

son angle est une mesure de $\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$

et son centre est le point Ω d'affixe $\omega = \frac{6-i}{1-(-1+i)} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$.

b) On a $S = s\left(\Omega; \sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$

donc par composition des similitudes : $S^{2018} = s\left(\Omega; \left(\sqrt{2}\right)^{2018}; \frac{3\pi}{4} \times 2018\right)$

Alors : $S^{2018} = s\left(\Omega; 2^{1009}; -\frac{\pi}{2}\right)$

c) On a $S^4 = s\left(\Omega; \left(\sqrt{2}\right)^4; \frac{3\pi}{4} \times 4\right) \Rightarrow S^4 = s(\Omega; 4; \pi)$ c'est donc l'homothétie h de centre Ω et de rapport -4 et on a $S^8 = h^2$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport 16.

En plus on a $2020 \equiv 4[8]$ ce qui montre que $2020^{2020} \equiv 4^{2020}[8]$. Or $4^{2020} = 2^{4040} = 2^{3\times1346+2} = 2^{4037} \times 2^3 = 2^{4037} \times 8$, un multiple de 8, donc $4^{2020} \equiv 0[8]$. Ce qui montre l'existence d'un entier k tel que $2020^{2020} = 8k$ et par conséquent que $S^{2020^{2020}} = S^{8k}$ qui est l'homothétie de centre Ω et de rapport $(-4)^{8k} = 4^{8k}$. D'où $S^{2020^{2020}}$ est une homothétie de rapport positif.

CHAPITRE 3 ARITHMETIQUE

I. RESUME DE COURS

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1) Définition

Soient a et b deux entiers relatifs, on dit que b divise a s'il existe un entier relatif k tel que $a = kb$. On note: $b|a$

Remarques

- **On dit aussi que a est un multiple de b ou b est un diviseur de a.**
- **1 et -1 divisent tous les nombres.**
- **Un nombre *a* admet au minimum 4 diviseurs : $\{1 ;-1 ;a;-a\}$.**

2) Propriétés

Soient a, b, c trois entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

1. $(a|b \text{ et } b|a) \Leftrightarrow (a = b \text{ ou } a = -b)$
2. $(a \mid b \text{ et } b|c) \Rightarrow a \mid c$ **(transitivité)**
3. $(c|a \text{ et } c|b) \Rightarrow c \mid (ua + vb)$; $u,v \in \mathbb{Z}$ **(divisibilité par combinaison linéaire)**
4. $a \mid b \Rightarrow -a \mid b$
5. $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|; \quad b \neq 0$
6. $a \mid b \Rightarrow a \mid bc$ **pour tout entier c**
7. $a \mid b \Rightarrow ac \mid bc$ **pour tout entier c non nul.**
8. $(a-b) \mid (a^n - b^n); \quad n \in \mathbb{N}^*$
9. **Si n est impair alors** $(a+b) \mid (a^n + b^n); \quad n \in \mathbb{N}^*$

3) Critères de divisibilité

Soit n un entier naturel

n	Critères de divisibilité par n (en écriture décimale)
10	Le chiffre des unités est 0.
2	Le chiffre des unités est paire :0, 2, 4, 6, 8.
5	Le chiffre des unités est 0 ou 5.
4	Le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4
25	Le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 25.
8	Le nombre formé par les trois derniers chiffres est divisible par 8.
125	Le nombre formé par les trois derniers chiffres est divisible par 125.

n	Critères de divisibilité par n (en écriture décimale)
3	La somme des chiffres qui le composent est divisible par 3.
9	La somme des chiffres qui le composent est divisible par 9.
11	La différence de la somme des chiffres de rang impair et de la somme des chiffres de rangs pair (en partant de la droite) est divisible par 11.
7	Le nombre de dizaines diminué du double du chiffre des unités est divisible par 7. Soustraction alternée des tranches de trois chiffres divisible par 7.
13	Le nombre de dizaines augmenté de 4 fois le chiffre des unités est divisible par 13. Soustraction alternée des tranches de trois chiffres divisible par 13.

Division euclidienne

1) Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Soient a et b deux entiers naturels, avec $b \neq 0$. Il existe un unique couple $(q;r)$ d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

2) Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Pour deux entiers relatifs a et b avec $b \neq 0$, il existe un unique couple $(q;r)$ avec $q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$ tel que : $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$.

a	b	q	R
dividende	diviseur	quotient	reste, $r \in \mathbb{N}$, $(r = 0 \Rightarrow b \mid a)$

3) Congruence

Soient a et b deux entiers relatifs, et n un entier naturel non nul.

Définition et notation

On dit que a et b sont congrus modulo n si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

On note $a \equiv b \ (n)$ ou $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\, n)$

<u>Propriétés</u>

Soient a, b, c, a′ et b′ des entiers relatifs, et n un entier naturel non nul.

1.	$a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow b \equiv a\ (n)$
2.	$a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow a - b \equiv 0\ (n)$
3.	$a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow n \mid (a-b)$
4.	$n \mid a \Leftrightarrow a \equiv 0\ (n)$
5.	$n \equiv 0\ (n)$
6.	$a \equiv a\ (n)$
7.	$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\ (n) \\ b \equiv c\ (n) \end{array}\right\rangle \Rightarrow a \equiv c\ (n)$
8.	$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\ (n) \\ a' \equiv b'(n) \end{array}\right\rangle \Rightarrow a + a' \equiv b + b'(n)$
9.	$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\ (n) \\ a' \equiv b'(n) \end{array}\right\rangle \Rightarrow a - a' \equiv b - b'(n)$
10.	$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\ (n) \\ a' \equiv b'(n) \end{array}\right\rangle \Rightarrow aa' \equiv bb'(n)$
11.	$a \equiv b(n) \Rightarrow a^p \equiv b^p(n)$ **pour tout p de** $\mathbb{N}$,
12.	$a \equiv b(n) \Rightarrow ac \equiv bc(n)$

4) Nombres premiers

<u>1)Définition</u>

Un nombre entier naturel p est premier s’il possède exactement deux diviseurs positifs: 1 et p lui-même.

<u>2)Théorème</u>

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 . n admet au moins un diviseur premier.

Si n n'est pas premier alors il admet au moins un diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$ **.**

3)Critère de primalité

Si un entier naturel n n'est divisible par aucun nombre premier dont le carré lui est inférieur ou égal, alors il est premier.

4)Théorèmes

Théorème 1: **Il existe une infinité de nombres premiers (Théorème d'Euclide).**

Théorème 2: **Tout entier naturel $n > 1$ s'écrit de façon unique sous la forme d'un produit de facteurs : $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times ... \times p_r^{\alpha_r}$ où $p_1, p_2, p_3, ..., p_r$ sont des nombres premiers et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_r$ des entiers naturels. On note $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$.**

5) Crible d'Eratosthène

Pour trouver les nombres premiers, on peut utiliser le « crible d'Eratosthène :

~~0~~	~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~
~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29
~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~
~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~

PGCD

1) Définition

a et b sont deux entiers naturels non nuls. Le plus grand élément des diviseurs communs de a et b est appelé Plus Grand Commun Diviseur de a et de b , on le note PGCD(a ; b) ou $a \wedge b$.

Si a et b sont des entiers relatifs non nuls : $PGCD(a;b) = PGCD(|a|;|b|)$

2) Propriétés

a, b **et** ***c*** **étant trois entiers naturels non nuls.**

1.	$c\mid a$ et $c\mid b \Leftrightarrow c\mid PGCD(a;b)$
2.	$b\mid a \Rightarrow b = PGCD(a;b)$
3.	$PGCD(a;b) = PGCD(b;a)$ soit $a \wedge b = b \wedge a$
4.	$PGCD(a; PGCD(b;c)) = PGCD(PGCD(a;b);c)$ soit $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
5.	$aPGCD(b;c) = PGCD(ab;ac)$ soit $a(b \wedge c) = ab \wedge ac$
6.	**a, b et g sont trois entiers positifs.**
	$g = PGCD(a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ g\mid a \text{ et } g\mid b \\ \bullet\ \dfrac{a}{g} \wedge \dfrac{b}{g} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ g\mid a \text{ et } g\mid b \\ \bullet\ \text{il existe u et v} \\ \text{tels que } ua+vb=g \end{cases}$

3) Algorithme d'Euclide

Théorème

a et b étant deux entiers naturels non nuls tels que $a \geq b$ et $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$

Si $r = 0$, alors $PGCD(a;b) = b$, sinon ($r \neq 0$), $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$.

En d'autre termes :

$$\left.\begin{array}{l} a,b \in \mathbb{N}^*, \\ a \geq b, \\ a = bq + r, \\ 0 \leq r < b. \end{array}\right| \left| \begin{array}{l} r = 0 \Rightarrow PGCD(a;b) = b \\ r \neq 0 \Rightarrow PGCD(a;b) = PGCD(b;r) \end{array}\right.$$

Propriété

Lorsque b ne divise pas a, le PGCD de a et b est le dernier reste non nul obtenu par l'algorithme d'Euclide.

4) Nombres premiers entre eux

Définition

Deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux (ou étrangers) si PGCD(a ;b) = 1.

5) Théorème de Gauss

Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls.
Si a et b sont premiers entre eux et si a|bc alors a|c.

Conséquences

Soit a, b, c et p des entiers naturels non nuls.

1) $$\left|\begin{array}{l}\bullet\ a\,|\,c,\\ \bullet\ b\,|\,c,\\ \bullet\ \mathrm{PGCD}(a,b)=1.\end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{ab\,|\,c}$$

2) $$\left|\begin{array}{l}\bullet\ p \text{ est premier},\\ \bullet\ p\,|\,ab.\end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{p\,|\,a \text{ ou } p\,|\,b}$$

3) $$\left|\begin{array}{l}\bullet\ p \text{ est premier},\\ \bullet\ \mathrm{PGCD}(p,a)=1,\\ \bullet\ \mathrm{PGCD}(p,b)=1.\end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\mathrm{PGCD}(p,ab)=1}$$

Si a et b sont premiers entre eux et si a|bc alors a|c.

6) Petit théorème de Fermat

Théorème

Soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p (non divisible par p) alors $a^{p-1}-1$ est divisible par p.

Corollaire

Soit p un nombre premier et a un entier naturel. Alors a^p-a est divisible par p.

En d'autres termes :

$$\boxed{\left|\begin{array}{l}\bullet\ p \text{ est premier},\\ \bullet\ a \text{ un entier naturel}.\end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{a^p\text{-}a \text{ est divisible par } p}}$$

PPCM

Définition

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. L'ensemble des multiples positifs communs à a et b admet un plus petit élément.

On appelle Plus Petit Commun Multiple de a et de b le plus petit entier strictement positif commun à a et à b. On note PPCM(a ; b) ou $a \vee b$

Propriétés

1. $a|b \Rightarrow PPCM(a;b) = b$
2. $PGCD(a;b) = 1 \Rightarrow PPCM(a;b) = ab$
3. $PPCM(a;b) = PPCM(b;a)$ soit $a \vee b = b \vee a$
4. $PPCM(a;\ PPCM(b;c)) = PPCM(PPCM(a;b)\ ;c)$ soit $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
5. $aPPCM(b;c) = PPCM(ab;ac)$ soit $a(b \vee c) = ab \vee ac$
6. $PPCM(a;b) \times PGCD(a;b) = ab$ soit $(a \vee b)(a \wedge b) = ab$

Equations diophantiennes

1)Théorème

a et b sont deux entiers naturels n on nuls et $d = PGCD(a,b)$. Il existe deux entiers relatifs x et y tels que $ax + by = d$.

Autrement dit :

$$\left.\begin{array}{|l} a,b \in \mathbb{N}^*, \\ d = PGCD(a,b) \end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\text{il existe deux entiers relatifs x et y tels que } ax + by = d}$$

2)Théorème de Bézout

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs x et y tels que $xa + yb = 1$.

Autrement dit :

$$\boxed{\begin{array}{l} a,b \in \mathbb{N}^*, \\ \text{a et b sont premiers entre eux} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{il existe deux entiers relatifs} \\ \text{x et y tels que } xa + yb = 1 \end{array}}$$

3) Théorème

a, b et c étant trois entiers naturels. L'équation $ax + by = c$ admet des solutions entières si et seulement si c est un multiple de $PGCD(a,b)$.

Systèmes de numération

<u>1) Système de numération décimale (ou « en base 10 ») :</u>

Dans notre système habituel de numération, on dispose de 10 symboles (chiffres) : 0,1,2,3,…9 pour écrire tous nos nombres.

Tout nombre peut donc se décomposer en une somme de puissances de 10.

<u>2) Système binaire (ou « en base 2 ») :</u>

Ce système ne se compose que de deux symboles : 0 et 1 ; ce qui est très pratique pour toute l'électronique puisqu'il n'y a que deux possibilités : le courant passe ou ne passe pas. Tout nombre se décompose donc ici en «paquets de 2 » au lieu de « paquets de 10 », et donc en puissances de 2.

<u>3) Système octal (ou « en base 8 ») :</u>

Le système octal utilise un système de numération ayant comme base 8 (octal => latin octo = huit).
Il faut noter que dans ce système nous avons 8 symboles seulement : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
Cette base obéira aux même règles que la base 10, vue précédemment,

<u>4) Système hexadécimal (ou « en base 16 ») :</u>

On dispose ici de 16 symboles et on décompose selon les puissances de 16. Les chiffres s'écrivent ainsi : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; A ; B ; C ; D ; E ; F.

5) Tableau de correspondance entre base 2, base 8, base 10 et base 16:

Base 10	Base 2	Base 8	Base 16
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14
32	100000	40	20
48	110000	60	30
64	1000000	100	40
100	1100100	144	64
200	11001000	310	C8
400	110010000	620	190
500	111110100	764	1F4
800	1100100000	1440	320
1000	1111101000	1750	3E8
2000	11111010000	3720	7D0

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Dans ce QCM, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

1) Quel est l'ensemble des entiers relatifs n tels que n-1 divise n+17 :

A. $\{2\,;3\,;4\,;7\,;10\,;19\,;0\,;-1\,;-2\,;-5\,;-8\,;-17\}$

B. $\{2\,;3\,;4\,;7\,;10\,;19\,;-1\,;-2\,;-3\,;-5\,;-8\,;-17\}$

C. $\{1\,;2\,;4\,;6\,;9\,;-6\,;-9\,;-18\}$

D. $\{0\,;1;2;4;-1;9;-6\,;-9\,;-18\}$

2) On divise un entier naturel n par 139 et 142. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 74 et 32. Quelle est la valeur de n ?

A. 1452
B. 1464
C. 2020
D. 3271

3) On sait que a est un entier naturel, et que le reste de la division euclidienne de a par 90 est 75.Quelle est le reste de la division euclidienne de a par 45 ?

A. 40
B. 35
C. 30
D. 25

4) Le PGCD de 8534 et 6526 est :

A. 26
B. 104
C. 251
D. 502

5) Le PPCM de 72 et 180 est :

A. 270
B. 360
C. 720
D. 1800

QCM 2

Dans ce QCM, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

1) Soit n un entier naturel. Quels sont les entiers toujours premiers entre eux ?

$\mathbf{7n+1}$ **et** $\mathbf{3n+2}$.

$\mathbf{n+5}$ **et** $\mathbf{n-2}$.

$\mathbf{2n+5}$ **et** $\mathbf{n+2}$

$\mathbf{2n-1}$ **et** $\mathbf{11n+3}$.

2) x et y sont deux entiers naturels tels que PGCD(x, y) = 3 et x + y = 27. Quelle valeur de x peut être un élément d'un couple solution ?

9

18

21

27

3) Soit n un entier naturel. $\mathbf{n^7-n}$ **est toujours divisible par :**

11

14

20

21

4) Quelle affirmation est vraie ?

$\mathbf{2020^{22} \equiv 1\ [22]}$

$\mathbf{2020^{23} \equiv 1\ [22]}$

$\mathbf{2020^{22} \equiv 1\ [23]}$

$\mathbf{2020^{23} \equiv 1\ [23]}$

5) Quelle affirmation est fausse ?

$\mathbf{2019^{19} - 2019 \equiv 0\ [19]}$

$\mathbf{2020^{18} - 1 \equiv 0\ [19]}$

$\mathbf{2019^{18} - 2019 \equiv 0\ [19]}$

$\mathbf{2019^{2019} - 2019 \equiv 0\ [2019]}$

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

1) Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel *n*, le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.

2) Trouvez le reste de la division euclidienne de 2021^{2020} par 7.
3) Soit $X = 2011^{2n+1} + 2014^{2n+1}$.
a) Montrez que pour tout entier naturel *n*, X est divisible par 7.

b) Montrez que pour tout entier naturel *n*, X est divisible par 25.

c) X est – il divisible par 175 ? Justifier.

Exercice 2 (Bac)

1) On considère l'équation (E) : $2017x + 41y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs

a) Vérifier que 2017 est un nombre premier puis montrer que l'équation (E) admet des solutions entières.
b) Vérifier que le couple $(-5;246)$ est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E).
c) Déduire qu'il existe un unique entier y inférieur ou égal à 2016 tel que : $41y \equiv 1[2017]$
Pour la suite de l'exercice on rappelle qu'un entier a est l'inverse de b modulo 2017 si $ab \equiv 1[2017]$.
2) Soient a et b deux entiers relatifs.

a) Montrer que : si $ab \equiv 0[2017]$ alors $(a \equiv 0[2017]$ ou $b \equiv 0[2017])$
b) Déduire que : si $a^2 \equiv 1[2017]$ alors $(a \equiv 1[2017]$ ou $a \equiv -1[2017])$
c) Quels sont donc les entiers de l'intervalle $[1;4033]$ qui sont égaux à leurs inverses modulo 2017 ?

Exercice 3

En rangeant les n pièces de son puzzle, un enfant constate que :

S'il les range par groupe de 5, il lui reste 3 pièces.

S'il les range par groupe de 7, il lui reste 2 pièces.

S'il les range par groupe de 9, il lui reste 1 pièce.

S'il les range par groupe de 11, il ne lui reste plus de pièces.

Sa mère affirme qu'alors 2n-11 est divisible par 5, 7, 9 et 11.

1) A-t-elle raison ?

2) Combien ce puzzle contient de pièces sachant que ce nombre est inférieur à 2020 ?

Exercice 4 (Bac)

1) On considère l'équation (E) : $25x-49y=5$, où x et y sont des entiers relatifs.
a) Déterminer le pgcd de 49 et 25 à l'aide de l'algorithme d'Euclide et en déduire que l'équation (E) admet des solutions entières.
b) Vérifier que le couple $(10\ ;\ 5)$ est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E).
c) Montrer qu'il existe un unique entier p compris entre 1960 et 2018 tel que : $25p \equiv 5[49]$.
2.a) Justifier que si (x,y) est une solution de (E) alors $5x \equiv 1[7]$ et $y \equiv 0[5]$.
b) Montrer que $5x \equiv 1[7]$ si et seulement si $x \equiv 3[7]$.
3.a) Soit x un entier relatif. Quels sont les restes de x^2 dans la division euclidienne par7 ?
b) Existe-t-il un couple (x,y) d'entiers relatifs tels que (x^2,y^2) soit solution de (E) ?

Exercice 5

Quels sont les entiers n tels que n^6-1 soit divisible par 9 ?

Exercice 6

On considère l'équation (E) : $11x-7y=25$, où x et y sont des entiers relatifs.
1.a) Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple $(8,9)$ est une solution particulière de (E).
b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
2) Soit (x,y) une solution de (E).
a) Montrer que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 25.
b) Soit m un entier relatif. Existe-t il des valeurs de m telles que le quotient $\dfrac{20+11m}{15+7m}$ soit un entier relatif ?

Exercice 7

On donne les nombres suivants en base 10 : $A = 1268$ et $B = 2098$.
Convertir ces nombres :
1) En binaire
2) En base 3
3) En base 5
4) En base 7
5) En base 8.

Exercice 8

On donne les nombres suivants en base 10 : $X = 1216$ et $Y = 8091$.
Convertir ces nombres en hexadécimal .

Exercice 9

Effectuer les opérations suivantes :

1) En base 2 : $110010110 + 10001110 =$
2) En base 8 : $5612 + 7572 =$
3) En base 16 : $1D21 + F1BC =$

Exercice 10

Convertir en décimal les nombres suivants qui sont donnés en représentation hexadécimale :

a) 3DE18
b) 8AFCE.

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

1) Écrire l'ensemble des entiers relatifs diviseurs de 6.

2) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n-4$ divise 6.

3) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n-4$ divise $n+2$.

4) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n+1$ divise $3n-4$.

Exercice 2

Déterminer le reste de la division par 7 du nombre 32^{2021} .

Exercice 3

1) Déterminer les restes de la division de 5^p par 13 pour p entier naturel.

2) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N=31^{4n+1}+18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Exercice 4

p et q sont des entiers naturels.

1) Démontrez que $2^{pq}-1$ est divisible par 2^p-1 et par 2^q-1.

2) Déduisez en que pour que 2^n-1 soit premier, il faut que n soit premier.

3) Prouvez à l'aide d'un contre-exemple que la condition « n est premier » n'est pas suffisante pour que 2^n-1 soit premier.

Exercice 5 (Bac)

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $(E): \ 7x-5y=1$

a) Justifier que le couple $(3;4)$ est solution de (E) puis résoudre (E).

b) Montrer que si $(x;y)$ est une solution de (E) alors $\begin{cases} x\equiv 3[5] \\ y\equiv 4[7] \end{cases}$

2) Dans cette question on se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs A tels que $\begin{cases} A \equiv 4[5] \\ A \equiv 3[7] \end{cases}$

a) Soit A un élément de S. Démontrer qu'il existe un couple d'entiers $(x;y)$ **tel que** $A = 7x + 3 = 5y + 4$ **où** $(x;y)$ **est une solution de** (E)

b) En déduire que $A \in S$ **si et seulement si** $A \equiv 24\,[35]$**.**

c) Soit n et a deux entiers naturels ($0 < n < 9$ **) et B un entier qui s'écrit, en base n, sous la forme** $\overline{374a}$ **. Déterminer n puis en déduire l'écriture décimale de l'entier B sachant qu'il appartient à S.**

Exercice 6 (Bac)

On considère l'équation (E) : $5x - 3y = 17$ **, où x et y sont des entiers relatifs.**

1.a) Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple $(4,1)$ **est une solution particulière de (E).**

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2) Soit (x,y) **une solution de (E).**

a) Montrer que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 17.

b) Soit m un entier relatif. Trouver les valeurs de m telles que le quotient $\dfrac{1+5m}{4+3m}$ **soit un entier relatif.**

Exercice 7

1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ **l'équation (E) :18a + 23b = 2001.**

a) Montrer que pour tout couple (a, b) solution de (E) a est un multiple de 23 et b un multiple de 3.

b) Déterminer une solution de (E).

c) Résoudre (E).

2) Déterminer les couples (p, q) d'entiers tels que 18d + 23m = 2001, où d désigne le pgcd de p et q, et m leur ppcm.

Exercice 8

1. On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$**, où** $(x\,;y)$ **est un couple de nombres entiers relatifs.**

a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple (a ; b) de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$.

a. Montrer que le couple (a ; b) est solution de (E).

b. Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3. a. Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où (x ; y) est un couple de nombres entiers relatifs.

Exercice 9

1) Vérifier les conversions suivantes du nombre X

Base	2	3	5	8	10	16
X	1000111101101	20021222	121324	10755	4589	11ED

2) Compléter le tableau de conversion

Base	2	3	5	8	10	16
X			4203			
Y				6724		
Z						1C2D

Exercice 10

1. Résolution d'une équation

On considère l'équation (1) : $11n - 24m = 1$ d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$.

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. Recherche du PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$

a. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

b. Soit (n, m) un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1). Montrer que l'on peut écrire

$$(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9.$$

c. Montrer que $10^{11}-1$ divise $10^{11n}-1$

Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M=9.$$

d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$ divise 9.

e. Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$.

Exercice 11

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD des nombres 28 et 31. Trouver alors deux nombres x et y entiers relatifs tels que $31x-28y=1$.

2. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $31x-28y=414$.

3. Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On donne les points A(–30 ; – 48) et B(82 ; 76). On appelle (D) la droite (AB).

a. Trouver l'ensemble des points M(x ; y) de (D) dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

b. Le repère utilisé pour le graphique est gradué de –10 à +10 en abscisses et de –14 à +14 en ordonnées. Vérifiez et expliquez pourquoi il n'y a pas de point de (D) à coordonnées entières visible sur le graphique.

c. Pour remédier à l'inconvénient du 3.b. on décide d'agrandir la fenêtre à [–40 ; +40] en abscisses et à [–50 ; +10] en ordonnées. Combien y-a-t-il de points de (D) à coordonnées entières sur ce nouveau graphique ? Faire la figure.

Exercice 12

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens.

Cet exercice propose d'en découvrir quelques-unes.

Pour k entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit à l'aide de k chiffres 1.

Ainsi $N_1=1$, $N_2=11$, $N_3=111$, …

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifier brièvement la réponse.

2. A quelle condition sur k le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit N_k ? Justifier brièvement la réponse.

3. Pour $k > 1$, le rep-unit N_k est défini par $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1+10+100+...+10^{k-1}$.

Justifier l'égalité : $9N_k = 10^k - 1$ pour tout entier $k > 1$.

4. Soit k un entier strictement positif. Démontrer que : « $10^k \equiv 1(7)$ » équivaut à « k est multiple de 6 ».

En déduire que 7 divise N_k si et seulement si k est multiple de 6.

Exercice 13 (Bac- traduit)

On considère l'équation (E) : $25x - 9y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs. **1.a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $25u + 9v = 1$. En déduire une solution particulière (x_0, y_0) de (E).** **b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).** **2) On désigne par d le PGCD de x et y où (x, y) est une solution particulière de (E).** **a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?** **b) Quelles sont les solutions (x, y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux?** **c) Peut-on trouver un couple (x, y) d'entiers relatifs tel que (x^2, y^2) soit solution de (E) ? Justifier votre réponse.**	**نعتبر المعادلة $25x - 9y = 5$: (E) حيث x و y عددان صحيحان.** **1.a) باستخدام خوارزمية إقليدس عين عددين صحيحين u و v بحيث يكون $25u + 9v = 1$. استنتج حلا خاصا (x_0, y_0) للمعادلة (E) .** **b) عين مجموعة حلول (E).** **2) نعني بالرمز d المضاعف المشترك الأعلى للعددين x و y حيث (x, y) حل للمعادلة (E).** **a) ما هي القيم الممكنة للعدد d؟** **b) ما هي الحلول (x, y) للمعادلة (E) التي من أجلها يكون العددان x و y أوليين فيما بينهما؟** **c) هل يمكن إيجاد زوج (x, y) من الأعداد الصحيحة بحيث يكون (x^2, y^2) حلا للمعادلة (E)؟ برر جوابك.**

Dépôt légal N° 2177/2020

Bibliothèque nationale

Nouakchott

COLLECTION ESSEBIL AU BAC

Accompagnement au Bac

Dans les ouvrages de la collection ESSEBIL AU BAC vous trouverez chaque trimestre:

ESSEBIL AU BAC - Mathématiques

- ✓ **Des résumés de cours pour réviser rapidement et mémoriser les formules,**
- ✓ **Des QCM pour l'entraînement et la maîtrise des notions du programme,**
- ✓ **Des exercices corrigés variés et progressifs pour teser et approfondir vos connaissances,**
- ✓ **Des exercices de synthèse et des problèmes non corrigés pour préparer éfficacement l'épreuve du Bac.**
- ✓ **Quelques traductions pour améliorer le niveau d'acquisition.**

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

1) On a :

$$\begin{cases} 5^0 \equiv 1[7] \\ 5^1 \equiv 5[7] \\ 5^2 \equiv 4[7] \\ 5^3 \equiv 6[7] \\ 5^4 \equiv 2[7] \\ 5^5 \equiv 3[7] \\ 5^6 \equiv 1[7] \end{cases}$$

On en déduit que pour tout entier k :

$$\begin{cases} 5^{6k} \equiv 1[7] \\ 5^{6k+1} \equiv 5[7] \\ 5^{6k+2} \equiv 4[7] \\ 5^{6k+3} \equiv 6[7] \\ 5^{6k+4} \equiv 2[7] \\ 5^{6k+5} \equiv 3[7] \end{cases}$$

2) On a $2021 = 7\times288+5$, donc $2021 \equiv 5 \quad [7]$ et $2021^{2020} \equiv 5^{2020} \quad [7]$.

D'autre part, $2020 = 6\times336+4$, donc 2020 est du type $6k+4$.

Alors $5^{2020} \equiv 5^{6k+4} \equiv 2 \quad [7]$.

On en déduit que le reste de la division euclidienne de 2021^{2020} par 7 est 2.

3) On a X= $2011^{2n+1} + 2014^{2n+1}$.

a) On a $2011 = 7\times287+2$, donc $2011 \equiv 2 \quad [7]$ et $2011 \equiv -5 \quad [7]$

On a aussi $2014 = 7\times287+5$, donc $2014 \equiv 5 \quad [7]$.

Donc $2011^{2n+1} \equiv (-5)^{2n+1} = -5^{2n+1} \quad [7]$ (car $2n+1$ est impair) ;

et $2014^{2n+1} \equiv 5^{2n+1} \quad [7]$. Par addition $2011^{2n+1} + 2014^{2n+1} \equiv 0\,[7]$. Alors, pour tout entier naturel *n*, X est divisible par 7.

b) On sait que $2011 \equiv 11 \quad [25]$ et $2014 \equiv 14 \equiv -11 \quad [25]$.

En élevant à la puissance impaire $2n+1$ et par addition on trouve que $2011^{2n+1} + 2014^{2n+1} \equiv 0\,[25]$. Alors, pour tout entier naturel *n*, X est divisible par 25.

<u>Remarque</u> :

Le nombre $X = 2011^{2n+1} + 2014^{2n+1}$ est divisible par la somme $2011 + 2014$ car la puissance $2n+1$ est impaire. Donc X est divisible par 2025 qui est un multiple de 25. Alors X est divisible par 25.

c) Le nombre X est divisible par deux entiers 7 et 25 qui sont premiers entre eux. Alors X est divisible par leur produit qui est 175 .

Corrigé 2

1) a) Vérifions que 2017 est un nombre premier :

Comme $\sqrt{2017} \simeq 44.9$, et les nombres premiers inferieurs à 45 sont : $2;3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;37;41$ et 43 ; et comme 2017 n'est divisible par aucun de ces nombres, il est alors premier.

b- Vérifions que $(-5, 246)$ est solution de l'équation (E) : $2017x + 41y = 1$,

On a : $2017(-5) + 41 \times 246 = -10085 + 10086 = 1$

Donc le couple $(-5, 246)$ est solution de l'équation (E) .

Résolution de l'équation (E) :

Comme $2017 \wedge 41 = 1$ alors l'équation (E) admet des solutions entières. Soit $(x;y)$ un couple solution de l'équation (E) :

$$2017x + 41y = 2017(-5) + 41(246) \Leftrightarrow 2017(x+5) = 41(246 - y)$$

Donc 41 divise $2017(x+5)$ or $41 \wedge 2017 = 1$

Donc d'après le théorème de Gauss : 41 divise $x+5$,

D'où il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $x+5=41k$ soit $x=-5+41k$,

En remplaçant $x+5$ par $41k$ dans l'égalité $2017(x+5)=41(246-y)$ on obtient $y=246-2017k$.

Donc $S=\{(-5+41k, 246-2017k); k \in \mathbb{Z}\}$

c) Montrons qu'il existe un unique entier naturel y inférieur ou égal à 2016 tel que : $41y \equiv 1[2017]$

Soit y un entier naturel inférieur ou égal à 2016 vérifiant : $41y \equiv 1[2017]$

Il existe donc un entier x tel que $41y = 1+2017\times(-x)$ soit $2017x+41y=1$ par conséquent (x ; y) est solution de l'équation (E) et $y=246-2017k,\ k \in \mathbb{Z}$
$0 \le 246-2017k \le 2016$ d'où $-0,87 \le k \le 0,12$ donc $k=0$ et $y=246$

2) Soient a et b deux entiers relatifs

a) Montrons que si $a.b \equiv 0[2017]$ alors $a \equiv 0[2017]$ ou $b \equiv 0[2017]$

Si $ab \equiv 0[2017]$ et $a \not\equiv 0[2017]$ alors $\begin{cases} 2017 | ab \\ 2017 \wedge a = 1 \end{cases}$, car 2017 est premier

Donc d'après Gauss $2017|b$ et $b \equiv 0[2017]$

Par conséquent soit $a \equiv 0[2017]$ ou $b \equiv 0[2017]$

b) Montrons que si $a^2 \equiv 1[2017]$ alors $a=1[2017]$ ou $a \equiv -1[2017]$

Si $a^2 \equiv 1[2017]$ alors $a^2-1 \equiv 0[2017] \Rightarrow (a-1)(a+1) \equiv 0[2017]$

D'après 2) a) soit $a-1 \equiv 0[2017]$ ou $a+1 \equiv 0[2017]$

$$a=1[2017] \text{ ou } a \equiv -1[2017]$$

c) Déterminons les entiers de l'intervalle $[1,4033]$ qui sont égaux à leur inverse modulo 2017 :

Supposons qu'un entier a est égal à son inverse, c-à-d que $a^2 \equiv 1[2017]$ alors $a = \pm 1[2017]$

Soit $a \equiv 1 \;[2017]$ ou bien $a \equiv -1 \;[2017]$

$a = 2017k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$	$a = 2017k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$
$1 \leq a \leq 4033$	$1 \leq a \leq 4033$
$1 \leq 2017k + 1 \leq 4033$	$1 \leq 2017k - 1 \leq 4033$
$0 \leq k \leq \dfrac{4033}{2017}$	$2 \leq 2017k \leq 4034$
$0 \leq k \leq 1,99$	$0,0009 \leq k \leq 2$
$\Rightarrow$ $k = 0$, ou $k = 1$	$\Rightarrow$ $k = 1$ ou $k = 2$
$a = 1$ ou $a = 2018$	$a = 2016$ ou $a = 4033$

Donc les entiers de l'intervalle $[1,4033]$ qui sont égaux à leurs inverses modulo 2017 sont $\{1, 2018, 2016, 4033\}$.

Corrigé 3

1) Soit n le nombre de pièces du puzzle.

S'il les range par groupe de 5, il lui reste 3 pièces. Alors $n \equiv 3\,[5]$

S'il les range par groupe de 7, il lui reste 2 pièces. Alors $n \equiv 2\,[7]$

S'il les range par groupe de 9, il lui reste 1 pièce. Alors $n \equiv 1\,[9]$

S'il les range par groupe de 11, il ne lui reste plus de pièces. Alors $n \equiv 0\,[11]$

On en déduit que :

$2n - 11 \equiv 6 - 11 = -5 \equiv 0\,[5]$

$2n - 11 \equiv 4 - 11 = -7 \equiv 0\,[7]$

$2n - 11 \equiv 2 - 11 = -9 \equiv 0\,[9]$

$2n - 11 \equiv -11 \equiv 0\,[11]$

Alors $2n - 11$ est divisible par 5, 7, 9 et 11. Sa mère a raison.

2) Le nombre $2n-11$ est divisible par quatre nombres premiers. Alors il est divisible par leur produit $5\times7\times9\times11=3465$.

Il existe un entier k tel que $2n-11=3465k$.

D'autre part $n<2020 \Rightarrow 2n-11<4029$

Alors la seule valeur possible de k est $k=1$.

$k=1 \Rightarrow 2n-11=3465 \Rightarrow 2n=3476 \Rightarrow n=1738$

Conclusion : Le puzzle contient 1738 pièces.

Corrigé 4

1.a) Pour appliquer l'algorithme d'Euclide on effectue les divisions euclidiennes successives :

$$49=25\times1+24$$
$$25=24\times1+1$$
$$24=1\times24+0$$

Le dernier reste non nul de la division euclidienne de 49 par 25 est égal 1. Alors $p\gcd(49,25)=1$.

L'équation (E) : $25x-49y=5$ admet des solutions entières car le $p\gcd(25,49)$ divise 5.

b) Pour vérifier que le couple $(10\ ;\ 5)$ est une solution particulière de (E), on remplace dans (E) :

On a $25\times10-49\times5=250-245=5$. Alors le couple $(10\ ;\ 5)$ est une solution particulière de (E).

Pour résoudre (E) :

On sait que pour tout couple (x,y) solution de (E) on a : $\begin{cases}25x-49y=5\\25\times10-49\times5=5\end{cases}$

Ce qui implique, par soustraction, que : $25(x-10)-49(y-5)=0$

Ce qui équivaut à : $25(x-10)=49(y-5)$

Cette dernière égalité montre que $\begin{cases}49|25(x-10)\\25|49(y-5)\end{cases}$

Or $p\gcd(49,25)=1$, d'après le théorème de Gauss : $\begin{cases} 49 \mid (x-10) \\ 25 \mid (y-5) \end{cases}$

Ce qui équivaut à : « il existe un entier k tel que $\begin{cases} x-10=49k \\ y-5=25k \end{cases}$ » ; soit $\begin{cases} x=49k+10 \\ y=25k+5 \end{cases}$

Réciproquement ; quel que soit l'entier k on montre en remplaçant dans (E) que le couple $(49k+10,25k+5)$ est solution de (E).

<u>Conclusion</u> : les solutions de (E) sont les couples de la forme $(49k+10,25k+5)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c) Pour tout entier p on a :

$$\begin{aligned} 25p \equiv 5[49] &\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : \ 25p = 49q+5 \\ &\Leftrightarrow 25p - 49q = 5 \\ &\Leftrightarrow (p,q) \text{ est solution de } (E) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p = 49k+10 \\ q = 25k+5 \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Cherchons les valeurs de p comprises entre 1960 et 2018 :

$$\begin{aligned} 1960 \le p \le 2018 &\Leftrightarrow 1960 \le 49k+10 \le 2018 \\ &\Leftrightarrow 1950 \le 49k \le 2008 \\ &\Leftrightarrow 49\times 39 + 39 \le 49k \le 49\times 41 + 9 \\ &\Leftrightarrow k = 40 \end{aligned}$$

car il existe un seul multiple de 49 (nombre du type 49k) compris entre $49\times 39+39$ et $49\times 41+9$. C'est 49×40 Enfin, la seule valeur possible de p est $p = 49\times 40 + 10 = 1970$. Donc $p = 1970$

Conclusion : Il existe un unique entier p compris entre 1960 et 2018 tel que : $25p \equiv 5[49]$

2.a) Si le couple (x,y) est une solution de (E) alors $25x-49y=5$ ce qui implique que $25x-5=49y$. Donc $5(5x-1)=7\times 7y$ d'où 7 divise le nombre $5(5x-1)$. Or 5 et 7 sont deux nombres premiers - donc premiers aussi entre eux, d'où d'après le théorème de Gauss, 7 divise $5x-1$. Alors il existe un entier k tel que $5x-1=7k$. Donc $5x=7k+1$ ce qui prouve que $5x \equiv 1[7]$

D'autre part si le couple (x,y) est une solution de (E) alors $25x-49y=5$ ce qui montre que $49y=5(5x-1)$. Donc 5 divise le nombre $49y$. Or 5 et 49 sont premiers entre eux (5 est premier et ne divise pas 49) , alors 5 divise y. C'est-à-dire que $y \equiv 0[5]$

b) Si $x \equiv 3[7]$, alors $5x \equiv 5\times 3[7]$. Donc $5x \equiv 1[7]$.

Réciproquement : les restes de divisions possibles d'un entier x par 7 sont les éléments de l'ensemble : $\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Dressons le tableau de congruence modulo 7 pour x et 5x :

$x\ [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$5x\ [7]$	0	5	3	1	6	4	2

On en déduit que $5x \equiv 1[7]$ implique que $x \equiv 3[7]$.

<u>Conclusion</u> :Pour tout entier relatif x : $5x \equiv 1[7]$ si et seulement si $x \equiv 3[7]$.

3.a) Dressons le tableau de congruence modulo 7 pour x et x^2 :

$x\ [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2\ [7]$	0	1	4	2	2	4	1

On en déduit que pour tout entier x, le reste de la division euclidienne de x^2 par 7 est un élément de l'ensemble $\{0;1;2;4\}$

b) D'après la question 2) pour que le couple $(x^2;y^2)$ soit solution de (E) il faut que $5x^2 \equiv 1[7]$. Ce qui implique que $x^2 \equiv 3[7]$ et ceci est impossible car le reste 3 n'appartient pas à l'ensemble précédent $\{0;1;2;4\}$ des restes de la division euclidienne de x^2 par 7.

Conclusion : il n'existe aucun couple (x,y) d'entiers relatifs tels que (x^2,y^2) soit solution de (E).

<u>Autre méthode</u> : Pour que le couple $(x^2;y^2)$ soit solution de (E) il faut que $25x^2 - 49y^2 = 5$

Donc $(5x-7y)(5x+7y)=5$. Les décompositions possibles de 5 dans $\mathbb{Z}$ sont $5\times 1, 1\times 5, (-5)\times(-1), (-1)\times(-5)$.

Alors l'équation $25x^2 - 49y^2 = 5$ se ramène à l'un des quatre systèmes suivants, avec (x,y) entiers relatifs:

$$\begin{cases}5x-7y=5\\5x+7y=1\end{cases},\quad \begin{cases}5x-7y=1\\5x+7y=5\end{cases}\quad \begin{cases}5x-7y=-5\\5x+7y=-1\end{cases},\quad \begin{cases}5x-7y=-1\\5x+7y=-5\end{cases}.$$

L'addition (ou la soustraction) des équations de chaque système implique une contradiction (x ou y non relatif).

Par exemple l'addition des équations du premier système implique 10x = 6, ce qui est impossible dans l'ensemble des entiers relatifs.

On conclut qu'il n'existe aucun couple (x,y) d'entiers relatifs tels que (x^2,y^2) soit solution de (E).

Corrigé 5

Si n est un multiple de 3, alors n^2 est un multiple de 9 . Donc n^6 est divisible par 9. C'est-à-dire que $n^6 - 1$ n'est pas divisible par 9. C'est le cas où n congru 0 ; 3 ou 6 modulo 9.

Sinon :

$$n\equiv 1[9]\Rightarrow n^6\equiv 1[9]\Rightarrow n^6-1\equiv 0[9]$$

$$n\equiv 2[9]\Rightarrow n^3\equiv 8\equiv -1[9]\Rightarrow n^6\equiv 1[9]\Rightarrow n^6-1\equiv 0[9]$$

$$n\equiv 4[9]\Rightarrow n^3\equiv 64\equiv 1[9]\Rightarrow n^6\equiv 1[9]\Rightarrow n^6-1\equiv 0[9]$$

$$n\equiv 5[9]\Rightarrow n\equiv -4[9]\Rightarrow n^3\equiv -1[9]\Rightarrow n^6\equiv 1[9]\Rightarrow n^6-1\equiv 0[9]$$

$$n\equiv 7[9]\Rightarrow n\equiv -2[9]\Rightarrow n^3\equiv 1[9]\Rightarrow n^6\equiv 1[9]\Rightarrow n^6-1\equiv 0[9]$$

$$n\equiv 8[9]\Rightarrow n\equiv -1[9]\Rightarrow n^6\equiv 1[9]\Rightarrow n^6-1\equiv 0[9].$$

Conclusion : Les solutions sont donc tous les entiers non divisibles par 3.

Corrigé 6

$$11x - 7y = 25 \quad (E)$$

1. a) Existence des solutions entières de (E) et solution particulière :

On sait que 7 et 11 sont des nombres premiers distincts, donc ils sont premiers entre eux, c'est-à-dire que $PGCD(7,11) = 1$. Et comme 1 divise 25 alors (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}$.

D'autre part : $11 \times 8 - 7 \times 9 = 88 - 63 = 25$, ce qui signifie que le couple $(8, 9)$ est une solution particulière de (E).

b) Résolution de (E) :

Si (x, y) est une solution générale de (E), alors : $11x - 7y = 25$.

Et comme : $11 \times 8 - 7 \times 9 = 25$. Alors par soustraction :

$$11(x - 8) - 7(y - 9) = 0$$

$$\Rightarrow 11(x - 8) = 7(y - 9) \quad (*)$$

Donc 7 divise $11(x - 8)$.

Or $PGCD(7, 11) = 1$, alors d'après Gauss 7 divise $(x - 8)$.

Donc il existe un entier relatif k tel que : $x - 8 = 7k$, c'est-à-dire :

$$x = 7k + 8$$

En injectant cette valeur de x dans la relation $(*)$, on obtient :

$$11 \times 7k = 7(y - 9)$$

Ce qui implique que :

$$y = 11k + 9$$

Réciproquement :

Si $x = 7k + 8$ et $y = 11k + 9$ avec k un entier relatif, alors :

$$11x - 7y = 11 \times 7k + 11 \times 8 - 7 \times 11k - 7 \times 9 = 11 \times 8 - 7 \times 9 = 25$$

Et ainsi l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{S = \{(7k + 8, 11k + 9); k \in \mathbb{Z}\}}$$

2. (x, y) est une solution de (E).

a) Montrons que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 25 :

si x est un diviseur de y, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $y = kx$.

Mais comme (x, y) est une solution de (E), alors :

$$11x - 7y = 25$$
$$\Rightarrow 11x - 7kx = 25$$
$$\Rightarrow x(11 - 7k) = 25$$

Ce qui implique que x est un diviseur de 25.

Ainsi, si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 25.

b) m est un entier relatif. Voyons s'il existe des valeurs de m pour lesquelles le quotient $\frac{20+11m}{15+7m}$ est un entier relatif :

On sait que :

$$20 + 11m = 11(m + 1) + 9$$

Et :

$$15 + 7m = 7(m + 1) + 8$$

Donc le couple $(15 + 7m, 20 + 11m)$ est une solution de (E) car $(m + 1) \in \mathbb{Z}$.

Si le quotient $\frac{20+11m}{15+7m}$ est un entier relatif, alors $(15 + 7m)$ divise $(20 + 11m$, ce qui implique, d'après la question 2. a), que : $15+7m$ divise 25.

Or les diviseurs de 25 sont : -25, -5, -1, 1, 5 et 25, alors l'un des cas ci-dessous se pose :

$15 + 7m = -25 \Rightarrow 7m = -40$: impossible car m est un entier relatif.

$15 + 7m = -5 \Rightarrow 7m = -20$: impossible car m est un entier relatif.

$15 + 7m = -1 \Rightarrow 7m = -16$: impossible car m est un entier relatif.

$15 + 7m = 5 \Rightarrow 7m = -10$: impossible car m est un entier relatif.

$15 + 7m = 25 \Rightarrow 7m = 10$: impossible car m est un entier relatif.

$15 + 7m = 1 \Rightarrow 7m = -14 \Rightarrow m = -2$: pour cette valeur de m, le quotient $\frac{20+11m}{15+7m}$ est égal à $\frac{20-22}{15-14} = -2$ est bien un entier relatif.

Ainsi, la seule valeur de m pour laquelle le quotient $\frac{20+11m}{15+7m}$ est un entier relatif est : $\boxed{m = -2}$.

Corrigé 7

Pour convertir un nombre donné en système décimal (base 10) en une autre base :

1) On divise le nombre décimal par la base du nouveau système : on obtient un quotient entier et un reste qui sera utilisé pour former un chiffre de la nouvelle représentation dans le nouveau système ;

2) On continue en divisant le quotient entier de l'opération précédente par la base et on en tire un deuxième reste comme précédemment ;

3) On recommence cette opération jusqu'à ce que l'on obtienne un quotient égal à zéro.

4) Le résultat obtenu est constitué de tous les restes des divisions, écrits de gauche à droite, en partant du dernier vers le premier.

A) On commence par le nombre $A = 1268$:

<u>En base 2 :</u>

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
1268	2	634	0
634	2	317	0
317	2	158	1
158	2	79	0
79	2	39	1
39	2	19	1
19	2	9	1
9	2	4	1
4	2	2	0
2	2	1	0
1	2	0	1

Il faut lire les restes de bas en haut, ce qui donne : $1268 = (10011110100)_2$

<u>En base 3 :</u>

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
1268	3	422	2
422	3	140	2
140	3	46	2

46	**3**	**15**	**1**
15	**3**	**5**	**0**
5	**3**	**1**	**2**
1	**3**	**0**	**1**

Il faut toujours lire les restes de bas en haut, ce qui donne : $\mathbf{1268 = (1201222)_3}$

<u>En base 5 :</u>

Dividende	**Diviseur(base)**	**Quotient**	**Reste**
1268	**5**	**253**	**3**
253	**5**	**50**	**3**
50	**5**	**10**	**0**
10	**5**	**2**	**0**
2	**5**	**0**	**2**

Alors $\mathbf{1268 = (20033)_5}$

<u>En base 8 :</u>

Dividende	**Diviseur(base)**	**Quotient**	**Reste**
1268	**8**	**158**	**4**
158	**8**	**19**	**6**
19	**8**	**2**	**3**
2	**8**	**0**	**2**

Alors $\mathbf{1268 = (2364)_8}$

B) Pour le nombre $B = 2098$:

<u>En base 2 :</u>

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
2098	2	1049	0
1049	2	524	1
524	2	262	0
262	2	131	0
131	2	65	1
65	2	32	1
32	2	16	0
16	2	8	0
8	2	4	0
4	2	2	0
2	2	1	0
1	2	0	1

Alors $2098 = (100000110010)_2$

<u>En base 3 :</u>

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
2098	3	699	1
699	3	233	0
233	3	77	2
77	3	25	2
25	3	8	1
8	3	2	2
2	3	0	2

Alors $2098 = (2212201)_3$

<u>En base 5 :</u>

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
2098	5	419	3
419	5	83	4
83	5	16	3
16	5	3	1
3	5	0	3

Alors $2098 = (31343)_5$

<u>En base 8 :</u>

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
2098	8	262	2
262	8	32	6
32	8	4	0
4	8	0	4

Alors $2098 = (4062)_8$

Corrigé 8

1) Pour le nombre $X = 1216$ **:**

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
1216	16	76	0
76	16	4	12=C
4	16	0	4

Alors $1216 = (4C0)_{16}$

2) Pour le nombre $Y = 8091$ **:**

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
8091	16	505	11=B
505	16	31	9
31	16	1	15=F
1	16	0	1

Alors $8091 = (1F9B)_{16}$ **.**

Corrigé 9

1) En base 2 : $110010110 + 10001110 = 1000100100$

2) En base 8 : $5612 + 7572 = 15404$

3) En base 16 : 1D21 + F1BC = 10EDD

Corrigé 10

On décompose suivant les puissances de 16, et on remplace les symboles A,B,C,D,E, F par leurs équivalents en base 10 :

1) Pour le premier nombre :

$$\begin{aligned} 3DE18 &= 3\times16^4 + D\times16^3 + E\times16^2 + 1\times16^1 + 8\times16^0 \\ &= 3\times16^4 + 13\times16^3 + 14\times16^2 + 1\times16^1 + 8\times16^0 \\ &= 253464 \end{aligned}$$

$(3DE18)_{16} = (253464)_{10}$

2) Pour le second nombre :

$$\begin{aligned} 8AFCE &= 8\times16^4 + A\times16^3 + F\times16^2 + C\times16^1 + E\times16^0 \\ &= 8\times16^4 + 10\times16^3 + 15\times16^2 + 12\times16^1 + 14\times16^0 \\ &= 569294 \end{aligned}$$

$(8AFCE)_{16} = (569294)_{10}$.

Physique

Les bases fondamentales de la dynamique

- **Un système est un ensemble de points matériels.**
- **Un système peut être déformable ou indéformable.**
- **Une force intérieure est une force exercée par une partie du système sur une autre partie de ce système.**
- **Une force extérieure est une force exercée par l'extérieur sur le système.**
- **La relation fondamentale de la dynamique R.F.D:**
- **L'ensemble des forces appliquées à un point matériel de masse m provoque une variation de sa vitesse :** $\sum \vec{F} = m\vec{a}$
- **Le théorème de l'énergie cinétique :**

La variation de l'énergie cinétique d'un solide entre deux instants est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces appliquées au solide entre ces deux instants : $\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}}$,

- **Le théorème de l'énergie mécanique :**
  La variation de l'énergie mécanique d'un système entre deux instants est égale à la somme algébrique des travaux des forces extérieures et des forces intérieures dissipatives qui s'exercent sur le système entre ces deux instants :

$$\Delta E_m = \sum W_{\vec{F}ext} + \sum W_{\vec{F}int} (\text{dissipatives}) ,$$

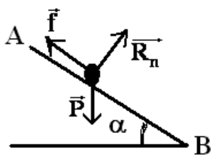
Les applications de la RFD

1. Glissement sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale :

- **Nature du mouvement:**

$$a = g\sin\alpha - \frac{f}{m}$$

(m.r.u.v).



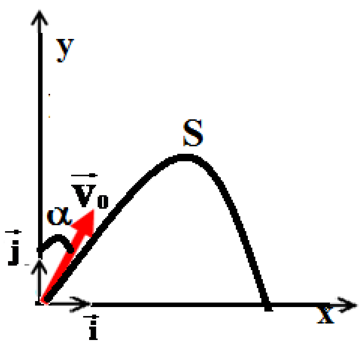
- **Expression de R:** $R = \sqrt{(mg\cos\alpha)^2 + f^2}$
- **Si f =0:** $a = g\sin\alpha$ **et** $R_n = mg\cos\alpha$

2. Cas d'un projectile :

- **Les vecteurs accélération $\vec{a}$, vitesse $\vec{V}$ et position $\overrightarrow{OM}$**

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{V}\begin{cases} V_x = V_0\cos\alpha \\ V_y = -gt + V_0\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM}\begin{cases} x = V_0\cos\alpha t & (1) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0\sin\alpha t & (2) \end{cases}$$



- **Equation de la trajectoire:**

$$Y = -\frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha} + x\,tg\alpha$$

- **La portée : C'est la distance entre le**

point de tir O du projectile et son point de chute P sur le plan horizontal.

$$\mathbf{x_P = \frac{V_0{}^2 \sin 2\alpha}{g}}$$

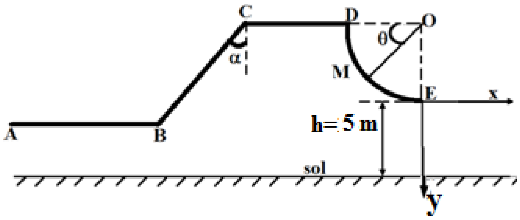
- **La flèche : Elle correspond à la hauteur maximale atteinte par le projectile au dessus du plan horizontal (ordonnée du sommet S de la trajectoire).** $\mathbf{Y_S = \frac{V_0{}^2 \sin^2\alpha}{2g}}$

Exercice 1

On néglige les frottements et on prendra g=10m/s²

Un skieur de masse totale m=80kg aborde une piste verglacée A, B, C, D et E. (voir fig).

Dans cet Exercice le skieur sera assimilé à un point matériel confondu avec son centre d'inertie G.



1 Partant sans vitesse du point A il est poussé sur le parcours AB par une force $\vec{F}$ parallèle à la piste pour arriver en B avec une vitesse $\vec{V}_B$ .Cette vitesse $\vec{V}_B$ lui permet d'atteindre le point C. AB=*l*=20m; BC=*l'*=40m; g=10m/s² et α=60°.

1.1 Calculer la valeur de la vitesse $\vec{V}_B$ pour laquelle le skieur arrive en C avec une vitesse nulle.

1.2 Calculer alors la valeur supposée constante de la force $\vec{F}$.

1.3 Déterminer la nature du mouvement du skieur entre B et C sachant que $\vec{F}$ ne s'exerce qu'entre A et B.

2 En arrivant en C le skieur s'aide de ses bâtons pour repartir sur CD, horizontale, et acquérir au point D une vitesse de valeur V_D=10m/s avec la quelle il entame le tronçon circulaire $\overset{\frown}{DE}$ de rayon r=OD=OE=2,2m.

2.1 Exprimer:

2.1.1 La valeur V_M de la vitesse du skieur au point M en fonction de V_D, r, g et de l'angle θ et en déduire sa valeur au point E.

2.1.2 La valeur R de la réaction exercée par la piste sur le skieur au point M en fonction de m, V_D, r, g et de l'angle θ.

2.2 Le skieur quitte la piste au point E pour arriver au point P situé sur le sol.

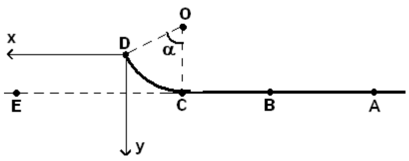
2.2.1 Calculer l'équation de la trajectoire dans le repère (E, x, y).

2.2.2 Calculer l'abscisse du point P de chute.

Exercice 2

Dans l'Exercice on négligera les frottements et l'action de l'air et on donne g = 10m/s².

Un rail ABCD contenu dans un plan vertical comporte une partie ABC rectiligne posée sur le sol horizontal et une partie CD qui a la forme d'un arc de cercle de centre O, de rayon r =0,5m et d'angle au centre α = 60° (voir fig1).



1 Un solide S de masse m = 0,1 Kg assimilable à un point matériel, est initialement au repos en A. Il est soumis sur la portion AB du rail à une force $\vec{F}$ parallèle au rail, dirigée de A vers B et d'intensité constante. Un dispositif a permis d'enregistrer la position du solide toute les 2. 10^{-2} s.

Sens du mouvement

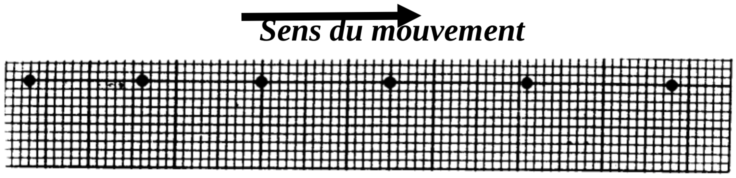


fig 2

La figure 2 représente, en vraie grandeur, une partie de l'enregistrement.

1-1 Déduire de cet enregistrement la nature du mouvement de S et calculer son accélération.

1-2 Calculer l'intensité F de la force.

2-La force $\vec{F}$ cesse d'agir lorsque S atteint le point B, la vitesse du solide vaut alors 3m/s.

2-1 Déterminer la vitesse v du solide au point C.

2-2 Avec la vitesse calculée, le solide S aborde la partie CD du rail. Déterminer au point D les caractéristiques :

1.2.1 du vecteur vitesse $\vec{V}_D$ du solide.

1.2.2 de la force $\vec{R}_D$ exercée par le rail sur le solide S.

3- en D le solide S quitte le rail avec la vitesse V_D et effectue alors un mouvement aérien.

3.1 Etablir l'équation de la trajectoire du mouvement du solide S dans le plan (D,x,y).

3.2 Déterminer les coordonnées du sommet de la trajectoire.

3.3 Calculer l'abscisse du point de chute E sur le sol.

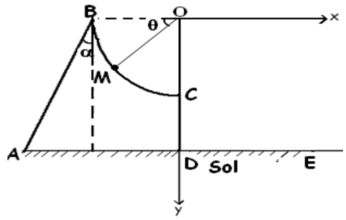
3.4 En utilisant la conservation de l'énergie mécanique entre les points D et E, calculer la vitesse du solide S à son arrivée en E.

Exercice 3

Une piste $ABCD$ est formée d'une partie AB rectiligne qui fait un angle α avec la verticale, une partie BC ayant la forme d'un arc de cercle de centre O et de rayon r et en fin une partie CD verticale (voir fig).

Données : $\alpha = 60°$, $g = 10 m/s^2$, $BO = CO = r = 1m$, $OD = 2m$

Un solide S de masse $m = 200g$ est lancé de A vers B avec une vitesse V_A.



1 Déterminer la nature du mouvement de A à B.

Les frottements sont assimilables à une force $f = \frac{mg}{4}$

(les frottements n'existent qu'entre A et B seulement.)

2 Calculer la vitesse minimale avec la quelle il faut lancer le solide S du point A pour qu'il arrive en B avec une vitesse nulle.

3 Le solide S descend de B vers C sans vitesse initiale.

3.1 Donner l'expression de sa vitesse en M en fonction de g, r et θ. A. N: θ=30°

3.2 Trouver l'expression de la réaction en M de la piste sur S en fonction de g, m et θ La calculer.

4 Donner les caractéristiques de la vitesse du solide S en C.

5 Le solide S quitte la piste à t=0 au point C et arrive au sol au point E.

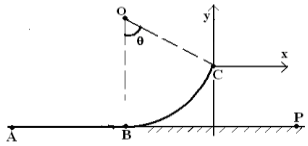
5.1. Donner l'équation de la trajectoire du solide dans le repère $(O; x; y)$.

5.2. Déterminer l'abscisse du point de chute E.

Exercice 4

Les frottements sont négligeables et on donne m=200g, g=10m/s² $\theta = 60^0$

Une piste de lancement est formée de deux parties :



- **Une partie horizontale AB de longueur l=3,5m .**
- **Une partie circulaire BC de rayon r=1,3m.**

Un solide ponctuel S de masse m est lancé du point A avec une vitesse horizontale $\vec{V_A}$.

1 Montrer que, sur la partie AB le mouvement du solide S est uniforme. Calculer la vitesse V_A si la durée du trajet AB est t=0,5s.

2 Le solide S aborde en suite la partie circulaire BC.

2.1 Donner les caractéristiques du vecteur vitesse du solide S au point C.

2.2 Trouver l'expression de la réaction de la piste sur le solide au point C et calculer sa valeur.

3 Le solide S quitte la piste au point C.

3.1 Donner l'équation de la trajectoire du mouvement du solide après C dans le repère $(C; x; y)$

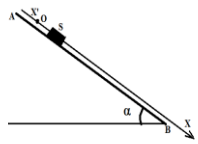
3.2 Déterminer les coordonnées du sommet de la trajectoire et la valeur de la vitesse en ce point.

3.3 Calculer le temps mis par le solide S pour partir de C jusqu'au point P situé sur le sol.

Exercice 5

Dans l'Exercice on prendra g=10m/s

Un solide S de masse m=500g, abandonné sans vitesse initiale, glisse sur un plan incliné d'un angle α=30° par rapport au plan horizontal. On suppose que le solide S est soumis à une force de frottement constante $\vec{f}$ parallèle à la trajectoire de son centre de gravité G.



1.1 Etablir l'expression de l'accélération a_1 de son centre d'inertie G. En déduire la nature du mouvement.

1.2 Dans le repère (x'Ox), établir en fonction de a_1, l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie G en prenant comme origine des dates l'instant où le solide S est lâché sans vitesse et comme origine des abscisses la position O.

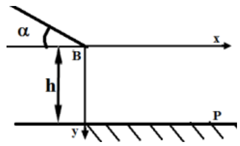
1.3 Calculer la valeur de l'accélération a_1 dans le cas où les frottements sont négligeables.

2 Un dispositif expérimental approprié permet d'enregistrer les positions du centre de gravité G de S à des instants régulièrement espacés de τ= 60ms. Les résultats expérimentaux ont permis d'établir le tableau suivant :

x_i(mm)	0	8,5	33,5	75	133	207,5
t_i(s)	0	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30

2.1 Montrer que les distances parcourues pendant les mêmes intervalles de temps τ constituent une suite arithmétique de raison r et en déduire la valeur a_2 de l'accélération $\vec{a}$ du mouvement.

2.2 Au cours de cette expérience existe-t-il des frottements ? si oui calculer la valeur de $\vec{f}$.



3 Calculer la valeur de la vitesse à la date t=3τ.

4 Au point B le solide S quitte le plan AB situé à une hauteur h=2m du sol.

4.1 Etablir les équations horaires x(t) et y(t) du mouvement de S dans le repère (B ;x ;y). En déduire l'équation de la trajectoire. On prendra pour origine des instants l'instant de passage par B et pour vitesse au point B : V_B=1m/s.

4.2 Trouver l'abscisse x_P du point de chute P sur le sol.

Trouver la valeur V_P de la vitesse de S au point P.

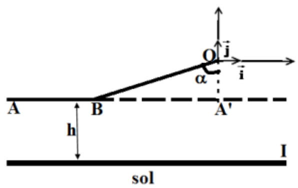
Exercice 6

On suppose que les frottements sont négligeables.

Une piste est formée de deux parties rectilignes :

-AB horizontale

- BO incliné d'un angle α=60° par rapport à la verticale et de longueur L=3,6m.



1 Un solide S ponctuel de masse m est lancé du point A avec une vitesse initiale $\vec{V}_A$.

1.1 Déterminer la nature du mouvement du solide S sur AB.

1.2 Etudier le mouvement de S sur la partie BO et donner l'expression de son accélération.

1.3 Calculer la valeur minimale que doit avoir V_A pour que la vitesse de S s'annule en O.

2 Le solide S arrive en O avec une vitesse $\vec{V}_0$ de module V_0=8m/s. Calculer V_A.

3 Arrivé en O, le solide quitte le plan incliné avec la vitesse $\vec{V}_0$.

3.1. Représenter le vecteur $\vec{V}_0$ puis établir dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'équation de la trajectoire de S. Conclure.

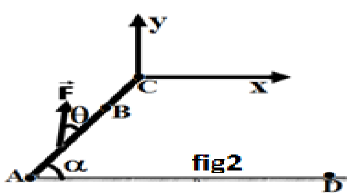
3.2 Le solide S touche le sol au point I, sachant que le plan AB se trouve à une hauteur h=1,2m du sol. Déterminer les coordonnées du point I dans le repère.

3.3 Quelle est la durée de cette chute.

3.4 Déterminer les coordonnées du point S où la vitesse du solide est horizontale.

Exercice 7

Sur un tremplin de surface parfaitement lisse incliné d'un angle α =30°par rapport à l'horizontale, un jouet S d'enfant constitué d'une petite voiture en partie cassable



initialement au repos au point A, est tiré par une force constante $\vec{F}$, inclinée d'un angle α par rapport au plan du tremplin. Ce jouet S a une masse m=100g. (Voir fig2)

On donne $\cos\theta = 0,8$; AB = 2m ; AC=2,7m.

1. La vitesse atteinte par S au point B après le parcours rectiligne AB est égale à V_B=4 m.s^{-1}.

1.1. Calculer la valeur de $\vec{F}$.

1.2. Déterminer la nature du mouvement de S sur le trajet AB.

1.3. Au point B, l'action de la force $\vec{F}$ cesse, le solide poursuit son mouvement rectiligne jusqu'au sommet C du tremplin. Déterminer la nature du mouvement de S sur le trajet BC. Calculer la vitesse de S au point C.

2. Le solide quitte le tremplin au point C, origine du repère $(C, \vec{i}, \vec{j})$ avec la vitesse V_C=3m/s

2.1. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de S dans le repère $(C, \vec{i}, \vec{j})$. L'instant de passage de S en C est considéré comme origine des dates.

2.2. S atteint le sol au point d'impact D.

2.2.1. Calculer les coordonnées du point D.

2.2.2. Sachant que le solide est brisé s'il touche le sol avec une vitesse supérieure à 5m/s. Dans quel état se trouve S après la chute.

Exercice 8

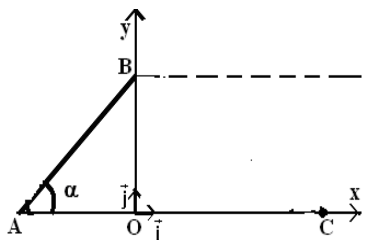
On lance un solide S de masse m=400g à partir d'un pont A avec la vitesse V_A=4m/s sur un plan AB incliné d'un angle α=30°. On prendra g=10m/s² ; AB=0,7m

1 On néglige les frottements sur AB.

1.1 Donner l'expression de l'accélération du solide S et calculer sa valeur.

1.2 Calculer la vitesse au point B.

1.3 Calculer le temps mis entre A et B.



2 On considère que les frottements sur AB équivalent à une force $\vec{f}$ tangente à la trajectoire et de sens opposé au mouvement. Le solide S arrive au point B avec la vitesse V_B=2m/s.

2.1 Déterminer la valeur de la force de frottement.

2.2 Déterminer la valeur de la réaction R exercée par le plan AB sur le solide.

3 Le solide quitte le plan incliné AB au point B avec la vitesse V_B=2m/s et effectue un mouvement aérien pour tomber au point C.

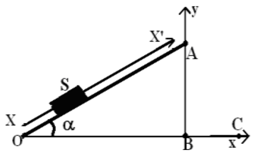
3.1 Ecrire dans le repère $(O; \vec{i}\ ; \vec{j})$ l'équation de la trajectoire du saut entre B et C.

3.2 Déterminer les coordonnées du sommet de la trajectoire du saut.

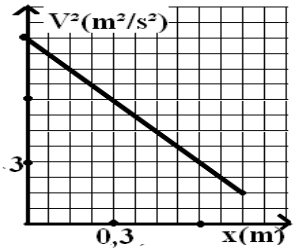
3.3 Déterminer les coordonnées du point C et en déduire la valeur de la distance BC.
3.4 Déterminer la vitesse du projectile au point C.

Exercice 9

On lance un solide S de masse m=100g avec une vitesse initiale V_0 à partir du point O origine des abscisses de l'axe XX' confondu avec la ligne de plus grande pente d'un plan OA incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.



Un dispositif permet de mesurer les vitesses V à différentes positions d'abscisses x lors du mouvement du solide.
1 La courbe représente les variations $V^2=f(x)$ lorsque les frottements sont négligeables.
1.1 Etudier le mouvement du solide S sur le plan OA.
1.2 Ecrire la relation théorique liant V^2 et l'abscisse x.
1.3 En utilisant la courbe, en déduire :

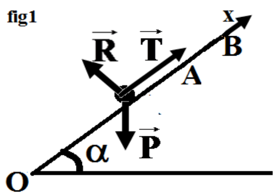


1.3.1 La valeur de l'angleα.
1.3.2 La valeur de la vitesse initiale V_0.
2 Les frottements équivalent à une force constante et opposée au sens du mouvement.
2.1 Etablir la nouvelle expression de l'accélération a' du centre d'inertie du mobile.
2.2 Calculer l'intensité de la force de frottement sachant que l'énergie cinétique du solide est 0,2j quand il parcourt la distance x=OA=0,4m.
3 Arrivé au point A, le mobile continue son mouvement dans le vide.
3.1 Ecrire dans le repère (B;x;y) l'équation de la trajectoire du mouvement du mobile à partir du point A.
3.2 Calculer les coordonnées du point C de chute.

Exercice 10

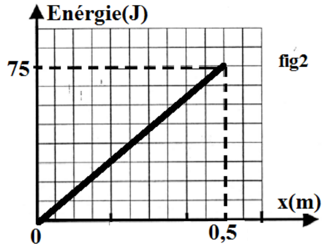
On néglige les frottements et on prendra $g=10m/s^2$
On se propose d'étudier le mouvement d'un solide de masse m=5kg assujetti à se déplacer le long de la plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α=30° ave l'horizontale (fig1).
On désigne par Ox l'axe parallèle à la ligne de plus grande pente.

fig1



Une force de traction $\vec{T}$ supposée constante et parallèle à l'axe Ox, s'exerce sur le solide le long de OA. Mis en mouvement à partir de sa position de repos O, le solide atteint la position A d'abscisse x_A =0 ,5m avec une vitesse $\vec{V}_A$.

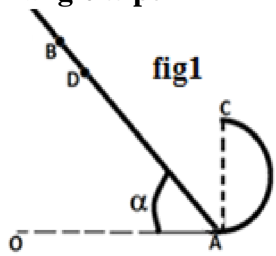
1. A partir de A, la force T est supprimée et le solide continue son mouvement jusqu'à l'arrêt au point B.
Sur la fig 1 sont représentées les forces que nous supposons être appliquées au centre d'inertie G du solide au cours de son mouvement entre O et A.
1.1 Montrer que pour une position d'abscisse x entre O et A, l'énergie mécanique E(x) du système {solide+Terre} s'écrit E(x)=T.x
On suppose que l'origine des énergies potentielles de pesanteur correspond au plan horizontal passant par O.
1.2 Le diagramme de l'énergie mécanique E(x) du système est porté sur la fig 2. Déduire la valeur T.



2.1 Etablir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{PP}(x)$ du système et celle de l'énergie cinétique $E_C(x)$ du solide lorsque ce dernier occupe une position d'abscisse x entre O et A.
2.2 Compléter la fig2 en traçant les diagrammes correspondants à $E_{Pp}(x)$ et $E_C(x)$.
3En déduire la distance entre A et B.

Exercice 11

0n néglige les frottements sauf dans la question 2
Une piste est constituée d'une partie rectiligne inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale telle que la longueur BA= 6m, suivie d'une partie circulaire AC de rayon r = 0,5m.
L'ensemble de la piste est situé dans un plan vertical (voir figure 1)



1. Le solide (S), de masse 250g, supposé ponctuel, est en mouvement sur le plan incliné. Il est lâché sans vitesse d'un point D situé entre B et A tel que DA = L.
On suppose que le changement de pente en A ne provoque pas de variation de la vitesse.
1.1 Exprimer la norme de la vitesse V_C du mobile en C en fonction de r,α, L et g.
1.2 Déterminer l'expression de la réaction R exercée par la piste sur le mobile au point C en fonction de m, L, r, α et g.
1.3 Pour quelle valeur de L, le mobile quitte la partie circulaire de la piste en C? On donne sinα = 0,25
2 Dans une nouvelle expérience, le solide est lâché sans vitesse initiale. Il passe en B avec la vitesse V_B. Il est soumis, le long du trajet BA, à une force de frottement de valeur constante f.
A l'aide d'un dispositif approprié, on trace le diagramme de la figure 2 correspondant à la variation de l'énergie

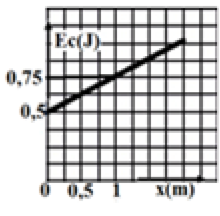


fig 2

cinétique du mobile en fonction de l'abscisse x comptée à partir du point B.
2.1 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au mobile, entre la position B et une position M du plan incliné d'abscisse x quelconque, exprimer $E_C(M)$ en fonction de m, g, f, x et E_C (B).
2.2 En exploitant le diagramme de la figure 3, déterminer les valeurs de la force de frottement et de la vitesse au point B.

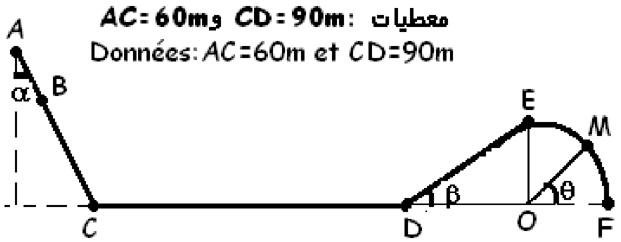
Exercice 12

Les forces de frottements ne s'exercent qu'entre **B** *et* **D**. *On prendra* $g = 10 m/s^2$

Un mobile de masse $m = 500g$ se déplace sur le trajet ayant la forme donnée par la fig1.

Le mobile commence sa course au sommet A de la partie rectiligne AC qui fait un angle $\alpha = 60°$ avec la verticale et arrive au point B avec la vitesse $V_B = 10 m/s$.

Fig1



1. Entre les points B et C s'exerce une force de frottement $\vec{f_1}$ qui ralentit le mouvement. Déterminer l'intensité de cette force f_1 pour que le mobile arrive en C avec une vitesse de valeur double de V_B.

2. Déterminer la valeur de la vitesse au point D si la force de frottement s'exerçant sur la partie horizontale CD représente le sixième du poids du mobile.

3. Le mobile aborde alors la partie DE qui fait un angle $\beta = 10°$ avec l'horizontale. Déterminer la longueur l de cette partie pour que le mobile arrive en E avec une vitesse pratiquement nulle.

4. Arrivé au point E le mobile glisse sans frottement sur le quart du cercle EF de rayon r et de centre O situé sur la même horizontale CDF.

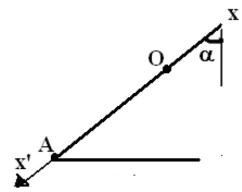
La position du mobile est repérée par l'angle $\theta = (\vec{OF}, \vec{OM})$.

Exprimer la vitesse au point M en fonction de θ, l, β et g

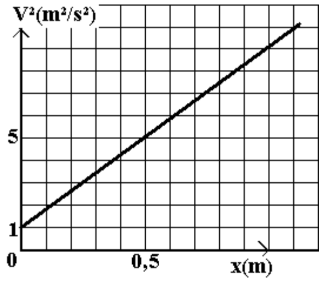
Exprimer en fonction de θ, m et g la valeur de la réaction de la piste sur le mobile au point M.

Exercice 13

Un solide ponctuel de masse m=200g glisse sur un plan OA incliné d'un angle $\alpha=60^0$ par rapport à la verticale. Il part du point O origine de l'axe orienté X'X avec une vitesse initiale de valeur V_0. Au cours de son mouvement, S subit une force de frottement $\vec{f}$. Un dispositif approprié permet de mesurer la vitesse V instantanée du solide pour différentes positions x. La courbe représentative de $V^2 = f(x)$ est donné par la fig2



1 Déterminer graphiquement l'équation $V^2 = f(x)$.



2 En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, établir l'expression de V^2 en fonction de x.

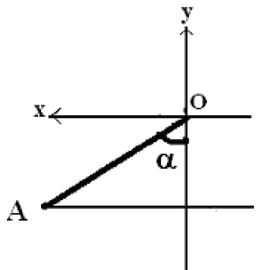
3 En déduire les valeurs de la force de frottement $\vec{f}$ et de la vitesse V_0.

4 Au point d'abscisse $x = 0,5m$, l'énergie mécanique E du système {solide-terre} est égale au double de l'énergie cinétique. En déduire la position adoptée pour le plan de référence de l'énergie potentielle de pesanteur.

5

5.1 Donner l'expression de l'énergie cinétique E_C et de l'énergie potentielle E_P du système {solide-terre} en fonction de x ; en prenant pour référence de l'énergie potentielle le plan horizontal situé à 0,5 cm en dessous du point O.

5.2 Sur un même graphique, représenter les courbes $E_C = f(x)$ et $E_P = g(x)$ pour les valeurs de x telles que $0 \leq x \leq 1m$.



5.3 En déduire l'expression de E en fonction de x puis tracer la courbe $E = h(x)$. On donne g=10m/s².

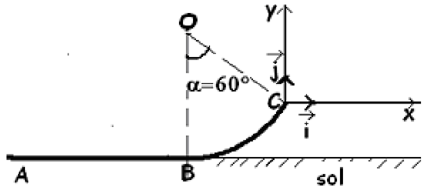
5.4 Le solide quitte le plan incliné en A tel que $OA = 3m$.

5.4.1 Donner les caractéristiques du vecteur vitesse du solide en A.

5.4.2 Déterminer les équations paramétriques du mouvement du solide S dans le repère $(O; x; y)$ après avoir quitté le plan incliné.

Exercice 14

Un solide S de masse m=200g se déplace sur une piste ABC, constituée d'une partie rectiligne et horizontale AB =1,6m et d'une partie curviligne BC de centre O et de rayon r=0,7m. (fig1)



1 Le solide quitte le point A sans vitesse initiale sous l'action d'une force constante $\vec{F}$ qui ne s'exerce qu'entre A et B.

On enregistre à des intervalles de temps réguliers $\tau = 20ms$ les positions occupées par le solide et on obtient l'enregistrement de la figure 2 ci-contre :

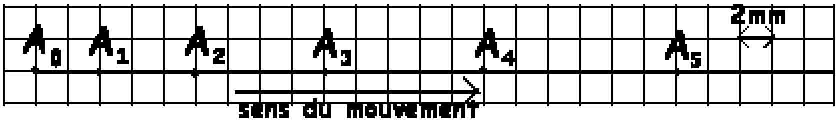


Fig2

1.1 Déterminer la nature du mouvement et calculer la valeur expérimentale de son accélération.

1.2 Sachant que la valeur de la force $\vec{F}$ est $F = 2N$ dire est ce que le mouvement se fait sans frottement ou avec frottement. Déterminer la valeur de la réaction exercée par la piste sur le solide ainsi que l'angle β qu'elle fait avec la verticale.

1.3 Calculer la valeur de la vitesse au point B.

2 Le solide continue son mouvement sans frottement sur la partie curviligne BC.

2.1 Déterminer les caractéristiques de la vitesse au point C.

2.2 Calculer la valeur de la réaction $\vec{R}_C$ qu'exerce la piste sur le solide au point C.

3 Le solide quitte la piste au point C avec la vitesse $\vec{V}_C$ et effectue un mouvement aérien avant d'atterrir au point D.

3.1 Déterminer l'équation de la trajectoire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3.2 déterminer les coordonnées des points le plus haut et le plus bas de la trajectoire.

Exercice 15

Les frottements sont négligeables.

On étudie le mouvement d'un solide S sur une piste, constituée d'une partie rectiligne AB= ℓ et d'une partie BC représentant la moitié d'un cercle de centre O et de rayon r (fig 1).

On exerce entre A et B sur le solide S, qui était au repos en A, une force $\vec{F}$ horizontale d'intensité constante.

1 Déterminer la nature du mouvement entre A et B et exprimer en fonction de F, ℓ et m la vitesse V_B du solide au point B.

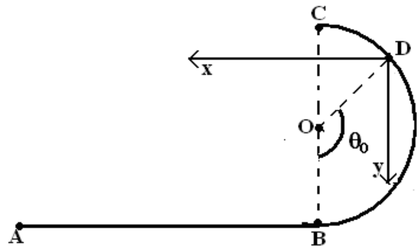
2 Déterminer en fonction de F, ℓ, m, r, g et θ l'expression de la vitesse au point M défini par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OM})$.

3 Déterminer en fonction de F, ℓ, m, r, g et θ l'expression de la réaction R au point M.

Calculer la valeur minimale F_m de F qui permet que S atteigne le point C.

4 On donne à F la valeur F_0=7/3 N.

fig 2



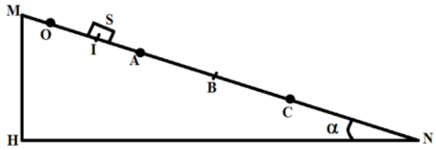
4.1 Le solide S perd contact avec la piste au point D dont la position est définie par l'angle $\theta_0 = (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OD})$. Déterminer l'angle θ_0 et calculer la vitesse V_D en ce point D.

4.2 Etablir dans le repère (D ; x ;y) de la fig 2 l'équation de la trajectoire du solide S.

4.3 Calculer l'abscisse du point I d'impact du solide S sur le plan horizontal

Exercice 16

Un solide S de masse m=500g, abandonné sans vitesse initiale, glisse sur un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. Il part du point O sans vitesse initiale et passe entre deux cellules A et C. Un index I solidaire du solide S, déclenche un chronomètre au passage en A et l'arrête en C.



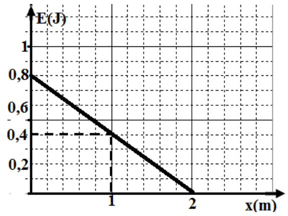
La durée enregistrée par le chronomètre est Δt=0,05s.

On pourra considérer que la mesure de la vitesse entre A et C permet de connaître avec une bonne précision la vitesse instantanée en B milieu de AC (voir fig1). On donne OB=1m ; AC=0,1m, MN=2m ; MH=0,6m.

1. Calculer l'angle α.

2.1 Calculer la variation de l'énergie cinétique du solide entre A et B puis la somme des travaux des forces appliquées en négligeant les frottements.

2.2 Que peut-on affirmer à propos de ce résultat.



3. Par application du théorème de l'énergie cinétique, en déduire la valeur de la force de frottement que l'on supposera constante et parallèle à la ligne de plus grande pente du plan incliné.

4. Sur la figure 2 on donne la représentation graphique de l'énergie mécanique E du système {solide, terre} en fonction de x.

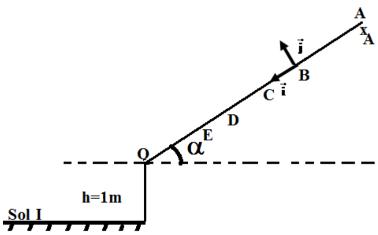
4.1. Déterminer graphiquement l'expression de E en fonction de x; la retrouver théoriquement.

4.2. En déduire la position du plan de référence des énergies potentielles de pesanteur par rapport au point O.

4.3. Etablir les expressions analytiques de l'énergie potentielle E_P et de l'énergie cinétique E_C en fonction de x. En déduire la position où l'on a $E_C = E_P$.

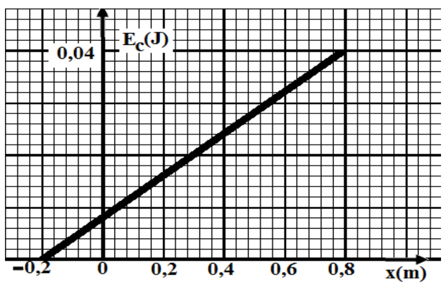
Exercice 17

Un solide S de masse m=0,14kg se déplace sur une piste rectiligne inclinée d'un angle α=10° par repport à l'horizontale. Le solide S est laché sans vitesse initiale du point A d'abscisse x_A définie relativement au repère $(B;\vec{i};\vec{j})$. Arrivé au point O, il s'engage dans un mouvement de chute parabolique où tout type de frotttement est négligeable et rencontre le sol au point I tel que la différence d'altitude entre les points O et I est h=1m comme l'indique la fig 1.



Les frottements auxquels est soumis le solide S au cours de son mouvement entre les points Aet O sont équivalents à une force $\vec{f}$ d'intensité supposée constante

A l'aide d'un dispositif approprié on détermine la vitesse instantannée du solide S lors de son passage par les points B, C, D, E et O d'abscisses respectives 0m ; 0,2m ; 0,4m ; 0,6m ; 0,8m. Ceci permet de tracer le diagramme de la fig 2 correspondant à l'énergie cinétique du solide S en fonction de l'abscisse x.



1 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au solide entre la position B et une position quelconque M d'abscisse x par rapport au repère $(B;\vec{i})$, montrer que :

$E_C(x) = mgx\sin\alpha - fx + E_{CB}$

2 En utilisant le diagramme de la fig2 déterminer l'intensité de la force de frottement et la valeur de l'abscisse x_A

du point A. On donne g=9,8m/s².

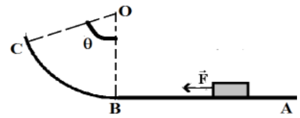
3 Montrer que l'énergie mécanique E_m du système {terre+S} est conservée au cours du mouvement de chute parabolique.

4 Calculer la valeur de E_m sachant que l'énergie potentielle de pesanteur au sol est nulle.

En déduire la valeur de la vitesse avec laquelle le solide percute le sol en I.

Exercice 18

Un solide ponctuel de masse m=500g glisse sur un trajet constitué d'un plan horizontal AB de longueur L=2m et d'un arc de cercle BC de rayon r = 10cm. (fig1)



On enregistre le mouvement de ce solide sur la partie AB pendant des intervalles de temps successifs et égaux τ=50ms. Le document de la

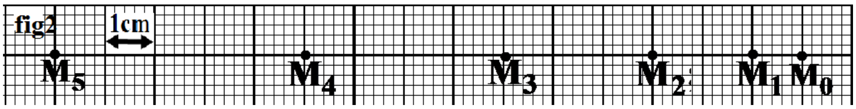


fig2 représente cet enregistrement.

1 Calculer les vitesses aux points M_1, M_2, M_3 et M_4.

2 Calculer les accélérations aux points M_2 et M_3 , en déduire la nature de ce mouvement.

3 A l'instant t =0, le solide S quitte le point A sans vitesse initiale sous l'action d'une force $\vec{F}$ constante et parallèle au plan horizontal AB.

3.1 Donner l'énoncé du théorème de l'énergie cinétique.

3.2 Calculer la valeur de la force horizontale $\vec{F}$ sachant que la force de frottement est supposée négligeable.

3.3 Les frottements ne sont plus négligeables et sont supposés équivalents à une force $\vec{f}$ unique parallèle au plan AB et de sens opposé à celui du mouvement. Calculer l'intensité f de cette force de frottement $\vec{f}$, si F garde la valeur précédente et si V_B = 2m/s.

3.4 Calculer la valeur de la réaction R exercée par le plan AB ainsi que l'angle qu'elle fait avec la normale à ce plan.

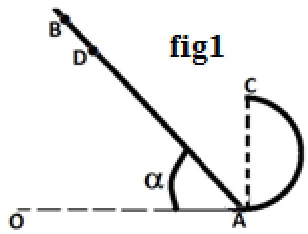
4. La force $\vec{F}$ ne s'exerce plus sur le solide lors de son déplacement qui se fait sans frottement sur l'arc $\widehat{BC}$.

4.1. Exprimer la vitesse V_C au point C en fonction de V_B, r, g et θ.

4.2. Calculer sa valeur pour θ =60°.

Exercice 19

On néglige les frottements sauf dans la question 3



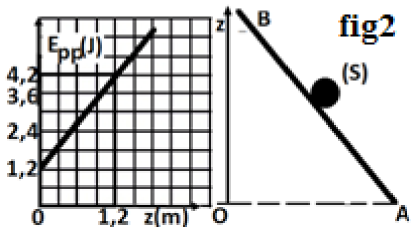
Une piste est constituée d'une partie rectiligne inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale telle que la longueur BA= 6m, suivie d'une partie circulaire AC de rayon r = 0,5m.

L'ensemble de la piste est situé dans un plan vertical (voir figure 1)

On considère le système : {solide (S), terre}

1 Le solide (S), de masse 250g, supposé ponctuel, est en mouvement sur le plan incliné

1.1 Ecrire, en fonction de m, g, z et E_{pp0} , l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} du système (E_{pp0} représente la valeur de l'énergie potentielle de pesanteur du système au niveau du plan horizontal passant par O et A).



1.2 L'étude de la variation de E_{pp} en fonction de l'altitude z, a donné la courbe de la figure 2 qui vérifie l'équation d'une droite: $E_{pp}= az+b$ (E_{pp} en J et z en m). Déduire les valeurs de a et b.

1.3 Déduire les valeurs de l'accélération de pesanteur g, de E_{pp0} et de l'altitude z_0 qui correspond à $E_{pp} = 0$.

2 Le mobile est lâché maintenant sans vitesse d'un point D situé entre B et A tel que DA = L.

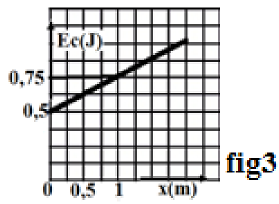
On suppose que le changement de pente en A ne provoque pas de variation de la vitesse.

2.1 Exprimer la norme de la vitesse V_C du mobile au point C en fonction de r, α, L et g.

2.2 Déterminer l'expression de la réaction R exercée par la piste sur le mobile au point C en fonction de m, L, r, α et g.

2.3 Pour quelle valeur de L, le mobile quitte la partie circulaire de la piste en C? On donne sinα = 0,25

3 Dans une nouvelle expérience, le solide est lâché sans vitesse initiale. Il passe en B avec la vitesse V_B. Il est soumis, le long du trajet BA, à une force de frottement de valeur constante f.



A l'aide d'un dispositif approprié, on trace le diagramme de la figure 3 correspondant à la variation

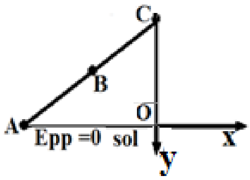
de l'énergie cinétique du mobile en fonction de l'abscisse x comptée à partir du point B.

3.1 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au mobile, entre la position B et une position M du plan incliné d'abscisse x quelconque, exprimer $E_C(M)$ en fonction de m, g, f, x et E_C (B).

3.2 En exploitant le diagramme de la figure 3, déterminer les valeurs de la force de frottement et de la vitesse au point B.

Exercice 20

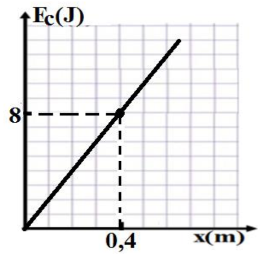
On considère un solide de masse m=5kg en mouvement sur une piste inclinée d'un angle α=60° par rapport à la verticale.



Sous l'action d'une force motrice $\vec{F}$ supposée constante et parallèle à la ligne de plus grande pente, le solide quitte la position A avec une vitesse nulle pour atteindre la position B telle que AB =8m avec une vitesse V_B.

Le solide est soumis constamment lors de son mouvement sur AC à une force de frottement de module f=5N.

1 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, établir l'expression de l'énergie cinétique E_C en un point d'abscisse x situé entre A et B en fonction de l'abscisse x, des forces F et f, de l'angle α de la masse m et de g.



2 Le diagramme de la variation de l'énergie cinétique est donné par la courbe $E_C = f(x)$.

2.1 Déterminer la valeur de la force motrice F.

2.2 Etablir en fonction de x, l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_P(x)$ et celle de l'énergie mécanique $E_m(x)$ du solide lorsque ce dernier occupe une position d'abscisse x entre A et B.

2.3 Compléter la figure en traçant les diagrammes correspondants à $E_P(x)$ et $E_m(x)$.

3 Calculer la valeur de la vitesse au point B.

4 Lorsque le solide passe en B la force motrice est supprimée. Il continue alors son mouvement pour atteindre le point C avec une vitesse V_C. Montrer que le système {solide + Terre} n'est pas conservatif. En déduire la distance BC si la valeur de la vitesse au point C est V_C =4m/s.

5 Arrivé en C, le solide quitte le plan incliné avec la vitesse $\vec{V}_C$.

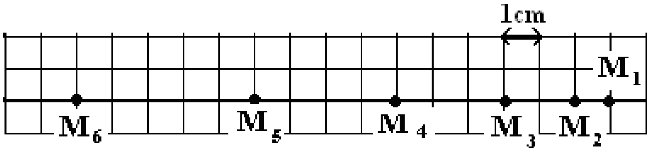
5.1. Représenter le vecteur $\vec{V}_C$ puis établir dans le repère (O,x,y), l'expression de l'équation de la trajectoire du solide si l'origine des instants est l'instant d'arrivée au point C. Conclure.

5.2 Le solide S arrive au point I sur le sol. Calculer la valeur de la vitesse $\vec{V}_I$ d'arrivée au point I ainsi que l'angle α qu'elle fait avec l'axe des abscisses.

Exercice 21

On donne g=10m/s².

Un solide ponctuel de masse m=500g glisse sur un plan AO incliné d'un angle $\alpha=30^0$ par rapport à l'horizontale. On enregistre le mouvement de ce solide pendant des intervalles de temps successifs et égaux θ=50ms. Le document de la fig1 représente cet enregistrement.

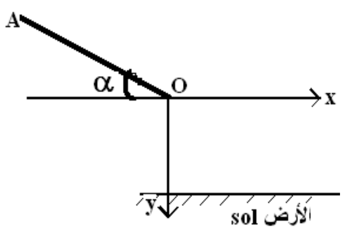


1 Calculer les vitesses aux points $M_2; M_3; M_4$ et M_5 .

2 Calculer les accélérations aux points $M_3; M_4$, en déduire la nature de son mouvement.

3 Le mouvement se fait-il avec frottement ? Si la réponse est positive déterminer la valeur de cette force de frottement f.

4 Le solide quitte le plan incliné au point O avec la vitesse $V_0 = 2m.s^{-1}$ et continue son mouvement dans le vide. (voir fig 2)



4.1 Préciser la direction et le sens du vecteur $\vec{V}_O$.

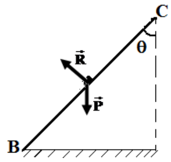
4.2 Etudier le mouvement du solide S et calculer l'équation de sa trajectoire.

4.3 Déterminer les coordonnées du point de chute du solide s'il a mis 0,5s pour effectuer son mouvement dans le vide.

4.4 En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, trouver la vitesse au point de chute.

Corrigé de l'Exercice1

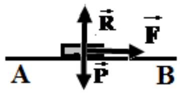
1.1Calcul de la vitesse V_B .



$$\frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = -mgBC\cos\theta \Rightarrow V_B = \sqrt{-2gBC\cos\theta} = 20m/s$$

1.2Calcul de F :

$$\frac{1}{2}mV_B^2 = FAB \Rightarrow F = \frac{mV_B^2}{2AB} = 800N$$



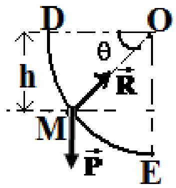
1.1 Nature du mouvement entre B et C

Nature du mouvement : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a}$

par projection sur $\vec{AB}$ on obtient : $-P\cos\alpha = ma \Rightarrow a = -g\cos\theta$ **m.r.u.v**

2.1.1 Expression de V_M En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, on obtient :

$$\frac{1}{2}mV_M^2 - \frac{1}{2}mV_D^2 = mgh \text{ avec } h = r\sin\alpha \text{ et}$$



soit $V_M = \sqrt{V_D^2 + 2gr\sin\theta}$

Au point E : $V_E = \sqrt{V_D^2 + 2gr}$ car $\theta_E = \frac{\pi}{2}$ soit $V_E = 12m/s$

2.1.2 Expression de la réaction.

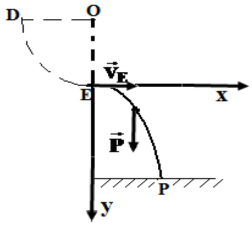
En appliquant la R.F.D, on obtient : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

Par projection sur la normale on trouve $-P\sin\alpha + R = ma_n$ **avec** $a_n = \frac{V_M^2}{r}$ **soit**

$$R = 3mg\sin\theta + \frac{mV_D^2}{r}$$

2.2.1 Etude du mouvement après E :

Conditions initiales : $E\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \vec{V}_E\begin{cases} V_{Ex} = V_E \\ V_{Ey} = 0 \end{cases}$



En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$$

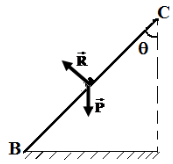
$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases} \Rightarrow \vec{V}\begin{cases} V_x = V_E \\ V_y = gt \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{EM}\begin{cases} x = V_E t & (1) \\ y = \frac{1}{2}gt^2 & (2) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire :(1) donne $t = \frac{x}{V_E}$ **en remplaçant dans (2), on trouve :** $y = \frac{g}{2V_E^2}x^2 = 0,035x^2 \qquad (3)$

2.2.2 L'abscisse du point P : au point y_P=h en remplaçant dans(3),on trouve :

$x_P = V_E\sqrt{2\frac{y_P}{g}}$ avec $y_P = h = 5m$ **A.N : x_P=12m**

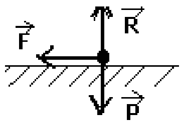
Corrigé de l'Exercice2



1.1. Nature du mouvement du solide S :

D'après l'enregistrement les distances parcourues forment une progression arithmétique de raison $r=10^{-3}$, le mouvement est donc un m. r. u.v d'accélération $a=r/\theta^2$ où $\theta=2.10^{-2}$ s est l'intervalle de temps. Soit $a=2.5m/s^2$.

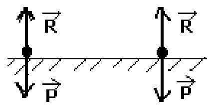
1.2 Calcul de la force F :



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$$

$\Rightarrow$ **F=ma A.N : F=0,25N**

2.1 La vitesse du solide S au point C :

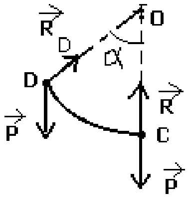


$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow \Delta E_C = 0 \Leftrightarrow V_C=V_B=3m/s.$$

2.2 Les caractéristiques de $\vec{V}_D$ et de $\vec{R}_D$:

❖ **Les caractéristiques de $\vec{V}_D$:**

- **Direction : elle fait l'angle α avec l'horizontale.**
- **Sens : vers le haut.**
- **Origine : le point D.**
- **Valeur :**



$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_{cD} - E_{cC} = mgh \text{ avec } h=r(1-\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad V_D = \sqrt{V_C^2 - 2gr(1-\cos\alpha)}$$ **A.N : V_D=2m/s**

❖ **Les caractéristiques de $\vec{R}_D$**

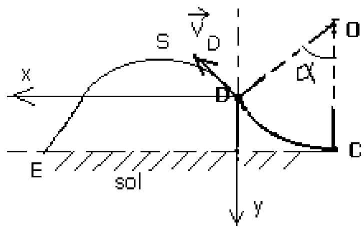
- **Direction : la normale**
- **Sens : centripète**
- **Origine : le point D**
- **Valeur : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R}_D = m\vec{a}$**

Par projection suivant la normale on obtient :

$R_D - P\cos\alpha = mV_D^2/r$

$R_D = mg(3\cos\alpha - 2) + mV_C^2/r$ **A.N : R_D =1,3N**

3.1 Etude du mouvement dans le vide :



- **La seule force qui s'exerce est le poids**
- **La RFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$**

Par projection :

- **Sur Dx**

$a_x = 0 \Rightarrow v_x = v_D\cos\alpha \Rightarrow x = v_D\cos\alpha t$

- **Sur Dy**

$a_y = g \Rightarrow v_y = gt - v_D\sin\alpha \Rightarrow y = \frac{1}{2}gt^2 - v_D\sin\alpha t$

Equation de la trajectoire : $t = x/ v_0\cos\alpha$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}gx^2/v_D^2\cos^2\alpha - \tan\alpha . x$ **A.N :** $y=5x^2-1,7x$

3.2 Les coordonnées du sommet S de la trajectoire :

Au sommet dy/dx =0 $\Rightarrow x_S = v_0^2\sin\alpha\cos\alpha/g$ A .N : x_S =0,17m

et $y_S = -v_0^2\sin^2\alpha/2g$ y_S =-0,15m

3.3 L'abscisse du point E de chute sur le sol :

L'ordonnée du point E est y_E = r(1-cosα) en remplaçant dans l'équation de la trajectoire ; on obtient : x_E =0,46m

3.4 Calcul de la vitesse du solide S au point E :

Au point D : $E_D= \frac{1}{2} mV_D^2+mgr(1-\cos\alpha)$

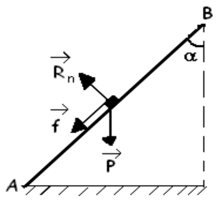
Au point E : $E_E= \frac{1}{2} mV_E^2$

Comme il y'a conservation de l'énergie mécanique, on peut écrire :

$\frac{1}{2} mV_E^2= \frac{1}{2} mV_D^2+mgr(1-\cos\alpha)$ A.N : V_E=3m/s.

Corrigé de l'Exercice3

1 Nature du mouvement :



$\sum\vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P}+\vec{R}+\vec{f} = m\vec{a}$

Par projection sur $\vec{AB}$ on obtient : $-P\cos\alpha - f = ma$

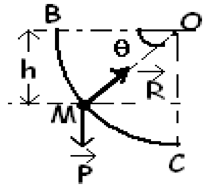
$\Rightarrow a = -g\cos\alpha - \frac{g}{4} = -\frac{3}{4}g$ **m.r.u.v A.N : a=-7,5m/s²**

2 Calcul de la vitesse de lancement.

$V_B^2 - V_A^2 = 2a.AB \Rightarrow V_A = \sqrt{-2a.AB}$ **car si V_B=0, V_A est minimale or** $AB = \frac{OD}{\cos\alpha}$

soit $V_A = \sqrt{\frac{3g.OD}{2\cos\alpha}}$ **A.N :V=7,75m/s.**

3.1Expression de V_M



En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, on obtient :

$\frac{1}{2}mV_M^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = mgh$ **avec $h = r\sin\alpha$ et $V_B = 0$ soit**

$V_M = \sqrt{2gr\sin\alpha} = 3{,}16 m/s$

3.2Expression de la réaction. En appliquant la R.F.D, on obtient : $\sum\vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P}+\vec{R} = m\vec{a}$

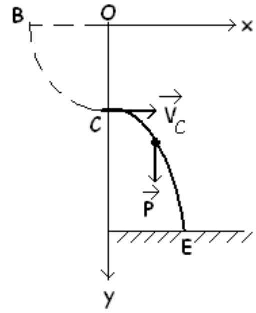
Par projection sur la normale on trouve

$-P\sin\alpha+R=ma_n$ avec $a_n = \frac{V_M^2}{r}$ **soit** $R = 3mg\sin\alpha$ **A.N : R=3N**

4. Caractéristiques du vecteur $\vec{V}_C$:

$$\vec{V}_C \begin{cases} \text{-direction: horizontale Ox} \\ \text{-sens:celui de } O\vec{x} \\ \text{-origine: lepointC} \\ \text{-module:} V_C = \sqrt{2gr} = 4{,}5 m/s \end{cases}$$

5.1 Conditions initiales



$$C\begin{cases}x_0 = 0\\ y_0 = OC = r\end{cases} \quad \vec{V}_C\begin{cases}V_{Cx} = V_C\\ V_{Cy} = 0\end{cases}$$

En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a}\begin{cases}a_x = 0\\ a_y = g\end{cases} \Rightarrow \vec{V}\begin{cases}V_x = V_C\\ V_y = gt\end{cases} \Rightarrow \vec{OM}\begin{cases}x = V_C t & (1)\\ y = \frac{1}{2}gt^2 + r & (2)\end{cases}$$

L'équation de la trajectoire :(1) donne $t = \frac{x}{V_C}$ **en remplaçant dans (2), on trouve :** $y = \frac{g}{2V_C^2}x^2 + r$ (3)

5.2 L'abscisse du point E :

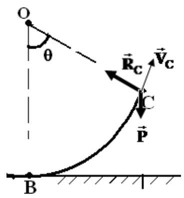
Au point E , on a y_E=OD=2r en remplaçant dans(3), on trouve :

$x_E = \sqrt{2r\frac{V_C^2}{g}}$ **A.N :x_E=2m**

Corrigé de l'Exercice4

1 La nature du mouvement

• La RFD $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$



• Projection sur l'axe x'x : $0 + 0 = ma \Rightarrow a = 0$

Donc le mouvement est rectiligne uniforme.

Calcul de la vitesse V_A :

$x = V_A t + x_0 \Rightarrow V_A = \frac{x - x_0}{t}$ **A.N : V_A = 7m/s**

2.1 Caractéristiques de $\vec{V}_C$:

- **Direction : elle fait l'angle θ avec l'horizontale.**
- **Sens : vers le haut.**
- **Origine : le point C.**
- **Valeur :** $\Delta E_c = \sum W_{\vec{F}}$ **⇔ $E_{cC} - E_{cB}$ = - mgh avec h=r(1-cosα)**

$\Rightarrow V_C = \sqrt{V_B^2 - 2gr(1 - \cos\theta)}$ **A.N :** $V_C = 6m/s$

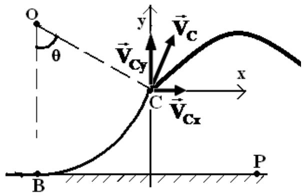
2.2 Expression de R_C

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R}_C = m\vec{a}$$

Par projection sur la normale, on obtient :

$-mg\cos\theta + R_C = m\frac{V_C^2}{r}$ $R_C = m(g\cos\theta + \frac{V_C^2}{r})$ **A.N :** $R_C = 5,5N$

3.1 Etude du mouvement du solide S dans le vide :



• La seule force qui s'exerce est le poids

•La RFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$

En projetant a suivant les axes :

• Sur Cx $a_x = 0$ $V_x = V_C\cos\theta$ $x = V_C\cos\theta t$ **(1)**

- **Sur Cy $a_y = -g$ $V_y = -gt + V_C\sin\theta$ $y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_C\sin\theta t$(2)**

Equation de la trajectoire :

(1) $\Rightarrow t = x/v_0\cos\theta \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gx^2/V_C^2\cos^2\theta + \tan\theta.x$ A.N : $y=-0,56x^2+1,7x$

3.2 Les coordonnées du sommet S de la trajectoire :

Au sommet $dy/dx = 0 \Rightarrow x_S = V_C^2\sin\theta\cos\theta/g$ A .N : $x_S = 1,56m$

et $y_S = v_0^2\sin^2\theta/2g$ $y_S = 1,35m$

La vitesse au point S : $V_S = V_x = V_C\cos\theta = 3m/s$

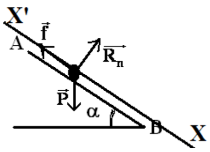
3.3 Durée du mouvement :

$Y=-r(1-\cos\theta) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_C\sin\theta t \Leftrightarrow -5t^2+5,16t+0,65=0$ $\sqrt{\Delta} = 6,3$ soit $t = 1,14s$

Corrigé de l'Exercice5

1.1 L'expression de l'accélération a_1 si f n'est pas négligeable:

$\sum\vec{F}_{ext} = m\vec{a}_1 \Leftrightarrow \vec{P}+\vec{R}+\vec{f} = m\vec{a}_1$



par projection sur $\overline{X'X}$ on obtient :

$-f + P\sin\alpha = ma_1 \Rightarrow a_1 = g\sin\alpha - \frac{f}{m}$

1.2. Comme a=cte

$\Rightarrow$ m.r.u.v $\Rightarrow x = \frac{1}{2}a_1t^2 + \underbrace{v_0t}_{0} + \underbrace{x_0}_{0}$ soit $x = \frac{1}{2}a_1t^2$

1.3 Déduction de l'accélération a_2 si f est négligeable:

Si f=0 l'expression de a_1 devient : $a_1 = g\sin\alpha = 5m/s^2$

2.1 Montrons que les distances parcourues pendant les intervalles de temps forment une suite arithmétique de raison r :

Les distances parcourues pendant τ sont :

d_1=8,5mm; d_2=33,5-8,5=25mm ;

d_3=75-33,5=41,5mm ; d_4=133-75=58mm ; d_5=207,133=74,5mm ;

La raison : $d_2 - d_1$=16,5mm ; $d_3 - d_2$=16,5mm ; d_4-d_3=16,5mm ; $d_5 - d_4$=16,5mm.

Donc ces distantes forment une suite arithmétique de raison r=16,5mm.

Déduisons a_2 : $r=a\tau^2 \Rightarrow$ $a_2 = \frac{r}{\tau^2} = 4,58m/s^2$

2.2 Comme $a_2 < a_1$ il y'a frottement.

La valeur de f :

$a_2 = -\frac{f}{m} + g\sin\alpha \Rightarrow f = mg\sin\alpha - ma_2$ **Soit : f=0,21N.**

3 Calcul de V :

$V = a_2t = 3a_2\tau = 0,82m/s$

4.1 Les équations horaires du mouvement à partir du point B :

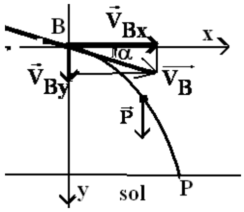
Conditions initiales :

$B\begin{cases} x_0 = x_B = 0 \\ y_0 = y_B = 0 \end{cases}$ $\vec{V}_B\begin{cases} V_{Bx} = V_B\cos\alpha \\ V_{By} = V_B\sin\alpha \end{cases}$

En appliquant la R.F.D, on obtient :

$\sum\vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases} \Rightarrow \vec{V}\begin{cases} V_x = V_B\cos\alpha \\ V_y = gt + V_B\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BM}\begin{cases} x = V_B\cos\alpha t & (1) \\ y = \frac{1}{2}gt^2 + V_B\sin\alpha t & (2) \end{cases}$$



$$\text{soit } \overrightarrow{BM}\begin{cases} x = 0,87t & (1) \\ y = 5t^2 + 0,5t & (2) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire :

L'équation (1) donne : $t = \dfrac{x}{V_B\cos\alpha}$

En remplaçant dans (2), on trouve l'équation de la trajectoire :

$y = \dfrac{g}{2V_B^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$ **Soit** $y = 6,67x^2 + 0,58x \quad (3)$

4.2 Calcul de l'abscisse du point de chute P :

L'équation (3) donne :

$y_P = 6,67x^2 + 0,58x$ **or** $y_P = h = 2 \Leftrightarrow 6,68x^2 + 0,58x - 2 = 0$

$\Delta = (7,32)^2$ **Soit** $x_P \approx 0,6m$

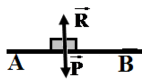
4.3 Calcul de la vitesse V_P:

Par application du théorème de l'énergie cinétique entre B et P, on trouve :

$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_{C_P} - E_{C_B} = W_{\vec{P}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mV_P^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = mgh \Rightarrow V_P = \sqrt{V_B^2 + 2gh}$ **Soit $V_P = 6,4m/s$**

Corrigé de l'Exercice6

1.1 Nature du mouvement sur AB :

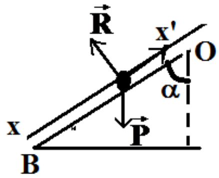


$\sum\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

On projette suivant $\overrightarrow{AB}$

0+0=ma⇒ a=0 m.r.u

1.2 L'expression de l'accélération a :



$\sum\vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

par projection sur $\overrightarrow{xx'}$ on obtient :

$-P\cos\alpha = ma \Rightarrow a = -g\cos\alpha$

1.3 La valeur minimale de la vitesse :

$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_{C_O} - E_{C_B} = W_{\vec{P}} \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}mV_B^2 = -mgh \Rightarrow V_A = \sqrt{2gh}$

car $V_B = V_A$ comme $h = L\cos\alpha$; il vient $V_A = \sqrt{2gL\cos\alpha} = 6m/s$

2 Calcul de V_A

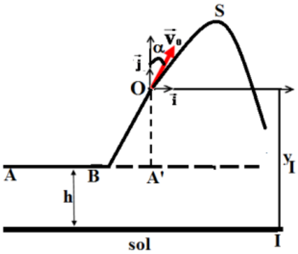
$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_{C_0} - E_{C_B} = W_{\vec{P}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = -mgh$

Soit $V_A = \sqrt{V_0^2 + 2gL\cos\alpha} = 10m/s$

3.1 L'équation de la trajectoire :

Conditions initiales :

$$O\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et } \vec{V}_0 \begin{cases} V_{0x} = V_0 \sin\alpha \\ V_{0y} = V_0 \cos\alpha \end{cases}$$



En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{V}\begin{cases} V_x = V_0 \sin\alpha \\ V_y = -gt + V_0 \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM}\begin{cases} x = V_0 \sin\alpha t & (1) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \cos\alpha t & (2) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire : L'équation (1) donne : $t = \dfrac{x}{V_0 \sin\alpha}$

en remplaçant dans (2), on trouve l'équation de la trajectoire :

$$y = -\frac{g}{2V_0^2 \sin^2\alpha}x^2 + x\cot an\alpha \qquad \text{Soit } y = -0{,}1x^2 + 0{,}58x$$

3.2 Les coordonnées de I

Y_I= - A'O - h= -OBcosα-h= -3

On remplace dans l'équation de la trajectoire :

$$-3 = -0{,}1x^2 + 0{,}58x \Leftrightarrow -0{,}1x^2 + 0{,}58x + 3 = 0$$

$$\Delta = 0{,}58^2 + 4.0{,}1.3 \approx 1{,}24^2$$

Soit x_I=9,1m d'où I(9,1 ; - 3)

3.3 La durée de la chute

$$t_I = \frac{x_I}{V_0 \sin\alpha} = \frac{9{,}1}{8.0{,}87} = 1{,}3s$$

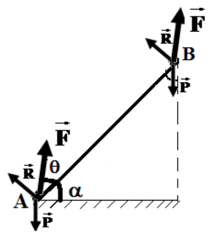
3.4 Les coordonnées de S

Au point S V_{Sy}=0 soit $t_S = \dfrac{V_0 \cos\alpha}{g} = 0{,}4s$

$$\text{soit } S\begin{cases} x = 8.0{,}87.0{,}4 = 2{,}78m \\ y = -5.0{,}4^2 + 8.0{,}5.0{,}4 = 0{,}8m \end{cases}$$

Corrigé de l'Exercice7

1.1 Calcul de F :



$$\frac{1}{2}mV_B^2 = -mgAB\sin\alpha + FAB\cos\theta$$

$$\Rightarrow F = \frac{mV_B^2 + 2mgAB\sin\alpha}{2AB} = 1{,}125N$$

1.2. Nature du mouvement entre A et B

Nature du mouvement : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$

par projection sur $\overrightarrow{AB}$ on obtient :

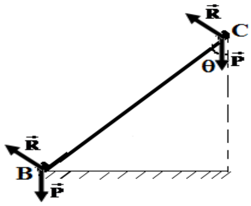
$$-P\sin\alpha + F\cos\theta = ma \Rightarrow a = \frac{-P\sin\alpha + F\cos\theta}{m} = 4m/s^2$$ m.r.u.v

1.3.Nature du mouvement :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

par projection sur $\overrightarrow{AB}$ on obtient : $-P\sin\alpha = ma \Rightarrow a = -g\sin\alpha = -5m/s^2$

Expression de V_C En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, on obtient :



$$\frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = -mgh \quad \text{avec } h = BC\sin\alpha$$

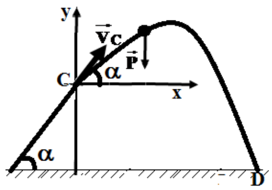
Soit $V_C = \sqrt{V_B^2 - 2gBC\sin\alpha} = 3m/s$

2.1. Etude du mouvement après C:

Conditions initiales :

$$C\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \vec{V}_C\begin{cases} V_{Cx} = V_C\cos\alpha \\ V_{Cy} = V_C\sin\alpha \end{cases}$$

En appliquant la R.F.D, on obtient :



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{V}\begin{cases} V_x = V_C\cos\alpha \\ V_y = -gt + V_C\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CM}\begin{cases} x = V_C\cos\alpha t & (1) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_C c\sin\alpha t & (2) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire :(1) donne $t = \frac{x}{V_C\cos\alpha}$ en remplaçant dans (2), on trouve : $y = -\frac{g}{2V_C^2\cos^2\alpha}x^2 + x.\tan\alpha \simeq -0,74x^2 + 0,58x \quad (3)$

2.2. 1.Les coordonnées du point D:

Au point D : $y_D = - h = - AC.\sin\alpha = -1,35m$ en remplaçant dans(3), on trouve :

$$-0,74x^2 + 0,58x = -1,35 \Leftrightarrow -0,74x^2 + 0,58x + 1,35 = 0$$

$$\Delta = 0,33 + 4x0,74x1,35 = 3,29 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 2,08 \text{ soit } x_D = \frac{-0,58 - 2,08}{2(-0,74)} \simeq 1,8m$$

2.2. 2. Calcul de V_D

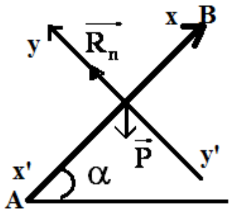
$\frac{1}{2}mV_D^2 - \frac{1}{2}mV_C^2 = mgh$ avec $h = AC\sin\alpha = -y_D = 1,35m$

Soit $V_D = \sqrt{V_C^2 + 2gAC\sin\alpha} = 6m/s$ Comme $V_D > 5m/s$ le jouet sera brisé

Corrigé de l'Exercice8

1.1 L'expression de l'accélération a_1 si f n'est pas négligeable:

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$



par projection sur $\overrightarrow{X'X}$ on obtient :

$-P\sin\alpha = ma \Rightarrow$
$a = -g\sin\alpha = -5m/s^2$

1.2 Calcul de V_B

$\Rightarrow$ m.r.u.v $V_B^2 - V_A^2 = 2a(x_B - x_A) \Rightarrow V_B = \sqrt{V_A^2 + 2a(AB)} = 3m/s$

ou bien $V_B = \sqrt{V_A^2 - 2g\sin\alpha(AB)} = 3m/s$

1.3 Calcul du temps

$V_B = at_B + V_A \Rightarrow t_B = \frac{V_B - V_A}{a} = 0,2s$

2.1 Calcul de la force f:

Par application du théorème de l'énergie cinétique entre A et B, on trouve :

$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_{C_B} - E_{C_A} = W_{\vec{P}} + W_{\vec{R}} + W_{\vec{f}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = -mgh - fAB \Rightarrow fAB = -mgh - \frac{1}{2}mV_B^2 + \frac{1}{2}mV_A^2$

avec $h = AB\sin\alpha \Leftrightarrow f = -mg\sin\alpha + \frac{m(V_A^2 - V_B^2)}{2AB} = 1,43N$

2.2 Calcul de R_n

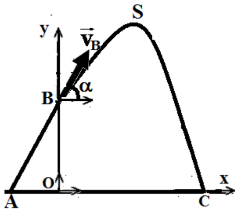
Par projection sur y'y

$R_n - P\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow R_n = P\cos\alpha = 0,4x10x0,87 = 3,48N$ Calcul de R

$R = \sqrt{R_n^2 + f^2} = 3,76N$

3.1 Les équations horaires du mouvement à partir du point B :

Conditions initiales :



$$B\begin{cases} x_0 = x_B = 0 \\ y_0 = y_B = OB = AB\sin\alpha \end{cases}$$

$$\vec{V}_B\begin{cases} V_{Bx} = V_B\cos\alpha \\ V_{By} = V_B\sin\alpha \end{cases}$$

En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{V}\begin{cases} V_x = V_B\cos\alpha \\ V_y = -gt + V_B\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM}\begin{cases} x = V_B\cos\alpha t & (1) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_B\sin\alpha t + AB\sin\alpha & (2) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire :

L'équation (1) donne : $t = \dfrac{x}{V_B\cos\alpha}$

en remplaçant dans (2), on trouve l'équation de la trajectoire :

$$y = -\frac{g}{2V_B^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + AB\sin\alpha$$

Soit y= -1,67x² +0,58x +0,35

3.2. Les coordonnées du sommet S

Au point S : V_{Sy}=0

$$V_{Sy} = 0 \Leftrightarrow t_S = \frac{V_B\sin\alpha}{g} = 0{,}1s$$

Calcul de x_S

$$x_S = V_B\cos\alpha t_S = 2x0{,}87x0{,}1 = 0{,}17m$$

Calcul de y_S

Soit on remplace t_S dans l'équation (2)

y_S= -5(0,1)² + 2x0,5x(0,5)+0,35=0,4m

Soit on remplace x_S dans l'équation (3)

y_S= -1,67(0,17)² +0,58x0,17 +0,35=0,4m

3.3. Calcul de l'abscisse du point de chute C :

$y_C=0$ L'équation (3) donne :

$$-1,67x^2+0,58x+0,35=0$$

$$\Delta=0,58^2+4x1,67x0,35=2,67 \text{ soit } \sqrt{\Delta}=1,64$$

$$x_C=\frac{-0,58-1,63}{2(-1,67)}=0,66m$$

3.4 Calcul de la vitesse V_C:

Par application du théorème de l'énergie cinétique entre B et C, on trouve :

$$\Delta E_C=\sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_{C_C}-E_{C_B}=W_{\vec{P}}$$

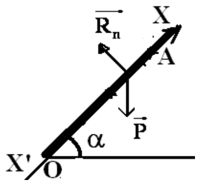
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mV_C^2-\frac{1}{2}mV_B^2=mgh \Rightarrow V_C=\sqrt{V_B^2+2gh} \text{ avec } h=OB=ABsin\alpha$$

Soit V_C=3,32m/s.

Corrigé de l'Exercice9

1.1. L'expression de l'accélération a si f n'est pas négligeable:

$$\sum \vec{F}_{ext}=m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}$$



par projection sur $\overrightarrow{OA}$ on obtient:

$$-P\sin\alpha=ma \Rightarrow a=-g\sin\alpha=cte \Rightarrow m.r.u.v$$

1.2. La relation théorique entre V^2 et x:

$$V^2-V_0^2=2ax=-2g\sin\alpha.x \Rightarrow V^2=-2g\sin\alpha.x+V_0^2$$

1.3.1 D'après le graphe V^2 =10x +9

Par identification entre les expressions théorique et graphique :

$$-10=-2g\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\frac{10}{2g}=0,5 \text{ soit } \alpha=30°$$

1.3.2 La valeur de la vitesse initiale :

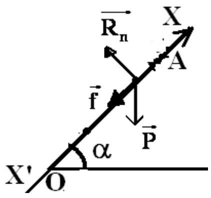
$$V_0^2=9 \Leftrightarrow V_0=3m/s$$

2.1 Calcul de la nouvelle accélération :

$$\sum \vec{F}_{ext}=m\vec{a}' \Leftrightarrow \vec{P}+\vec{R}+\vec{f}=m\vec{a}'$$

par projection sur $\overrightarrow{OA}$ on obtient

$$a'=-\frac{f}{m}-g\sin\alpha$$



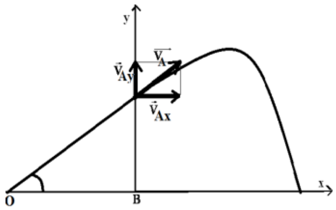
2.2 En appliquant le théorème

$$\Delta E_C=\sum W_{\vec{F}}$$

$$E_C-E_0=W_{\vec{P}}+W_{\vec{f}}+\underbrace{W_{\vec{R_n}}}_{0}$$

$$E_{C_A}-\frac{1}{2}mV_0^2=-mgx\sin\alpha-fx \Rightarrow f=-mg\sin\alpha-\frac{E_{C_A}}{x}+\frac{1}{2x}mV_0^2 A.N: f=0,125N$$

3.1 Les équations horaires du mouvement à partir du point A :



Conditions initiales :

$$A\begin{cases} x_0 = x_A = 0 \\ y_0 = yA = AB = x\sin\alpha \end{cases} \quad \vec{V}_A\begin{cases} V_{Ax} = V_A\cos\alpha \\ V_{Ay} = V_A\sin\alpha \end{cases}$$

En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{V}\begin{cases} V_x = V_A\cos\alpha \\ V_y = -gt + V_A\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AM}\begin{cases} x = V_A\cos\alpha t & (1) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_A\sin\alpha t + AB & (2) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire

$$(1) \Rightarrow t = \frac{x}{V_A\cos\alpha}$$

On remplac et dans y

$$y = -\frac{g}{2V_A^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha x + AB$$

Or $V_A = \sqrt{\frac{2E_{CA}}{m}} = \sqrt{\frac{2x0,2}{0,1}} = 2m/s$

soit $y = -\frac{10}{2x4x\frac{3}{4}}x^2 + 0,58x + 0.2 = -1,67x^2 + 0,58x + 0.2$

3.2 Calcul des cordonnées du point de chute C :

L'équation (2) donne :

or $y_C=0$ $-1,67x^2 + 0,58x + 0.2 = 0$

$\Leftrightarrow 5t^2 + 0,24t - 2 = 0$

Δ**=1,29 soit** $x = \frac{-0,58 + 1,29}{2x1,67} = 0.21m$

Corrigé de l'Exercice10

1.1 Expression de E en fonction de T et x

$\Delta E = \sum \vec{F}_{ext} \Leftrightarrow \Delta E = W_{\vec{T}} + W_{\vec{R}}$

$\Leftrightarrow E(x) - E(0) = T.x \Leftrightarrow E(x) = T.x$

1.2 Calcul de T

L'énergie mécanique est représentée par une droite dont le coefficient directeur correspond à la tension T ; numériquement T=150N.

2.1 Expression de E_{PP} en fonction de x

E_{PP} (x)=mgz +E_{P0} avec E_{P0}=0 et z=xsinα d'où E_{PP} (x)=mgxsinα soit E_{PP}(x)=24,5x

Expression de E_C en fonction de x

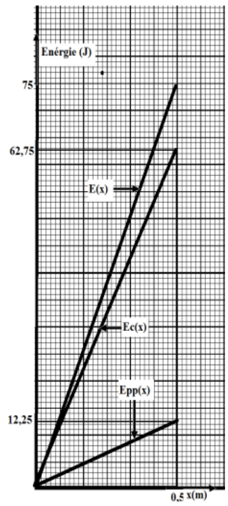
$E(x) = E_C(x) + E_{PP}(x)$

$\Rightarrow E_C(x) = E(x) - E_{PP}(x)$

avec $E(x) = 150x$ et $E_{PP}(x) = 24{,}5x$

soit $E_C(x) = 125{,}5x$

2.2 Voir schéma ci-dessous.



3 Montrons que l'énergie mécanique est constante

Appliquons le TEM au système (solide-terre) entre A et M

$$\Delta E = \sum \vec{F}_{ext} \Leftrightarrow \Delta E = W_{\vec{R}}$$

$$\Leftrightarrow E(M) - E(A) = 0 \Leftrightarrow E(M) = E(A) = cte$$

Donc le système conservatif

4 Calcul de la distance AB

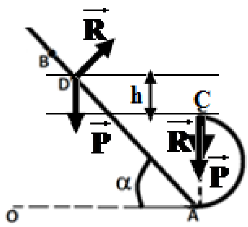
$E(B) = E(A)$ avec $E(A) = 75J$ car $x_A = 0{,}5m$ et $E(B) = mgx_B\sin\alpha$ soit

$$x_B = \frac{E(A)}{mg\sin\alpha} = 3{,}06m$$

$AB = x_B - x_A$ avec $x_A = 0{,}5m$ soit $AB = 2{,}56m$

Corrigé de l'Exercice11

1.1. Expression de V_C en fonction de r, L, g et α



$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}}$$

$$E_C - E_D = W_{\vec{P}} = \frac{1}{2}mV_C^2 = mgh = mg(L\sin\alpha - 2r)$$

$$\Rightarrow V_C = \sqrt{2g(L\sin\alpha - 2r)}$$

1.2. Expression de R

$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

Par projection sur la normale, on obtient :

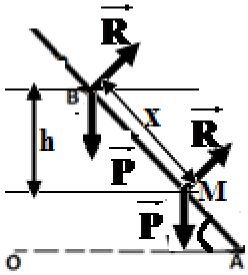
$$mg + R = m\frac{V_C^2}{r} \Rightarrow R = \frac{2gm(L\sin\alpha - 2r)}{r} - mg$$

$$\Leftrightarrow \quad R = \frac{2mgL\sin\alpha}{r} - 5mg$$

1.3. La valeur de L pour que le mobile quitte la piste

$$R = 0 \Leftrightarrow \frac{2mgL\sin\alpha}{r} - 5mg = 0 \Leftrightarrow L = \frac{5r}{2\sin\alpha} = \frac{5x0,5}{2x0,25} = 5m$$

2.1 Expression de Ec(M) en fonction de Ec(B),m, g, f et x



$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} = mgx\sin\alpha - fx \Leftrightarrow E_C(M) - E_C(B) = (mg\sin\alpha - f)x$$

$$\Rightarrow E_C(M) = (mg\sin\alpha - f)x + E_C(B) = (mg\sin\alpha - f)x + \frac{1}{2}mV_B^2$$

2.2 Déduction des valeurs de f et de V_B

Détermination de l'équation de la droite à partir du diagramme

Si x=0 E_C =0,5J soit b=0,5

Si x=1 ; E_C =0,75J a=0,25

Donc E_C =0,25 x + 0,5

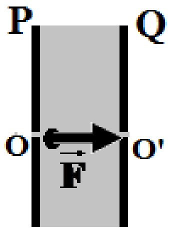
Par identification entre les deux expressions de E_c(M), on obtient :

$$(mg\sin\alpha - f) = 0,25 \Rightarrow f = mg\sin\alpha - 25 = 0,375N$$

$$\frac{1}{2}mV_B^2 = 0,5 \Rightarrow V_B = \sqrt{\frac{2x0,5}{m}} = 2m/s$$

Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme.

1. Cas où $\vec{V}_0$ est nulle ou parallèle à $\vec{F}$



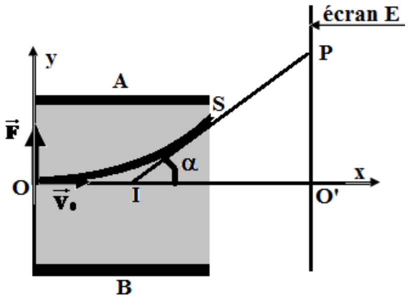
- **Nature du mouvement**

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Leftrightarrow \text{m.r.u.v}$$

- **Vitesse au point de sortie O'**

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = |q|U \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2|q|U}{m} + V_0^2}$$

2. Cas où $\vec{V}$ est non parallèle à $\vec{F}$



- **Equation de la trajectoire :** $Y = \frac{qEx^2}{2mV_0^2}$

  Coordonnées du point de sortie S:
  $x_s = l$;
  $$Y = \frac{qEl^2}{2mV_0^2}$$

- **Expression de V_S:**

$$V_S = \sqrt{\left(\frac{qEl}{mV_0}\right)^2 + V_0^2}$$

- **Déviation angulaire électrique:**

$$tg\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_S \Leftrightarrow tg\alpha = \frac{qEl}{mV_0^2}$$

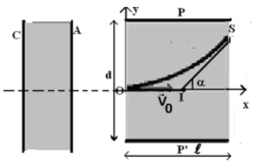
- **Nature du mouvement à la sortie du champ :**

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{V} = \vec{cte} \end{cases} \Leftrightarrow \text{m.r.u}$$

Exercice 1

1 On applique une différence de potentielle U_0=1140V entre une cathode C et une anode A.

Un électron est émis sans vitesse initiale par la cathode et arrive sur l'anode avec la vitesse $\vec{V}_0$. Calculer V_0.



A.N : e=1,6.10^{-19} C; m=9,1.10^{-31} kg.

2 L'électron pénètre au point O avec la vitesse $\vec{V}_0$ précédente entre les plaques P et P' de longueur *l* distante de d telle que (*l* =d). On applique entre les plaques Pet P' une différence de potentiel U.

2.1 Déterminer les équations horaires du mouvement de l'électron sur les axes Ox et Oy.

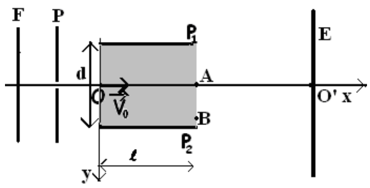
2.2 Donner l'équation de la trajectoire et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme : $y = \frac{U}{4dU_0}x^2$

3 La tangente à la trajectoire au point S fait un angle α avec l'horizontale tel que tanα=0,4 ; calculer la différence de potentiel U entre les plaques P et P'.

Exercice 2

Des électrons sont émis avec une vitesse initiale négligeable par un filament F chauffé.

1 On établit une tension $U_1 = V_P - V_F$ entre le filament F et une plaque P disposée parallèlement à celui-ci. Il en résulte un champ électrostatique uniforme $\vec{E_1}$ régnant entre F et P. Les électrons arrivent alors en P avec une vitesse $\vec{V}_0$ de module $V_0 = 0,53.10^8$m/s (voir schéma). Préciser le signe de U_1 et calculer sa valeur.



On donne : $e = 1,6.10^{-19}$C ;$m = 9,1.10^{-31}$kg .

2 La plaque P a un trou qui laisse passer les électrons.

On dispose deux plaques P_1et P_2 perpendiculairement au plan xOy (voir schéma). Les électrons pénètrent entre les plaques en O animés de la vitesse $\vec{V}_0$ parallèle à Ox.

On applique entre P_1 et P_2 une tension $U_2=V_{P2}-V_{P1}$=300V et on donne *l* =6cm et d=1,5cm.

2.1 Déterminer l'équation de la trajectoire du mouvement d'un électron entre P_1 et P_2.

2.2 Quelle est la déviation linéaire AB des électrons à la sortie des plaques ? Quelle est la valeur de la déviation angulaire α ?

2.3 Trouver la nature du mouvement d'un électron après B et déterminer l'équation de sa trajectoire.

2.4 Calculer les coordonnées du point d'impact des électrons sur l'écran E parallèle à (Oy) et placé à 46cm de A.

Exercice 3

Une particule $^4_2He^{2+}$ pénètre dans le champ électrostatique uniforme créé par deux armatures parallèles et horizontales de longueur l=10cm et distante d=6cm. La particule pénètre en un point O équidistant des deux armatures avec une vitesse $V_0=3.10^5$ m/s faisant un angle $\alpha=30°$ avec l'horizontale et dirigée vers le haut.

1 Faire une figure et préciser les charges des armatures pour que la particule soit déviée vers le bas.

2 Etablir l'expression de l'équation cartésienne de la trajectoire entre les armatures. Préciser la nature du mouvement et de la trajectoire.

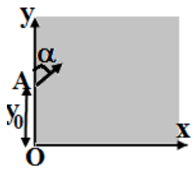
3 Quelle est la valeur minimale U_m de la tension à appliquer entre les armatures pour que la particule sorte du champ. $e=1,6.10^{-19}$C;$m_P=1,67.10^{-27}$kg

4 Déterminer la tension U à appliquer entre les armatures pour que la particule sorte du champ par un point O' se trouvant à la même hauteur que le point O où elle est rentrée.

5 Calculer la tension U_0 accélératrice qui a été nécessaire pour amener la particule à la vitesse $V_0=30^5$ m/s à partir du repos.

Exercice 4

1Un champ électrique est créé par un condensateur plan constitué de deux plaques parallèles et horizontales P_1 et P_2 très longues reliées à un générateur de tension constante U=250 V et séparées d'une distance d, comme l'indique la figure ci-contre. Tous les électrons pénètrent dans le champ, supposé uniforme, au point A et sont animés de la même vitesse $\vec{v}_0$ faisant l'angle $\alpha=45°$.



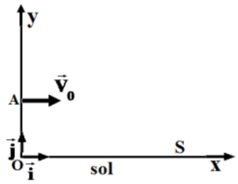
1.1 Montrer, par un calcul, qu'il est légitime de négliger la force de pesanteur par rapport à la force électrique pour l'électron.

1.2 On veut que le faisceau soit dévié vers le bas.
Reproduire la figure et représenter (sans souci d'échelle) la force qui s'exerce sur la particule à son entrée dans le champ ainsi que le champ électrique et les signes des plaques.

1.3 Etablir l'expression de l'équation cartésienne de la trajectoire.

1.4 Déterminer la valeur max de y_0 pour que l'électrons ne touche pas la plaque P_1
A. N : $m=9.10^{-31}$kg ; $v_0 = 1.\ 10^7$ m $.s^{-1}$; d=0,04m ; $e=1,6.10^{-19}$C.

1.5 Déterminer l'abscisse du point P d'impact de l'électron sur la plaque inferieure si y_0 prend la valeur calculée précédemment.



2 Une bille homogène de masse m est lancée horizontalement avec une vitesse initiale
$v_0 = 14$ m $.s^{-1}$. A l'instant initial, son altitude par rapport au sol est comme l'indique la figure

2.1 Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire.

2.2 Au moment du lancement, la bille est au point A au dessus du sol. Elle touche le sol au point S. Quelle est la valeur de la distance OA si OS=7, 67m.

3 Dans chaque cas, quelle est l'influence de la masse du corps sur :
- La force subie par ce corps ?
- L'accélération du mouvement ?

Exercice 5

1. On se propose de déterminer la vitesse d'éjection des particules $^{4}_{2}He^{2+}$ (ou noyaux d'hélium) émis par le radium.

On place la substance en S au fond d'un cylindre creux en plomb d'axe x'x et on admettra que les particules émises sortent du cylindre avec un vecteur vitesse $\vec{V}_0$ parallèle à l'axe x'x.

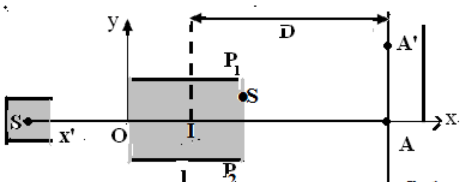


fig1

Le faisceau pénètre en O dans l'espace vide d'aire entre deux plaques horizontales P_1 et P_2 d'un condensateur dont la distance est d=10cm et la longueur *l*=15cm. En l'absence de champ électrique entre les plaques on observe, une tache en A, sur une plaque photographique disposée perpendiculairement à x'x à une distance D du centre des plaques.

On crée un champ électrique uniforme en appliquant entre P_1 et P_2 une différence de potentiel constante $U=2,05.10^3$ V. On constate que la tache se forme en A'.

1.1. Le champ électrique créé $\vec{E}$ va-t-il de P_1 vers P_2 ou de P_2 vers P_1 ?

1.2. Etudier le mouvement d'une particule entre les plaques du condensateur dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$: équation et nature de la trajectoire.

1.3. Que devient ce mouvement lorsque la particule n'est plus soumise au champ électrique $\vec{E}$?

1.4. Déterminer la vitesse d'éjection V_0 des particules si la mesure de la déviation linéaire $AA'=17,4.10^{-2}$m.

1.5. Déterminer alors l'instant d'arrivée au point S et calculer les composantes du vecteur $\vec{V}_S$; déduire la valeur de V_S. Montrer que l'angle α que fait ce vecteur avec l'horizontale est de 30° environ.

2 On supprime l'écran, et on le remplace par un condensateur constitué de deux armatures horizontales A et B. Le mouvement du faisceau de particules est maintenant étudié lorsqu'il pénètre après sa sortie du premier champ $\vec{E}$ dans le condensateur à la vitesse de valeur V_S dont la direction fait l'angle α avec l'horizontale (voire la figure 2).

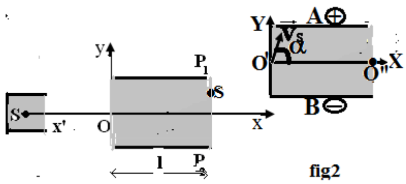


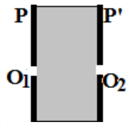
fig2

La longueur de l'armature est *l'* = 10 cm ; la distance les séparant est d' = 4 cm ; la tension entre les armatures est U'.
2.1. Etablir les équations horaires du mouvement entre les armatures du condensateur et établir l'expression de l'équation de la trajectoire entre les armatures du condensateur dans le repère $(O'XY)$.
2.2. Déterminer la valeur de U' pour que le faisceau sorte des armatures au point O''.On donne : $e=1,6.10^{-19}C$, D=30cm et $m_P=1,67.10^{-27}kg$

Exercice 6

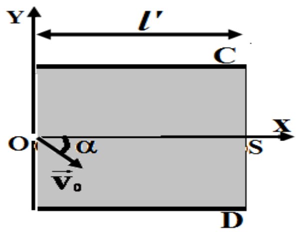
On étudie le mouvement des ions ${}^{6}_{3}Li^{+}$ dans différents champs électriques et magnétique.

1. Dans une première expérience les ions pénètrent au point O_1 sans vitesse initiale dans un champ électrique $\vec{E}_0$ crée entre deux plaques P et P' et sont accélérés par une tension $U_0=U_{PP'}=1252,5V$.



Montrer que la valeur de la vitesse V_0des ions au point O_2 est $V_0=2.10^5 m/s$.
On donne : $e=1,6.10^{-19}C$; $m_n= m_P=1,67.10^{-27}kg$.

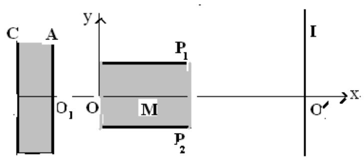
2.Dans une troisième expérience l'ion entre avec une vitesse de valeur V_0 dans un champ électrique $\vec{E}$ crée entre les armatures C et D d'un condensateur plan.
Soit *l'* la longueur de ces armatures et d leur écartement.



3.1. La vitesse $\vec{V}_0$ est contenue dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ et fait un angle α=15° avec Ox. Déterminer le sens de la force électrique pour que les ions passent par le point S.
3.2. Etablir l'expression de l'équation de la trajectoire des ions entre les armatures C et D.
3.3. Calculer alors la valeur de V_0. On donne : $E=2,5.10^4 V/m$ et*l'*=20cm
3.4. Déterminer la distance d entre les armatures C et D si la distance minimale séparant la trajectoire de l'ion et la plaque inferieure est 0,8cm et si le point O est équidistant des armatures.

Exercice 7

1° Un faisceau d'électrons est émis dans le vide avec une vitesse initiale négligeable par une cathode C et est accéléré par une tension U_0 appliquée entre l'anode A et la cathode C . La plaque de l'anode est percée d'un trou O_1 comme l'indique la fig.



a) Exprimer littéralement la vitesse V_1 des électrons lorsqu'ils traversent le trou O_1 et calculer sa vitesse pour U_0 =1000V.

b) Quelle est la nature de leur mouvement après la traversée de O_1 ?

2° Les électrons pénètrent en suite au pt O entre les armatures P_1 et P_2 d'un condensateur plan de longueur l et distantes de d. La tension entre les armatures est $U_{P1P2} = + 100V$.

a) Quelle est la vitesse V_0 des électrons à leur entrée dans le condensateur ?

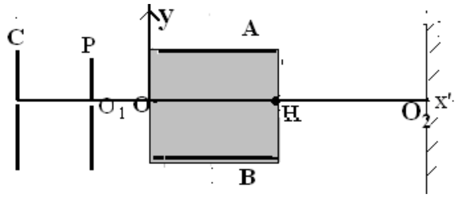
b) Etudier le mouvement des électrons dans le condensateur plan et en déduire l'équation de la trajectoire des électrons On raisonnera dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Représenter sur un schéma la trajectoire des électrons. Vont-ils pouvoir attendre l'écran E sans toucher l'une des plaques P_1P_2 ?

3° A la sortie du condensateur, le faisceau d'électrons arrive sur un écran fluorescent noté E de centre O', situé à la distance L du pt M milieu de OO' (fig) .

Soit I le pt d'impact de ce faisceau sur l'écran. Quelle est la déviation O'I du spot sur l'écran ? A.N: $q=-e=- 1,6.10^{-19}$ C ;m = $9,1.10^{-31}$ kg ; d =2 cm ; l = 6 cm et L = 12 cm.

Exercice 8

La cathode C d'un oscilloscope émet des électrons dont la vitesse à la sortie du métal est négligeable .Ces électrons traverse en suite une anode P, en un pt O_1.



1° On établie une tension $U_0 = V_P – V_C$

a)Déterminer l'expression de la vitesse v_0 des électrons à leur passage en O_1. A .N :U_0=1000V.

b) Quelle est la nature du mouvement des électrons après P.

2° Les électron constituant un faisceau homocinétique, pénètrent au pt O entre les armatures horizontales A et B d'un condensateur plan. Les armatures distantes de d ont une longueur l .

On établit entre ses armatures une tension U_{AB}. On étudie le mouvement entre AB.

a) Déterminer l'expression de la trajectoire dans le repère(O,x,y).

b) Exprimer la condition que doit vérifier U_{AB} pour que les électrons sortent du condensateur.

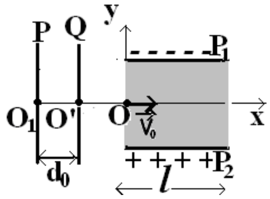
c) On donne d= 2cm, l = 10cm. Faire l'A.N

3° Le faisceau arrive en suite sur un écran fluorescent E situé à la distance L =20cm du centre de symétrie I du condensateur.

Montrer que le faisceau forme un pt lumineux (spot) O_2 au centre de l'écran quand U_{AB} = 0 et déterminer le déplacement Y = O_2M du spot sur l'écran quand U_{AB} =200V.

Exercice 9

Les ions $^{40}Ca^{2+}$ quittent la chambre d'ionisation au point O_1 sans vitesse initiale grâce à un champ électrique $\vec{E}_0$ existant entre deux plaques P et Q telle que $U_0=U_{PQ}$=500V.



1.1 Déterminer le sens du champ $\vec{E}_0$ régnant entre P et Q et calculer sa valeur si d_0=5cm.

1.2 Calculer la vitesse V_0 des ions lorsqu'ils arrivent en O'.

2 Sachant qu'il n'existe aucun champ entre O' et O, déterminer la nature du mouvement des ions entre ces deux points.

3 Les ions pénètrent au point O dans un autre champ électrique $\vec{E}$ crée entre deux plaques P_1 et P_2 distantes de d et de longueur *l* chacune.

3.1 Trouver l'équation de la trajectoire dans le repère (O ; x ; y) et préciser sa nature.

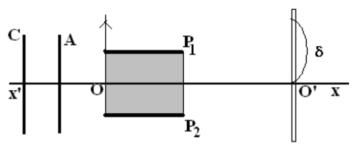
3.2 Déterminer les coordonnées du point de sortie S.

3.3 Déterminer l'instant d'arrivée au point S et calculer les composantes du vecteur $\vec{V}_S$ et en déduire l'angle α que fait ce vecteur avec l'horizontale.

$e=1,6.10^{-19}C$; l=10cm ; $m_P=1,67.10^{-27}kg$; $E=10^3V/m$.

Exercice 10

On applique une différence de potentielle $U = V_A - V_C = 101V$ entre une cathode C et une anode A. Un faisceau d'électrons est émis sans vitesse initiale par la cathode et pénètre au point O dans le champ électrique $\vec{E}$. Ce champ est du à un condensateur plan constitué de deux planques P_1 et P_2 parallèle distante de d=4cm de longueur chacune l=4cm entre les quelles existe une ddp $U_1=V_{P1}-V_{p2}$=20V . L'écran E est placé à L=52cm du point O situé au milieu de la distance séparant les deux plaques.



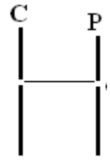
1 Calculer la valeur de sa vitesse $\vec{V}_0$ à son arrivée sur au point O.

2 Etablir l'équation de la trajectoire de l'électron entre les armatures P_1 et P_2.

3 Trouver l'équation de la trajectoire de l'électron après sa sortie du champ et calculer la déviationδ de l'électron sur l'écran.

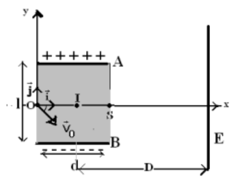
Exercice 11

1° Dans un tube sous vide un électrons est émis sans vitesse initiale par une cathode C et est accéléré par une tension U positive appliquée entre la cathode C et une plaque P.



Calculer l'énergie cinétique de l'électron à son arrivée sur la plaque P. En déduire la valeur de sa vitesse $\vec{V}_0$ à son arrivée sur la plaque P.

2° L'électron pénètre en O avec la vitesse $\vec{V}_0$ dans l'espace séparant les armatures A et B d'un condensateur plan.



Soit d la longueur de ces armatures, l leur écartement, D la distance du centre I du condensateur à un écran fluorescent E et U la tension entre les armatures A et B.

2.1 La vitesse est contenue dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$et fait un angle α avec Ox comme l'indique la figure. Etablir l'équation de la trajectoire de l'électron entre les armatures A et B.

2.2 Etablir la relation qui doit lier l'angle α avec les grandeurs U, U', d et l pour que l'électron passe par le point S. Calculer alors la valeur correspondante de l'angleα.

3 L'électron pénètre maintenant dans le condensateur avec une vitesse $\vec{V}_0$ parallèle à $\vec{i}$ de même sens. Un écran vertical est placé à la distance D du point d'intersection I entre la tangente et l'axe Ox. Calculer la déviation y_M sur l'écran. U=1000V;U'=120V;q=-e=-1,6.10^{-19}C;m = 9,1.10^{-31} kg ; d =6 cm ; l = 2 cm ;D = 30 cm

Corrigé de l'exercice1

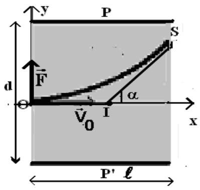
1° Expression de la vitesse V :

$\frac{1}{2} mV_0^2 = eU_0 \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$ **A.N : $V_0 = 2.10^7$ m/s**

2.1 Les équations horaires :

Conditions initiales :

$C\begin{cases}x_0 = 0\\ y_0 = 0\end{cases} \vec{V}_0\begin{cases}V_{0x} = V_0\\ V_{0y} = 0\end{cases}$



En appliquant la R.F.D, on obtient :

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{a}\begin{cases}a_x = 0\\ a_y = \frac{F}{m}\end{cases} \Rightarrow \vec{V}\begin{cases}V_x = V_0\\ V_y = \frac{F}{m}t\end{cases} \Rightarrow \vec{OM}\begin{cases}x = V_0 t & (1)\\ y = \frac{F}{2m}t^2 & (2)\end{cases}$

2.2 L'équation de la trajectoire :

L'équation (1) donne : $t = \frac{x}{V_0}$

en remplaçant dans (2), on trouve l'équation de la trajectoire :

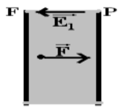
$y = \frac{F}{2mV_0^2}x^2 = \frac{eU}{2mdV_0^2}x^2 \qquad \Rightarrow y = \frac{U}{4dU_0}x^2$

3 La valeur de la déviation angulaire :

$\tan\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = \frac{U}{2dU_0}l$ **Soit** $\tan\alpha = \frac{U}{2U_0} \Rightarrow U = 2U_0 \tan\alpha$ **car l =d A.N : U = 912V.**

Corrigé de l'exercice2

1.1 Le signe de $U_1 = V_P - V_F$:



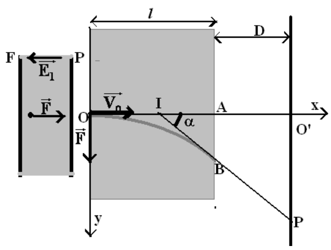
Les électrons se déplacent de F vers P sous l'action de la force électrique $\vec{F}$. Comme q< 0 le champ électrique $\vec{E_1}$ est dirigé de P vers F c'est-à-dire que $V_P > V_F \Rightarrow V_P - V_P > 0 \Leftrightarrow U_1 > 0$

1.2 Calcul de U_1 :

$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mV_0^2 = eU_1 \Rightarrow U_1 = \frac{mV_0^2}{2e}$ **A.N :U_1=8.10^3V**

2.1 L'équation de la trajectoire :

Conditions initiales : $O\begin{cases}x_0 = 0\\ y_0 = 0\end{cases} \vec{V}_0\begin{cases}V_{0x} = V_0\\ V_{0y} = 0\end{cases}$



En appliquant la R.F.D, on obtient :

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{a}\begin{cases}a_x = 0\\ a_y = \frac{F}{m}\end{cases} \Rightarrow \vec{V}\begin{cases}V_x = V_0\\ V_y = \frac{F}{m}t\end{cases} \Rightarrow \vec{OM}\begin{cases}x = V_0 t & (1)\\ y = \frac{F}{2m}t^2 & (2)\end{cases}$

L'équation (1) donne : $t = \frac{x}{V_0}$

en remplaçant dans (2), on trouve l'équation de la trajectoire :

$$y = \frac{F}{2mV_0^2}x^2 = \frac{eU_2}{2mdV_0^2}x^2$$

2.2 La déviation linéaire AB :

AB=y_B= $\frac{eU_2}{2mdV_0^2}x_B^2$ **avec** $x_B = l$ **soit** $y_B = \frac{eU_2}{2mdV_0^2}l^2$ **A.N :** $y_B = 0,23.10^{-2}m$

La valeur de la déviation angulaire :

$\tan\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = \frac{eU_2}{mdV_0^2}l$ **soit** $\alpha = 4,38^o$

Autre méthode $\tan\alpha = \frac{2AB}{l}$ **soit** $\alpha = 4,38^o$

2.3 Nature du mouvement de l'électron après B :

$\sum\vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{0} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow$ m.r.u

L'équation de la trajectoire :

$y = ax + b$ **avec** $\begin{cases} a = \tan\alpha = 0,077 \\ b = y_B - ax_B = -0,23.10^{-2}m \end{cases}$ **d'où** $y = 7,7.10^{-2}x - 0,23.10^{-2}m$

2.4 Les coordonnées du point d'impact P :

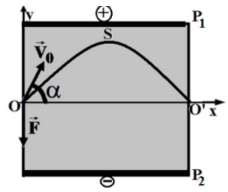
$$P\begin{cases} x_P = l + D = 52.10^{-2}m \\ y_P = (\frac{l}{2} + D)\tan\alpha = 3,77.10^{-2}m \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice3

1 Signe des plaques

Les ions sont chargés positivement, ils se déplacent de P_1 vers P_2 sous l'action de la force électrique $\vec{F}$. Les ions sont donc attirés par P_2 qui est chargée négativement ; P_1 est alors chargée positivement.

2 Nature du mouvement



Conditions initiales :

$$O\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \vec{V}_0\begin{cases} V_{0x} = V_0\cos\alpha \\ V_{0y} = V_0\sin\alpha \end{cases}$$

$$\sum\vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{F}{m} \end{cases} \quad \vec{V}\begin{cases} V_x = V_0\cos\alpha \\ V_y = -\frac{F}{m}t + V_0\sin\alpha \end{cases}$$

$$\overline{OG}\begin{cases} x = (V_0\cos\alpha)t & (1) \\ y = -\frac{F}{2m}t^2 + (V_0\sin\alpha)t & (2) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire :

(1) $\Rightarrow$ t= x / ($v_0\cos\alpha$) ; en remplaçant t dans (2), on obtient :

$$y = -\frac{F}{2mV_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$$
$$y = -\frac{qU}{2mdV_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$$

3 L'ordonnée du point S le plus haut de la trajectoire :
D'après la relation indépendante du temps :

$$V_{Sy}^2 - V_{0y}^2 = 2a_y(y_S - y_0)$$
$$\Rightarrow y_S = \frac{-V_{0y}^2}{2a_y} = \frac{-V_0^2\sin^2\alpha}{-2\frac{F}{m}} = \frac{mV_0^2\sin^2\alpha}{2F}$$

Pour que l'électron ne touche pas la plaque il faut que

$$y_S < \frac{d}{2} \Leftrightarrow \frac{mV_0^2\sin^2\alpha}{2F} < \frac{d}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{mdV_0^2\sin^2\alpha}{qU} < d \Rightarrow U > \frac{mV_0^2\sin^2\alpha}{q}$$
$$U > \frac{6,68.10^{-27}x(3.10^5)^2x\frac{1}{4}}{2x1,6.10^{-19}} \Leftrightarrow U > 469,675V$$

La valeur minimale U_{min} pour que l'électron ne touche pas la plaque P_1
U_m =470V
4 A la sortie du champ y=0 et x=*l*

$$0 = -\frac{qU}{2mdV_0^2\cos^2\alpha}l^2 + l\tan\alpha$$
$$\Leftrightarrow U = \frac{mdV_0^2\sin 2\alpha}{ql} = \frac{6,68.10^{-27}x6.10^{-2}x(3.10^5)^2x0,87}{2x1,6.10^{-19}x0,1} \approx 981V$$

5 La tension accélératrice U_0

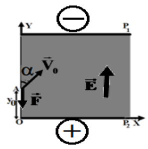
$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mV_0^2 = qU_0$$
$$U_0 = \frac{mV_0^2}{2q} = \frac{mV_0^2}{4e} = \frac{6,68.10^{-27}x(3.10^5)^2}{4x1,6.10^{-19}} = 939V$$

Corrigé de l'exercice4

1.1 **Vérification**

P=mg= 9.10^{-30} N. et F=eU/d= 1.10^{-15} N.

$$\frac{F}{P} = \frac{1}{9}.10^{15} \Rightarrow P << F$$



1.2 **Signes des plaques :**

Les ions étant déviés vers le bas (vers la plaque P_2) la force électrique est dirigée vers le bas.

Comme $q < 0$, $\vec{E}$ est opposé à $\vec{F}$ et $\vec{E}$ est dirigé vers les potentiels décroissants c'est-à-dire de la plaque P_2 qui est chargée positivement vers la plaque P_1 qui est chargée négativement.

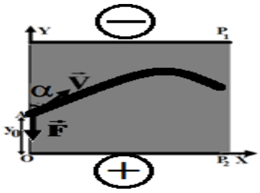
1.3 **Etude du mouvement entre P_1 et P_2 :**

- **Conditions initiales :**

$$\overline{OA}\begin{cases}x_A = x_0 = 0\\ y_A = y_0\end{cases} \quad \text{et} \quad \overline{V_0}\begin{cases}V_{0x} = V_0 \sin\alpha\\ V_{0y} = V_0\cos\alpha\end{cases}$$

- **Étude dynamique ;**

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$



$$\vec{a}\begin{cases}a_x = 0\\ a_y = -\frac{F}{m} =\end{cases} \quad \vec{V}\begin{cases}V_x = V_0\sin\alpha\\ V_y = -\frac{F}{m}t + V_0\cos\alpha\end{cases}$$

$$\overline{OG}\begin{cases}x = (V_0\sin\alpha)t & (1)\\ y = -\frac{F}{2m}t^2 + (V_0\cos\alpha)t + y_0 & (2)\end{cases}$$

L'équation de la trajectoire :

(1) ⇨ $t = x / (v_0 \sin\alpha)$; en remplaçant t dans (2), on obtient :

$$y = -\frac{F}{2mV_0^2\sin^2\alpha}x^2 + x\,\text{cotan}\alpha + y_0$$

$$y = -11x^2 + x + y_0$$

1.4 **L'ordonnée du point S le plus haut de la trajectoire :**

D'après la relation indépendante du temps :

$$V_{Sy}^2 - V_{0y}^2 = 2a_y(y_S - y_0)$$

$$\Rightarrow y_S = \frac{-V_{0y}^2}{2a_y} + y_0 = \frac{-V_0^2\cos^2\alpha}{-2\frac{F}{m}} + y_0$$

$$y_S = \frac{mV_0^2\cos^2\alpha}{2F} + y_0$$

Pour que l'électron ne touche pas la plaque P_1il faut que

$$y_S < d \Leftrightarrow \frac{mV_0^2\cos^2\alpha}{2F} + y_0 < d$$

$$\Rightarrow y_0 < d - \frac{mV_0^2\cos^2\alpha}{2F}$$

$$y_0 < 4.10^{-2} - \frac{9.10^{-31}.(10^7)^2\frac{1}{2}}{2.10^{-15}} \Leftrightarrow y_0 < 1{,}75.10^{-2}m$$

La valeur max pour que l'électron ne touche pas la plaque P_1 est y_0=1,75cm

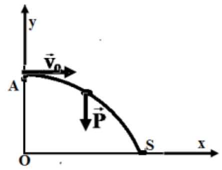
1.5 **L'abscisse du point d'impact P :**

L'ordonnée du point P est nulle

$$0 = -11x^2 + x + 1{,}75.10^{-2}$$

$$\Delta = 1 + 4x1{,}75.10^{-2}x11 = 1{,}77 \quad \text{soit } x_P = 0{,}11m$$

2.1 Les équations horaires du mouvement
Conditions initiales :



$$A\begin{cases} x_0 = x_A = 0 \\ y_0 = y_A \end{cases} \quad \vec{V}_0\begin{cases} V_{0x} = V_0 \\ V_{0y} = 0 \end{cases}$$

En appliquant la R.F.D,on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{V}\begin{cases} V_x = V_0 \\ V_y = -gt \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AM}\begin{cases} x = V_0 t & (1) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 & (2) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire :(1) donne $t = \frac{x}{V_0}$ **en remplaçant dans (2), on trouve :** $y = -\frac{g}{2V_0^2}x^2 + y_0 \quad (3)$

2.2L'abscisse du point S : au point y_S=0 en remplaçant dans(3),on trouve :

$$0 = -\frac{g}{2V_0^2}x^2 + y_0 \Rightarrow y_0 = \frac{g}{2V_0^2}x^2 = \frac{10}{2x14^2}7{,}67^2 = 1{,}5m$$

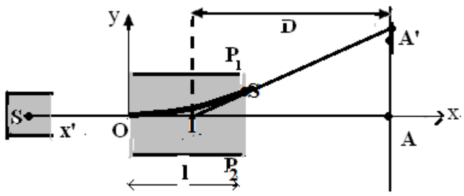
3 L'influence de la masse :
-sur la force : la masse n'a pas d'influence sur la force électrique car elle est indépendante de la masse par contre le poids est proportionnelle à la masse.
-sur l'accélération : l'accélération du mouvement dans le champ est inversement proportionnelle à la masse par contre l'accélération dans le champ de pesanteur est indépendante de la masse.

Corrigé de l'exercice5

1.1 Détermination du sens du champ $\vec{E}$:
Comme la déviation se fait vers le haut F est dirigé vers le haut et comme q>0 E a le même sens c'est-à-dire de P_2 vers P_1.

1.2. La déviation étant vers le haut, la force $\vec{F}$ est dirigée vers le haut et $\vec{E}$ est dirigée vers le haut car q>0.

Conditions initiales:



$$O\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \vec{V}_0\begin{cases} V_{0x} = V_0 \\ V_{0y} = 0 \end{cases}$$

Le PFD (Théorème du centre d'inertie) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$$

On projette sur Ox

$$0 = ma_x \Rightarrow a_x = 0 \text{ m.r.u} \begin{cases} a_x = 0 \\ V_x = V_0 \\ x = V_0 t (1) \end{cases}$$

On projette sur Oy
F=ma$_y$⇒a$_y$=F/m m.r.u.v

$$\begin{cases} a_y = \dfrac{F}{m} \\ V_y = \dfrac{F}{m}t \\ y = \dfrac{F}{2m}t^2 \quad (2) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire :

(1) $\Rightarrow$ t= x / v_0; en remplaçant t dans (2), on obtient :

$$y = \frac{F}{2mV_0^2}x^2 = \frac{2eU}{2.4m_p dV_0^2}x^2 = \frac{eU}{4m_p dV_0^2}x^2$$

1.3. Lorsque le champ est supprimé, il n'y a plus de force :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{0} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \text{ m.r.u}$$

1.4. Calcul de la vitesse V_0

$$\tan\alpha = \frac{AA'}{AI} \Rightarrow AA' = AI\tan\alpha = D\tan\alpha \quad \text{avec } \tan\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = \frac{eUl}{2m_p dV_0^2}$$

$$\Rightarrow AA' = D\frac{eUl}{2m_p dV_0^2} \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{DeUl}{2m_p dAA'}} = 5.10^5 \text{ m/s}$$

1.5 La durée du trajet OS

$t_S = x_S/V_0 = 3.10^{-7}$s

Les cordonnées de $\vec{V_s}$

$$\vec{V_s}\begin{cases} V_{Sx} = V_0 = 5.10^5 \text{ m/s} \\ V_{Sy} = \dfrac{F}{m}t_S = \dfrac{2eU}{4m_p d}t_S = \dfrac{eU}{2m_p d}t_S = 2,95.10^5 \text{ m/s} \end{cases}$$

Déduction de V_S :

$$V_S = \sqrt{V_{Sx}^2 + V_{Sy}^2} = 5,8.10^5 \text{ m/s}$$

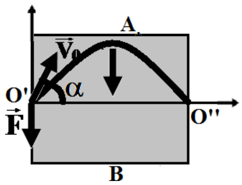
La déviation angulaire α

$$\tan\alpha = \frac{V_{Sy}}{V_{Sx}} = 0,58 \text{ soit } \alpha \approx 30°$$

2.1Etude du mouvement entre A et B :

- **Conditions initiales**

$$O'\begin{cases} x_{O'} = x_0 = 0 \\ y_{O'} = y_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{V_s}\begin{cases} V_{Sx} = V_S\cos\alpha \\ V_{Sy} = V_S\sin\alpha \end{cases}$$



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\dfrac{F}{m} \end{cases} \quad \vec{V}\begin{cases} V_x = V_S\cos\alpha \\ V_y = -\dfrac{F}{m}t + V_S\sin\alpha \end{cases} \quad \overrightarrow{O'G}\begin{cases} x = (V_S\cos\alpha)t & (1) \\ y = -\dfrac{F}{2m}t^2 + (V_S\sin\alpha)t & (2) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire :

(1) t= x / ($V_S\cos\alpha$) ; en remplaçant t dans (2), on obtient :

$$y = -\frac{F}{2mV_S^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha = -\frac{eU'}{4m_p d' V_S^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$$

2.2Calcul de U' pour que l'électron sorte par le point O''

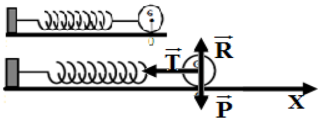
$$0 = -\frac{eU'}{4m_p dV_S^2\cos^2\alpha}l^2 + l\tan\alpha \Leftrightarrow \frac{eU'}{4m_p dV_S^2\cos^2\alpha}l = \tan\alpha$$

$$\Rightarrow U' = \frac{2m_p dV_S^2\sin 2\alpha}{el} = \frac{2x1,67.10^{-27}x4.10^{-2}x(5,8.10^5)^2\sin 60}{1,6.10^{-19}x10^{-1}} \simeq\approx 2444V$$

Oscillateur mécanique:

1. Le pendule élastique horizontal:

- ✓ **Equation différentielle:**



- ✓ **Equation horaire:**

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

- ✓ **Période du mouvement:**

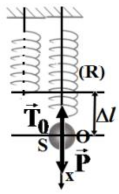
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ or } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \text{ soit } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

- ✓ **Energie mécanique:**

$$E_m = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}Kx^2 \Leftrightarrow E_m = \frac{1}{2}Kx_m{}^2$$

2. Le pendule élastique vertical:

- ✓ **Condition d'équilibre :**

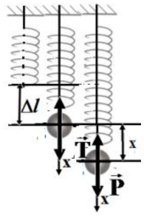


A l'équilibre : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0}$

$\Leftrightarrow P - T_0 = 0 \Leftrightarrow mg = Kx_0$

- ✓ **Equation différentielle:**

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$



En projetant suivant l'axe x'x :

$P - T = ma \Leftrightarrow P - K(\Delta l + x) = ma \Leftrightarrow -kx = ma$

$\Rightarrow a + \frac{K}{m}x = 0$

$x'' + \frac{Kx}{m} = 0 \Leftrightarrow x'' + \omega^2 x = 0 : \text{m.r.s}$

- ✓ **Energie mécanique:**

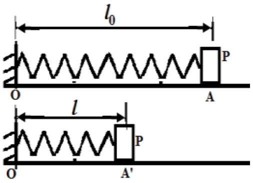
$$E_m = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}K(x^2 + \Delta l^2)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2(x_m^2 - x^2) + \frac{1}{2}K(x^2 + \Delta l^2) \text{ avec } m\omega^2 = k.$$

$$= \frac{1}{2}k(x_m^2 - x^2) + \frac{1}{2}K(x^2 + \Delta l^2) = \frac{1}{2}K(x_m^2 + \Delta l^2)$$

Exercice 1

Un jouet est constitué pour l'essentiel d'un palet P de très petites dimensions, assimilable à un point, de masse m=100g, lancé à l'aide d'un ressort sur un plateau AB horizontal de longueur AB=L=1m sur lequel il peut glisser.



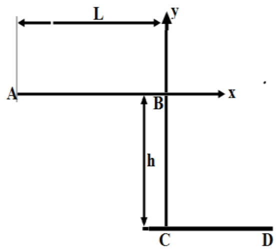
1 Lorsque P est en A, le ressort a sa longueur naturelle OA=l_0=10cm. La raideur du ressort est K=250N/m. On comprime le ressort de telle sorte qu'il ait la longueur OA'=l=3,6cm, P restant en contact avec le ressort. Puis on lâche, le palet sans vitesse initiale (fig 1).

1.1Quelle est l'énergie mécanique du système palet-ressort au moment où on lâche? Faire l'application numérique.

1.2 On néglige les frottements du palet sur le trajet A'A.

On peut montrer et on admettra que le ressort reste en contact avec le palet jusqu'au moment où celui-ci arrive en A. Utiliser la conservation de l'énergie pour trouver l'expression de la vitesse V_A du palet en fonction de K, l, l_0 et m. Faire l'application numérique.

1.3 A l'aide d'un système approprié, on a mesuré les vitesses V_A et V_B et on a trouvé V_A=3,2m/s et V_B=3,0m/s. On admet que l'ensemble des forces de frottement qu'exerce le plateau sur le palet pendant le trajet AB est réductible à une force unique $\vec{f}$ constante opposée à la vitesse du palet. Calculer l'intensité f de $\vec{f}$.



2 Arrivé en B, le palet quitte le plateau avec le vecteur vitesse $\vec{V}_B$ pour tomber 1m plus bas.

2.1 Etablir l'équation de la trajectoire du palet dans le repère (Bx ;By) après passage en B (fig 2).

2.2 Le palet heurte en D le plan horizontal situé à la distance BC=h=1m au dessous du plateau AB. Quelles sont les coordonnées de D ?

2.3 Quelles sont les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}_D$ du palet quand il arrive en D ? Quelle est la valeur de V_D ?

Exercice 2

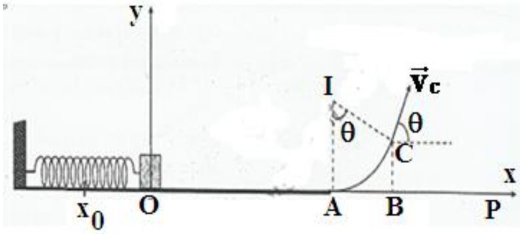
Une piste de lancement est composée :

- **D'une portion rectiligne OB= d sur laquelle est disposé un lanceur**
- **D'un arc de cercle $\overset{\frown}{AC}$ de rayon r de centre I et d'angle au sommet θ.**
- **Le lanceur est un ressort a spires non jointives de raideur K au bout duquel on place un solide de masse.**

  Données :

  $m = 100g; d = 5m; K = 360N.m^{-1}; \theta = 45°; X_0 = 10cm;$ et $g = 9,8ms^{-2}; r = 5m$

Dans tout l'exercice, on prendra le point O comme origine des espaces et on négligera les frottements. A l'équilibre, le centre d'inertie G_o du solide est en O. On comprime le ressort de X_o et on le lâche sans vitesse initiale.



1. On suppose que le solide reste accroché au ressort lorsqu'on lâche le système.

1.1. Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement du solide.

1.2. Détermination de la solution de l'équation différentielle.

1.2.1 Montrer que $x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ vérifie l'équation différentielle précédente.

1.2.2 Calculer ω_0, et X_m et écrire l'expression de x.

1.3. Montrer que l'énergie mécanique est constante puis calculer sa valeur.

2. En réalité, arrivé en O, le solide est propulsé avec une vitesse $\vec{V}_0$. Il parcourt la distance OA, puis l'arc de cercle $\overset{\frown}{AC}$ et quitte la piste en C avec une vitesse $\vec{V}_C$ qui fait avec l'horizontale, un angle θ.

2.1. Calculer la valeur de Vo de la vitesse $\vec{V}_0$.

2.2. Montrer que $V_A = 6 m/s$.

2.3. Calculer la vitesse V_c du solide en C.

2.4. On prendra $V_C = 2{,}7 m/s$

2.4.1 dans le repère (O,x,y),établir les équations horaires du mouvement du solide.

2.4.2 En déduire l'équation de la trajectoire.

2.4.3 Déterminer les coordonnées du point d'impact P ainsi que sa vitesse V_P.

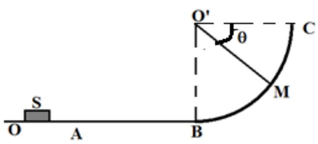
Exercice 3

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un ressort (R) à spires non jointives de raideur K = 16N/m et d'un solide S de masse m=40g. Le pendule peut osciller librement sans amortissement ni frottement sur un banc horizontal. A l'instant t=0, on lance le solide S à partir de sa position d'équilibre O avec une vitesse $\vec{V}_0$ de valeur $V_0 = 1{,}4 m/s$ suivant l'axe X'X (voir fig1). Le mouvement du solide est reporté au repère (O ; $\vec{i}$).

1.1 Déterminer la nature du mouvement et calculer sa période.

1.2 Trouver l'équation horaire du mouvement.

1.3 Donner l'expression de l'énergie mécanique du système (ressort+solide) en fonction de m, k, x et V à un instant t quelconque.



2 Au deuxième passage par la position d'équilibre S se détache du ressort, continue son mouvement et aborde en B une piste circulaire BC de rayon r = 10cm (fig2). Les frottements sont négligeables.

2.1 Calculer la vitesse au point B.

2.2 Déterminer l'expression de la vitesse du solide au point M et calculer sa valeur pour $\theta = \widehat{CO'M} = 30°$.

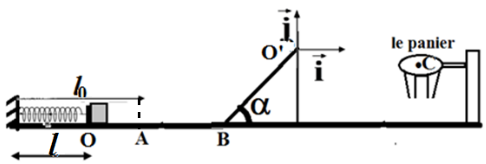
2.3 Calculer la valeur de la réaction de la piste au point M. Bac D 2011sc

Exercice 4

On négligera tous les frottements.

On considère un jouet d'enfant dont le schéma est représenté ci-dessous.

Le jeu consiste à propulser par l'intermédiaire d'un ressort de raideur K un palet de masse m de sorte à l'envoyer dans un panier assimilable à un point C.



Le guide OABO' sur lequel glisse le palet est situé dans un plan vertical. La partie OAB est rectiligne et horizontale, tandis que BO' également rectiligne est inclinée d'un angle α=30° par rapport à l'horizontale.

1.1 Etablir dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$, l'équation cartésienne de la trajectoire du palet, assimilé à son centre d'inertie G, après avoir quitté la piste en O'. On prendra pour origine des dates, l'instant de passage en O'. (1pt)

1.2 Calculer la vitesse V_0 avec laquelle le palet quitte le point O', pour traverser le panier au point C tel que $C\begin{cases} x_C = 0,5 \\ y_C = -0,1265 \end{cases}$

On donne V_0=2 m/s, calculer la vitesse V_B avec laquelle le palet a abordé le plan incliné en B.

2 Calculer le raccourcissement Δl du ressort pour que le palet puisse être envoyé dans le panier en appliquant la conservation de l'énergie mécanique entre les points O et A.

3 On fixe maintenant le palet au ressort. Soit G_0 la position de son centre d'inertie à l'équilibre. On tire sur le ressort pour l'allonger de x_0 = 4 cm et on le lâche sans vitesse initiale à un instant pris comme origine des dates.

Etablir l'équation différentielle caractérisant le mouvement de l'oscillateur et écrire l'équation horaire du mouvement.

4.1 Pour une position x quelconque donner l'expression de l'énergie mécanique du système (ressort-solide S) en fonction de K, m, x et V. Donner cette expression en fonction de K et x_0.

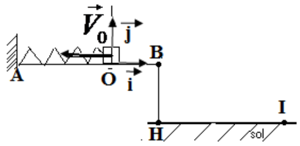
4.2 Montrer que l'énergie cinétique du solide peut s'écrire sous la forme :

$Ec = 50(x_0^2 - x^2)$ .g= 10 m/s^2 ; m = 40g ; BO' = l = 50 cm ; k = l00N/m. (1pt)

Exercice 5

On négligera les frottements sauf dans la question 4.

Un ressort de masse négligeable à spires non jointives, de coefficient de raideur K =20 N/m est fixé par l'une de ses extrémités en A et on accroche à l'autre extrémité un solide S de masse m = 0,2kg qui peut se déplacer le long d'une table horizontale.



Le solide S étant en position d'équilibre, on lui communique une vitesse $\vec{V}_0$ dirigée suivant l'axe du ressort dans le sens opposé à $\vec{i}$ (voir figure) et de module $V_0 = 0{,}8m/s$ à la date $t = 0$.

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement du solide S.

2. Après avoir préciser les valeurs numériques de la pulsation ω , de l'amplitude x_m et de la phase initiale φ ,écrire l'équation horaire du mouvement du solide S.

3.1. Sachant que $E_p = 0$ lorsque le ressort n'est pas déformé ,exprimer à la date t , l'énergie mécanique E_m du système (ressort + solide S) en fonction de K , m , x et v. Calculer l'énergie mécanique E_m à la date t = 0.

3.2. Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m en fonction de K et de l'amplitude x_m du mouvement.

4. Au moment où le solide S passe par sa position d'équilibre dans le sens positif il se détache du ressort et poursuit son mouvement suivant OB.

Trouver l'intensité de la réaction de la table sachant que le solide S arrive en B avec une vitesse de valeur $V_B = 0{,}4m/s$ et que OB = d = 10cm.

5. Le solide S quitte la table au point B.

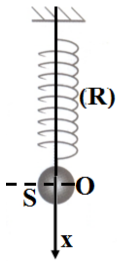
5.1. Déterminer les équations horaires du mouvement du solide S après B dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

5.2. Trouver l'abscisse du point de chute I dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ sachant que BH = h = 1,25 m.

Exercice 6

Les frottements sont supposés négligeables. On prendra $g=10m/s^2$

Le pendule élastique représenté par la figure est constitué de:



- **Un ressort (R) à spires non jointives, d'axe vertical, de masse négligeable et de raideur k=60N/m.**
- **Un solide (S) de centre d'inertie G et de masse M. La position de G est, à chaque instant, donnée par son abscisse x dans le repère $(O,\vec{i})$; O étant la position de G à l'équilibre.**

Le solide (S) est écarté verticalement vers le bas de sa position d'équilibre d'une distance x_m=2cm, puis abandonné à lui-même sans vitesse initiale à la date t=0.

1 Après avoir étudié l'équilibre du solide S calculer sa masse M sachant que l'allongement à l'équilibre Δl=4cm.

2 Montrer que le mouvement de S est rectiligne sinusoïdal et trouver son équation horaire.

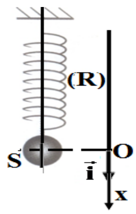
3 On prendra le plan horizontal passant par O comme plan de référence de l'énergie potentielle de pesanteur du système (ressort, solide, Terre).

3.1 **Exprimer l'énergie potentielle du système à une date t quelconque, en fonction de k, x et Δl.**
3.2 Donner l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de k,Δl et x_m.
3.3 Déduire l'expression de l'énergie cinétique du système en fonction de k, x et x_m.

Exercice 7

On néglige la résistance de l'air.

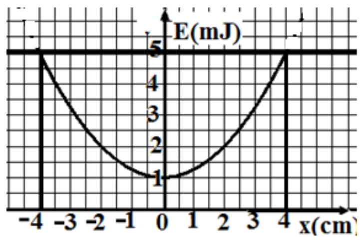
Un pendule élastique vertical est constitué d'un solide S de masse m et d'un ressort R de raideur K. Les courbes donnent les variations des énergies mécanique E et potentielle E_P du système (solide, ressort, terre) en fonction de l'abscisse x du centre d'inertie G du solide dans le repère $(O, \vec{i})$.



La position d'équilibre du solide coïncide avec l'origine O du repère et le plan horizontal passant par O est pris comme plan de référence de l'énergie potentielle de pesanteur du système.

1. Trouver l'équation différentielle du mouvement.

2. Etablir l'expression de l'énergie potentielle du système en fonction de K, x et x_0 où x_0 est l'allongement à l'équilibre.



3. Montrer que l'énergie mécanique est conservée au cours des oscillations?

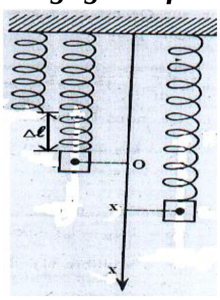
4. Trouver l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de K, x_m et x_0 où x_m est l'amplitude des oscillations.

5. En se basant sur le graphe déterminer l'amplitude x_m, la raideur K du ressort et son allongement à l'équilibre x_0.

6. Montrer que l'énergie cinétique E_C du solide peut être exprimée en fonction de K, x_m et x.

Exercice 8

On néglige les frottements



On fixe l'une des extrémités d'un ressort à spires non jointives de raideur K et de masse négligeable comme l'indique la figure.

Le ressort s'allonge de $\Delta\ell = 2cm$ lorsqu'on suspend à son autre extrémité une masse ponctuelle m=400g.

1. Calculer la valeur de la constante de raideur K du ressort.

2. Le point matériel effectue des oscillations et à un instant t quelconque ce point matériel a pour abscisse x et pour vitesse V.

On prend pour origine des énergies potentielles de pesanteur le plan horizontal passant par l'origine O des abscisses et pour origine des énergies potentielles élastiques l'énergie potentielle du ressort lorsqu'il n'est ni comprimé ni allongé.

2.1. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur E_{PP} en fonction de m,g et x.

2.2. Exprimer l'énergie potentielle élastique du ressort E_{Pe} en fonction de m,g , x et K.

3. Exprimer l'énergie mécanique E_m du système (ressort-masse- terre) en fonction de m, g, x, V et K.

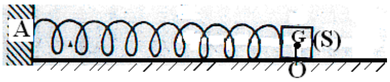
4. Déterminer la nature du mouvement et écrire son équation horaire si à l'instant t=0, $x_0=0$ et $V_0 = -2m/s$.

5. Calculer la valeur de E_m,

Exercice 9

Les frottements sont négligeables.

On considère un ressort très long à spires non jointives de masse négligeable et de raideur K.



1. Le ressort est placé sur une table horizontale. On fixe l'une des extrémités du ressort et on accroche à son autre extrémité un solide ponctuel de masse m. On déplace le solide de sa position d'équilibre d'une distance x_0 =5cm et on l'abandonne sans vitesse initiale.

1.1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur le solide et montrer que le système {ressort + solide + terre} est conservatif.

1.2. Pour une position x quelconque donner l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de K, m, x et de la vitesse V du solide.

1.3. Donner cette expression en fonction de K et x_0. Déduire l'expression de V en fonction de K, m, x_0 et x.

2.1. Montrer que l'énergie potentielle élastique du ressort peut s'écrire sous la forme : $E_{pe}= a V^2 +b$.

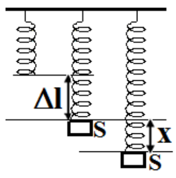
2.2. L'expérience montre que $E_{Pe}= - 0,1 V^2 + 2,5.10^{-2}$. Déduire les valeurs de m et de K.

2.3. Calculer la vitesse du solide lors du passage par sa position d'équilibre.

Exercice 10

On considère le système ci-contre constitué d'un solide S de masse m accroché à l'extrémité inferieure d'un ressort R vertical à spire non jointives, de masse négligeable et de raideur K dont l'extrémité supérieure est fixe. Soit Δl

l’allongement du ressort à l’équilibre. On écarte le solide S de sa position d’équilibre vers le bas d’une distance x_0 et on l’abandonne sans vitesse à un instant pris comme origine des instants.



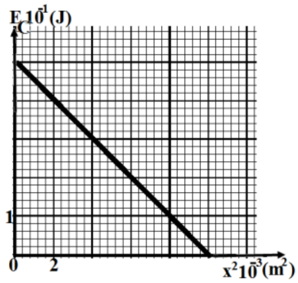
1. On prend comme origine des énergies potentielles de pesanteur le plan horizontal passant par la position d’équilibre et comme origine des énergies potentielles élastiques la position du ressort lorsqu’il n’est ni allongé ni comprimé.

1.1. Etablir l’expression de l’énergie mécanique E du système {solide+ressort+terre} en fonction de x, V, Δl, m et K.

1.2. Montrer que cette énergie est constante et l’exprimer en fonction de K, x_0 et Δl.

1.3. Déduire la nature du mouvement.

2. Un dispositif approprié permet de tracer la courbe représentative de l’énergie cinétique en fonction de x^2 comme l’indique le graphe.



2.1. Trouver l’expression de l’énergie cinétique en fonction de K, x et x_0.

2.2. Déterminer graphiquement l’équation $E_C=f(x^2)$.

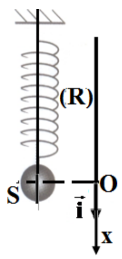
2.3. Par identification des deux expressions précédentes, déterminer les valeurs de K et de x_0.

2.4. Calculer les valeurs de l’allongement Δl et de la masse m si l’énergie mécanique vaut 1joule.

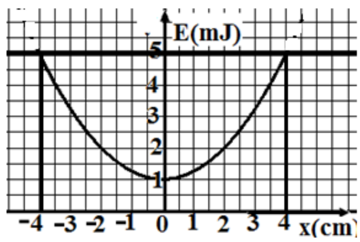
Exercice 11

On néglige la résistance de l’air.

Un pendule élastique vertical est constitué d’un solide S de masse m et d’un ressort R de raideur K. Les courbes donnent les variations des énergies mécanique E et potentielle E_P du système (solide, ressort, terre) en fonction de l’abscisse x du centre d’inertie G du solide dans le repère $(O,\vec{i})$.



La position d’équilibre du solide coïncide avec l’origine O du repère et le plan horizontal passant par O est pris comme plan de référence de l’énergie potentielle de pesanteur du système.



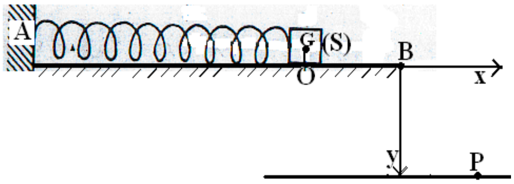
1. Trouver l’équation différentielle du mouvement.

2. Etablir l’expression de l’énergie potentielle du système en fonction de K, x et x_0 où x_0 est l’allongement à l’équilibre.

3. Montrer que l'énergie mécanique est conservée au cours des oscillations?
4. Trouver l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de K, x_m et x_0 où x_m est l'amplitude des oscillations.
5. En se basant sur le graphe déterminer l'amplitude x_m, la raideur K du ressort et son allongement à l'équilibre x_0
6. Montrer que l'énergie cinétique E_C du solide peut être exprimée en fonction de K, x_m et x.

Exercice 12

Un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur K ; est placé sur une table horizontale.

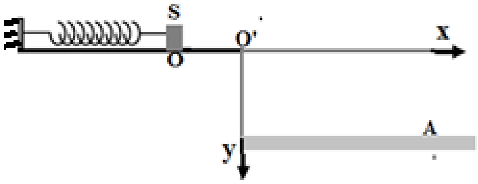


L'une des extrémités du ressort est soudée en un point A et l'autre extrémité est fixée à un solide S de centre d'inertie G et de masse m=100g.
Le solide S qu'on assimile à un point matériel peut glisser sans frottement sur la table.
1. On écarte le solide S de sa position d'équilibre d'une distance de 3cm et on l'abandonne sans vitesse initiale à un instant qu'on prendra pour origine des temps. Le mouvement de S sera étudié dans le repère d'axe Ox dont l'origine O coïncide avec la position du centre d'inertie G à l'équilibre (voir fig).
1.1. Montrer que le mouvement de S est rectiligne sinusoïdal.
1.2. Exprimer la raideur K du ressort en fonction de la masse m et de la période T du mouvement. Calculer K sachant que la durée de 10 oscillations du solide est 3,14s.
1.3. Déterminer l'équation horaire du mouvement de S.
1.4. Calculer l'énergie mécanique du système (solide S + ressort).
2. Au passage par la position d'équilibre dans le sens positif le solide se détache et continue son mouvement sur la table pour la quitter au point B.
2.1. Déterminer l'équation de la trajectoire du mouvement aérien dans le repère (B ,x,y) de la figure.
2.2. Trouver les coordonnées du point de chute P si la durée de cette chute est 0.4s.

Exercice 13

Les frottements sont négligeables
On considère un ressort à spires non jointives de masse négligeable et de raideur K=50N/m. Le ressort est placé sur une table horizontale.
On fixe l'une des extrémités du ressort et on accroche à son autre extrémité un solide ponctuel S de masse m=500g.

A l'instant t=0, on déplace le solide de sa position d'équilibre d'une distance x_0 =2cm et on lui communique une vitesse $V_0 = \frac{\sqrt{3}}{5} m/s$.



1.1. Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement du centre d'inertie du solide.
1.2. Déterminer l'équation horaire du mouvement. Quelle est la vitesse au passage par la position d'équilibre dans le sens positif ?
1.3. Exprimer l'énergie mécanique de cet oscillateur et montrer qu'elle est constante. Retrouver la valeur maximale de la vitesse du mobile en utilisant le principe de la conservation de l'énergie mécanique.
2. Le solide se détache du ressort au passage par la position d'équilibre O dans le sens positif et continue son mouvement sur la table pour la quitter au point O'et atteindre le point A au sol situé 5 cm plus bas (voir figure).

L'instant de passage de S en O' est considéré comme origine des dates.

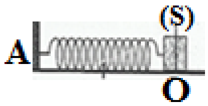
2.1. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de S dans le repère (O', x, y).

2.2. Trouver les coordonnées du point A.

2.3. Calculer les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}_A$ au point A ;en déduire son module puis préciser l'angleβ qu'il fait avec la verticale passant par A.

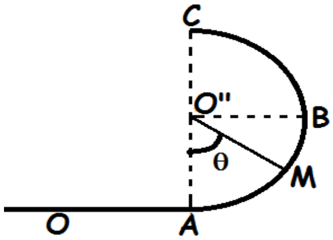
Exercice 14

Les frottements sont négligeables.
Soit un ressort R élastique de masse négligeable, de constante de raideur K=20N/m, guidé par une tige horizontale. Une des extrémités est fixée en un point A l'autre est attachée à un solide ponctuel S de masse m, qui coulisse sur la tige. Dans la position d'équilibre, le centre d'inertie G du solide est en O.



1. Etablir l'équation différentielle du mouvement de S.
2. Ecrire l'équation horaire du mouvement x=f(t) sachant qu'à l'instant t=0 le centre d'inertie G du solide passe en O dans le sens positif et qu'il décrit un segment de 4cm au cours des oscillations dont la période est T=0,05s.

3. Montrer que l'énergie mécanique E du système est égale à 4.10^{-3}J, sachant que l'énergie potentielle de pesanteur au niveau de la tige est nulle.



4. Calculer l'énergie cinétique du système à l'instant t=0,25s.

5. A la date t=5s, la masse se détache du ressort et se déplace suivant une piste OABC constituée de deux parties:

- **OA rectiligne.**
- **ABC en forme de demi-cercle de centre O'' et de rayon r=10cm.**

5.1. Calculer la vitesse du solide S à l'arrivée en A.

5.2. Trouver l'expression de la vitesse de S en M tel que $(\widehat{AO''M}) = \theta$ et calculer sa valeur au point C. On donne $g=10m/s^2$.

Corrigé de l'exercice1

1.1 Calcul de l'énergie mécanique à l'instant où on lâche le palet

L'expression de l'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe}$$

Or $E_{PP}=0$ $\;$ à $t = 0; E_c = 0; E_{pe} = \frac{1}{2}K\Delta l^2$

soit $E_m = E_p = \frac{1}{2}K\Delta l^2 = \frac{1}{2}K(l - l_0)^2$ (1) $\;$ **AN : E_m=0,512J**

1.2 Au point A pas d'allongement

$$E_A = \frac{1}{2}mV_A^2$$

Comme l'énergie mécanique est toujours constante :

$$E_m = \frac{1}{2}mV_A^2 = \frac{1}{2}K\Delta l^2 \Rightarrow V_A = \sqrt{\frac{K}{m}}(l_0 - l)$$

A.N : V_A = 3,2m/s.

1.3 Calcul de f

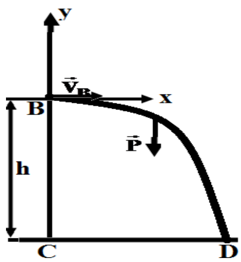
$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}}$$

$$E_{CB} - E_{CA} = \underbrace{W_{\vec{P}}}_{0} + W_{\vec{f}} + \underbrace{W_{\vec{R}_n}}_{0}$$

$$\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = -fxL \Rightarrow f = \frac{m}{2L}(V_A^2 - V_B^2) \quad \text{A.N:f=0,062N}$$

2 Conditions initiales :

$$O\begin{cases} x_B = x_0 = 0 \\ y_B = y_0 = 0 \end{cases} \quad \vec{V}_B\begin{cases} V_{Bx} = V_B \\ V_{By} = 0 \end{cases}$$



En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{V}\begin{cases} V_x = V_B \\ V_y = -gt \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BM}\begin{cases} x = V_B t & (1) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 & (2) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire

$$(1) \Rightarrow t = \frac{x}{V_B}$$

On remplace t dans y soit $y = -\frac{g}{2V_B^2}x^2$

2.2 Lorsque le palet touche le sol au point au point D nous aurons y_D=-h

$$y_D = -\frac{g}{2V_B^2}x_D^2 = -h \Leftrightarrow x_D = \sqrt{\frac{2h}{g}}V_B = 1,36m$$

L'instant t_D correspondant est $t_D = \frac{x_D}{V_B} = 0,45s$

2.3 Les composantes $\vec{V}_D$ $\;\vec{V}_D\begin{cases} V_{Dx} = V_B = 3 \\ V_{Dy} = -gt_D = 4,45 \end{cases}$

D'où la valeur $V_D = \sqrt{V_{Dx}^2 + V_{Dy}^2} = 5,37m/s$

Corrigé de l'exercice2

L'équation différentielle du mouvement :
soit x l'abscisse du solide par rapport à l'origine

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{R}=m\vec{a}$$

Proj/Ox :

$$-T+0+0=ma \Rightarrow -Kx=ma \Leftrightarrow a+\frac{K}{m}x=0$$

C'est une équation différentielle du second degré dont la solution est de la forme :

$$x=X_m\mathrm{Cos}(\omega_0 t+\varphi)$$

2.1 La dérivée seconde de l'équation donne : $a+\omega_0^2x=0$ **ce qui montre que** $x=X_m\mathrm{Cos}(\omega_0 t+\varphi)$ **est une solution de l'équation différentielle.**

2.2Calcul des constantes :

- $\omega_0=\sqrt{\frac{K}{m}}=\sqrt{\frac{360}{0,1}}=60\mathrm{rd/s}$
- **Le solide a été lâché sans vitesse initiale** $X_m=x_0=0,1\mathrm{m}$
- **La phase initiale se calcule à partir des conditions initiales :**

$$\mathrm{Cos}\varphi=\frac{x_0}{X_m}=1\Rightarrow\varphi=0$$

L'équation horaire du mouvement est : $x=0,1\cos(60t)$

3. On considère que le système étudié est constitué de (la terre-ressort-solide)
Ce qui le rend pseudo- isolé et permet de dire que $E_m=Cte$

Calcul de E_m **:** $Em=E_{mi}=\frac{1}{2}Kx_0^2$ $\quad$ $A.N:Em=\frac{1}{2}\times360\times(0,1)^2=1,8J$

II.

1. Calcul de la vitesse de passage par l'équilibre :

L'énergie est conservée : $E_{m(\acute{e}q)}=E_{mi}$ $\quad$ $\frac{1}{2}mV_0^2=E_{mi}$ $\quad$ $,V_0=\sqrt{\frac{2E_{mi}}{m}}=\sqrt{\frac{2.1,8}{0,1}}=6\mathrm{m/s}$

2-En appliquant le théorème de variation de l'énergie cinétique entre O et B on trouve :

$$\Delta E_C=E_{cA}-E_{cO}=W(\vec{P})+W(\vec{Rn})$$

$$\frac{1}{2}mV_A^2-\frac{1}{2}mV_0^2=0 \quad ,V_A^2=V_0^2\Rightarrow V_A=V_0=6\mathrm{m/s};$$

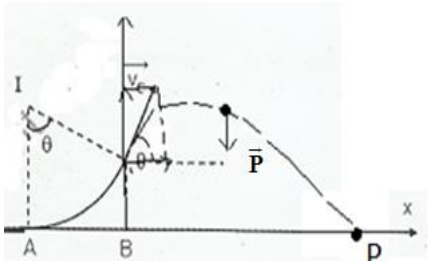
3-La vitesse au point C

$$V_C=\sqrt{V_A^2-2gr(1-\cos\theta)}$$

$$A.N:V_C=\sqrt{36-2.9,8\times5(1-\frac{1}{\sqrt{2}})}=2,7\mathrm{m/s}$$

4.1Conditions initiales :

$$\begin{cases} x_0 = d \\ y_0 = h = r(1-\cos\theta) \end{cases} \quad \vec{V}\begin{cases} V_{Cx} = V_c\cos\theta \\ V_{Cy} = V_c\sin\theta \end{cases}$$



Etude du mouvement

$$\sum\overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \quad \vec{P} = m\vec{a}$$

$\text{Proj}/0x : 0 = ma_x, m \neq 0$

$a_x = 0$ le mvt est r.u

Les équations horaires du mvt sur ox sont :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ V_{ox} = V_c\cos\theta \\ x = V_c\cos\theta t + d \end{cases}$$

$\text{Proj}/0y : -mg = ma_y \Rightarrow a_y = -g$ le mvt est r.u.v

Les équations horaires du mvt sur oy sont :

$$\begin{cases} a_y = -g \\ V_y = -gt + V_c\sin\theta \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_c\sin\theta t + r(1-\cos\theta) \end{cases}$$

4.2 L'équation de la trajectoire :

$$t = \frac{x-d}{V_c\cos\theta}$$

On remplace dans y et on obtient ;

$$y = -\frac{g}{2V_c^2\cos^2\theta}x^2 + x\left(\frac{gd}{V_c^2\cos^2\theta} + \tan\theta\right) - \frac{gd^2}{V_c^2\cos^2\theta} - d\tan\theta + r(1-\cos\theta)$$

Soit : $y = -1,3x^2 + 14,4x - 37$

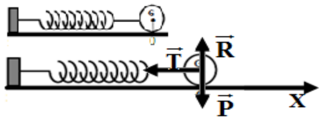
4.3 Les coordonnées du point de chute : au point de chute y_P=0

$-1,3x^2 + 14,4x - 37 = 0$ soit $x_P = 10,2m$

Corrigé de l'exercice3

1.1 Nature du mouvement.

$\sum\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$



En projetant suivant l'axe Ax :

$-T = ma \Leftrightarrow -kx = ma \Rightarrow a + \frac{K}{m}x = 0$

C'est l'équation différentielle caractérisant un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

La valeur de la période : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{10} = 0,314s$

1.2 L'équation horaire du mouvement :

$x = x_m\cos(\omega t + \varphi)$

Calcul de la pulsation : $\omega = \frac{2\pi}{T} = 20 rad/s$

Conditions initiales : $\begin{cases} x_0 = x_m \cos\varphi & (1) \\ V_0 = -x_m \omega \sin\varphi & (2) \end{cases}$

à t = 0 $x_0 = 0m$ et $V_0 = 1,4 m/s$

$V_0^2 = \omega^2(x_m^2 - x_0^2) \Rightarrow x_m = \left|\frac{V}{\omega}\right| = 7.10^{-2} m$ Soit x_m 7.10^{-2} m.

Calcul de la phase initial φ

(1) $\Rightarrow \cos\varphi = \frac{x_0}{x_m} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$ car $V_0 > 0$

D'où l'équation horaire : $x = 7.10^{-2} \cos(20\,t - \frac{\pi}{2})$

1.3 L'expression de l'énergie mécanique :

$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe}$ or $E_{pp} = 0$; $E_c = \frac{1}{2} m V^2$ et $E_{pe} = \frac{1}{2} k x^2$

D'où $E_m = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} k x^2$

2.1 Calcul de V_B

$\Delta E_c = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_{CB} - E_{CO} = 0 \Rightarrow V_B = V_0 = x_m \omega = 1,47 m/s$

2.2 Calcul de V_M

$\Delta E_c = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_{cM} - E_{cB} = -mgh$ avec $h = r(1-\sin\alpha)$

$\Rightarrow V_M = \sqrt{V_B^2 - 2gr(1-\sin\theta)}$ A.N : $V_M \simeq 1 m/s$

2.3 Expression de R_M

$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R}_C = m\vec{a}$

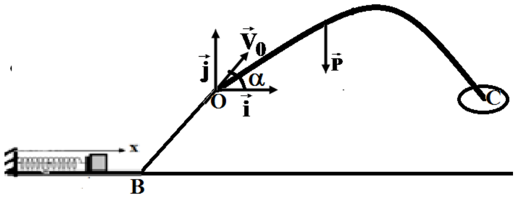
Par projection sur la normale, on obtient :

$-mg\sin\theta + R = m\frac{V_M^2}{r}$ $R = m(g\sin\theta + \frac{V_M^2}{r})$ A.N : $R = 0,6 N$

Corrigé de l'exercice4

Conditions initiales :

$O\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ $\vec{V}_0 \begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos\alpha \\ V_{0y} = V_0 \sin\alpha \end{cases}$



En appliquant la R.F.D, on obtient :

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$

$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{V}\begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = -gt + V_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM}\begin{cases} x = V_0 \cos\alpha t & (1) \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin\alpha t & (2) \end{cases}$

L'équation de la trajectoire

$(1) \Rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha}$

On remplace t dans y : $y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \tan\alpha$

1.2 Calcul de V_0

La trajectoire passe par C alors les coordonnées de C vérifie l'équation de la trajectoire :

$$-0,1265 = -\frac{10}{2V_0^2\frac{3}{4}}0,5^2 + 0,58x0,5 \Leftrightarrow V_0 = 2m/s$$

1.3 Calcul de V_B

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}}$$

En appliquant le théorème $E_{CO} - E_{CB} = W_{\vec{P}} + W_{\vec{f}} + \underbrace{W_{\vec{R_n}}}_{0}$

$$\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = -mgx\sin\alpha \Rightarrow V_B = \sqrt{V_0^2 + 2OBg\sin\alpha} = 3m/s$$

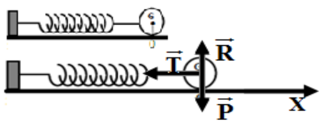
2 Calcul de Δl

Au point B on a $E_{m1} = \frac{1}{2}mV_B^2$

Au point O on a $E_{m2} = \frac{1}{2}K\Delta l^2$ L'énergie mécanique du système étant conservée $\frac{1}{2}K\Delta l^2 = \frac{1}{2}mV_B^2 \Rightarrow \Delta l = V_B\sqrt{\frac{m}{K}} = 0,03m$

3.1 Nature du mouvement.

$\sum\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$



En projetant suivant l'axe Ax :

$-T = ma \Leftrightarrow -kx = ma \Rightarrow a + \frac{K}{m}x = 0$

C'est l'équation différentielle caractérisant un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

3.2 L'équation horaire du mouvement :

$x = x_m\cos(\omega t + \varphi)$

La valeur de la pulsation

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0,04}} = 50rad/s$ Conditions initiales : $\begin{cases} x_0 = x_m\cos\varphi & (1) \\ V_0 = -x_m\omega\sin\varphi & (2) \end{cases}$

à t = 0 $x_0 = 4.10^{-2}$m et $V_0 = 0$

$$V^2 = \omega^2(x_m^2 - x_0^2) \Leftrightarrow x_m = x_0 = 4.10^{-2}m$$

Calcul de la phase initial φ

$$(1) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{x_0}{x_m} = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

D'où l'équation horaire : $x = 4.10^{-2}\cos(50t)$

4.1L’expression de l’énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe}$$

or $E_{pp} = 0; E_c = \frac{1}{2}mV^2; E_{pe} = \frac{1}{2}Kx^2$

soit $E_m = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}Kx^2$ **(1)**

Comme l’énergie mécanique est toujours constante alors lorsque $x=x_0$, la vitesse est nulle et l’énergie mécanique devient :

$$E_m = \frac{1}{2}Kx_0^2 \quad (2)$$

4.2 L’expression de E_C :

1ère méthode

En égalisant les relations (1) et (2) on obtient :

$$E_C + E_P = \frac{1}{2}Kx_0^2 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2}Kx_0^2 - E_P = \frac{1}{2}Kx_0^2 - \frac{1}{2}Kx^2$$

$$E_C = \frac{K}{2}(x_0^2 - x^2) = 50(x_0^2 - x^2)$$

2ème méthode

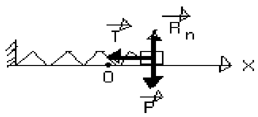
$$E_C = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(x_0^2 - x^2) = \frac{1}{2}k(x_0^2 - x^2) = 50(x_0^2 - x^2)$$

Corrigé de l’exercice5

1L’équation différentielle du mouvement :

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$$



En projetant suivant l’axe Ox -T=ma ⇔

$\boxed{a+(k/m)x = 0}$

1. • **Calcul de la pulsation ω**

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad \textbf{A.N : } \omega = 10\,\text{rad/s}$$

• **Calcul de l’amplitude x_m et de la phase initiale φ**

A t=0 : $x_0=0$ et $v_0=-0,8$m/s ⇔ $x_m\cos\varphi = 0$ et $- x_m\omega\sin\varphi = -0,8$

Soit $x_m=8.10^{-2}$m et $\varphi = \pi/2$ d’où l’équation horaire : $x = 8.10^{-2}\cos(10t + \pi/2)$

3.1Expression de l’énergie mécanique en fonction de K , m, v et x :

$E_m=E_c+E_p$ ⇔ $E_m = ½\, mv^2 + ½\, kx^2$; à t=0 $E_m = \frac{1}{2}mV_0^2$ sa valeur est alors:

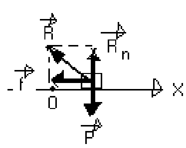
$E_m=6,4.10^{-2}$j.

3.2Expression de l’énergie mécanique en fonction de K et de x_m :

$E_m = ½\, mx_m^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi) + ½\, kx_m^2\cos^2(\omega t+\varphi)$ comme $m\omega^2=k$ ⇨ $E_m = ½\, kx_m^2$

4 • **Calcul de la réaction R :** $R = \sqrt{R_n^2 + f^2}$

• **Déterminons R_n puis f :**



En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R}_n + \vec{f} = m\vec{a}$$

En projetant suivant la verticale descendante :

$P - R_n = 0 \Rightarrow R_n = P$ A.N : $R_n = 2N$.

En projetant suivant l'axe Ox :

$-f = ma$ avec $a = (v_B^2 - v_O^2)/2d \Rightarrow f = -m(v_B^2 - v_O^2)/2d$ A.N : $f = 0,48N$.

R serait alors : R=2,06N.

5.1 Etude du mouvement de chute dans le vide :

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

En projetant suivant l'axe Ox : $a_x = 0 \Rightarrow$ m.r.u d'équation horaire : $x = v_B t + d$

En projetant suivant l'axe Oy : $a_y = -g \Rightarrow$ m.r.u.v d'équation horaire : $y = -\frac{1}{2} g t^2$

5.2 L'abscisse du point d'impact I sur le sol :

au point I $y_I = -h \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ soit $x_I = v_B t + d$ A.N : $x_I = 0,3m$

Corrigé de l'exercice6

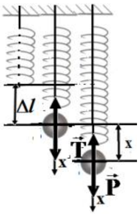
1 Etude de l'équilibre :

A l'équilibre : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0}$

$P - T_0 = 0 \Rightarrow M = \frac{K\Delta\ell}{g}$ Soit M=0,24kg

2 Nature du mouvement.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$



En projetant suivant l'axe x'x :

$$P - T = ma \Leftrightarrow P - K(\Delta l + x) = ma \Leftrightarrow -kx = ma \Rightarrow a + \frac{K}{m} x = 0$$

C'est l'équation différentielle caractérisant un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{60}{0,24}} = 15,8 \text{rad/s}$$

L'équation horaire du mouvement :

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

La pulsation : ω =15,8 rad/s et l'amplitude x_m=2cm.

Calcul de la phase initial φ

$$\cos\varphi = \frac{x_0}{x_m} = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

D'où l'équation horaire :

$$x = 2.10^{-2} \cos(15,8\ t)$$

3.1 Expression de l'énergie potentielle

$E_p = E_{pp} + E_{pe}$ avec $E_{pp} = -mgx$ et $E_{pe} = \frac{1}{2} K(\Delta l + x)^2$

En remplaçant, on obtient : $E_p = \frac{1}{2} K(\Delta\ell^2 + x^2)$

3.2 Expression de l'énergie mécanique :

$E_m = E_c + E_p$ Soit

$E_m = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}K(x^2 + \Delta l^2)$

$= \frac{1}{2}m\omega^2(x_m^2 - x^2) + \frac{1}{2}K(x^2 + \Delta l^2)$ avec $m\omega^2 = k$

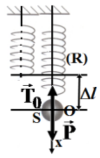
$= \frac{1}{2}k(x_m^2 - x^2) + \frac{1}{2}K(x^2 + \Delta l^2) = \frac{1}{2}K(x_m^2 + \Delta l^2)$

Déduction de l'expression de E_C :

$$E_C = E_m - E_p = \frac{1}{2}K(x_m^2 + \Delta l^2) - \frac{1}{2}K(x^2 + \Delta l^2) = \frac{1}{2}K(x_m^2 - x^2)$$

Corrigé de l'exercice7

1 Etude de l'équilibre :



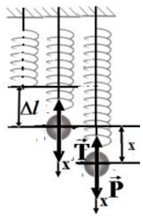
A l'équilibre : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0}$

$\Leftrightarrow P - T_0 = 0 \Leftrightarrow mg = Kx_0$

Nature du mouvement.

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

En projetant suivant l'axe x'x



$P - T = ma \Leftrightarrow P - K(\Delta l + x) = ma \Leftrightarrow -kx = ma \Rightarrow a + \frac{K}{m}x = 0$

C'est l'équation différentielle caractérisant un mouvement rectiligne sinusoïdal

2 Expression de l'énergie potentielle

$E_p = E_{pp} + E_{pe}$ avec $E_{pp} = -mgx$ et $E_{pe} = \frac{1}{2}K(x_0 + x)^2$

En remplaçant, on obtient : $E_p = \frac{1}{2}K(x_0^2 + x^2)$

4 Expression de l'énergie mécanique :

$\Delta E_m = \sum W_{\vec{F}ex} + \sum W_{\vec{F}\,int\,dissip} = 0 \Leftrightarrow E_m = E_{m0}$

$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}K(x_0^2 + x^2) = \frac{1}{2}K(x_0^2 + x_m^2)$

5 D'après la courbe $x_m = 4.10^{-2}$m

$$\begin{cases} \frac{1}{2}Kx_0^2 = 10^{-3} \\ \frac{1}{2}Kx_0^2 + \frac{1}{2}Kx_m^2 = 510^{-3} \end{cases}$$

Soit $x_0 = 2.10^{-2}$m et K=5N/m

6 L'expression de E_C :

$$E_C = E_m - E_p = \frac{1}{2}K(x_m^2 + x_0^2) - \frac{1}{2}K(x^2 + x_0^2) = \frac{1}{2}K(x_m^2 - x^2)$$

Mouvement d'un satellite au tour de la terre :

- **Expression de g en fonction de l'altitude h:**

$$g = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

- **Au niveau du sol :**

$$g_0 = \frac{GM}{R^2}$$

- **Relation entre g et g_0 :**

$$g = \frac{g_0 R^2}{r^2} = \frac{g_0 R^2}{(R+h)^2}$$

- **Nature du mouvement:**

$$\begin{cases} a_t = 0 \\ V = cte \Rightarrow m.u \qquad \Leftrightarrow m.c.u \\ r = \dfrac{GM}{V^2} = cte \Rightarrow m.c \end{cases}$$

- **Expression de V:**
- $\text{soit } V = \sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}$ $\text{ soit } V = R\sqrt{\dfrac{g_0}{R+h}}$
- **Expression de T:**

$$\text{soit } T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}$$

$$\text{soit } T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}}$$

- **Satellite géostationnaire:**

C'est un satellite qui évolue dans le plan de l'équateur terrestre et dans le même sens de rotation de la terre ; la période du satellite géostationnaire est égale à celle de la terre.

- **Energie mécanique d'un satellite**
  - ✓ **Energie cinétique :**

$$E_C = \frac{1}{2}mV^2 \Leftrightarrow E_C = \frac{GmM}{2(R+h)}$$

  - ✓ **Energie potentielle de pesanteur:**
    - **Si l'origine est choisie à l'infini :**

$$E_P = -\frac{GmM}{(R+h)}$$

    - **Si l'origine est choisie à la surface de la terre :**

$$E_P = -\frac{GmM}{(R+h)} + \frac{GmM}{R}$$

  - ✓ **Expression de l'énergie mécanique :**

$$E_m = -\frac{GmM}{(R+h)} \text{ ou bien } E_m = -\frac{GmM}{2(R+h)} + \frac{GmM}{R}$$

Exercice 1

Pour étudier le passage d'une comète au voisinage de notre planète, un satellite lanceur de sonde est mis en orbite autour de la terre.
Données : $G = 6{,}67\ 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; masse de la terre $M_T = 5{,}98.10^{24}$ Kg ; rayon de la terre $R_T = 6400$Km.
La terre est considérée comme un corps à répartition sphérique de masse.

1. Etude du mouvement circulaire du système lanceur-sonde dans le référentiel géocentrique. Dans un premier temps, le système lanceur sonde est supposé mis en orbite circulaire à l'altitude $h_0 = 200$Km. Il évolue avec une vitesse V_o.

1.1 En supposant ce système uniquement soumis au champ gravitationnel terrestre, montrer que son mouvement est uniforme.

1.2 Exprimer la vitesse V_0 en fonction de G, M_T, R_T et h_0 et calculer sa valeur en $Km.s^{-1}$.

1.3 Etablir l'expression de sa période T_0 en fonction de R_T, h_0 V_0 et la calculer.

2. L'énergie potentielle de gravitation s'écrit $Ep = -\frac{GmM_T}{r}$, r étant le rayon de l'orbite, m est la masse du système.

2.1 Pour l'altitude h_0, exprimer l'énergie mécanique E_{m0} du satellite sur une orbite circulaire de rayon r_0 en fonction de G, M_T, m et r_0 puis en fonction de la vitesse V_0.

2.2 Exprimer successivement l'énergie mécanique E_{m0} et l'énergie potentielle E_{p0} en fonction de l'énergie cinétique E_{c0} sur cette même orbite.

2.3 Exprimer l'énergie W fournie par les moteurs pour que le satellite passe de l'orbite basse de rayon r_0 à l'orbite géostationnaire de rayon r en fonction de G, M, m, r_0 et r.

3 Lorsque l'altitude du satellite est peu élevée, il peut subir les frottements des hautes couches de l'atmosphère. Son énergie mécanique diminue suivant la loi $E_m = E_{mo}(1+\alpha.t)$; $\alpha>0$
On suppose que la trajectoire est circulaire. Montrer que le rayon de l'orbite diminue avec le temps alors que la vitesse augmente.

Exercice 2

1. Un satellite artificiel de masse $m=200kg$ tourne autour de la terre sur une orbite circulaire de rayon r.
1.1. Calculer la vitesse V_1 de ce satellite en fonction de r, de la masse M de la terre et de la constante de gravitation G . A.N : $r=7000km$; $G=6{,}67.10^{-11}N.m^2/kg^2$ et $M=6.10^{24}kg$.

1.2 L'énergie potentielle du système $\{$satellite-terre$\}$ étant $E_p = \frac{GmM}{R} - \frac{GmM}{r}$ où R est le rayon de la terre ; donner l'expression de l'énergie mécanique de ce système en fonction de G, m, M, r et R .La calculer.

On donne: $R=6400km$.

1.3 Calculer l'énergie à fournir à ce satellite pour qu'il passe de l'orbite de rayon r à une autre de rayon $r'=7100km$.

2On considère que la terre est un point matériel qui tourne autour du soleil de masse $M'=2.10^{30}kg$ sur une orbite circulaire de rayon $r=1,5.10^8km$..

2.1. Exprimer la vitesse angulaire ω et la période T du mouvement de la terre.

2.2. Exprimer le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ en fonction de G et M'.

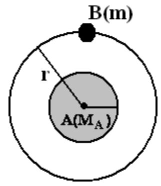
2.3. Calculer T . Cette valeur est-elle vraisemblable ?

Exercice 3

Dans cet exercice, les mouvements étudiés sont rapportés à des repères galiléens.

Les mobiles étudiés présentent une répartition à symétrie sphérique.

Donnée $G = 6,67.10^{-11}$ S.I.



1 Dans un repère, on étudie deux satellites A et B. On suppose que la masse M_A du mobile A est très grande devant celle m du mobile B. Le mobile B tourne autour de A considéré comme étant fixe (voir fig).

1.1 Montrer que le mouvement de B autour de A est un mouvement circulaire uniforme.

1.2 Etablir la relation qui lie la vitesse V du centre d'inertie de B, le rayon r de l'orbite, la masse M_A de A et la constante de gravitation universelle G.

1.3 Soit T la période de B autour de A. Exprimer V en fonction de T et r , en déduire la relation $\frac{r^3}{T^2} = kM_A$ et donner l'expression de k en fonction de G.

2. Un satellite artificiel tourne autour de la terre (dont la masse M_T $=5,98.10^{24}kg$) dans une orbite de rayon $r = 42,3 .10^3km$.

2.1. Calculer la période de ce satellite artificiel. Comment appelle-t-on ce type de satellite, s'il tourne dans le plan de l'équateur et dans le même sens de rotation de la terre?

2.2. Tous les satellites se trouvant sur cette orbite ont-ils la même vitesse ? La même masse ? Justifier.

3. Sachant que la terre décrit autour du soleil en 365,25 jours une orbite de rayon $r'=1,496.10^8km$. Calculer la masse M_S du soleil.

Exercice 4

Un satellite supposé ponctuel, de masse m, décrit une orbite circulaire d'altitude h_1 autour de la Terre assimilée à une sphère de rayon R. On fera l'étude dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

1. Etablir l'expression de l'intensité g du vecteur champ de gravitation à l'altitude h_1 en fonction de sa valeur au sol g_o de R et h_1.

2. Déterminer l'expression de la vitesse V_1 du satellite, celle de sa période T_1 en fonction g_o de R_T et h_1 et celle de son énergie cinétique E_{C1} en fonction g_o, m, R et h_1. A.N: h_1=400 km ; g_o=9,81m/s² ; m= 1020kg ; R = 6400km.

3. L'énergie potentielle du satellite dans le champ de gravitation à l'altitude h_1 est donnée par la relation $E_{p1} = -\frac{GmM}{R+h_1}$, M est la masse de la Terre, G la constante universelle de gravitation.

3.1. Exprimer E_{P1} en fonction de m, R, g_o et h_1.

3.2 Donner l'expression de l'énergie mécanique E_{m1} en fonction de m, R, g_o et h_1.

Comparer cette énergie mécanique à l'énergie cinétique E_{C1} puis à l'énergie potentielle E_{P1}.

4. On fournit au satellite un supplément d'énergie, $\Delta E = +5,0.10^8$J, il prend alors une nouvelle orbite circulaire. Déterminer :

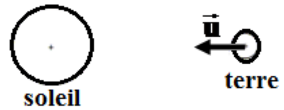
4.1. Sa nouvelle énergie cinétique E_{C2} et sa vitesse V_2.

4.2. Sa nouvelle énergie potentielle E_{P2} et son altitude h_2.

Exercice 5

On considère le mouvement de la Terre autour du Soleil dans le référentiel héliocentrique considéré comme galiléen. On suppose que ce mouvement se fait sur une trajectoire circulaire, de rayon r = 1,5. 10^{11} m.

On néglige l'action de tout autre astre et on s'aidera du schéma suivant :



1. Donner les caractéristiques de la force subie par la Terre et la représenter.

2. Appliquer la R.F.D à la Terre et montrer que son mouvement est uniforme.

3 En déduire l'expression du vecteur accélération de la terre en fonction de la constante de gravitation universelle G, de la masse du Soleil M_s du rayon r de la trajectoire et du vecteur unitaire $\vec{u}$; le représenter sans considération d'échelle sur le schéma.

4 Quelle relation peut-on alors écrire entre l'accélération a et la vitesse V du centre d'inertie de la Terre?

5 Donner l'expression de la vitesse V en fonction de la constante de gravitation universelle G, la masse du Soleil M_s et le rayon r de la trajectoire. Calculer la valeur de cette vitesse.

6 Donner l'expression de la période de rotation T de la Terre autour du Soleil en fonction de la vitesse V et du rayon r de sa trajectoire. Montrer alors qu'on peut écrire que $T = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM_S}}$, puis calculer sa valeur.

On donne :G=6,67.10 $^{-11}$ S.I M_S=2.10 ^{30}kg

Exercice 6

Le lanceur européen Ariane a été conçu pour placer en orbite géostationnaire des satellites. Un satellite S supposé ponctuel de masse m évolue autour de la terre de masse M assimilée à une sphère homogène de centre O et de rayon R. L'étude sera effectuée dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen. On notera r la distance OS entre le centre O de la terre et la position S du satellite et on introduira le vecteur unitaire $\vec{u}$ dirigé de O vers S.

1.1 Exprimer le vecteur force d'attraction gravitationnelle $\vec{F}$ qu'exerce la terre sur le satellite en fonction de la constante de gravitation universelle G, M, m, r et le vecteur unitaire $\vec{u}$.

1.2 Montrer que le mouvement du satellite sur une orbite circulaire de rayon r est uniforme. Un schéma permettant de visualiser les vecteurs force, vitesse, accélération et le vecteur unitaire utilisé est exigé.

1.3 Etablir l'expression de la vitesse V du satellite sur la trajectoire circulaire de rayon r ainsi que celle de la période de révolution T autour de la terre en fonction de G, M, et r.

2.1 Qu'est-ce qu'un satellite géostationnaire? Dans quel plan se trouve l'orbite du satellite géostationnaire.

2.2 Calculer la valeur du rayon r_2 de l'orbite de ce satellite géostationnaire.

3 Il serait très onéreux de propulser la fusée porteuse directement jusqu'à l'orbite géostationnaire : on procède donc par transfert d'orbites. Le satellite est d'abord placé sur une orbite basse de rayon r_1 puis mené vers l'orbite géostationnaire de rayon r_2 à l'aide des moteurs propulseurs. Entre les deux orbites circulaires le satellite emprunte une orbite de transfert elliptique.

3.1 Exprimer l'énergie cinétique E_c du satellite sur une orbite circulaire de rayon r en fonction de G, M, m et r.

3.2 On donne l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle pour le satellite situé à une distance r du centre de la terre, en choisissant l'origine de l'énergie potentielle à l'infini. $E_p(r) = -\frac{GmM}{r}$. Exprimer l'énergie mécanique E_m du satellite sur une orbite circulaire de rayon r en fonction de G, M, m et r.

3.3 Exprimer successivement l'énergie mécanique E_m et l'énergie potentielle E_p en fonction de l'énergie cinétique E_c sur cette même orbite.

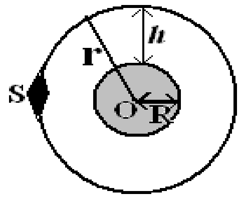
3.4 Exprimer l'énergie W fournie par les moteurs pour que le satellite passe de l'orbite basse de rayon r_1 à l'orbite géostationnaire de rayon r_2 en fonction de G, M, m, r_1 et r_2. Calculer W.

Données: $M = 6.10^{24}$ kg ; R = 6380 km ; m= 1000 kg ; r_1=6700 km
$G = 6{,}67.10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$.durée d'un jour T: $T^2 = (24\ h)^2 = 7{,}5.10^9\ s^2$; $\pi^2 = 10$

Exercice 7

On considère un satellite S de la terre de masse m ayant une orbite circulaire de rayon r dont le centre O est confondu avec le centre de la terre.

1. Donner les caractéristiques de la force de gravitation exercée sur ce satellite.



2. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.

3. Trouver l'expression de la vitesse du satellite en fonction de l'accélération de la pesanteur g_0 au sol, du rayon R de la terre et du rayon r de l'orbite puis en fonction de la constante de gravitation G, de la masse M de la terre et du rayon r.

4. Ce satellite est géostationnaire :

4.1. Préciser le plan de l'orbite.

4.2. A quelle altitude est placé ce satellite.

4.3. Calculer sa vitesse angulaire et en déduire sa vitesse linéaire.

4.4 Calculer la masse M de la terre.

A.N : $R=6400km$; $G=6,67.10^{-11}$ S.I et $g_0=9,8m/s^2$..

Exercice 8

On étudie le mouvement d'un satellite terrestre dans le repère géocentrique. Le satellite décrit une orbite circulaire dans le plan équatorial de la terre.

1. Montrer que la vitesse V de ce satellite est cste.

2. Exprimer littéralement la vitesse V du satellite en fonction de g0(intensité de la pesanteur au niveau du sol) , R(de la terre) , h(altitude).Le satellite est en faite géostationnaire. Qu'est-ce qu'un satellite géostationnaire ?

3. Calculer le rayon de l'orbite de ce satellite en fonction de g_0 , R , ωT (vitesse angulaire de rotation de la terre) .

Données : $g_0 = 9,8m/s^2$; $R = 6370km$ $\omega_T = 7,29.10^{-5}$ rad/s.

Dans quel domaine peut-on utiliser ce satellite ?

Exercice 9

La formule de l'attraction universelle entre deux corps s'écrit : $F = \frac{GM_1M_2}{d^2}$

Où G est une constante valant $6,67 .10^{-11}$ S.I et d la distance entre les centres d'inerties des deux corps dont les masses sont M_1 et M_2.

1.1. Exprimer l'accélération de la pesanteur g_0 au niveau du sol en fonction de G, du rayon R de la terre et de la masse M de la terre.

1.2. Sachant que $R = 6400km$, calculer M si $g_0= 9,8m/s^2$.

2. Exprimer en fonction de g_0 , R et h , l'accélération g de la pesanteur à une altitude h quelconque .

3. Un satellite artificiel de la Terre évolue à très haute altitude, où l'accélération g de la pesanteur a pour expression celle trouvée à la question 2; en décrivant une circonférence concentrique à la terre.
3.1. Déterminer la nature du mouvement du satellite.
3.2. Exprimer sa vitesse en fonction de g_0, R et h.
Quelle est cette vitesse si h = 36000km ? Quelle est alors la durée d'une révolution ? L'exprimer, en minutes et en heures. Si le satellite tourne dans le plan de l'équateur et dans le même sens de rotation que la terre ; conclure?

Exercice 10

La mise en orbite complète du satellite MSG-2 de masse m = 2,0 × 10^3 kg s'accomplit en deux étapes. Dans un premier temps, il est placé sur une orbite circulaire à vitesse constante v_S à basse altitude h = 6,0 ×10^2 km autour de la Terre et il n'est soumis qu'à la force gravitationnelle exercée par la Terre.
On choisit un repère (S, t, n) dans lequel t est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement et n un vecteur unitaire perpendiculaire à la trajectoire orienté vers le centre de la Terre.
1. Donner l'expression vectorielle de la force gravitationnelle F exercée par la Terre sur le satellite en fonction des données.
2. En appliquant une loi de Newton, trouver l'expression du vecteur accélération a du centre d'inertie du satellite.
3. Sans souci d'échelle, représenter sur un schéma, à un instant de date t quelconque, la Terre, le satellite, le repère (S, t, n) ainsi que le vecteur accélération a.
4. Déterminer l'expression de la vitesse v du centre d'inertie du satellite. Vérifier que sa valeur est de l'ordre de 7,6 ×10^3 m/s sur son orbite basse.

Exercice 11

1. La force de gravitation s'exerçant entre la terre et le soleil vaut F=3,5 10^{22} N. Connaissant la constante de gravitation G=6,67 10^{-11} SI, la masse de la terre Mt =6 10^{24} kg et la distance terre soleil d=1,5 10^8 km, exprimer en fonction des données la masse Ms du soleil puis calculer sa valeur numérique.
2. Un satellite assimilé à un point matériel de masse m décrit d'un mouvement uniforme dans le champ de gravitation de la terre une orbite circulaire à l'altitude h= 400 km. L'orbite est située dans le plan équatorial de la terre et le rayon terrestre a pour valeur R=6400 km.
- Déterminer dans le repère géocentrique la vitesse V du satellite en fonction de G, Mt et r (r étant le rayon de la trajectoire). Calculer la valeur numérique de V.
-Déterminer dans le même repère, les expressions littérales et les valeurs numériques de la période T et de la vitesse angulaire ω du satellite.

Corrigé de l'exercice1

1 - 1) $\sum \vec{F}_{app} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$ (1)

Par projection sur la tangente :

$0 = ma_t \Rightarrow a_t = 0$ donc : v = cste(mu)

1 - 2Par projection sur la normale :

$$F = ma_n \Rightarrow \frac{GmM_T}{r_0^2} = \frac{mv_0^2}{r_0}$$

$$\text{donc : } v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{(R_T+h_0)}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{6{,}67.10^{-11}.5{,}98.10^{24}}{(6400.10^3+200.10^3)}} = 7{,}8\text{Km/s}$$

1 - 3) $v_0 T = 2\pi(R_T + h_0)$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi(R_T+h_0)}{v_0} = \frac{2\pi(6400.10^3+200.10^3)}{7{,}8.10^3} = 5{,}3.10^3\text{s}$$

2-1 Expression de E_{m0} en fonction de r_0

$$E_{m_0} = Ec_0 + Ep_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM_T}{r_0}$$

$$E_{m_0} = \frac{1}{2}\frac{GmM_T}{r_0} - \frac{GmM_T}{r_0} = -\frac{GmM_T}{2r_0}$$

Expression de Em_0 en fonction de v_0

$$E_{m_0} = -\frac{GmM_T}{2r_0} = -Ec_0 = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

2-2 Expression de l'Énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{mGM_T}{2r} - \frac{GM_Tm}{r} = -\frac{mGM_T}{2r} = -E_c$$

Expression de l'Énergie potentielle :

$$E_P = -\frac{mGM}{r} = -2E_c$$

2. 3 Expression de l'Énergie W= $E_m(2)$- $E_m(1)$

L'énergie mécanique $E_m(1)$: $E_m(1) = -\frac{mGM}{2r_0}$.

L'énergie mécanique $E_m(2)$:

$$E_m(2) = -\frac{mGM}{2r}$$

D'où $W = E_m(2) - E_m(1) = -\frac{mGM}{2r} + \frac{mGM}{2r_0} = \frac{mGM}{2}(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r})$

2-2)

- $E_m = E_{mo}(1+\alpha t)$

$$-\frac{GmM_T}{2r} = -\frac{GmM_T}{2r_o}(1+\alpha t) \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{r_o}(1+\alpha t) \Rightarrow r = \frac{r_o}{(1+\alpha t)}$$

Donc r diminue avec le temps

- $E_m = E_{mo}(1+\alpha t)$

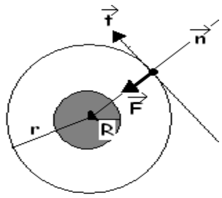
$$-\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2(1+\alpha t)$$

$$v = v_0\sqrt{(1+\alpha t)}$$

Donc V augmente avec le temps

Corrigé de l'exercice2

1.1 Calcul de V_1



En appliquant la R.F.D : $\Sigma\vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$

En projetant sur la tangente on obtient :

$a_t = 0 \Rightarrow v = cte \Rightarrow$ **mouvement uniforme.**

En projetant sur la normale on obtient :

$a_n = F/m$ **avec** $F = GMm/r_1^2$ **et** $a_n = v_1^2/r_1 \Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$

A.N : $V_1 = 7{,}56.10^3 m/s$

1.2 Expression de l'énergie mécanique

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} + \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{r} \Rightarrow E_m = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{2r}$$ **A.N :** $E_m = 7.10^9$ **J**

1.3 L'énergie E à fournir au satellite

$E = E'_m - E_m$ $E_m = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$ **A.N :** $E = 8.10^7 J$

2.1 Expression de la vitesse angulaire

$$F = \frac{GMM'}{r^2} = Mr\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM'}{r^3}}$$

Expression de T : $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM'}}$

2.2 Expression du rapport

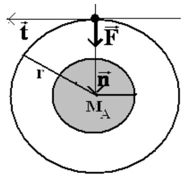
$$T^2 = 4\pi^2\frac{r^3}{GM'} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = 4\pi^2 GM'$$

2.3 Calcul de T :

$$T = 6.28\sqrt{\frac{(1,5)^3.10^{33}}{6,67.10^{-11}x2.10^{30}}} = 3,16.10^7 s = 365,5j = 1an$$

Cette valeur est vraisemblable car elle correspond à la période de rotation de la terre autour du soleil.

Corrigé de l'exercice3



1.1 Nature du mouvement :

En appliquant la R.F.D : $\Sigma\vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$

En projetant sur la tangente on obtient :

$a_t = 0 \Rightarrow v = cte \Rightarrow$ **mouvement uniforme**

En projetant sur la normale on obtient : $a_n = F/m$ **avec** $F = GMm/r^2$ **et** $a_n = v^2/r$

$\Rightarrow r = GM/V^2 = cte \Rightarrow$ **trajectoire circulaire** $\Leftrightarrow$ **m.c.u**

1.2 Relation entre V, r, M_A, et G :

$a_n = v^2/r$ **et** $a_n = F/m \Rightarrow V = \sqrt{\frac{GM_A}{r}}$

1.3 Expression de V en fonction de T et r : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ avec $\omega = \frac{V}{r} \Rightarrow T = 2\pi\frac{r}{V} \Rightarrow V = \frac{2\pi r}{T}$

Déduction de la relation $\frac{r^3}{T^2} = kM_A$

On a $T = 2\pi\frac{r}{V}$ or $V = \sqrt{\frac{GM_A}{r}} \Rightarrow T = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM_A}} \Leftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_A} \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_A}{4\pi^2} = kM_A$ avec $k = \frac{G}{4\pi^2}$

2.1 Calcul de la période du satellite :

$T = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM_T}}$ **A.N : T≈ 86662s ≈24h.**

La période étant égale à celle de la terre, si le satellite tourne dans le plan de l'équateur et dans le même sens de rotation de la terre, il est dit géostationnaire.

2.2 Les satellites se trouvant sur cette orbite ont la même vitesse mais leurs masses peuvent être différentes car l'expression de la vitesse montre qu'elle ne varie qu'en fonction du rayon de l'orbite.

3. Calcul de la masse M_S du soleil.

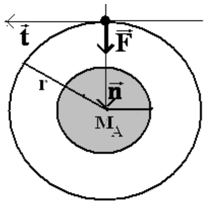
$T = 2\pi r'\sqrt{\frac{r'}{GM_S}} \Leftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r'^3}{GM_S} \Rightarrow M_S = \frac{4\pi^2 r'^3}{T^2 G}$ **A.N : $M_S = 1,9878.10^{30} \approx 2.10^{30}$kg.**

Corrigé de l'exercice4

1. L'expression de g en fonction de g_0 , R et h_1

L'un des corps est la terre alors F = P

$$\frac{GmM}{r^2} = mg \Leftrightarrow \frac{GM}{r^2} = g \; (1)$$



au niveau du sol $g = g_0$ et $r = R$ alors $g_0 = \frac{GM}{R^2}$ **(2)**

les relations (1) et (2) donne $g = \frac{g_0 R^2}{(R+h_1)^2}$

2. L'expression de V_1

En appliquant la R.F.D : $\Sigma\vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$

En projetant sur la normale on obtient $a_n = P/m$ **avec** $P = mg$

$$P = m.\frac{g_0R^2}{(R+h_1)^2} \text{ et } a_n = \frac{V_1^2}{R+h_1} \Rightarrow V_1 = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h_1}} \quad V_1 = 7687 m/s$$

$$T_1 = 2\pi\frac{r}{V} = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h_1)^3}{g_0}} = 5555s \text{ et } E_{C1} = \frac{1}{2}mV_1^2 = \frac{mR^2g_0}{2(R+h_1)} = 3.10^{10} J$$

3.1 L'expression de E_{P1} en fonction de m, R, g_0 et h_1:

$$\text{comme } GM = g_0R^2 \text{ alors } E_{P1} = -\frac{mR^2g_0}{R+h_1}$$

Expression de l'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{mR^2g_0}{2(R+h_1)} - \frac{mR^2g_0}{R+h_1} = -\frac{mR^2g_0}{2(R+h_1)}$$

Comparaison :

$$\frac{E_{m1}}{E_{c1}} = \frac{-\frac{mR^2g_0}{2(R+h_1)}}{\frac{mR^2g_0}{2(R+h_1)}} = -1 \Rightarrow E_{m1} = -E_{c1}$$

et

$$\frac{E_{m1}}{E_{P1}} = \frac{-\frac{mR^2g_0}{2(R+h_1)}}{-\frac{mR^2g_0}{R+h_1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow E_{m1} = \frac{E_{P1}}{2}$$

4.1. Calcul E_{C2}

$$\Delta E = \Delta E_m = -\Delta E_c = -(E_{c2} - E_{c1})$$

$$\Rightarrow E_{c2} = E_{c1} - \Delta E = E_{c1} - \Delta E \quad A.N : E_{c2} = 3.10^{10} - 5.10^8 = 295.10^8 J$$

Calcul V_2

$$E_{C2} = \frac{1}{2}mV_2^2 \Rightarrow = V_2 = \sqrt{\frac{2E_{C2}}{m}} = 7605 m/s$$

4.2 Calcul E_{P2}

$$\Delta E = \Delta E_m = E_{m2} - E_{m1} = \frac{E_{p2} - E_{p1}}{2} \Rightarrow E_{p2} = E_{p1} + 2\Delta E = 2E_{m1} + 2\Delta E = -2E_{c1} + 2\Delta E$$

$$E_{p2} = 2(\Delta E - E_{c1}) = -2E_{c2} = -2x295.10^8 = -59.10^9 J$$

Calcul de h_2

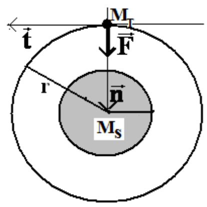
$$E_{P2} = -\frac{mR^2g_0}{R+h_2} \Rightarrow R + h_2 = -\frac{mR^2g_0}{E_{P2}}$$

$$\Rightarrow h_2 = -\frac{mR^2g_0}{E_{P2}} - R = -\frac{mR^2g_0}{E_{P2}} - R$$

$$h_2 \simeq 546,7km$$

Corrigé de l'exercice5

1. Les caractéristique de $\vec{F}$:



$$\vec{F}\begin{cases}\text{-direction:la normale}\\ \text{-sens:de la terre vers le soleil}\\ \text{-pt d'application: centre de la terre}\\ \text{-module:}F=\dfrac{GM_TM_S}{r^2}\end{cases}$$

2. Nature du mouvement :

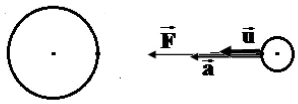
En appliquant la R.F.D : $\Sigma\vec{F}_{ext} = M_T\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = M_T\vec{a}$

En projetant sur la tangente on obtient : $a_t = 0 \Rightarrow v = cte \Rightarrow$ **mouvement uniforme**

3. Déduction de l'expression de l'accélération

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = M_T\vec{a} \Leftrightarrow \frac{GM_SM_T}{r^2}\vec{u} = M_T\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{GM_S}{r^2}\vec{u}$$

voir Schéma



4. Relation entre a_n et V, r

$$a = \frac{V^2}{r},$$

5. Expression de V :

$$a = \frac{V^2}{r} \text{ et } a = \frac{GM_S}{r^2} \Leftrightarrow V = \sqrt{\frac{GM_S}{r}} \quad V=2{,}8.10^4 m/s$$

6. Expression de T en fonction de V et r : $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ avec $\omega = \dfrac{V}{r} \Rightarrow T = 2\pi\dfrac{r}{V}$

On a $T = 2\pi\dfrac{r}{V}$ or $V = \sqrt{\dfrac{GM_S}{r}} \Rightarrow T = 2\pi r\sqrt{\dfrac{r}{GM_S}}$ **A.N : T≈ 3,17.10^{7}s ≈1an.**

Chimie

Notions générales

Transformation chimique

Une transformation chimique a lieu chaque fois qu'une nouvelle espèce chimique est produite ou chaque fois qu'une espèce chimique disparaît.
Une espèce chimique qui apparaît s'appelle produit.
Une espèce chimique qui disparaît totalement ou partiellement s'appelle réactif.

Définition du système chimique

On appelle système chimique, l'ensemble des espèces chimiques présentes lors de la transformation chimique.

Les trois étapes d'une transformation chimique

Une expérience mettant en jeu une transformation chimique se déroule en trois étapes :

- **La préparation (mélange des réactifs s'il y a plusieurs réactifs, dissolution éventuelle dans un solvant, chauffage si c'est nécessaire...).**
- **Le déroulement de la transformation, pendant lequel les réactifs disparaissent et les produits apparaissent.**
- **L'arrêt de la transformation, qui a lieu dès qu'un des réactifs a totalement disparu, même si d'autres réactifs sont encore présents.**

Etat initial, état final

On appelle état initial du système chimique, l'état de ce système à la fin de la première étape.
On appelle état final du système chimique, l'état de ce système au début de la troisième étape, c'est-à-dire à l'arrêt de la transformation chimique.

La transformation chimique est donc le passage du système chimique de son état initial à son état final.

Notion d'avancement et taux d'avancement :

L'avancement est un nombre, noté x et exprimé en mole, qui permet de décrire quantitativement un système chimique en cours de transformation

L'avancement d'une réaction, notée x, est le nombre de fois que la réaction a évolué depuis l'état initial. Soit la réaction symbolisée par :

$\alpha A + \beta B \rightarrow \gamma C + \delta D$

On dit que la réaction a avancé une fois depuis l'état initiale, si α moles de A et β moles de B ont disparu et γ moles de C et δ moles de D sont apparues.
On dit encore que les réactifs ont disparu et les produits sont apparus en quantités stœchiométriques. L'avancement x d'une réaction est une grandeur qui s'exprime en mol.

Tableau d'avancement d'un système

Tableau d'avancement d'un système permet d'écrire l'état du système chimique à tous instant de la transformation chimique.

Etat du système	Avancement (mol)	Quantité de matière en mol			
		aA +	bB	→ cC +	dD
Initiale	0	ni (A)	ni (B)	0	0
Intermédiaire	x	ni (A) – a.x	ni (B) – b.x	c.x	d.x
Finale	xf	ni (A) – a.xf	ni (B) – b.xf	c.xf	d.xf

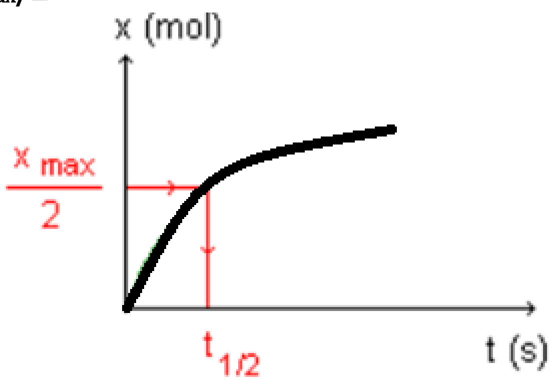
Avancement final & avancement maximal

- ❖ **L'avancement final x_f est la valeur de l'avancement en fin de la réaction.**
- ❖ **L'avancement maximal x_{max} est la valeur calculée de l'avancement en supposant la réaction pratiquement totale :**
    - **Pour une réaction totale, un réactif prenant part à cette réaction est dit réactif limitant (ou en défaut) de cette réaction si sa quantité dévient nulle à l'état final.**
    - **Pour une réaction limitée aucun des réactifs prenant part à cette réaction ne disparait totalement en fin de la réaction.**

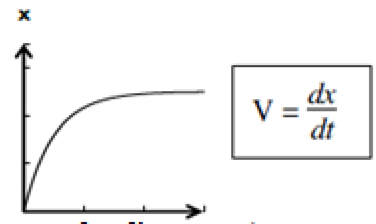
Temps de demi-réaction

C'est le temps, noté $t_{1/2}$, de demi-réaction est la durée au bout de laquelle l'avancement x est égal à la moitié de l'avancement final.

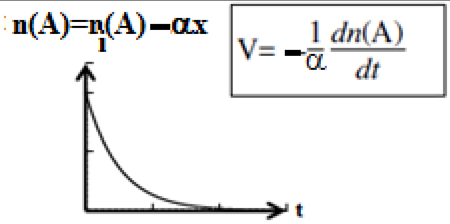
$t=t_{1/2} \Longrightarrow x_{1/2}=x_{max}/2$



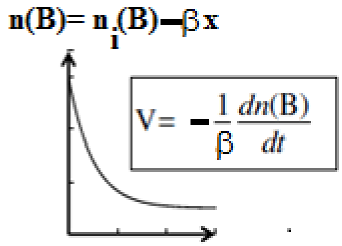
Vitesse de la réaction



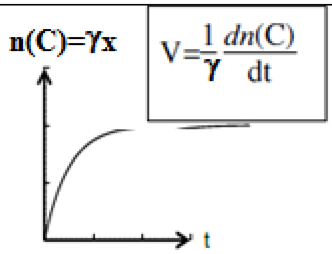
courbe d'avancement



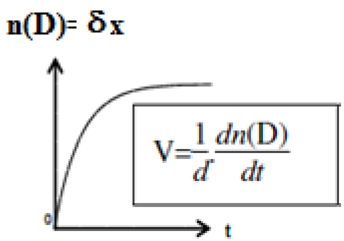
Courbe de disparition de A



Courbe de disparition de B



Courbe de formation de C



Courbe de formation de D

Vitesse de formation des produits :

Vitesse moyenne :

La vitesse moyenne de formation d'un produit P pendant l'intervalle $t_2 - t_1$ est :

$$V_f = \frac{n_2 - n_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta n}{\Delta t}$$

C'est le taux de variation de la quantité de matière à la variation correspondante du temps.

Vitesse instantanée :

La vitesse instantanée de formation d'un produit P à l'instant t est la limite, quand t_2 tend vers t_1 (ou quand $\Delta t = t_2 - t_1$ tend vers 0), du quotient définissant la vitesse moyenne entre t_1 et t_2:

$$V_{f(P)}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{n_2 - n_1}{\Delta t}$$

Cette limite n'est autre que la valeur à la date t de $\frac{dn}{dt}$, fonction dérivée de n(t) : $V_{d(P)}(t) = (\frac{dn}{dt})$

Définition : la vitesse de formation d'un produit P à l'instant de date t est égale au coefficient directeur (ou pente) de la tangente à la courbe au point d'abscisse t.

Vitesse de disparition des réactifs :

Vitesse moyenne :

Afin que la vitesse de disparition d'un réactif R soit une grandeur positive, on définit la vitesse moyenne de disparition comme l'opposée du taux de variation de la quantité de matière.

$$V_{d(R)} = -\frac{n_2 - n_1}{t_2 - t_1}$$

Vitesse instantanée :

De même, la vitesse instantanée de disparition d'un réactif R ¯ à l'instant t est égale à l'opposée de la valeur de la dérivée de n(t) à l'instant de date t.

$$V_{d(R)}(t) = -(\frac{dn}{dt})$$

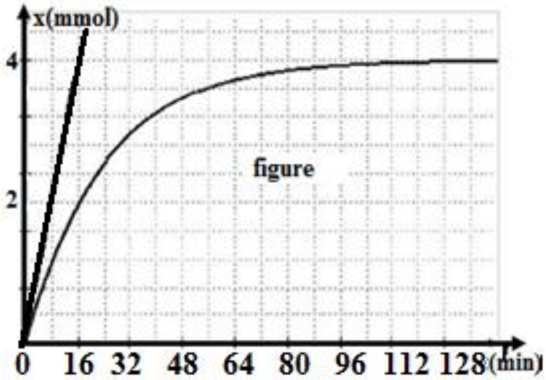
Les facteurs cinétiques

- **Les facteurs cinétiques sont les paramètres physiques ou chimiques qui ont une influence sur l'évolution d'une réaction. Il s'agit de la concentration, de la température et du catalyseur :**
- **Les vitesses de disparition des réactifs et de formation des produits d'une réaction augmentent quand les concentrations en réactif augmentent.**
- **Une élévation de température correspond à une augmentation de l'agitation de particules. La plus grande agitation permet d'augmenter le nombre de chocs entre les particules. La réaction se produit alors plus rapidement, sa vitesse augmente.**
- **Un catalyseur est un corps qui accélère une réaction chimique naturelle sans subir lui-même de modifications permanentes et qui n'apparait pas dans l'équation**

Exercice 1

L'oxydation des ions iodures I^- par l'eau oxygénée H2O2, en milieu acide, est une réaction chimique lente et totale. Cette réaction est symbolisée par l'équation suivante :

$$H_2O_2 + 2I^- + 2\,H_3O^+ \rightarrow I_2 + 4\,H_2O$$



Dans un bécher, on mélange à l'instant t=0, un volume V1=100mL d'une solution aqueuse (S1) d'eau oxygénée H2O2 de concentration C1, avec un volume V2=100mL d'une solution aqueuse (S2) d'iodure de potassium KI de concentration C2=0,1mol.L-1 et quelques gouttes d'une solution aqueuse d'acide sulfurique concentrée, dont on négligera le volume.

Par une méthode expérimentale convenable, on suit l'évolution de l'avancement x de la réaction en fonction du temps. On obtient la courbe x=f(t) de la figure.

1. **Compléter le tableau suivant décrivant l'évolution du système.**

Etat de système	Avancement x (mol)	*Quantité de matière(en mol)* H_2O_2	$+ 2I^-$	$+ 2\,H_3O^+$	$\rightarrow I_2$	$+4\,H_2O$
Etat (initial) t_0	0	C_1V_1		En excès		Solvant en excès
Etat intermediaire t						
Etat (final) t_f						

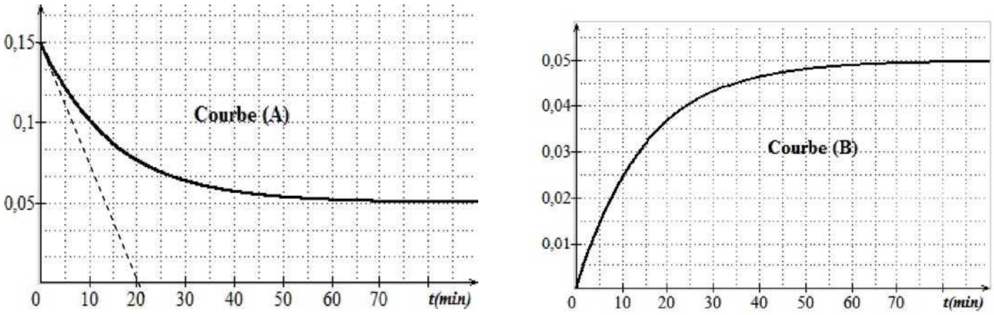
2.1. Déterminer graphiquement la valeur de l'avancement final x_f de la réaction.
2.2. Montrer que dans ce mélange, l'eau oxygénée constitue le réactif limitant.
2.3. Calculer la concentration C1.
3.1. Définir la vitesse instantanée de la réaction. Calculer sa valeur à la date t=0.
3.2. Indiquer comment évolue la vitesse de la réaction au cours du temps.
Quel facteur cinétique responsable à cette variation ?
4. Calculer la vitesse volumique moyenne de la réaction entre les dates t_0=0 et t_1=40min.
5. On refait l'expérience précédente mais, en utilisant une solution aqueuse d'eau oxygénée de concentration C'1 =0,05mol.L^{-1}. Préciser, en le justifiant :
5.1. Si l'avancement final x_f est modifié ou non. Dans l'affirmative, calculer sa nouvelle valeur.
5.2. Si la valeur de la vitesse de la réaction, à l'instant t=0, augmente ou diminue.

Exercice 2

On mélange à t=0s, un volume V_1=100mL d'une solution d'iodure de potassium (KI) de concertation molaire C_1, un volume V_2=100mL d'une solution d'eau oxygénée H_2O_2 de concentration C_2 et quelques gouttes d'une solution d'acide sulfurique concentrée afin d'avoir un excès d'ions H_3O^+ dans le mélange réactionnel. Il se produit la réaction totale d'équation :

$2I^- + H_2O_2 + 2H_3O^+ \rightarrow 4H_2O + I_2$

Les courbes A et B ci-dessous représentent les concentrations molaires de $[I_2]$ et $[I^-]$ en fonction du temps exprimés en $mol.L^{-1}$.



1. Associer, en le justifiant, chacune des courbes (A) et (B) à la grandeur qu'elle représente.
2. Dresser le tableau descriptif d'évolution du système en utilisant l'avancement molaire.
3. Préciser, en le justifiant, le réactif limitant de cette réaction.
4. Déterminer la valeur de l'avancement final x_f.
5. Déterminer les valeurs de C_1 et C_2.
6.1. Déterminer graphiquement, d'après la courbe (A), la valeur de la vitesse volumique maximale de la réaction.
6.2. En déduire la valeur de la vitesse maximale de la réaction.
6.3. Comment varie la vitesse de la réaction au cours de temps ? Interpréter cette variation.
7. En utilisant la courbe B, déterminer le temps de demi réaction $t_{1/2}$.

Exercice 3

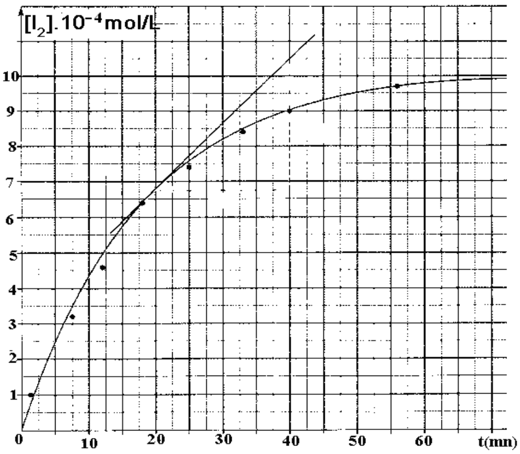
On admet que l'expression de l'avancement en fonction du temps soit connue de façon théorique pour une transformation particulière. On donne $x = \dfrac{\alpha.t}{1+\beta.t}$

1 Déterminer l'avancement final.
2 Déterminer le temps de demi-réaction.
3 Etablir l'expression de la vitesse de réaction puis en déduire la vitesse initiale V_0.
4 Réexprimer x en fonction de t avec $t_{1/2}$ et V_0.

Exercice 4

On mélange dans un Becher un volume $V_1=50mL$ d'une solution d'iodure de potassium (K^++I^-) de concentration molaire $C_1=5.10^{-3}mol/L$ et un volume $V_2=75mL$ de peroxodisulfate de potassium $(2K^++S_2O_8^{2-})$ de concentration molaire $C_2=2.10^{-3}mol/L$.

La solution dévient progressivement jaunâtre à cause de la formation du diiode I_2.



On donne les potentiels standards des couples redox intervenant dans la réaction

$E_{S_2O_8^{2-}/SO_4^{2-}}=2,1V$; $E_{I_2/I^-}=0,54V$

1 Ecrire les demi-équations électroniques et l'équation bilan de la réaction.

2Calculer les concentrations initiales des ions iodure $[I^-]_0$ et peroxodisulfate $[S_2O_8^{2-}]_0$.

En déduire le réactif limitant.

3 On étudie la vitesse de formation du diiode I_2 en fonction du temps ; pour cela on opère des prélèvements du milieu réactionnel à différents instants t qu'on refroidit immédiatement. L'ensemble des résultats donne la courbe de variation du diiode en fonction du temps.

3.1 Calculer la vitesse moyenne de formation du diiode entre les instants $t_1=10mn$ et $t_2=55mn$

3.2 Définir la vitesse instantanée de formation du diiode et la calculer à l'instant $t=20mn$ en déduire la vitesse de disparition de l'ion iodure à cet instant.

3.3Calculer le temps de la demi-réaction.

Exercice 5

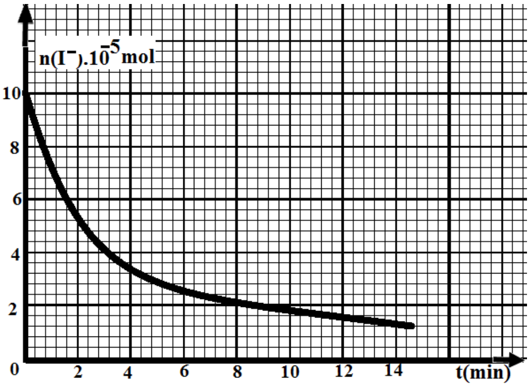
On mélange 100cm^{3}d'une solution S_1 de peroxodisulfate de potassium $K_2S_2O_8$ de concentration $C_1=10^{-2}mol/L$ et 100cm^3 d'une solution S_2 d'iodure de potassium KI de concentration molaire $C_2=2.10^{-2}mol/L$. Pour déterminer la quantité de diode I_2 formé à différents instants, on prélève des échantillons de volume $V_0=10cm^3$ que l'on dose avec une solution S_3 de thiosulfate de sodium de concentration $C_3=10^{-2}mol/L$.

1 Ecrire les demi équations relatives à l'oxydation de I^- et à la réduction de $S_2O_8^{2-}$ sachant que les couples redox mis en jeu sont I_2/I^- et $S_2O_8^{2-}/SO_4^{2-}$.

2 Calculer les concentrations initiales $[I^-]_0$ et $[S_2O_8^{2-}]_0$ dans le mélange initial.

3 Calculer les nombres de moles de I^- et de $S_2O_8^{2-}$ initialement présents dans l'échantillon de volume V_0.

4 La courbe ci-contre donne la représentation du nombre de mole de I^- restant en fonction du temps.



4.1 Définir puis déterminer la vitesse moyenne de disparition de I^- entre t=0s et t=8min.

4.2 Définir puis déterminer la vitesse instantanée de disparition de I^- à la date t=5min. Comment évolue cette vitesse au cours du temps ? Pourquoi ?

Exercice 6

On réalise la réaction d'oxydoréduction entre les couples redox suivants : I_2/I^- et $S_2O_8^{2-}/SO_4^{2-}$

On mélange dans un bêcher à t=0 0,5L d'une solution $0{,}4mol/L$ d'iodure de potassium KI avec 0,5L d'une solution $0{,}2mol/L$ de peroxodisulfate de potassium $K_2S_2O_8$; on obtient une solution S

1 Ecrire l'équation bilan de la réaction entre les couples redox.

On donne : $E_{S_2O_8^{2-}/SO_4^{2-}} = 2{,}1V$; $E_{I_2/I^-} = 0{,}54V$

2 Calculer les concentrations initiales des ions iodure I^- et peroxodisulfate $S_2O_8^{2-}$.

3 Le diode formé à différents instants est mis en solution et dosé par un volume V_1 d'une solution S' de thiosulfate de sodium $Na_2S_2O_3$ de concentration molaire $C_1 = 10^{-2} mol/L$.

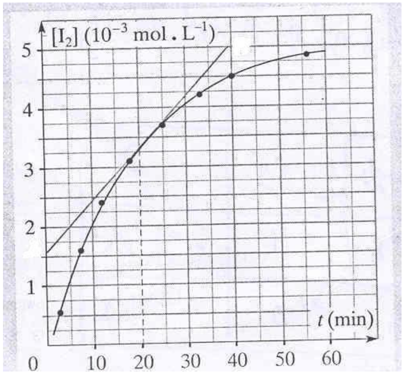
On opère des prélèvements de $V = 10cm^3$ de la solution S à différents instants. La réaction de formation du diiode dans le prélèvement est arrêtée par refroidissement dans l'eau glacée. L'équation de ce dosage est:

$I_2 + 2S_2O_3^{2-} \rightarrow 2I^- + S_4O_6^{2-}$

3.1 Montrer que la concentration du diiode formé à la date t est donnée par la relation $C = \frac{C_1V_1}{2V}$ puis compléter le tableau ci-après :

t(min)	2,7	7,5	12	18	25	33	40	56	2,7
$V_1(cm^3)$	1,1	3,2	4,8	6,2	7,4	8,4	9	9,7	1,1
$C=[I_2](mol/L)$									

3.2 La courbe représentative de $[I_2]=f(t)$ est donnée par la figure.



3.2.1 Donner la définition de la vitesse instantanée de formation du diiode et calculer sa valeur à t=20min.

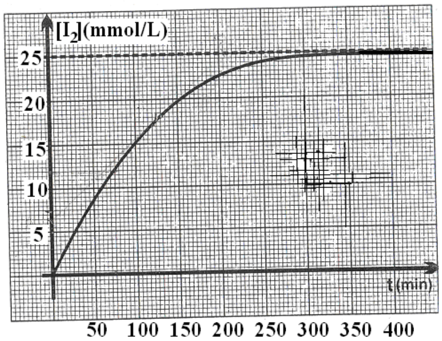
3.2.2 Définir la vitesse moyenne de formation du diiode et calculer sa valeur entre t_1=12min et t_2=40min.

Exercice 7

L'oxydation des ions iodure I^- par l'eau oxygénée H_2O_2 est une réaction lente. On donne les potentiels standards des couples redox: $E_{I_2/I^-} = 0,55V$ et $E_{H_2O_2/H_2O} = 1,77V$.

A l'instant t=0, on mélange 3mLd'acide sulfurique de concentration en ion H_3O^+ 2mol/L avec 9mLd'une solution d'iodure de potassium de concentration 10^{-1}mol/L et 3ml d'eau oxygénée de concentration $1,25.10^{-1}$mol/L.

A différents instants, on mesure les concentrations du diiode formé pour représenter la courbe $[I_2] = f(t)$.



1 Ecrire l'équation bilan de la réaction

2.1 Calculer à t=0, les concentrations initiales $[I^-]_0$ des ions iodure et $[H_2O_2]_0$ de l'eau oxygénée. Préciser le réactif limitant.

2.2 Définir la vitesse instantanée de formation du diiode. La calculer à l'instant t=200min.

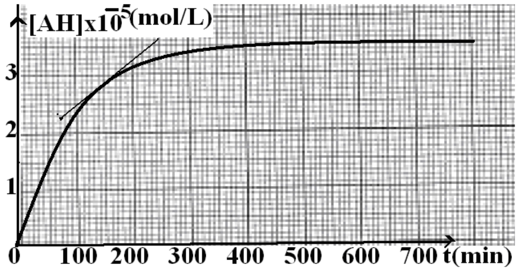
3 Déterminer la concentration du diiode après un temps infini. On la représentera par $[I_2]_\infty$.

Ce résultat est-il en accord avec la courbe ?

4 Déterminer le temps de demi-réaction $t_{1/2}$.

Exercice 8

L'acide acétylsalicylique couramment appelé l'aspirine est un antiseptique très utilisé.



Pour simplifier, l'acide acétylsalicylique de formule brute $C_9H_7O_4H$ sera désigné par AH.

Cet acide est obtenu par l'action du chlorure d'acétyle sur l'acide salicylique. On suit l'évolution de cette réaction totale permettant d'obtenir l'aspirine en fonction du temps et on obtient la courbe ci-contre :

1 Donner la définition de la vitesse instantanée de formation de l'aspirine et calculer sa valeur lorsque t=150min.

2 Définir le temps de la demi-réaction et déterminer sa valeur.

Exercice 9

L'éthanoate de butyle est un composé organique noté E.

1 Donner la formule semi-développée de ce composé organique. Quel est le nom de sa fonction chimique?

2 Le composé E est obtenu par une réaction entre un acide carboxylique A et un alcool B.
2.1 Ecrire les formules semi-développées des composés A et B. Les nommer.

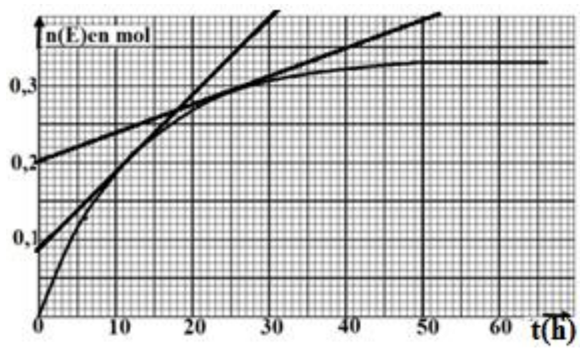
2.2 Ecrire l'équation qui permet d'obtenir le composé E, à partir de A et de B.

3 On introduit dans un ballon 0,5 mol de A, 0,5 mol de B et 2 mL d'acide sulfurique.

La température du chauffe-ballon est réglée à 65 °C.

3.1 Quel est le nom de la réaction chimique réalisée entre A et B? Quelles sont ses caractéristiques ?

3.2 On suit l'évolution temporelle de cette réaction, réalisée à volume constant, en déterminant, la quantité de matière n(E) formée. On obtient la courbe ci-contre:



3.2.1 Définir la vitesse V(t) de formation du composé E. La calculer aux instants t_1 =12 h et

t_2 = 25 h, on trouve $V(t_1) > V(t_2)$. Quel est le facteur cinétique responsable de la variation de V(t) au cours du temps ?

3.2.2 Calculer le rendement de la réaction entre A et B.

3.2.3 La valeur numérique du rendement varie-t-elle (justifier les réponses)
- En doublant les quantités de matière initiales des deux réactifs ?
- En augmentant la quantité d'acide sulfurique ?

4 Lors de la synthèse industrielle de l'éthanoate de butyle, on préfère utiliser un autre réactif organique A' réagissant avec B. Quel est le nom de ce réactif A'? Pourquoi le préfère-t-on?

Exercice 10

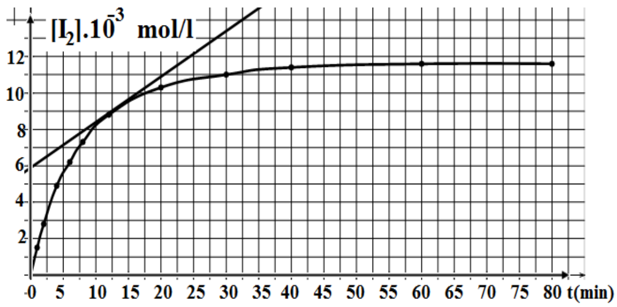
On oxyde à la date t=0 un volume V_1=100mL d'une solution S_1d'iodure de potassium ($K^+ + I^-$) de concentration $C_1=4{,}64.10^{-2}$mol/L par un volume V_2=100mL d'une solution S_2 d'eau oxygénée H_2O_2 de concentration

$C_2=4.10^{-2}$mol/L.

On ajoute à ce mélange un volume négligeable d'acide sulfurique très concentré.

1. Donner les couples redox mis en jeux et écrire l'équation de la réaction.

2. Calculer à la date t=0 la concentration de I^- et celle de H_2O_2 dans le mélange. Lequel des deux réactifs est en excès.



3. On détermine à différents instants la concentration du diiode formé, on obtient la courbe ci-contre.

3.1. Calculer la vitesse moyenne de formation du diiode entre les instants t_1=5min et t_2=20min.

3.2. Définir la vitesse instantanée de formation de I_2 et la calculer à la date t=12,5min. En déduire la vitesse de disparition de I^- à cette date. Comment évoluent ces vitesses en fonction du temps ? Quel est le facteur cinétique responsable ?

3.3. Calculer la concentration des ions I^- et de H_2O_2 présents dans le mélange réactionnel à t=30min.

4. Déterminer le temps de la demi-réaction.

Exercice 11

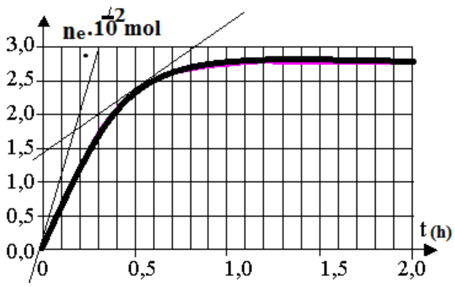
On étudie la cinétique de la réaction d'estérification en préparant deux mélanges M_1 et M_2 contenant chacun une mole d'acide méthanoïque et une mole de propan-1-ol.
Dans le mélange M_2 on ajoute une faible quantité d'acide sulfurique concentré pour catalyser la réaction. Les mélanges M_1 et M_2 sont en suite portés à 60°C.
Le tableau suivant indique, en fonction du temps, la quantité d'acide restante n_a que l'on a déterminée expérimentalement :

	t(min)	5	10	20	30	40	50	60
Mélange M_1en l'absence de H_2SO_4	n_a	0,84	0,74	0,64	0,58	0,54	0,52	0,50
Mélanges M_2en présence de H_2SO_4	n_a	0,53	0,37	0,35	0,34	0,34	0,34	0,34

1. Ecrire l'équation de cette réaction d'estérification et préciser ses caractéristiques.
2. Calculer la quantité d'ester formée n_e, dans chaque mélange et pour chaque valeur de t donné.
3. Définir la vitesse moyenne de disparition de l'acide méthanoïque et la calculer entre les dates t_1 = 5min et t_2 = 10 min; pour chaque mélange. Comparer ces deux vitesses.
4. Donner la définition du catalyseur et en déduire son influence sur la vitesse.

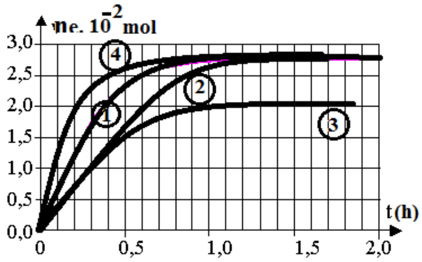
Exercice 12

Pour étudier la cinétique d'une estérification, on réalise un mélange équimolaire d'acide éthanoïque et d'éthanol que l'on répartit en suite en fractions égales dans des tubes scellés. On les place dans une étuve maintenue à température constante de 60°C, et à différents instants successifs on retire l'un des tubes de l'étuve, on le ramène à la température ambiante et on dose l'acide qu'il contient par une solution d'hydroxyde de sodium de concentration connue.



1. Pourquoi dose-t-on l'acide à température ambiante et non à la température de 60°C ? Préciser le facteur cinétique qui entre en jeu.

2. Les différents dosages successifs permettent de tracer le graphe1 ci-contre:



Définir et évaluer la vitesse instantanée de formation de l'ester à t_1 =0h et à

t_2 =0,5h. Ces résultats sont ils en accord avec l'un des facteurs de la cinétique ? Préciser lequel. Expliquer l'influence de ce facteur

3. Si au mélange initial acide –alcool on avait ajouté des ions H_3O^+ l'allure de la courbe aurait été modifiée

Sur le graphe 2, la courbe précédemment étudiée apparaît (courbe1), l'une des 3 autres courbes représente l'évolution de la réaction en présence des ions H_3O^+.

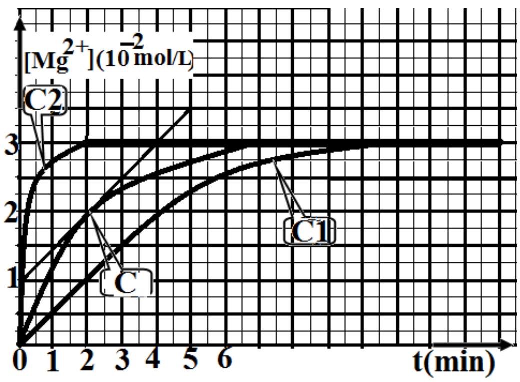
Indiquer le numéro qui vous donne la bonne courbe Justifier la réponse. Bac français

Exercice 13

Lors de l'introduction de 0,02mol de magnésium dans 0,5L d'acide chlorhydrique à θ_1= 30°C, il se produit la réaction :

$Mg + 2H_3O^+ \rightarrow Mg^{2+} + H_2 + 2H_2O$

1Des mesures ont permis de tracer la courbe C de la figure ci-contre, qui représente la variation de la concentration des ions Mg^{2+} formés.



1.1 Définir la vitesse moyenne de formation des ions Mg^{2+} ; la calculer entre les instants t_1=0,5min et t_2=4min.

1.2 Définir la vitesse instantanée de formation des ions Mg^{2+} ; la calculer à la date t=2min et en déduire la vitesse de disparition des ions hydronium.

1.3 A partir de la courbe déterminer la concentration finale des ions Mg^{2+} et montrer que le magnésium est le réactif en excès.

1.4 En déduire la concentration initiale de l'acide chlorhydrique.

1.5 Déterminer à la date t=4min les concentrations restantes de magnésium $[Mg]_r$ et d'ions hydronium$[H_3O^+]_r$.

2 On recommence l'expérience dans deux autres conditions expérimentales :

- **En diminuant la température qui dévient θ_2=20°C**
- **En utilisant un catalyseur approprié à la température θ_3= θ_1=30°C .**

On trouve les courbes C_1 et C_2 ; attribuer à chaque expérience la courbe correspondante.

Exercice 14

On donne les potentiels standards des deux couples redox suivants :

H_2O_2/ H_2O : 1,77 V et O_2/ H_2O_2 : 0,68 V

1 Ecrire le bilan de la réaction naturelle entre les deux couples.

2 On réalise en présence d'ions Fe^+ une telle décomposition. L'expérience est réalisée à température constante. On considère que le volume V de la solution aqueuse de peroxyde d'hydrogène reste constant et que le volume molaire d'un gaz est V_m = 24L/mol. On utilise V = 10 mL de solution de peroxyde d'hydrogène de concentration molaire volumique C = 6. 10^{-2} mol/L. On ajoute quelques gouttes du catalyseur et on note à divers instants le volume V_{O2} du gaz dioxygène dégagé. Les résultats sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

t en min	0	5	10	15	20	30
V_{02} formé en mL	0	1,56	2,74	3,65	4,42	5,56
$[H_2O_2]$ restant en mol/L	6. 10^{-2}					

2-1 Montrer que la concentration volumique du peroxyde d'hydrogène restant en solution est de la forme : $[H_2O_2]$ restant = C-α/V.Vm. Préciser la valeur de α.

2-2 Tracer la courbe $[H_2O_2]$ restant = f(t) sur la feuille 4/4 en annexe. Echelle sur l'axe des abscisses 1 cm représente 5 min, et 1 cm représente 1.10^{-2} mol/L sur l'axe des ordonnés

2-3 Donner la définition de la vitesse instantanée de disparition du peroxyde d'hydrogène et la calculer en (mol./L/.mn) aux dates t_0 = 0 et t_{15} = 15 mn.

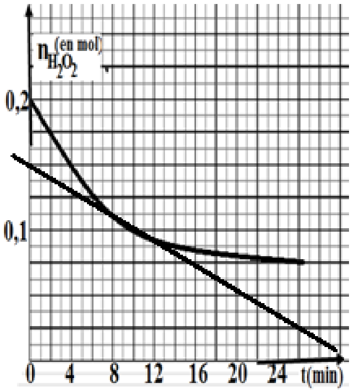
Conclure.

2-4 Déterminer le temps de demi-réaction.

Exercice 15

1. L'eau oxygénée H_2O_2 peut oxyder lentement les ions iodure I^- en milieu acide. Les couples redox mis en jeux sont :

H_2O_2 / H_2O et I_2 / I^-



1.1.Ecrire les deux demi-équations relatives à l'oxydation de I^- et à la réduction de H_2O_2. Ecrire l'équation bilan de la réaction.

1.2. La quantité du diiode formé à un instant t peut être déterminée à l'aide d'un dosage ; en effet I_2 peut être réduit par l'ion thiosulfate $S_2O_3^{2-}$ pour régénérer de nouveau I^-. Les couples redox mis en jeux sont $S_4O_6^{2-} / S_2O_3^{2-}$ et I_2 / I^-. Etablir l'équation bilan de la réaction en passant par les demi-équations relatives à l'oxydation et à la réduction.

2. On prépare un mélange réactionnel comprenant de l'acide sulfurique, de l'iodure de potassium en excès et n_0=0,2mol d'eau oxygénée. A l'aide du dosage de la quantité de diiode formée à différents instants t par une solution de thiosulfate de potassium $K_2S_2O_3$ de concentration C=2,5mol/L, il a été possible de tracer la courbe représentant les variations du nombre de mole de H_2O_2 restant en fonction du temps (voir figure). Déduire de la courbe :

2.1. La vitesse moyenne de disparition de H_2O_2 entre les instants t_1=0min et t_2=10min

2.2. La vitesse instantanée de disparition de H_2O_2 à l'instant t_2; en déduire la vitesse instantanée de disparition de l'ion I^- à cet instant.

2.3. Le volume de la solution de thiosulfate de potassium nécessaire pour doser la quantité de diiode formé à l'instant t=24min.

2.4. Déterminer le temps de demi-réaction.

Exercice 16

On se propose d'étudier la cinétique de la réaction des ions iodure (I^-) avec les ions fer III (Fe^{3+}), modélisée par : $2I^- + 2Fe^{3+} \rightarrow I_2 + 2Fe^{2+}$

Pour cela, on introduit dans un bêcher, un volume V_1=50mL d'une solution aqueuse d'iodure de potassium de concentration molaire C_1=0,10 mol.L^{-1} et

un volume V_2=50 mL d'une solution aqueuse de sulfate de fer (III) de concentration molaire $C_2 = 0,02\ mol.L^{-1}$.

1. Déterminer les quantités de matière des réactifs initialement introduits dans le mélange et déduire le réactif limitant.

2. Le mélange obtenu, après homogénéisation, est équitablement réparti sur dix tubes à essais.

A un instant t donné, on plonge le tube dans de l'eau glacée et on dose son contenu par une solution aqueuse de thiosulfate de sodium $Na_2S_2O_3$ de concentration molaire $C=5.10^{-3}$ mol/L. A l'équivalence, il y a décoloration complète de la solution.

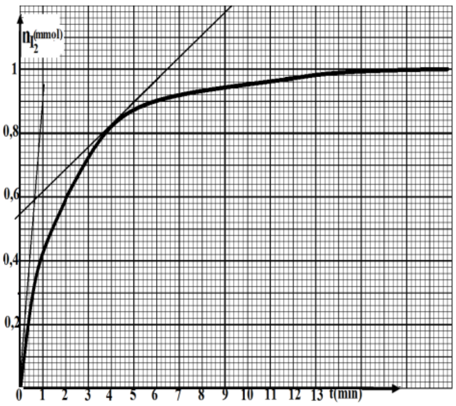
L'équation de la réaction qui se produit est $I_2 + 2S_2O_3^{2-} \rightarrow 2I^- + S_4O_6^{2-}$

2.1. Préciser l'intérêt de l'utilisation de l'eau glacée.

2.2. Interpréter la décoloration du mélange.

2.3. Déterminer la quantité de matière $n(I_2)$ formée, sachant que le volume de la solution de thiosulfate ajouté est de 12 mL.

2.4. En déduire la composition du mélange contenu dans chaque tube à essais à cet instant.



3. La courbe de la figure donne la variation de la quantité de matière de I_2 au cours du temps.

3.1. Justifier, par exploitation de la courbe, s'il s agit d'une réaction totale ou limitée.

3.2. Déterminer la vitesse de la réaction aux instants t_1 =0 et t_2=4min.

3.3. Interpréter la variation de la vitesse de la réaction au cours du temps.

Exercice 17

1. On étudie la cinétique chimique de la réaction supposée totale et dont l'équation bilan est

$$2I^- + H_2O_2 + 2H_3O^+ \rightarrow 4H_2O + I_2$$

A l'instant t=0, on mélange à 25° C, dans un bêcher:

- V_1=100 mL d'une solution aqueuse d'eau oxygénée H_2O_2 de concentration

C_1 =4,5.10^{-2} mol.L^{-1}.

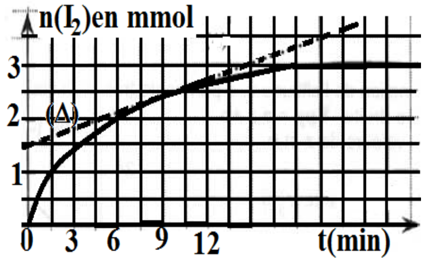
- V_2=100 mL d'une solution aqueuse d'iodure de potassium Kl de concentration C_2 = 6. 10^{-2} mol.L^{-1}.

- Un excès d'une solution aqueuse molaire d'acide sulfurique $(2H_3O^+ + SO_4^{2-})$.

1.1. Vérifier que les quantités de matière initiales $n_o(H_2O_2)$ de l'eau oxygénée H_2O_2 et $n_0(I^-)$ des ions iodure I^- dans le mélange, à l'instant t = 0, sont respectivement 4,5.10^{-3} mol et 6.10^{-3} mol.

1.2. Montrer que, dans ce mélange, l'ion iodure constitue le réactif limitant (en défaut).

1.3. Déduire la quantité de matière maximale de diiode n(I_2) formé à la fin de la réaction.



2. Pour doser le diiode formé, on prélève, à différents instants de date t, un volume V du mélange réactionnel que l'on verse dans un erlenmeyer et que l'on place immédiatement dans un bain d'eau glacée. Puis, on dose rapidement le diiode formé par une solution de thiosulfate de sodium de concentration connue. Par suite, on trace la courbe où la droite (Δ) en pointillé représente la tangente à la courbe au point d'abscisse t=9min.

2.1. Définir la vitesse instantanée de formation du diiode I_2.

Calculer sa valeur à l'instant t = 9 min.

2.2. Cette vitesse va-t-elle diminuer ou augmenter à un instant t' tel que t' > t? Justifier la réponse à partir de l'allure de la courbe.

3. Indiquer deux facteurs cinétiques pouvant augmenter la vitesse initiale de formation de diiode I_2.

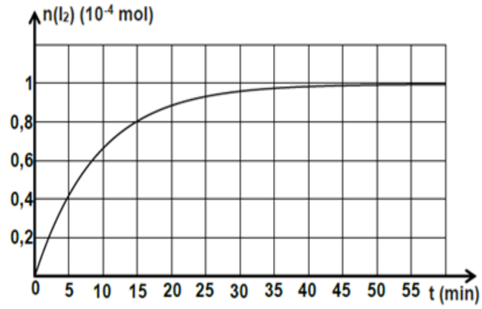
Exercice 18

On se propose d'étudier la cinétique d'oxydation des ions iodure I^- par les ions peroxodisulfate $S_2O_8^{2-}$ modélisée par l'équation suivante :

$S_2O_8^{2-} + 2\ I^- \rightarrow I_2 + 2\ SO_4^{2-}$

Dans un bécher, on mélange à l'instant t = 0, un volume V_1 = 20 mL d'une solution aqueuse (S_1) d'iodure de potassium KI de concentration molaire C_1 = 0,01 mol.L^{-1}, avec un volume V_2 = 20 mL d'une solution aqueuse (S_2) de peroxodisulfate de potassium $K_2S_2O_8$ de concentration molaire C_2 = 0,02 mol.L^{-1}.

1. Déterminer les quantités initiales des ions I^- et $S_2O_8^{2-}$ dans le mélange, notées respectivement n_{01} et n_{02}.



2.1. Dresser le tableau d'avancement du système chimique contenu dans le bécher.
2.2. Préciser, en le justifiant, le réactif limitant.
2.3. En déduire la valeur de l'avancement maximal xm de la réaction.
3. Les résultats expérimentaux ont permis de tracer la courbe d'évolution de la quantité de diiode I_2 en fonction du temps.
On obtient la courbe $n(I_2) = f(t)$ de la figure.
3.1. Déterminer la valeur de l'avancement final x_f de la réaction.
3.2. Calculer le taux d'avancement final de la réaction τ_f. En déduire que la réaction est totale.
4. Pour déterminer la quantité de matière de diiode formée, notée $n_1(I_2)$, on dose à l' instant de date t_1, un volume V_p = 4 mL de mélange par une solution (S) de thiosulfate de sodium $Na_2S_2O_3$ de concentration molaire $C_0=10^{-2}$ mol.L^{-1}.
L'équation chimique qui symbolise la réaction de dosage est :
$I_2 + 2\ S_2O_3^{2-} \rightarrow 2\ I^- + S_4O_6^{2-}$
A l'équivalence le volume de thiosulfate versé est V_0 = 1,6 mL.
4.1. Etablir l'expression de la quantité de matière de diiode formée suivante : $n(I_2) = 0,5\ C_0V_0$
4.2. Déterminer la quantité de diiode formée $n_1(I_2)$ à l'instant t_1
4.3. En déduire la valeur de l'instant t_1.

Exercice 19

On réalise la réaction de l'oxydation des ions iodures I^- par les ions peroxodisulfate $S_2O_8^{2-}$.
Pour cela on mélange à l'instant t=0, un volume V_1=500mL d'une solution de peroxodisulfate de potassium $(2K^+ + S_2O_8^{2-})$ de concentration molaire $C_1 = 0,02$mol/L et un volume V_2=500mL d'iodure de potassium $(K^+ + I^-)$ de concentration molaire $C_2 = 0,03$mol/L .
On suit l'évolution de la formation du diiode au cours du temps. La concentration instantanée du diiode peut être modélisée par l'expression mathématique :

$[I_2] = a - \dfrac{a}{1+a.b.t}$ où (a) et (b) sont des constantes et (t) le temps mesuré en minute.

1. Préciser les couples redox mis en jeu et écrire l'équation-bilan de la réaction qui se produit.
2. Calculer la concentration des ions potassium $[K^+]$ dans la solution.
3. Calculer les concentrations initiales des ions iodure I^- et peroxodisulfate $S_2O_8^{2-}$. En déduire le réactif limitant.
4. Sachant que la réaction est totale, calculer la valeur de la constante (a)et préciser son unité et esquisser l'allure de $[I_2]$ en fonction du temps.
5. Etablir l'expression de la vitesse instantanée en fonction de (a), (b) et t. En déduire l'expression de la vitesse à la date t=0 en fonction de (a) et (b).
6. Montrer que la vitesse est décroissante et préciser le facteur cinétique responsable de cette décroissance.
7. Sachant que la vitesse maximale de formation du diiode est égale 10^{-2} mol/L/min. Calculer (b) et préciser son unité.

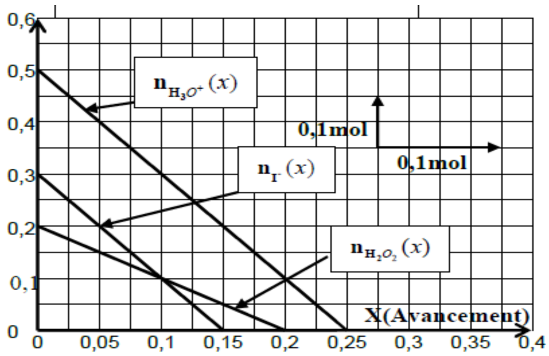
Exercice20

On réalise l'oxydation des ions iodures I- par l'eau oxygénée en milieu acide selon la réaction totale:

$a\ H_2O_2 + b\ I^- + c\ H_3O^+ \rightarrow d\ I_2 + e\ H_2O$

Le graphe ci-contre représente l'évolution, en fonction de l'avancement x de la réaction, des quantités de matière des réactifs.

1. Compléter le tableau d'avancement de la réaction.



Etat de la réaction	Avancement	Quantités de matière $a\ H_2O_2 + b\ I^- + cH_3O^+ \rightarrow dI_2 + e\ H_2O$				
initial		n_{01}	n_{02}	n_{03}	0	excès
intermediaire						
final						

2. Déterminer, en se basant sur le graphe :

2.1. Les quantités de matière initiales des réactifs, l'avancement maximal x_{max}.

2.2. Les coefficients stœchiométriques a, b, c, d et e.

3. Déterminer la composition finale du système réactionnel.

4. On refait cette expérience à une température plus élevée mais avec la même composition de départ. Y'aure-t-il changement pour les diagrammes donnés ci-haut ? Justifier.

Exercice 21

On mélange 100cm^{3}d'une solution S_1 de peroxodisulfate de potassium $K_2S_2O_8$ de concentration $C_1=10^{-2}$mol/L et 100cm^3 d'une solution S_2 d'iodure de potassium KI de concentration molaire $C_2=2.10^{-2}$mol/L. Pour déterminer la quantité de diode I_2 formé à différents instants, on prélève des échantillons de volume $V_0=10$cm^3 que l'on dose avec une solution S_3 de thiosulfate de sodium de concentration $C_3=10^{-2}$mol/L .

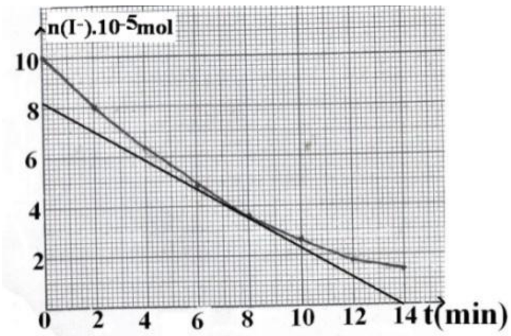
1. Ecrire les demi équations relatives à l'oxydation de I^- et à la réduction de $S_2O_8^{2-}$ sachant que les couples redox mis en jeu sont I_2/I^- et $S_2O_8^{2-}/SO_4^{2-}$.

2. Calculer les concentrations initiales $[I^-]_0$ et $[S_2O_8^{2-}]_0$ dans le mélange initial.

3. Calculer les nombres de moles de I^- et de $S_2O_8^{2-}$ initialement présents dans l'échantillon de volume V_0.

4. Sachant que l'équation bilan de dosage est $I_2 + 2S_2O_3^{2-} \rightarrow 2I^- + S_4O_6^{2-}$.

Montrer qu'à un instant t le nombre de mole de I^- restant vérifie la relation : $n(I^-)_t = 10^{-4} - 10^{-2}V$ où V est le volume de thiosulfate de sodium versé pour atteindre l'équivalence.



5. La courbe ci-contre donne la représentation du nombre de mole de I^- restant en fonction du temps.

5.1. Définir puis déterminer la vitesse moyenne de disparition de I^- entre t=0s et t=10min.

5.2. Définir puis déterminer la vitesse instantanée de disparition de I^- à la date t=8min.

Exercice 22

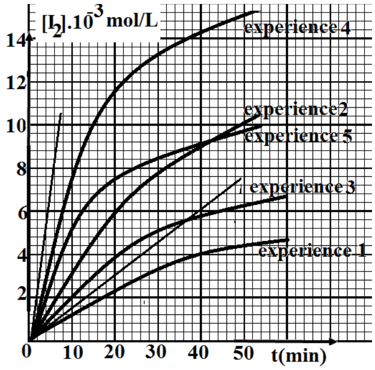
On étudie la cinétique de l'oxydation des ions iodures I^- par les ions peroxodisulfate $S_2O_8^{2-}$ d'équation:

$2I^- + S_2O_8^{2-} \rightarrow I_2 + 2SO_4^{2-}$.

Pour cela, on réalise 5 expériences, les conditions expérimentales étant décrites dans le tableau suivant :

	$[I^-]_0$ (mol/L)	$[S_2O_8^{2-}]_0$(mol/)	Tem (°C)	Catalyseur
Exp 1	2.10^{-2}	1.10^{-2}	20	aucun
Exp 2	$4\ .10^{-2}$	2.10^{-2}	20	aucun
Exp 3	2.10^{-2}	1.10^{-2}	35	aucun
Exp 4	4.10^{-2}	$2\ .10^{-2}$	35	aucun
Exp 5	2.10^{-2}	1.10^{-2}	20	Fe^{3+}

On note $[I^-]_0$ et $[S_2O_8^{2-}]_0$ les concentrations initiales . On réalise les mélanges à la date t = 0. On étudie les variations de la concentration en diiode $[I_2]$ au cours du temps, les résultats sont rassemblés sur le graphique ci-contre :



1. Définir la vitesse de formation du diiode et déterminer sa vitesse initiale en mol/L.min pour les expériences 1 et 4.

2. En comparant respectivement les courbes 1 et 2puis 3 et 4, quel facteur cinétique met-on en évidence et quel est son effet ?

3. En comparant respectivement les courbes 1 et 3 puis 2 et 4, quel facteur cinétique met-on en évidence et quel est son effet ?

4. Dans l'expérience 5, on a affaire à une réaction catalysée . Justifier cette affirmation en comparant les résultats de l'expérience 5 avec ceux de l'une des quatre autres expériences. Bac français

Exercice 23

On considère les couples redox : I_2/I^- , $S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}$ et $S_2O_8^{2-}/SO_4^{2-}$

On réalise la réaction de l'oxydation des ions iodures I^- par les ions peroxodisulfate $S_2O_8^{2-}$.

1.1. Ecrire l'équation de la réaction et préciser les couples redox mis en jeu.

1.2. Pour suivre l'évolution de la réaction, on dose le diiode formé à différentes dates avec une solution de thiosulfate de sodium $Na_2S_2O_3$.

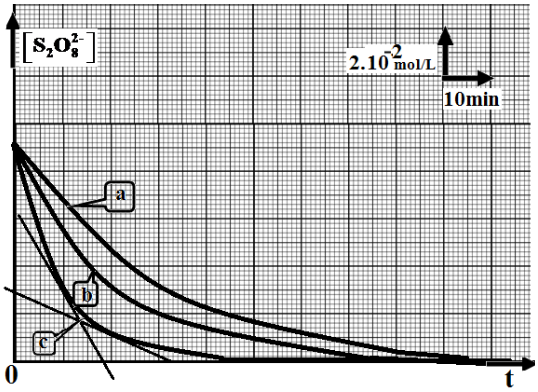
Ecrire l'équation de la réaction qui se produit au cours du dosage.

2. On réalise cette réaction dans différentes conditions expérimentales consignées dans le tableau suivant :

Première expérience	deuxième expérience	troisième expérience
$\left[S_2O_8^{2-}\right]_0 = 9.10^{-2}$mol/L	$\left[S_2O_8^{2-}\right]_0 = 9.10^{-2}$mol/L	$\left[S_2O_8^{2-}\right]_0 = 9.10^{-2}$mol/L
$\left[I^-\right]_0 = 0,4$mol/L	$\left[I^-\right]_0 = 0,4$mol/L	$\left[I^-\right]_0 = 0,4$mol/L
θ=20°C	θ=30°C en présence d'ions Fe^{2+}	θ=30°C

Les courbes $\left[S_2O_8^{2-}\right] = f(t)$ relatives à ces expériences sont données par la fig.

2.1. **Attribuer à chaque expérience la courbe correspondante. Justifier la réponse.**



2.2. Définir la vitesse de disparition de $S_2O_8^{2-}$ et calculer sa valeur aux instants t_1=10min et t_2=20min pour l'expérience relative à la courbe (c).

2.3. Comparer les deux valeurs trouvées et justifier la différence.

2.4. Calculer la molarité du diiode et celle des ions iodure à la fin de chaque expérience sachant que la réaction est totale.

2.5. Calculer la vitesse moyenne de disparition de $\left[S_2O_8^{2-}\right]$ entre les instants t_1=10min et t_2=30min pour l'expérience relative à la courbe (b).

2.6. Déterminer graphiquement l'instant t pour lequel la vitesse instantanée est égale à la vitesse moyenne entre les instants t_1=10min et t_2=30min pour l'expérience relative à la courbe (b).

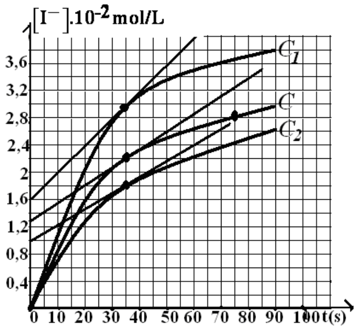
3. Déterminer le temps de demi-réaction pour l'expérience (a).

Exercice 24

1. A la date t=0, on mélange 3.10^{-3} mol de diiode I_2 et 40cm^3 d'une solution de thiosulfate de sodium $(2Na^+,S_2O_3^{2-})$ de concentration 0,1mol/L.

On donne : $E_{S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}} = 0,08V$ et $E_{I_2/I^-} = 0,54V$

1.1. Ecrire les demi équations et l'équation bilan de la réaction qui se produit. Déterminer le réactif limitant.



1.2. Le volume total de la solution étant V_S=100cm^3, quelle est la concentration initiale des réactifs ?

1.3. Quelle est la concentration des ions iodure I^- en fin de réaction ?

1.4. La courbe *C* représente l'évolution de la variation de la concentration des ions iodure formés en fonction du temps. Calculer la concentration des réactifs I_2 et $S_2O_3^{2-}$ à l'instant t=75s.

1.5. Déterminer le temps de la demi-réaction pour cette expérience.

2. Dans le but de mettre en évidence l'effet de certains facteurs cinétiques sur la vitesse de formation, on réalise en plus de l'expérience précédente deux autres expériences en y apportant chaque fois une seule modification. Les conditions initiales de ces expériences sont consignées dans le tableau suivant:

Expérience	a	b	c
Concentration initiale de $S_2O_3^{2-}$	4.10^{-2}mol/L	2.10^{-2}mol/L	4.10^{-2}mol/L
Température	T_1	T_1	$T_2>T_1$

On a représenté sur la même figure avec *C* les courbes C_1 et C_2 traduisant les résultats de ces expériences.

2.1. Déterminer la vitesse de formation de I^- à la date t=35s pour les trois expériences.

2.2. Préciser la courbe correspondante à chaque expérience. Justifier la réponse.

Exercice 25

L'étiquette d'une boîte de médicament utilisé pour traiter l'anémie par carence de fer, indique qu'un comprimé contient 160 mg d'élément fer sous forme d'ions fer (II). Pour vérifier cette indication, on dissout un comprimé de ce médicament dans de l'eau et on y ajoute, en excès, une solution de permanganate de potassium et un peu d'acide sulfurique concentré. On obtient ainsi une solution S de volume V=200 mL. Avec cette solution on remplit une série de tubes qu'on scelle et qu'on maintient à une température constante égale à 37°C.

Dans chaque tube il se produit une réaction d'équation-bilan:

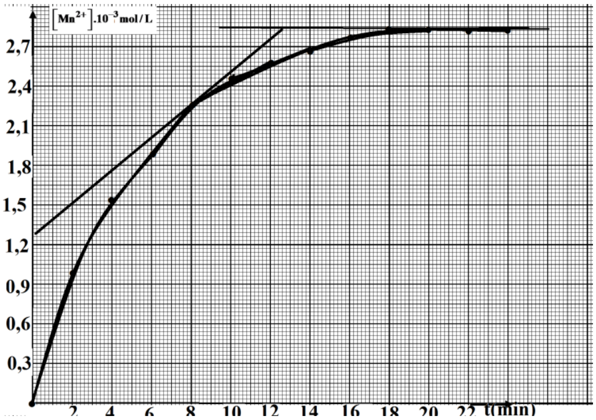
$$MnO_4^- + 5Fe^{2+} + 8H_3O^+ \rightarrow Mn^{2+} + 5Fe^{3+} + 12H_2O$$

A des dates données, on dose les ions manganèse formés dans ces tubes. On obtient alors le tableau suivant :

t(min)	0	2	4	6	8	10
[Mn2+]10^{-3} mol.L-1	0	0,99	1,53	1,98	2,25	2,46
t(min)	12	14	16	18	20	22
[Mn2+]10^{-3} mol.L-1	2,61	2,67	2,76	2,84	2,84	2,84

1. Préciser le rôle de l'acide sulfurique concentré ajouté au contenu de chaque tube.

2. La courbe représentant les variations de la concentration des ions manganèse au cours du temps est représentée ci-contre.



Déterminer, graphiquement, les valeurs de la vitesse instantanée de formation des ions manganèse aux dates t_1 = 8 min et t_2 = 19 min.

3. En déduire les vitesses de disparition des ions fer (II) aux dates t_1 = 8 min et t_2 = 19 min.

4. Calculer la concentration initiale des ions fer (II) dans la solution S. En déduire la masse de fer dans un comprimé du médicament considéré.

A votre avis l'indication de l'étiquette de la boîte du médicament est-elle correcte ?

On donne : masse molaire atomique : M(Fe) = 56 g/mol

5. Montrer qu'à tout instant $\left[Fe^{2+}\right]_r = \left[Fe^{2+}\right]_0 - 5\left[Mn^{2+}\right]$ puis calculer la concentration restante des ions fer(II) à la date t=10min.

6. Déterminer le temps de la demi-réaction.

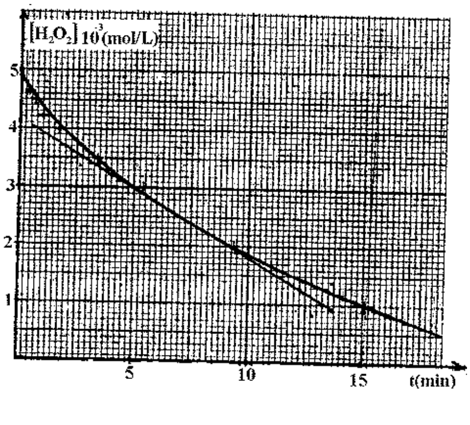
Exercice26

On réalise l'oxydation des ions iodure I^- en diiode I_2 par le peroxyde d'hydrogène ou eau oxygène H_2O_2 en milieu acide.

1. A l'instant t=0, on mélange un volume V_1=2cm^3 d'une solution d'iodure de potassium de concentration molaire volumique C_1=2.10^{-1}mol/L, un volume V_2=10cm^3 d'une solution d'eau oxygénée de concentration C_2=10^{-2}mol/L et un volume V_3=8cm^3 d'acide sulfurique de concentration en ion H_3O^+ C_3=8.10^{-1}mol/L.

1.1. Ecrire les demi équations électroniques des couples redox et en déduire l'équation bilan. On donne : $E^0_{I_2/I^-}$=0,55V et $E^0_{H_2O_2/H_2O}$=1,77V.

1.2. Calculer à l'instant t=0 les concentrations initiales $\left[I^-\right]_0$ $\left[H_2O_2\right]_0$ et $\left[H_3O^+\right]_0$.Préciser alors le réactif limitant.



2. Le diiode formé donne une couleur brune ce qui permet de mesurer la concentration de I_2 formée à différents instants.

2.1.Montrer que la relation liant la concentration restante de l'eau oxygénée $[H_2O_2]$ et $[I_2]$ à tout instant peut s'écrire sous la forme :

$[H_2O_2] = [H_2O_2]_0 - [I_2]$

2.2. On donne la courbe $[H_2O_2] = f(t)$ représentant l'évolution de la concentration de l'eau oxygénée en fonction du temps (voir fig).

2.2.1. Définir la vitesse de disparition de H_2O_2 et la calculer à l'instant. En déduire la vitesse de formation de I_2 à cet instant.

2.2.2 Calculer la vitesse moyenne de disparition de H_2O_2 entre les instants $t_1 = 2,5 min$ et $t_2 = 12,5 min$

2.2.3 Déterminer le temps de demi-réaction.

Exercice27

Lors de la réaction de l'acide méthanoïque sur le propan-1-ol, on étudie la vitesse de formation de l'ester : v = d[ester]/dt. Le propan-1-ol est en grand excès ; la température est constante. A chaque instant t, on note [acide] ;

à t = 0 ; $[acide]_0$ = 0,100mol/L=(100mmol/L)

Le dosage de l'acide méthanoïque restant, en fonction du temps, donne les résultats suivants :

1- Ecrire l'équation bilan de la réaction et nommer l'ester formé.

2- Compléter la 3éme ligne du tableau.

Date(s)	0	100	200	300	400	500	600	1000
[acide](mmol/L)	100	79,5	63	50	40	31,5	25	10
[ester](mmol/L)								

3- Représenter graphiquement [ester] = f(t) sur le quadrillage de la feuille annexe (1cm représentera 10 mmol /L et 1c représentera 100s).

3- A partir de la représentation graphique, déterminer en mol/L /s, V_{100} à t = 100s et V_{500} à t = 500s

Corrigé de l'exercice1

1. Le tableau complété

Etat de système	Avancement x (mol)	*Quantité de matière(en mol)* H_2O_2	+ $2I^-$	+ $2\,H_3O^+$	$\rightarrow$ I_2	+ $4\,H_2O$
Etat (initial) t_0	**0**	C_1V_1	$C_2V_2=10^{-2}$	**En excès**	**0**	**Solvant en excès**
Etat intermediaire t	**x**	C_1V_1-x	$10^{-2}-2x$		**x**	
Etat (final) t_f	x_f	$C_1V_1-x_f$	$10^{-2}-2x_f$		x_f	

2.1. Graphiquement $x_f=4.10^{-2}$ mol
2.2. H_2O_2 est le réactif limitant c.à.d. I^- est le réactif en excès ; il suffit de montrer que $n(I^-)$final$\neq0$.

$n(I^-)$final= 10^{-2} $-2.x_f=10^{-2}-2*4.10^{-3}=0,2.10^{-2}$ mol$\neq0$; donc I^- est le réactif en excès et H_2O_2 est le réactif limitant.

2.3. H_2O_2 est le réactif limitant, donc $C_1V_1-x_f=0$ $C_1=\frac{x_f}{V_1}=4.10^{-2}mol/L$

3.1. La vitesse instantanée d'une réaction chimique à un instant t est la dérivée de la quantité de matière (l'avancement) par rapport au temps : $V=\frac{dx}{dt}$
Elle correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse t considéré.
Soit en utilisant les points O (0 ; 0) et B (16; 4.10^{-3})

$$v(t=0)=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=2,5.10^{-4}mol/min$$

3.2. La vitesse de la réaction diminue au cours du temps car la valeur de la pente de la tangente diminue au cours du temps.
Le facteur cinétique responsable à cette diminution est la concentration des réactifs.

4. Calcul de la vitesse moyenne volumique :

$$v_{V(moy)}=\frac{1}{V}.\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{1}{V_1+V_2}.\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=0,4.10^{-3}mol/L/min$$

5.1. *H_2O_2 $\begin{cases}C'_1=0,05mol.L^{-1}\\V_1=100mL\end{cases}$ *** I^-** $\begin{cases}C_2=0,1mol.L^{-1}\\V_2=100mL\end{cases}$ **$n'_0(H_2O_2)=n_0(I^-)/2$: le mélange est réalisé dans les proportions stœchiométriques donc x_f est modifié : $x_f=5.10^{-3}$mol.**

5.2. La vitesse à t=0 augmente car la concentration initiale du réactif H_2O_2 augmente.

Corrigé de l'exercice2

La courbe A représente la variation de $[I^-]$ en fonction du temps car c'est une courbe de disparition ; alors que la courbe B représente la variation de $[I_2]$ en fonction du temps car c'est une courbe de formation.

2. Le tableau complété

Etat de système	Avancement x (mol)	*Quantité de matière(en mol)* $2I^-$	$+ H_2O_2$	$+ 2H_3O^+ \rightarrow$	I_2	$+ 4H_2O$
Etat (initial) t_0	0	$n_1 = C_1V_1$	$n_2 = C_2V_2$	En excès	0	Solvant en excès
Etat intermediaire t	x	C_1V_1-2x	$C_2V_2 - x$		x	
Etat (final) t_f	x_f	$C_1V_1-2x_f$	$C_2V_2 - x_f$		x_f	

3. Le réactif limitant est H_2O_2 car d'après la courbe A il reste 0,05mol/L de I^- donc I^- est un réactif en excès.
4. D'après la courbe B l'avancement final $x_f=[I_2]_f xV=0,05x200.10^{-3}=10^{-2}$mol

5. Calcul des concentrations

- **Calcul de C_1 :**
  - ✓ **1ère méthode :**

$$\left[I^-\right]_0 = \frac{C_1V_1}{V_1+V_2} \Rightarrow C_1 = \frac{\left[I^-\right]_0 (V_1+V_2)}{V_1} = \frac{0,15x200}{100} = 0,3mol/L$$

  - ✓ **2ème méthode :**

$$C_1V_1 - 2x_f = [I^-]_r xV = 10^{-2}mol \Rightarrow C_1 = \frac{10^{-2}+2x_f}{V_1} = 0,3mol/L$$

- **Calcul de C_2 :**
  - ✓ **1ère méthode :**

$$\left[I_2\right]_{max} = \left[H_2O_2\right]_0 \Leftrightarrow \left[I_2\right]_{max} = \frac{C_2V_2}{V_1+V_2} \Rightarrow C_2 = \frac{\left[I_2\right]_{max}(V_1+V_2)}{V_2} = \frac{0,05x200}{100} = 0,1mol/L$$

  - ✓ **2ème méthode :**

$$C_2V_2 - x_f = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{x_f}{V_2} = 0,1mol/L$$

6.1. Calcul de la vitesse volumique maximale est la vitesse initiale :

La vitesse de disparition de I^- correspond au à l'opposé du coefficient directeur de la tangente à la courbe A au point d'abscisse t =0

Soit en utilisant les points O (0 ; 0,15) et B (20; 0)

$$\left(V_{Vol}\right)_d (I^-)(t=0) = -\frac{[I^-]_2 - [I^-]_1}{t_2 - t_1} = 7{,}5.10^{-3} mol/L/min$$

d'où la vitesse volumique de la réaction:

$$\left(V_{Vol}\right)(t=0) = \frac{\left(V_{Vol}\right)_d (I^-)(t=0)}{2} = 3{,}75.10^{-3} mol/L/min$$

6.2. Déduction de la vitesse de la réaction :

$$V_{vol}(t=0) = \frac{V(t=0)}{V_{vol}}$$

$$\Rightarrow V(t=0) = V_{vol}(t=0) x V_{vol} = 3{,}75.10^{-3} x 200.10^{-3} = 7{,}5.10^{-4} mol/min$$

6.3. La vitesse de la réaction diminue au cours du temps car la valeur de la pente de la tangente diminue au cours du temps.

Le facteur cinétique responsable à cette diminution est la concentration des réactifs.

7. Le temps de la demi-réaction $t_{1/2}$

C'est l'abscisse du point d'ordonnée $[I_2]$ max/2 soit $t_{1/2}$=10min.

Corrigé de l'exercice3

1. **Avancement final :**
   $X_f = \lim_{t\to+\infty} \frac{\alpha.t}{1+\beta.t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\alpha.t}{t(\frac{1}{t}+\beta)} = \frac{\alpha}{\beta}$
   $X_f = \frac{\alpha}{\beta}$
2. **Temps de demi-réaction:**
   $t_{½} = \frac{Xf}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2\beta} = \frac{\alpha t_{½}}{1+\beta t_{½}} \Leftrightarrow 1 + \beta t_{½} = 2\beta t_{½} \Rightarrow \beta t_{½} = 1 \Rightarrow t_{½} = \frac{1}{\beta}$
3. **Expression de V :**
   $V = \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha(1+\beta t)-\beta\alpha t}{(1+\beta t)^2} = \frac{\alpha}{(1+\beta t)^2} \Rightarrow V = \frac{\alpha}{(1+\beta t)^2} \Rightarrow V_0 = \frac{\alpha}{1} = \alpha$
4. $X = \frac{V_0 t}{1+t/t_{½}} = \frac{V_0 t_{½} t}{t+t_{½}}$

Corrigé de l'exercice4

1 Les demi-équations électroniques :

$2I^- \rightarrow 2e^- + I_2$

$S_2O_8^{2-} + 2e^- \rightarrow 2SO_4^{2-}$

L'équation bilan : $2I^- + S_2O_8^{2-} \rightarrow I_2 + 2SO_4^{2-}$

2 Calcul des concentrations initiales :

$\left[I^-\right]_0 = \dfrac{C_1V_1}{V}$ **A.N :** $\left[I^-\right]_0$ **=2.10^{-3}mol/L**

$\left[S_2O_8^{2-}\right]_0 = \dfrac{C_2V_2}{V}$ **A.N :** $\left[S_2O_8^{2-}\right]_0$ **=1,2.10^{-3}mol/L.**

Comme $\dfrac{\left[S_2O_8^{2-}\right]_0}{1} > \dfrac{\left[I^-\right]_0}{2}$ **c'est I^- qui est le réactif limitant.**

3.1 La vitesse moyenne de formation du diiode entre les instants t_1 et t_2.

On utilise les deux points d'abscisses t_1 et t_2 de la courbe, on obtient :

$V_m = \dfrac{[I_2]_2 - [I_2]_1}{t_2 - t_1}$ **soit** $V_m \simeq 1,2.10^{-4} mol/L/mn$

3.2 Définition de la vitesse de formation de I_2

C'est la dérivée de la concentration de I_2 par rapport au temps ce qui correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 20mn ; soit $V_{I_2} = \dfrac{[I_2]_B - [I_2]_A}{t_B - t_A} \simeq 1,9.10^{-4} mol/L/min$

Vitesse de disparition de I^- :

D'après l'équation bilan on a :

$\dfrac{V(I^-)}{2} = \dfrac{V(I_2)}{1} \Rightarrow V(I^-) = 2V(I_2)$ **A.N:** $V(I^-) = 3,73.10^{-4} mol/L/mn$

3.3 Le temps de demi réaction est le temps nécessaire à la disparition de $\dfrac{\left[I^-\right]_0}{2}$

ce qui correspond à l'abscisse du point d'ordonnée $[I_2]_{1/2} = \dfrac{[I^-]_0}{4} = 5.10^{-4} mol/L$

soit $t_{1/2}$=12,5 mn d'après la courbe.

Corrigé de l'exercice5

1 Les demi-équations électroniques :

$2I^- \rightarrow 2e^- + I_2$

$S_2O_8^{2-} + 2e^- \rightarrow 2SO_4^{2-}$

L'équation bilan : $2I^- + S_2O_8^{2-} \rightarrow I_2 + 2SO_4^{2-}$

2 Calcul des concentrations initiales :

$\left[I^-\right]_0 = \dfrac{C_2V_2}{V_1+V_2}$ **A.N :** $\left[I^-\right]_0$ **=10^{-2}mol/L**

$\left[S_2O_8^{2-}\right]_0 = \dfrac{C_1V_1}{V_1+V_2}$ **A.N :** $\left[S_2O_8^{2-}\right]_0$ **=5.10^{-3}mol/L.**

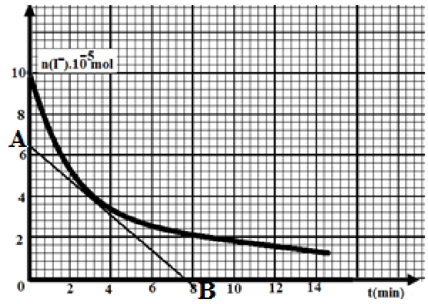
3 Calcul des nombres de moles dans l'échantillon V_0 :

$$n(I^-)_0 = \frac{C_2V_2}{V_1+V_2}.V_0 = 10^{-4}mol$$

$$n(S_2O_8^{2-})_0 = \frac{C_1V_1}{V_1+V_2}.V_0 = 5.10^{-5}mol$$

4.1 La vitesse moyenne de disparition de I^- est

$$V_m(I^-) = -\frac{\Delta[I^-]}{\Delta t} \text{ A.N } V_m = -\frac{(2-10).10^{-5}}{10-0} = 8.10^{-6} mol/L/min$$



4.2 Définition de la vitesse de disparition de I^-

C'est l'opposée de la dérivée de la concentration de I^- par rapport au temps $V(I^-) = -\frac{d[I^-]}{dt}$ ce qui correspond à l'opposée du coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 5mn ; soit

$$V_{t=5min} = -\frac{[I^-]_B - [I^-]_A}{t_B - t_A} \Rightarrow V_{t=5min} = -\frac{0-6,4.10^{-5}}{7,6} \simeq 8,4.10^{-6} mol/L/min$$

La vitesse de disparition de I^- diminue en fonction du temps à cause de la diminution de la concentration

Corrigé de l'exercice6

1 Les demi équations sont : $2I^- \rightarrow 2e^- + I_2$ **et** $S_2O_8^{2-} + 2e^- \rightarrow 2SO_4^{2-}$

L'équation bilan : $S_2O_8^{2-} + 2I^- \rightarrow 2SO_4^{2-} + I_2$

2 Calcul des concentrations initiales :

$$\left[I^-\right]_0 = \frac{C_1V_1}{V} = 0,2mol/L \text{ et } \left[S_2O_8^{2-}\right]_0 = \frac{C_2V_2}{V} = 0,1mol/L$$

3.1 Relation entre la concentration du diiode et C_1V_1 :

$$2S_2O_3^{2-} + I_2 \rightarrow 2S_4O_6^{2-} + 2I^-$$

$n_{S_2O_3^{2-}}$ n_{I_2} n_{I^-} $n_{S_4O_6^{2-}}$

$$\frac{n_{I_2}}{1} = \frac{n_{S_2O_3^{2-}}}{2} \text{ or } n_{S_2O_3^{2-}} = C_1V_1 \Rightarrow n_{I_2} = \frac{C_1V_1}{2}$$

Comme $C = \left[I_2\right] = \frac{n_{I_2}}{V} \Leftrightarrow C = \frac{C_1V_1}{2V}$

D'où le tableau :

t(min)	2,7	7,5	12	18	25	33	40	56
$V_1(cm^3)$	1,1	3,2	4,8	6,2	7,4	8,4	9	9,7
$Cx10^{-3}$	0,55	1,6	2,4	3,1	3,7	4,2	4,5	4,85

3.2.1La vitesse de formation de I_2 est la dérivée de la concentration de I_2 par rapport à t : $V = \frac{d\left[I_2\right]}{dt}$, elle correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse considérée t. à t=20min

$$V_{20} = \frac{(5-1,5).10^{-3}}{40} = 8,75.10^{-5}\,mol/L/min$$

3.2.2La vitesse moyenne de formation de I_2 est le rapport de la variation de la concentration du diiode sur la variation correspondante du temps :

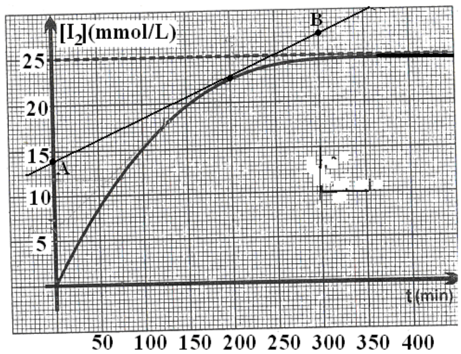
Entre t_1=12min et t_2=40min, on a :

$$V_m = \frac{\left(4,5-2,4\right).10^{-3}}{40-12} = 2,68.10^{-5}\,mol/L/min$$

Corrigé de l'exercice7

1 Les demi-équations électroniques :

$$2I^- \rightarrow 2e^- + I_2$$
$$H_2O_2 + 2e^- + 2H^+ \rightarrow 2H_2O$$



L'équation bilan :

$$2I^- + H_2O_2 + 2H^+ \rightarrow 2H_2O + I_2$$

2.1 Calcul des concentrations initiales :

$\left[I^-\right]_0 = \frac{C_2V_2}{V_1+V_2+V_3}$ **A.N :** $\left[I^-\right]_0$ **=6.10^{-2}mol/L**

$\left[H_2O_2\right]_0 = \frac{C_3V_3}{V_1+V_2+V_3}$ **A.N :** $\left[H_2O_2\right]_0$ **=2,5.10^{-2}mol/L.**

Détermination du réactif limitant :

$\frac{\left[H_2O_2\right]_0}{1} < \frac{\left[I^-\right]_0}{2}$ **le réactif limitant est l'eau oxygénée H_2O_2.**

2.2 Définition de la vitesse de formation de I_2 : C'est la dérivée de la concentration de I_2 par rapport au temps $V(I_2) = \frac{d[I_2]}{dt}$ ce qui correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse t; soit à t=200min

$$V_{t=200\,min} = \frac{[I_2]_B - [I_2]_A}{t_B - t_A}$$

$$V_{t=8\,min} = \frac{(27-14)10^{-3}}{300} \approx 4,3.10^{-5} mol/L/min$$

3 Détermination de $[I_2]_\infty$

La concentration de I_2 à l'infini correspond à la disparition totale de la concentration initiale du réactif limitant ; soit $[I_2]_\infty = [H_2O_2]_0 = 2,5.10^{-2} mol/L$

Ce résultat est bien en accord avec la courbe qui admet une tangente horizontale au point d'ordonnée 25mmol/L.

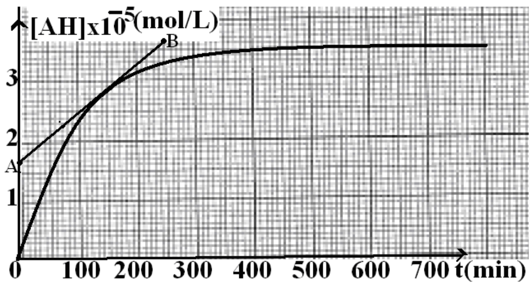
4. Le temps de la demi-réaction :

D'après le graphe $t_{1/2} \approx 75min$.

Corrigé de l'exercice8

1.1 Définition de la vitesse de formation de AH

C'est la dérivée de la concentration de C par rapport au temps $V(AH) = \frac{dC}{dt}$ ce qui correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse t;



$$V_{t=150min} = \frac{C_B - C_A}{t_B - t_A}$$

$$\text{soit } V_{t=150min} = \frac{(3,7-1,7)10^{-5}}{250} = 8.10^{-7} mol/L/min$$

1.2 Le temps de demi-réaction est le temps nécessaire à la disparition de $\frac{[AH]_0}{2}$ ce qui correspond à l'abscisse du point d'ordonnée $[AH]_{1/2} = \frac{[AH]_0}{2} = 1,75.10^{-5} mol/L$

soit $t_{1/2}$=70 min d'après la courbe.

Corrigé de l'exercice9

1 La f.s.d de E est :

CH_3-COO-CH_2- CH_2- CH_2-CH_3.La fonction s'appelle la fonction ester

2.1 (A) est l'acide éthanoïque CH_3COOH ;

(B) est l'alcool butan-1-ol CH_3-CH_2- CH_2- CH_2OH.

2. 2 L'équation de la réaction:

$CH_3COOH + CH_3\text{-}CH_2\text{-}CH_2\text{-}CH_2OH \leftrightarrows CH_3\text{-}COO\text{-}CH_2\text{-}CH_2\text{-}CH_2\text{-}CH_3 + H_2O$

3.1 La réaction est la réaction d'estérification qui est lente, limitée par l'hydrolyse de l'ester et athermique.

3.2.1 La vitesse de formation est la dérivée de la quantité de matière par rapport au temps :

V = dn(E) / dt. Elle correspond à la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse considéré. Soit :

$$V_{t_1} = \frac{0,34 - 0,08}{25} ; 10^{-2} \text{mol/h} \quad \text{et} \quad V_{t_2} = \frac{0,35 - 0,2}{40} = 3,75.10^{-3} \text{mol/h}$$

Cette vitesse diminue au cours du temps car les quantités de matière des réactifs diminuent.

3.2.2 Calcul du rendement : $R = (n_{ester})_{équi}/n_0 = 0,33 / 0,5 = 0,66$.

3.2.3 L'équilibre étant atteint à t=48s, la valeur du rendement ne varie pas.

En effet en doublant les quantités initiales des réactifs et en augmentant la quantité du catalyseur, on atteint plus rapidement l'équilibre, sans changer le rendement.

4 On utilise le chlorure d'éthanoyle CH_3COCl ou l'anhydride éthanoïque$(CH_3CO)_2O$ à la place de l'acide éthanoïque car la réaction avec l'alcool est totale

Corrigé de l'exercice10

1 Les couples redox: I_2/I^- et H_2O_2/H_2O

$$2I^- \rightarrow 2e^- + I_2$$
$$H_2O_2 + 2e^- + 2H^+ \rightarrow 2H_2O$$

L'équation bilan : $2I^- + H_2O_2 + 2H^+ \rightarrow 2H_2O + I_2$

2 Calcul des concentrations initiales :

$$\left[I^-\right]_0 = \frac{C_1V_1}{V_1 + V_2} \quad \textbf{A.N : } \left[I^-\right]_0 = 2,32.10^{-2} \text{mol/L}$$

$$\left[H_2O_2\right]_0 = \frac{C_2V_2}{V_1 + V_2} \quad \textbf{A.N : } \left[H_2O_2\right]_0 = 2.10^{-2} \text{mol/L.}$$

Détermination du réactif limitant :

$$\frac{[H_2O_2]_0}{1} > \frac{[I^-]_0}{2}$$

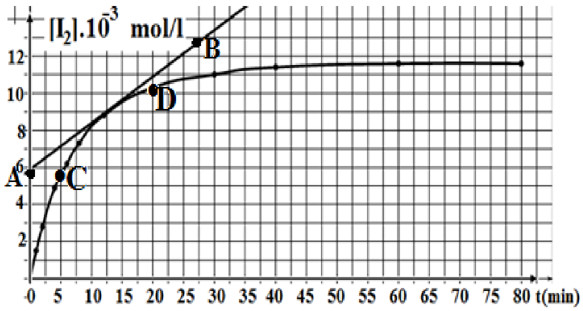
Le réactif en excès est l'eau oxygénée H_2O_2.

3.1 La vitesse moyenne de formation des ions I_2 entre les instants t_1 et t_2 est le rapport de la variation de la concentration des ions I_2 à la variation correspondante du temps. $V_m = \frac{\Delta[I_2]}{\Delta t}$

On utilise les deux points C et D d'abscisses t_1 et t_2 de la courbe, on obtient :

$$V_m = \frac{[I_2]_2 - [I_2]_1}{t_2 - t_1} = \frac{(10,2 - 5,7).10^{-3}}{20 - 5} = 3.10^{-4} mol/L/min$$

3.2 Définition de la vitesse de formation de I_2



C'est la dérivée de la concentration de I_2 par rapport au temps : $V = \frac{d[I_2]}{dt}$ **Elle correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse t=12,5min.**

Soit en utilisant les points A (0 ; 5,9.10^{-3}) B (27,5 ; 12,8.10^{-3})

$$V = \frac{[I_2]_2 - [I_2]_1}{t_2 - t_1} = \frac{(12,8 - 5,9).10^{-3}}{27,5 - 0} = 2,5.10^{-4} mol/L/min$$

Déduction de la vitesse de disparition de I^- :

D'après l'équation bilan on a :

$$\frac{V(I^-)}{2} = \frac{V(I_2)}{1} \Rightarrow V(I^-) = 2V(I_2) = 5.10^{-4} mol/L/min$$

Ces vitesses diminuent en fonction du temps.

Le facteur cinétique responsable de cette diminution est la diminution des concentrations des réactifs.

3.2 Calcul des concentrations restante à t=30min :D'après la courbe à t=30min : $[I_2] = 1,1.10^{-2} mol/L$

$$[I^-]_r = [I^-]_0 - [I^-]_d = [I^-]_0 - 2[I_2]$$

$$[I^-]_r = 2,32.10^{-2} - 2,2.10^{-2} = 0,12.10^{-2} mol/L$$

$$[H_2O_2]_r = [H_2O_2]_0 - [H_2O_2]_d = [H_2O_2]_0 - [I_2]$$

$$[H_2O_2]_r = 2.10^{-2} - 1,1.10^{-2} = 0,9.10^{-2} mol/L$$

4. Détermination du temps de la demi-réaction :

Lorsque la moitié de la concentration initiale de I^- disparait (soit $11,6.10^{-3}$ mol/L) ; d'après les coefficients stœchiométriques, il se forme $5,8.10^{-3}$mol/L de I_2. Le temps $t_{1/2}$ est l'abscisse du point d'ordonnée $5,8.10^{-3}$mol/L soit $t_{1/2} \simeq 5\,min$

Corrigé de l'exercice11

1 L'équation de la réaction d'estérification :

$$HCOOH + C_2H_5\text{-}CH_2OH \rightleftarrows HCOOCH_2\text{-}C_2H_5 + H_2O$$

Les caractéristiques de cette réaction : Cette réaction est lente limitée et athermique.

2 Calcul de la quantité d'ester n_e

D'après la conservation de la matière :

$(n_{ac})_0 = (n_{ac})_r + (n_{ac})_d \Rightarrow (n_{ac})_d = (n_{ac})_0 - (n_{ac})_r$ Or $(n_{ac})_d = n_e$ et $(n_{ac})_0 = 1$ d'où $\boxed{n_e = 1 - n_a}$

Voir tableau

	t(min)	5	10	20	30	40	50	60
M_1	n_a	0,84	0,74	0,64	0,58	0,54	0,52	0,50
M_2	n_a	0,53	0,37	0,35	0,34	0,34	0,34	0,34
M_1	n_e	0,16	0,26	0,36	0,42	0,46	0,48	0,50
M_2	n_e	0,47	0,63	0,65	0,66	0,66	0,66	0,66

3 Définition de la vitesse moyenne de disparition de l'acide :

C'est l'opposée du rapport de la variation de la quantité de matière de l'acide à la durée de cette variation ; $V_m = -\frac{\Delta n}{\Delta t} = -\frac{n_2 - n_1}{t_2 - t_1}$

Calcul de V_m entre t_1=5min et t_2=10min :

Pour le premier mélange on obtient :

$V_{m1} = -\frac{n_2 - n_1}{t_2 - t_1}$ AN : $V_{m1} = -\frac{0,74 - 0,94}{10 - 5} = 2.10^{-2} mol/min$

Pour le deuxième mélange on obtient :

$V_{m2} = -\frac{n_2 - n_1}{t_2 - t_1}$ et $V_{m2} = -\frac{0,37 - 0,53}{10 - 5} = 3,2.10^{-2} mol/min$ **Comparaison :** $V_{m2} > V_{m1}$

4 Le catalyseur est une substance chimique qui accélère la réaction sans apparaitre dans l'équation bilan. L'expérience montre que le catalyseur augmente la vitesse de la réaction.

Corrigé de l'exercice12

1On ramène l'acide à doser à la température ambiante pour annuler la vitesse de formation de l'ester ; ainsi l'estérification s'arrête pendant la durée du dosage et n'influence pas la mesure. ***Le facteur mis en jeu est la température dont l'augmentation entraîne l'augmentation de la vitesse.***

2 La vitesse instantanée de formation de l'ester est donnée par la détermination de la pente de la tangente à la courbe aux points d'abscisses t_1 et t_2 : $v(t_1) \approx 10.10^{-2}$ mol/h $v(t_2) \approx 0,2.10^{-2}$ mol/h

Les résultats précédents sont en accord avec le fait que la vitesse de formation des produits augmente avec la ***concentration des réactifs,*** **car la probabilité de rencontre et donc de choc entre les molécules augmente. Dans la réaction d'estérification, la concentration des réactifs diminue au cours du temps et donc la vitesse en même temps ; c'est ce que confirme l'expérience.**

3 Les ions H_3O^+ sont des catalyseurs qui accélèrent la réaction d'estérification mais n'ont pas d'influence sur sa limite. La courbe (3) correspond à une limite d'estérification différente ; la courbe (2) a une pente donc une vitesse inférieure à celle de la courbe (1) . Ces deux courbes sont donc à rejeter .La bonne courbe est la courbe (4) qui a la même limite d'estérification mais dont la limite est atteinte plus rapidement.

Corrigé de l'exercice13

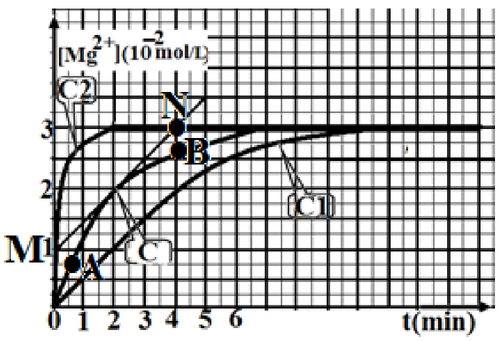
1.1 La vitesse moyenne de formation des ions Mg^{2+} entre les instants t_1 et t_2 est le rapport de la variation de la concentration des ionsMg^{2+} à la variation correspondante du temps. $V_m = \frac{\Delta[Mg^{2+}]}{\Delta t}$

On utilise les deux points A et B d'abscisses t_1 et t_2 de la courbe, on obtient :

$$V_m = \frac{[Mg^{2+}]_2 - [Mg^{2+}]_1}{t_2 - t_1} = \frac{(2,6 - 0,75).10^{-2}}{4 - 0,5} = 5,3.10^{-3} mol/L/min$$

1.2. Définition de la vitesse de formation de Mg^{2+}

C'est la dérivée de la concentration de Mg^{2+} **par rapport au temps :** $V = \frac{d[Mg^{2+}]}{dt}$



Elle correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse t=2min ; soit

$$V=\frac{[Mg^{2+}]_2-[Mg^{2+}]_1}{t_2-t_1}=\frac{(3-1).10^{-2}}{4-0}=5.10^{-3}mol/L/min$$

Déduction de la vitesse de disparition de H_3O^+ :

D'après l'équation bilan on a :

$$\frac{V(H_3O^+)}{2}=\frac{V(Mg^{2+})}{1}\Rightarrow V(H_3O^+)=2V(Mg^{2+})$$

Numériquement : $V(H_3O^+)=1.10^{-2}mol/L/mn$

1.3. La concentration finale de Mg^{2+}

D'après la courbe : $\left[Mg^{2+}\right]_f=3.10^{-2}mol/L$

Montrons que le magnésium est le réactif en excès :

Calcul de la concentration initiale de Mg : $\left[Mg\right]_0=\frac{0,02}{0,5}=4.10^{-2}mol/L$

Il se forme 3.10^{-2}mol/L en fin de réaction, les coefficients stœchiométriques étant les mêmes pour Mg et Mg^{2+}, il restera $(4-3).10^{-2}=10^{-2}$mol/L de Mg non transformé. Mg est donc en excès.

1.4. Déduction de la concentration initiale de l'acide :

$$\frac{\left[H_3O^+\right]}{2}=\frac{\left[Mg^{2+}\right]_f}{1}\Rightarrow\left[H_3O^+\right]=2\left[Mg^{2+}\right]_f=6.10^{-2}mol/L$$

L'acide étant fort $\left[H_3O^+\right]=$ **C=6.10^{-2} mol/L**

1.5. Calcul des concentrations restante à t=4min :

D'après la courbe à t=4min : $\left[Mg^{2+}\right]=2,6.10^{-2}mol/L$

Or $\left[Mg\right]_r=\left[Mg\right]_0-\left[Mg\right]_d=4.10^{-2}-2,6.10^{-2}=1,4.10^{-2}mol/L$

$$\left[H_3O^+\right]_d=2\left[Mg\right]_d=2x2,6.10^{-2}=5,2.10^{-2}mol/L$$

$$\left[H_3O^+\right]_r=\left[H_3O^+\right]_0-\left[H_3O^+\right]_d$$
$$=6.10^{-2}-5,2.10^{-2}=8.10^{-3}mol/L$$

2

- Lorsque la température diminue la vitesse diminue (courbe C_1 pour $\theta_2 < \theta_1$).
- Lorsqu'on fixe θ et on ajoute un catalyseur la vitesse augmente (courbe C_2).

Corrigé de l'exercice14

1° L'équation bilan de la réaction :

$$2H_2O_2 \rightarrow 2H_2O + O_2$$

2.1 Expression de la concentration :

$$\left(n_{H_2O_2}\right)_d = 2n_{O_2} \quad \text{or } n_{O_2} = \frac{V_{O_2}}{V_m} \Leftrightarrow \left(n_{H_2O_2}\right)_d = 2\frac{V_{O_2}}{V_m}$$

$$\left(n_{H_2O_2}\right)_r = \left(n_{H_2O_2}\right)_0 - \left(n_{H_2O_2}\right)_d$$

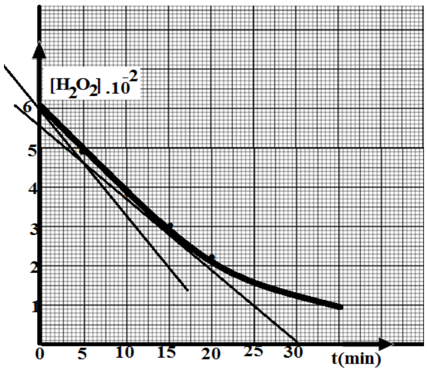
$$\left(n_{H_2O_2}\right)_r = C - 2\frac{V_{O_2}}{V_m V} \Rightarrow \alpha = 2$$

2.2 Représentation de la courbe :

t_{min}	0	5	10	15	20	30
V_{O2} formé en L	0	1,56	2,74	3,65	4.42	5.56
$[H_2O_2]_{restant}$ en mol/L	6.10^{-2}	$4,710^{-2}$	$3,710^{-2}$	310^{-2}	$2,310^{-2}$	$1,410^{-2}$

Pour la représentation de la courbe voir la page suivante.

2.3 La vitesse de disparition du peroxyde d'hydrogène correspond à la valeur absolue de la pente de la tangente à la courbe à l'instant considéré.



$$V = \left|\frac{d[H_2O_2]}{dt}\right|$$

D'après la courbe $V_0 = 2{,}7.10^{-3}$mol/L/min et $V_{16} = 1{,}8.10^{-3}$mol/L/min.
La vitesse diminue en fonction du temps.

2.4 Le temps de la demi réaction correspond à la durée nécessaire pour que

$[H_2O_2] = C/2 = 3.10^{-2}$ mol disparaisse, soit graphiquement $t_{1/2} = 15$min

Corrigé de l'exercice15

1.1 Les couples redox: I_2/I^- **et** H_2O_2/H_2O

$$\text{L'équation d'oxydation de l'ion } I^- : 2I^- \rightarrow 2e^- + I_2$$

$$\text{L'équation de réduction de } H_2O_2 : H_2O_2 + 2e^- + 2H^+ \rightarrow 2H_2O$$

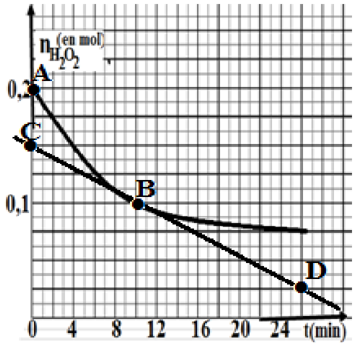
L'équation bilan : $2I^- + H_2O_2 + 2H^+ \rightarrow 2H_2O + I_2$

1.2

L'équation d'oxydation de l'ion $S_2O_3^{2-}$: $2S_2O_3^{2-} \rightarrow 2e^- + S_4O_6^{2-}$

L'équation de réduction de I_2: $I_2 + 2e^- \rightarrow 2I^-$

L'équation bilan : $2S_2O_3^{2-} + I_2 \rightarrow 2I^- + S_4O_6^{2-}$



2.1. La vitesse moyenne de disparition des ions H_2O_2 entre les instants t_1 et t_2 est l'opposé du rapport de la variation de la concentration H_2O_2à la variation correspondante du temps. $V_m = -\frac{\Delta[H_2O_2]}{\Delta t}$

On utilise les deux points A et B d'abscisses t_1 et t_2 de la courbe, on obtient :

$$V_m = -\frac{[H_2O_2]_2 - [H_2O_2]_1}{t_2 - t_1} = -\frac{(0,2-0,1)}{10-0} = 1.10^{-2} mol/min$$

2.2 Définition de la vitesse de formation de I_2

C'est la dérivée de la concentration de H_2O_2 par rapport au temps :

$$V = -\frac{d[H_2O_2]}{dt}$$

Elle correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse t=10min.

Soit en utilisant les points C (0 ; 0.15) et D (26 ; 0,025)

$$V = -\frac{[H_2O_2]_2 - [H_2O_2]_1}{t_2 - t_1} = -\frac{(0,025-0,15)}{26-0} = 4,8.10^{-3} mol/min$$

Déduction de la vitesse de disparition de I^- :
D'après l'équation bilan on a :

$$\frac{V(I^-)}{2} = \frac{V(H_2O_2)}{1} \Rightarrow V(I^-) = 2V(H_2O_2) = 9,6.10^{-3} mol/min$$

2.3 Calcul du volume de thiosulfate

D'après la première équation-bilan :

$$\frac{(n_{I_2})_f}{1} = \frac{(n_{H_2O_2})_d}{1}$$

$$(n_{I_2})_f = n_0 - (n_{H_2O_2})_r$$

D'après la deuxième équation-bilan :

$$\frac{(n_{I_2})_d}{1} = \frac{(n_{S_2O_2^{3-}})_d}{2}$$

or $(n_{I_2})_d$ lors de la $2^{ème}$ réaction est le même que $(n_{I_2})_f$ lors de la $1^{ème}$ réaction

$$\Leftrightarrow n_0 - (n_{H_2O_2})_r = \frac{(n_{S_2O_2^{3-}})_d}{2} = \frac{CV}{2} \Rightarrow V = \frac{2}{C}(n_0 - (n_{H_2O_2})_r) = 100mL$$

2.4 Détermination du temps de la demi-réaction :

Lorsque la moitié de la concentration initiale de H_2O_2 disparait (soit 0,1mol). Le temps $t_{1/2}$ est l'abscisse du point d'ordonnée 0,1mol soit $t_{1/2}$=10min.

Corrigé de l'exercice16

1 Les quantités de matière initialement introduites dans le mélange

$n_1(I^-) = C_1V_1 = 0{,}1x50.10^{-3} = 5.10^{-3}$ mol

$n_2(Fe^{3+}) = 2C_2V_2 = 2x0{,}02x50.10^{-3} = 2.10^{-3}$ mol

Le réactif limitant

$$\frac{n(I^-)}{2} = \frac{5.10^{-3}}{2} = 2{,}5.10^{-3}mol$$

$$\frac{n(Fe^{3+})}{2} = \frac{2.10^{-3}}{2} = 10^{-3}mol$$ **Le réactif limitant est l'ion Fe^{3+}**

2.1 L'eau glacée permet de ralentir considérablement la réaction

2.2 La décoloration du mélange est due à la transformation de toute la quantité de I_2 en ions I^-

2.3 A l'équivalence

$$n(I_2) = \frac{n(S_2O_3^{2-})}{2} = \frac{CV}{2} = \frac{5.10^{-3}x12.10^{-3}}{2} = 3.10^{-5}mol$$

2.4 La composition du mélange

$$n(I_2) = 0{,}3.10^{-4}mol$$

$$n(I^-)_r = n(I^-)_0 - n(I^-)_d = n(I^-)_0 - 2n(I_2)$$

$$n(I^-)_r = 5.10^{-4} - 0{,}6.10^{-4} = 4{,}4.10^{-4}mol$$

$$n(Fe^{3+})_r = n(Fe^{3+})_0 - n(Fe^{3+})_d = n(Fe^{3+})_0 - 2n(I_2)$$

$$n(Fe^{3+})_r = 2.10^{-4} - 0,6.10^{-4} = 1,4.10^{-4}mol$$

$$\frac{n(I_2)}{1} = \frac{n(Fe^{2+})}{2} \Rightarrow n(Fe^{2+}) = 2n(I_2) = 0,6.10^{-4}mol$$

3.1 Comme la courbe devient // à l'axe des abscisses à partir de t=15min, la réaction est totale

3.2

La vitesse correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse considéré.
Soit en utilisant les points A (0 ; 0) et B (1 ; 0,9.10^{-3}) pour t=0 puis
C(0 ;0, 5.10^{-3}) et D(8 ;1,1.10^{-3}) pour t=4min

$$V_{t=0} = \frac{0,9.10^{-3} - 0}{1-0} = 9.10^{-4} mol/min \, et V_{t=4} = \frac{(1,1-0,5).10^{-3}}{8-0} = 0,75.10^{-4} mol/min$$

3.3. La vitesse diminue en fonction du temps à cause de la diminution de la concentration des réactifs.

Corrigé de l'exercice17

1 Les quantités de matière initialement introduites dans le mélange
$n_0(H_2O_2) = C_1V_1 = 4,5.10^{-3}$ mol
$n_0(I^-) = C_2V_2 = 6.10^{-3}$ mol
Le réactif limitant

$$\frac{n_0(I^-)}{2} = \frac{6.10^{-3}}{2} = 3.10^{-3}mol$$

$$n_0(H_2O_2) = 4,5.\ 10^{-3}mol$$

Le réactif limitant est l'ion I^-
1.3 Déduction de $(n_{I2})_{max}$

$$(n_{I_2})_{max} = \frac{n_0(I^-)}{2} = \frac{6.10^{-3}}{2} = 3.10^{-3}mol$$

2.1 La vitesse correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse considéré.
Soit en utilisant les points A (0 ; 0,5) et B (19,5 ; 3,5.10^{-3})

$$V_{t=9} = \frac{3,5.10^{-3} - 1,5.10^{-3}}{19,5-0} = 10^{-4} mol/min$$

2.2 Pour $t_2 > t_1$ la vitesse diminue à cause de la diminution des concentrations des réactifs.
3 Pour augmenter la vitesse de formation de I_2 soit on augmente la température soit on utilise un catalyseur.