

# *Physique*

## Les bases fondamentales de la dynamique

- Un système est un ensemble de points matériels.
- Un système peut être déformable ou indéformable.
- Une force intérieure est une force exercée par une partie du système sur une autre partie de ce système.
- Une force extérieure est une force exercée par l'extérieur sur le système.
- La relation fondamentale de la dynamique R.F.D:
- L'ensemble des forces appliquées à un point matériel de masse  $m$  provoque une variation de sa vitesse :  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$
- Le théorème de l'énergie cinétique :

La variation de l'énergie cinétique d'un solide entre deux instants est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces appliquées au solide entre ces deux instants :  $\Delta E_C = \sum W_F$ ,

- Le théorème de l'énergie mécanique :  
La variation de l'énergie mécanique d'un système entre deux instants est égale à la somme algébrique des travaux des forces extérieures et des forces intérieures dissipatives qui s'exercent sur le système entre ces deux instants :

$$\Delta E_m = \sum W_{\vec{F}_{\text{ext}}} + \sum W_{\vec{F}_{\text{int}}} \text{ (dissipatives) ,}$$

### Les applications de la RFD

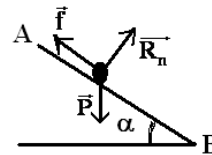
#### 1. Glissement sur un plan incliné faisant un angle $\alpha$ avec l'horizontale :

- Nature du mouvement:

$$a = g \sin \alpha - \frac{f}{m}$$

( m.r.u.v ).

- Expression de R:  $R = \sqrt{(mg \cos \alpha)^2 + f^2}$
- Si  $f=0$ :  $a = g \sin \alpha$  et  $R_n = mg \cos \alpha$



#### 2. Cas d'un projectile :

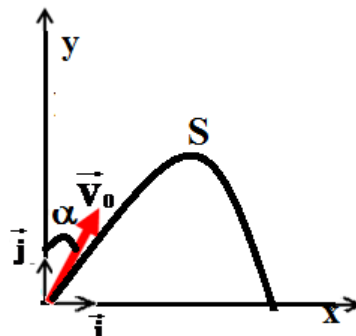
- Les vecteurs accélération  $\vec{a}$ , vitesse  $\vec{V}$  et position  $\vec{OM}$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{V} \begin{cases} V_x = V_0 \cos \alpha \\ V_y = -gt + V_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{OM} \begin{cases} x = V_0 \cos \alpha t & (1) \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin \alpha t & (2) \end{cases}$$

- Equation de la trajectoire:

$$Y = -\frac{gX^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} + X \tan \alpha$$



- La portée : C'est la distance entre le point de tir O du projectile et son point de chute P sur le plan horizontal.

$$x_p = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

- La flèche : Elle correspond à la hauteur maximale atteinte par le projectile au dessus du plan horizontal (ordonnée du sommet S de la trajectoire).  $Y_s = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

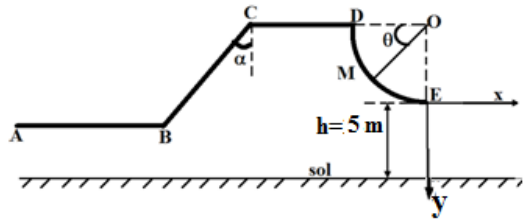
## Exercice 1

On néglige les frottements et on prendra  $g=10\text{m/s}^2$

Un skieur de masse totale  $m=80\text{kg}$  aborde une piste verglacée A, B, C, D et E. (voir fig).

Dans cet Exercice le skieur sera assimilé à un point matériel confondu avec son centre d'inertie G.

1 Partant sans vitesse du point A il est poussé sur le parcours AB par une force  $\vec{F}$  parallèle à la piste pour arriver en B avec une vitesse  $\vec{V}_B$ . Cette vitesse  $\vec{V}_B$  lui permet d'atteindre le point C.  $AB=l=20\text{m}$ ;  $BC=l'=40\text{m}$ ;  $g=10\text{m/s}^2$  et  $\alpha=60^\circ$ .



1.1 Calculer la valeur de la vitesse  $\vec{V}_B$  pour laquelle le skieur arrive en C avec une vitesse nulle.

1.2 Calculer alors la valeur supposée constante de la force  $\vec{F}$ .

1.3 Déterminer la nature du mouvement du skieur entre B et C sachant que  $\vec{F}$  ne s'exerce qu'entre A et B.

2 En arrivant en C le skieur s'aide de ses bâtons pour repartir sur CD, horizontale, et acquérir au point D une vitesse de valeur  $V_D=10\text{m/s}$  avec la quelle il entame le tronçon circulaire DE de rayon  $r=OD=OE=2,2\text{m}$ .

2.1 Exprimer:

2.1.1 La valeur  $V_M$  de la vitesse du skieur au point M en fonction de  $V_D$ ,  $r$ ,  $g$  et de l'angle  $\theta$  et en déduire sa valeur au point E.

2.1.2 La valeur  $R$  de la réaction exercée par la piste sur le skieur au point M en fonction de  $m$ ,  $V_D$ ,  $r$ ,  $g$  et de l'angle  $\theta$ .

2.2 Le skieur quitte la piste au point E pour arriver au point P situé sur le sol.

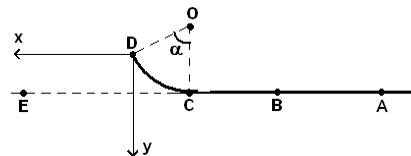
2.2.1 Calculer l'équation de la trajectoire dans le repère  $(E, x, y)$ .

2.2.2 Calculer l'abscisse du point P de chute.

## Exercice 2

Dans l'Exercice on négligera les frottements et l'action de l'air et on donne  $g=10\text{m/s}^2$ .

Un rail ABCD contenu dans un plan vertical comporte une partie ABC rectiligne posée sur le sol horizontal et une partie CD qui a la forme d'un arc de cercle de centre O, de rayon  $r=0,5\text{m}$  et d'angle au centre  $\alpha=60^\circ$  (voir fig1).



1 Un solide S de masse  $m=0,1\text{Kg}$  assimilable

à un point matériel, est initialement au repos en A. Il est soumis sur la portion AB du rail à une force  $\vec{F}$  parallèle au rail, dirigée de A vers B et d'intensité constante. Un dispositif a permis d'enregistrer la position du solide toute les

$2 \cdot 10^{-2}\text{s}$ .

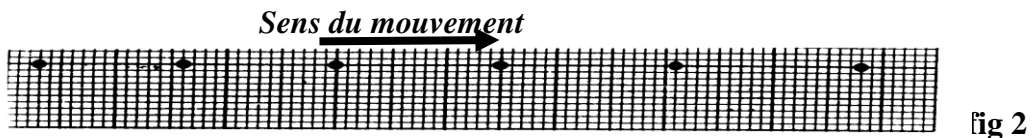


fig 2

La figure 2 représente, en vraie grandeur, une partie de l'enregistrement.

1-1 Déduire de cet enregistrement la nature du mouvement de S et calculer son accélération.

1-2 Calculer l'intensité F de la force.

2-La force  $\vec{F}$  cesse d'agir lorsque S atteint le point B, la vitesse du solide vaut alors 3m/s.

2-1 Déterminer la vitesse v du solide au point C.

2-2 Avec la vitesse calculée, le solide S aborde la partie CD du rail. Déterminer au point D les caractéristiques :

1.2.1 du vecteur vitesse  $\vec{V}_D$  du solide.

1.2.2 de la force  $\vec{R}_D$  exercée par le rail sur le solide S.

3- en D le solide S quitte le rail avec la vitesse  $V_D$  et effectue alors un mouvement aérien.

3.1 Etablir l'équation de la trajectoire du mouvement du solide S dans le plan (D,x,y).

3.2 Déterminer les coordonnées du sommet de la trajectoire.

3.3 Calculer l'abscisse du point de chute E sur le sol.

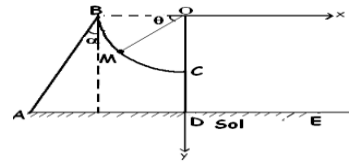
3.4 En utilisant la conservation de l'énergie mécanique entre les points D et E, calculer la vitesse du solide S à son arrivée en E.

### Exercice 3

Une piste ABCD est formée d'une partie AB rectiligne qui fait un angle  $\alpha$  avec la verticale, une partie BC ayant la forme d'un arc de cercle de centre O et de rayon r et en fin une partie CD verticale (voir fig ).

Données :  $\alpha = 60^\circ$ ,  $g = 10\text{m/s}^2$ ,  $BO = CO = r = 1\text{m}$ ,  $OD = 2\text{m}$

Un solide S de masse  $m = 200\text{g}$  est lancé de A vers B avec une vitesse  $V_A$ .



1 Déterminer la nature du mouvement de A à B. (les frottements n'existent qu'entre A et B sont assimilables à une force  $f = \frac{mg}{4}$ .)

2 Calculer la vitesse minimale avec laquelle il faut lancer le solide S du point A pour qu'il arrive en B avec une vitesse nulle.

3 Le solide S descend de B vers C sans vitesse initiale.

3.1 Donner l'expression de sa vitesse en M en fonction de g, r et  $\theta$ . A. N:  $\theta = 30^\circ$

3.2 Trouver l'expression de la réaction en M de la piste sur S en fonction de g, m et  $\theta$  La calculer.

4 Donner les caractéristiques de la vitesse du solide S en C.

5 Le solide S quitte la piste à  $t=0$  au point C et arrive au sol au point E.

5.1. Donner l'équation de la trajectoire du solide dans le repère (O; x; y).

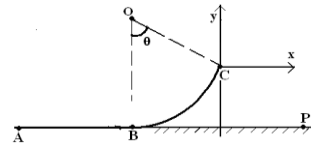
5.2. Déterminer l'abscisse du point de chute E.

## Exercice 4

Les frottements sont négligeables et on donne  $m=200g$ ,  $g=10m/s^2$   $\theta = 60^\circ$

Une piste de lancement est formée de deux parties :

- Une partie horizontale AB de longueur  $l=3,5m$  .
- Une partie circulaire BC de rayon  $r=1,3m$ .



Un solide ponctuel S de masse m est lancé du point A avec une vitesse horizontale  $\vec{v}_A$ .

1 Montrer que, sur la partie AB le mouvement du solide S est uniforme.

Calculer la vitesse  $v_A$  si la durée du trajet AB est  $t=0,5s$ .

2 Le solide S aborde en suite la partie circulaire BC.

2.1 Donner les caractéristiques du vecteur vitesse du solide S au point C.

2.2 Trouver l'expression de la réaction de la piste sur le solide au point C et calculer sa valeur.

3 Le solide S quitte la piste au point C.

3.1 Donner l'équation de la trajectoire du mouvement du solide après C dans le repère (C; x; y)

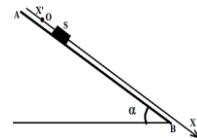
3.2 Déterminer les coordonnées du sommet de la trajectoire et la valeur de la vitesse en ce point.

3.3 Calculer le temps mis par le solide S pour partir de C jusqu'au point P situé sur le sol.

## Exercice 5

Dans l'Exercice on prendra  $g=10m/s$

Un solide S de masse  $m=500g$ , abandonné sans vitesse initiale, glisse sur un plan incliné d'un angle  $\alpha=30^\circ$  par rapport au plan horizontal. On suppose que le solide S est soumis à une force de frottement constante  $\vec{f}$  parallèle à la trajectoire de son centre de gravité G.



1.1 Etablir l'expression de l'accélération  $a_1$  de son centre d'inertie G. En déduire la nature du mouvement.

1.2 Dans le repère  $(x'Ox)$ , établir en fonction de  $a_1$ , l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie G en prenant comme origine des dates l'instant où le solide S est lâché sans vitesse et comme origine des abscisses la position O.

1.3 Calculer la valeur de l'accélération  $a_1$  dans le cas où les frottements sont négligeables.

2 Un dispositif expérimental approprié permet d'enregistrer les positions du centre de gravité G de S à des instants régulièrement espacés de  $\tau=60ms$ .

Les résultats expérimentaux ont permis d'établir le tableau suivant :

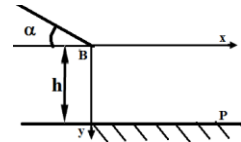
$x_i$ (mm)	0	8,5	33,5	75	133	207,5
$t_i$ (s)	0	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30

2.1 Montrer que les distances parcourues pendant les mêmes intervalles de temps  $\tau$  constituent une suite arithmétique de raison  $r$  et en déduire la valeur  $a_2$  de l'accélération  $\vec{a}$  du mouvement.

2.2 Au cours de cette expérience existe-t-il des frottements ? si oui calculer la valeur de  $\vec{f}$ .

3 Calculer la valeur de la vitesse à la date  $t=3\tau$ .

4 Au point B le solide S quitte le plan AB situé à une hauteur  $h=2\text{m}$  du sol.



4.1 Etablir les équations horaires  $x(t)$  et  $y(t)$  du mouvement de S dans le repère  $(B; x; y)$ . En déduire l'équation de la trajectoire. On prendra pour origine des instants l'instant de passage par B et pour vitesse au point B :  $V_B=1\text{m/s}$ .

4.2 Trouver l'abscisse  $x_P$  du point de chute P sur le sol.

Trouver la valeur  $V_P$  de la vitesse de S au point P.

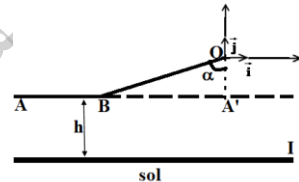
### Exercice 6

On suppose que les frottements sont négligeables.

Une piste est formée de deux parties rectilignes :

-AB horizontale

-BO incliné d'un angle  $\alpha=60^\circ$  par rapport à la verticale et de longueur  $L=3,6\text{m}$ .



1 Un solide S ponctuel de masse  $m$  est lancé du point A avec une vitesse initiale  $\vec{v}_A$ .

1.1 Déterminer la nature du mouvement du solide S sur AB.

1.2 Etudier le mouvement de S sur la partie BO et donner l'expression de son accélération.

1.3 Calculer la valeur minimale que doit avoir  $V_A$  pour que la vitesse de S s'annule en O.

2 Le solide S arrive en O avec une vitesse  $\vec{v}_0$  de module  $V_0=8\text{m/s}$ . Calculer  $V_A$ .

3 Arrivé en O, le solide quitte le plan incliné avec la vitesse  $\vec{v}_0$ .

3.1. Représenter le vecteur  $\vec{v}_0$  puis établir dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , l'équation de la trajectoire de S. Conclure.

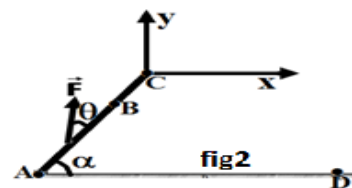
3.2 Le solide S touche le sol au point I, sachant que le plan AB se trouve à une hauteur  $h=1,2\text{m}$  du sol. Déterminer les coordonnées du point I dans le repère.

3.3 Quelle est la durée de cette chute.

3.4 Déterminer les coordonnées du point S où la vitesse du solide est horizontale.

### Exercice 7

Sur un tremplin de surface parfaitement lisse incliné d'un angle  $\alpha=30^\circ$  par rapport à l'horizontale, un jouet S d'enfant constitué d'une petite voiture en partie cassable initialement au repos au point A, est tiré par une force constante  $\vec{F}$ , inclinée d'un angle  $\alpha$  par



rapport au plan du tremplin. Ce jouet S a une masse  $m=100\text{g}$ . (Voir fig2)

On donne  $\cos\theta = 0,8$  ;  $AB = 2\text{m}$  ;  $AC=2,7\text{m}$ .

1. La vitesse atteinte par S au point B après le parcours rectiligne AB est égale à  $V_B=4\text{ m.s}^{-1}$ .

1.1. Calculer la valeur de  $\vec{F}$  .

1.2. Déterminer la nature du mouvement de S sur le trajet AB.

1.3. Au point B, l'action de la force  $\vec{F}$  cesse, le solide poursuit son mouvement rectiligne jusqu'au sommet C du tremplin. Déterminer la nature du mouvement de S sur le trajet BC. Calculer la vitesse de S au point C.

2. Le solide quitte le tremplin au point C, origine du repère  $(C, \vec{i}, \vec{j})$  avec la vitesse  $V_C=3\text{m/s}$

2.1. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de S dans le repère  $(C, \vec{i}, \vec{j})$ . L'instant de passage de S en C est considéré comme origine des dates.

2.2. S atteint le sol au point d'impact D.

2.2.1. Calculer les coordonnées du point D.

2.2.2. Sachant que le solide est brisé s'il touche le sol avec une vitesse supérieure à  $5\text{m/s}$ . Dans quel état se trouve S après la chute.

### Exercice 8

On lance un solide S de masse  $m=400\text{g}$  à partir d'un pont A avec la vitesse  $V_A=4\text{m/s}$  sur un plan AB incliné d'un angle  $\alpha=30^\circ$ . On prendra  $g=10\text{m/s}^2$  ;  $AB=0,7\text{m}$

1 On néglige les frottements sur AB.

1.1 Donner l'expression de l'accélération du solide S et calculer sa valeur.

1.2 Calculer la vitesse au point B.

1.3 Calculer le temps mis entre A et B.

2 On considère que les frottements sur AB

équivalent à une force  $\vec{f}$  tangente à la trajectoire et de sens opposé au mouvement. Le solide S arrive au point B avec la vitesse  $V_B=2\text{m/s}$ .

2.1 Déterminer la valeur de la force de frottement.

2.2 Déterminer la valeur de la réaction R exercée par le plan AB sur le solide.

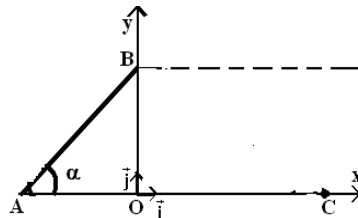
3 Le solide quitte le plan incliné AB au point B avec la vitesse  $V_B=2\text{m/s}$  et effectue un mouvement aérien pour tomber au point C.

3.1 Ecrire dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  l'équation de la trajectoire du saut entre B et C.

3.2 Déterminer les coordonnées du sommet de la trajectoire du saut.

3.3 Déterminer les coordonnées du point C et en déduire la valeur de la distance BC.

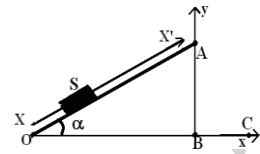
3.4 Déterminer la vitesse du projectile au point C.



## Exercice 9

On lance un solide S de masse  $m=100\text{g}$  avec une vitesse initiale  $V_0$  à partir du point O origine des abscisses de l'axe  $XX'$  confondu avec la ligne de plus grande pente d'un plan OA incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale.

Un dispositif permet de mesurer les vitesses  $V$  à différentes positions d'abscisses  $x$  lors du mouvement du solide.



1 La courbe représente les variations  $V^2=f(x)$  lorsque les frottements sont négligeables.

1.1 Etudier le mouvement du solide S sur le plan OA.

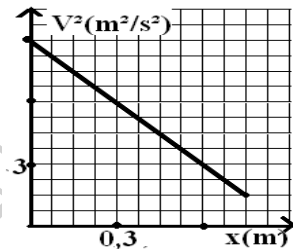
1.2 Ecrire la relation théorique liant  $V^2$  et l'abscisse  $x$ .

1.3 En utilisant la courbe, en déduire :

1.3.1 La valeur de l'angle  $\alpha$ .

1.3.2 La valeur de la vitesse initiale  $V_0$ .

2 Les frottements équivalent à une force constante et opposée au sens du mouvement.



2.1 Etablir la nouvelle expression de l'accélération  $a'$  du centre d'inertie du mobile.

2.2 Calculer l'intensité de la force de frottement sachant que l'énergie cinétique du solide est  $0,2\text{J}$  quand il parcourt la distance  $x=OA=0,4\text{m}$ .

3 Arrivé au point A, le mobile continue son mouvement dans le vide.

3.1 Ecrire dans le repère  $(B;x;y)$  l'équation de la trajectoire du mouvement du mobile à partir du point A.

3.2 Calculer les coordonnées du point C de chute.

## Exercice 10

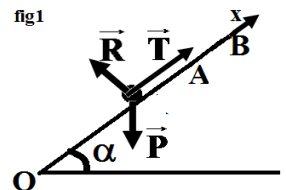
On néglige les frottements et on prendra  $g=10\text{m/s}^2$

On se propose d'étudier le mouvement d'un solide de masse  $m=5\text{kg}$  assujéti à se déplacer le long de la plus grande pente d'un plan incliné d'un angle  $\alpha=30^\circ$  ave l'horizontale (fig1).

On désigne par  $Ox$  l'axe parallèle à la ligne de plus grande pente.

Une force de traction  $\vec{T}$  supposée constante et parallèle à l'axe  $Ox$ , s'exerce sur le solide le long de OA. Mis en mouvement à partir de sa position de repos O, le solide atteint la position A d'abscisse  $x_A=0,5\text{m}$  avec une vitesse  $\vec{V}_A$ .

fig1



1. A partir de A, la force T est supprimée et le solide continue son mouvement jusqu'à l'arrêt au point B.

Sur la fig 1 sont représentées les forces que nous supposons être appliquées au centre d'inertie G du solide au cours de son mouvement entre O et A.

1.1 Montrer que pour une position d'abscisse  $x$  entre O et A, l'énergie mécanique  $E(x)$  du système {solide+Terre} s'écrit  $E(x)=T.x$

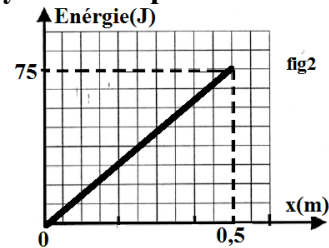
On suppose que l'origine des énergies potentielles de pesanteur correspond au plan horizontal passant par O.

1.2 Le diagramme de l'énergie mécanique  $E(x)$  du système est porté sur la fig 2. Déduire la valeur T.

2.1 Etablir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp}(x)$  du système et celle de l'énergie cinétique  $E_C(x)$  du solide lorsque ce dernier occupe une position d'abscisse  $x$  entre O et A.

2.2 Compléter la fig2 en traçant les diagrammes correspondants à  $E_{pp}(x)$  et  $E_C(x)$ .

3 En déduire la distance entre A et B.



### Exercice 11

On néglige les frottements sauf dans la question 2

Une piste est constituée d'une partie rectiligne inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale telle que la longueur  $BA=6m$ , suivie d'une partie circulaire  $AC$  de rayon  $r=0,5m$ .

L'ensemble de la piste est situé dans un plan vertical (voir figure 1)

1. Le solide (S), de masse 250g, supposé ponctuel, est en mouvement sur le plan incliné. Il est lâché sans vitesse d'un point D situé entre B et A tel que  $DA=L$ .

On suppose que le changement de pente en A ne provoque pas de variation de la vitesse.

1.1 Exprimer la norme de la vitesse  $V_C$  du mobile en C en fonction de  $r, \alpha, L$  et  $g$ .

1.2 Déterminer l'expression de la réaction  $R$  exercée par la piste sur le mobile au point C en fonction de  $m, L, r, \alpha$  et  $g$ .

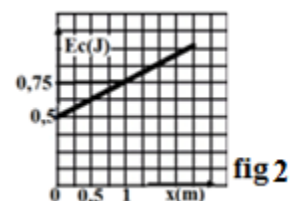
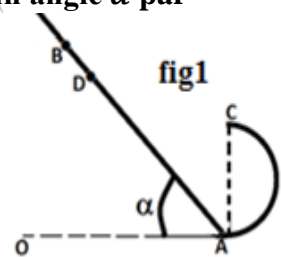
1.3 Pour quelle valeur de  $L$ , le mobile quitte la partie circulaire de la piste en C? On donne  $\sin\alpha = 0,25$

2 Dans une nouvelle expérience, le solide est lâché sans vitesse initiale. Il passe en B avec la vitesse  $V_B$ . Il est soumis, le long du trajet BA, à une force de frottement de valeur constante  $f$ .

A l'aide d'un dispositif approprié, on trace le diagramme de la figure 2 correspondant à la variation de l'énergie cinétique du mobile en fonction de l'abscisse  $x$  comptée à partir du point B.

2.1 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au mobile, entre la position B et une position M du plan incliné d'abscisse  $x$  quelconque, exprimer  $E_C(M)$  en fonction de  $m, g, f, x$  et  $E_C(B)$ .

2.2 En exploitant le diagramme de la figure 3, déterminer les valeurs de la force de frottement et de la vitesse au point B.



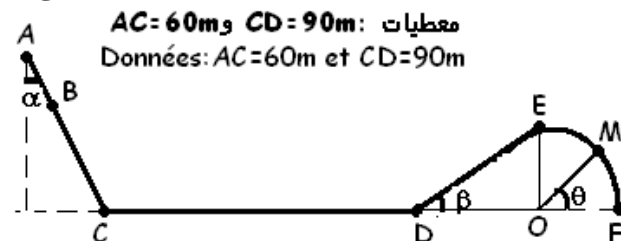
## Exercice 12

Les forces de frottements ne s'exercent qu'entre B et D. On prendra  $g = 10\text{m/s}^2$

Un mobile de masse  $m = 500\text{g}$  se déplace sur le trajet ayant la forme donnée par la fig1.

Le mobile commence sa course au sommet A de la partie rectiligne AC qui fait un angle  $\alpha = 60^\circ$  avec la verticale et arrive au point B avec la vitesse  $V_B = 10\text{m/s}$ .

Fig1



1. Entre les points B et C s'exerce une force de frottement  $\vec{f}_1$  qui ralentit le mouvement. Déterminer l'intensité de cette force  $f_1$  pour que le mobile arrive en C avec une vitesse de valeur double de  $V_B$ .

2. Déterminer la valeur de la vitesse au point D si la force de frottement s'exerçant sur la partie horizontale CD représente le sixième du poids du mobile.

3. Le mobile aborde alors la partie DE qui fait un angle  $\beta = 10^\circ$  avec l'horizontale. Déterminer la longueur  $l$  de cette partie pour que le mobile arrive en E avec une vitesse pratiquement nulle.

4. Arrivé au point E le mobile glisse sans frottement sur le quart du cercle EF de rayon  $r$  et de centre O situé sur la même horizontale CDF.

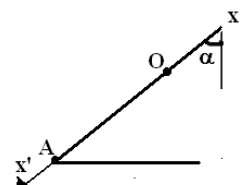
La position du mobile est repérée par l'angle  $\theta = (\vec{OF}, \vec{OM})$ .

Exprimer la vitesse au point M en fonction de  $\theta, l, \beta$  et  $g$

Exprimer en fonction de  $\theta, m$  et  $g$  la valeur de la réaction de la piste sur le mobile au point M.

## Exercice 13

Un solide ponctuel de masse  $m=200\text{g}$  glisse sur un plan OA incliné d'un angle  $\alpha=60^\circ$  par rapport à la verticale. Il part du point O origine de l'axe orienté X'X avec une vitesse initiale de valeur  $V_0$ . Au cours de son mouvement, S subit une force de frottement  $\vec{f}$ .



Un dispositif approprié permet de mesurer la vitesse  $V$  instantanée du solide pour différentes positions  $x$ . La courbe représentative de  $V^2 = f(x)$  est donné par la fig2

1 Déterminer graphiquement l'équation

$$V^2 = f(x).$$

2 En utilisant le théorème de l'énergie cinétique,

établir l'expression de  $V^2$  en fonction de  $x$ .

3 En déduire les valeurs de la force de frottement

$$\bar{f} \text{ et de la vitesse } V_0.$$

4 Au point d'abscisse  $x = 0,5\text{m}$ , l'énergie mécanique  $E$  du système {solide-terre} est égale au double de l'énergie cinétique. En déduire la position adoptée pour le plan de référence de l'énergie potentielle de pesanteur.

5

5.1 Donner l'expression de l'énergie cinétique  $E_C$  et de l'énergie potentielle  $E_P$  du système {solide-terre} en fonction de  $x$ ; en prenant pour référence de l'énergie potentielle le plan horizontal situé à  $0,5\text{ cm}$  en dessous du point  $O$ .

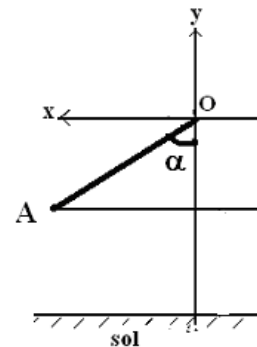
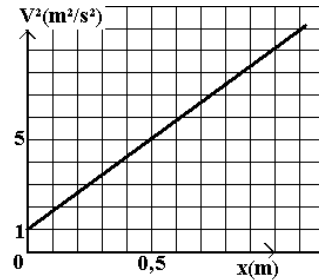
5.2 Sur un même graphique, représenter les courbes  $E_C = f(x)$  et  $E_P = g(x)$  pour les valeurs de  $x$  telles que  $0 \leq x \leq 1\text{m}$ .

5.3 En déduire l'expression de  $E$  en fonction de  $x$  puis tracer la courbe  $E = h(x)$ . On donne  $g = 10\text{m/s}^2$ .

5.4 Le solide quitte le plan incliné en A tel que  $OA = 3\text{m}$ .

5.4.1 Donner les caractéristiques du vecteur vitesse du solide en A.

5.4.2 Déterminer les équations paramétriques du mouvement du solide S dans le repère  $(O; x; y)$  après avoir quitté le plan incliné.

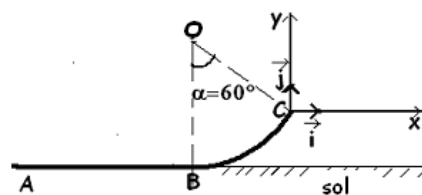


### Exercice 14

Un solide S de masse  $m = 200\text{g}$  se déplace sur une piste ABC, constituée d'une partie rectiligne et horizontale  $AB = 1,6\text{m}$  et d'une partie curviligne BC de centre O et de rayon  $r = 0,7\text{m}$ . (fig1)

1 Le solide quitte le point A sans vitesse initiale sous l'action d'une force constante

$\bar{F}$  qui ne s'exerce qu'entre A et B.



On enregistre à des intervalles de temps réguliers  $\tau = 20\text{ms}$  les positions occupées par le solide et on obtient l'enregistrement de la figure 2 ci-contre :

1.1 Déterminer la nature du mouvement et calculer la valeur expérimentale de son accélération.

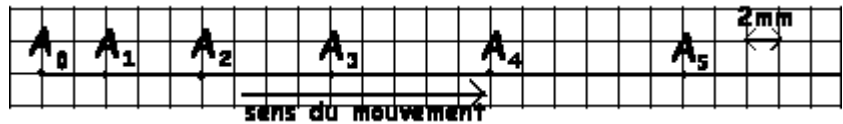


Fig2

1.2 Sachant que la valeur de la force  $\vec{F}$  est  $F = 2\text{N}$  dire est ce que le mouvement se fait sans frottement ou avec frottement. Déterminer la valeur de la réaction exercée par la piste sur le solide ainsi que l'angle  $\beta$  qu'elle fait avec la verticale.

1.3 Calculer la valeur de la vitesse au point B.

2 Le solide continue son mouvement sans frottement sur la partie curviligne BC.

2.1 Déterminer les caractéristiques de la vitesse au point C.

2.2 Calculer la valeur de la réaction  $\vec{R}_C$  qu'exerce la piste sur le solide au point C.

3 Le solide quitte la piste au point C avec la vitesse  $\vec{V}_C$  et effectue un mouvement aérien avant d'atterrir au point D.

3.1 Déterminer l'équation de la trajectoire dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

3.2 déterminer les coordonnées des points le plus haut et le plus bas de la trajectoire.

### Exercice 15

*Les frottements sont négligeables.*

On étudie le mouvement d'un solide S sur une piste, constituée d'une partie rectiligne  $AB = \ell$  et d'une partie BC représentant la moitié d'un cercle de centre O et de rayon r ( fig 1).

On exerce entre A et B sur le solide S, qui était au repos en A, une force  $\vec{F}$  horizontale d'intensité constante.

1 Déterminer la nature du mouvement entre A et B et exprimer en fonction de F,  $\ell$  et m la vitesse  $V_B$  du solide au point B.

2 Déterminer en fonction de F,  $\ell$ , m, r, g et  $\theta$  l'expression de la vitesse au point M défini par l'angle  $\theta = (\overline{OB}; \overline{OM})$ .

3 Déterminer en fonction de  $F, \ell, m, r, g$  et  $\theta$  l'expression de la réaction  $R$  au point  $M$ .

Calculer la valeur minimale  $F_m$  de  $F$  qui permet que  $S$  atteigne le point  $C$ .

4 On donne à  $F$  la valeur  $F_0 = 7/3 \text{ N}$ .

4.1 Le solide  $S$  perd contact avec la piste au point  $D$  dont la position est définie par l'angle  $\theta_0 = (\overline{OB}; \overline{OD})$ . Déterminer l'angle  $\theta_0$  et calculer la vitesse  $V_D$  en ce point  $D$ .

4.2 Etablir dans le repère  $(D; x; y)$  de la fig 2 l'équation de la trajectoire du solide  $S$ .

4.3 Calculer l'abscisse du point  $I$  d'impact du solide  $S$  sur le plan horizontal

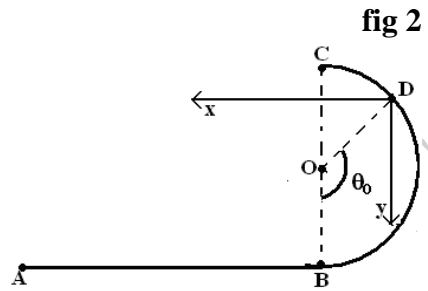
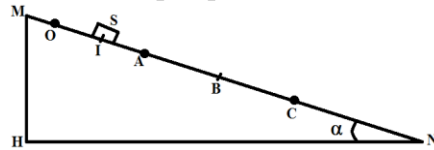


fig 2

### Exercice 16

Un solide  $S$  de masse  $m=500\text{g}$ , abandonné sans vitesse initiale, glisse sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport au plan horizontal. Il part du point  $O$  sans vitesse initiale et passe entre deux cellules  $A$  et  $C$ . Un index  $I$  solidaire du solide  $S$ , déclenche un chronomètre au passage en  $A$  et l'arrête en  $C$ .



La durée enregistrée par le chronomètre est  $\Delta t = 0,05\text{s}$ .

On pourra considérer que la mesure de la vitesse entre  $A$  et  $C$  permet de connaître avec une bonne précision la vitesse instantanée en  $B$  milieu de  $AC$  (voir fig1). On donne  $OB=1\text{m}$  ;  $AC=0,1\text{m}$ ,  $MN=2\text{m}$  ;  $MH=0,6\text{m}$ .

1. Calculer l'angle  $\alpha$ .

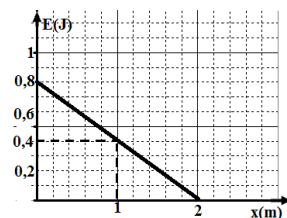
2.1 Calculer la variation de l'énergie cinétique du solide entre  $A$  et  $B$  puis la somme des travaux des forces appliquées en négligeant les frottements.

2.2 Que peut-on affirmer à propos de ce résultat.

3. Par application du théorème de l'énergie cinétique, en déduire la valeur de la force de frottement que l'on supposera constante et parallèle à la ligne de plus grande pente du plan incliné.

4. Sur la figure 2 on donne la représentation

graphique de l'énergie mécanique  $E$  du système {solide, terre} en fonction de  $x$ .



4.1. Déterminer graphiquement l'expression de  $E$  en fonction de  $x$ ; la retrouver théoriquement.

4.2. En déduire la position du plan de référence des énergies potentielles de pesanteur par rapport au point  $O$ .

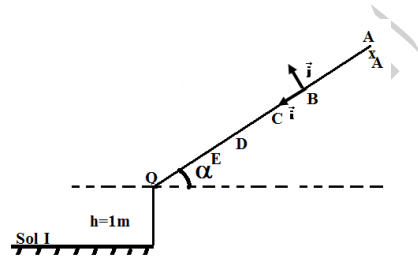
4.3. Etablir les expressions analytiques de l'énergie potentielle  $E_P$  et de l'énergie cinétique  $E_C$  en fonction de  $x$ . En déduire la position où l'on a  $E_C = E_P$ .

### Exercice 17

Un solide  $S$  de masse  $m=0,14\text{kg}$  se déplace sur une piste rectiligne inclinée d'un angle  $\alpha=10^\circ$  par rapport à l'horizontale. Le solide  $S$  est lâché sans vitesse initiale du point  $A$  d'abscisse  $x_A$  définie

relativement au repère  $(B; \vec{i}; \vec{j})$ . Arrivé au point

$O$ , il s'engage dans un mouvement de chute parabolique où tout type de frottement est négligeable et rencontre le sol au point  $I$  tel que la différence d'altitude entre les points  $O$  et  $I$  est  $h=1\text{m}$  comme l'indique la fig 1.



Les frottements auxquels est soumis le solide  $S$  au cours de son mouvement entre les points  $A$  et  $O$  sont équivalents à une force  $\vec{f}$  d'intensité supposée constante

A l'aide d'un dispositif approprié on détermine la vitesse instantanée du solide  $S$  lors de son passage par les points  $B, C, D, E$  et  $O$  d'abscisses respectives  $0\text{m}; 0,2\text{m}; 0,4\text{m}; 0,6\text{m}; 0,8\text{m}$ . Ceci permet de tracer le diagramme de la fig 2 correspondant à l'énergie cinétique du solide  $S$  en fonction de l'abscisse  $x$ .

1 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au solide entre la position  $B$  et une position quelconque  $M$  d'abscisse  $x$  par rapport au repère  $(B; \vec{i})$ , montrer que :

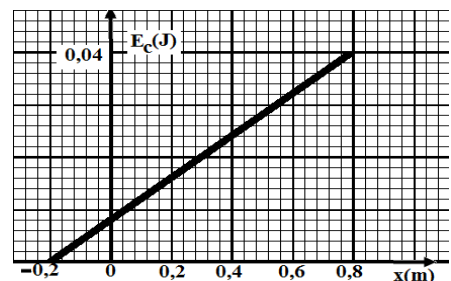
$$E_C(x) = mgx \sin \alpha - fx + E_{CB}$$

2 En utilisant le diagramme de la fig 2 déterminer l'intensité de la force de frottement et la valeur de l'abscisse  $x_A$  du point  $A$ . On donne  $g=9,8\text{m/s}^2$ .

3 Montrer que l'énergie mécanique  $E_m$  du système  $\{\text{terre}+S\}$  est conservée au cours du mouvement de chute parabolique.

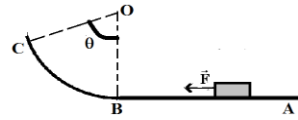
4 Calculer la valeur de  $E_m$  sachant que l'énergie potentielle de pesanteur au sol est nulle.

En déduire la valeur de la vitesse avec laquelle le solide percute le sol en  $I$ .



## Exercice 18

Un solide ponctuel de masse  $m=500\text{g}$  glisse sur un trajet constitué d'un plan horizontal AB de longueur  $L=2\text{m}$  et d'un arc de cercle BC de rayon  $r = 10\text{cm}$ . (fig1)



On enregistre le mouvement de ce solide sur la partie AB pendant des intervalles de temps successifs et

égaux  $\tau=50\text{ms}$ . Le document de la

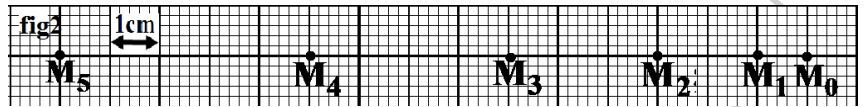


fig2 représente cet enregistrement.

- 1 Calculer les vitesses aux points  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$ .
- 2 Calculer les accélérations aux points  $M_2$  et  $M_3$ , en déduire la nature de ce mouvement.
- 3 A l'instant  $t=0$ , le solide S quitte le point A sans vitesse initiale sous l'action d'une force  $\vec{F}$  constante et parallèle au plan horizontal AB.
  - 3.1 Donner l'énoncé du théorème de l'énergie cinétique.
  - 3.2 Calculer la valeur de la force horizontale  $\vec{F}$  sachant que la force de frottement est supposée négligeable.
  - 3.3 Les frottements ne sont plus négligeables et sont supposés équivalents à une force  $\vec{f}$  unique parallèle au plan AB et de sens opposé à celui du mouvement. Calculer l'intensité  $f$  de cette force de frottement  $\vec{f}$ , si  $F$  garde la valeur précédente et si  $V_B = 2\text{m/s}$ .
  - 3.4 Calculer la valeur de la réaction  $R$  exercée par le plan AB ainsi que l'angle qu'elle fait avec la normale à ce plan.
4. La force  $\vec{F}$  ne s'exerce plus sur le solide lors de son déplacement qui se fait sans frottement sur l'arc  $\widehat{BC}$ .
  - 4.1. Exprimer la vitesse  $V_C$  au point C en fonction de  $V_B$ ,  $r$ ,  $g$  et  $\theta$ .
  - 4.2. Calculer sa valeur pour  $\theta = 60^\circ$ .

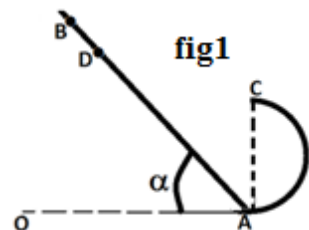
## Exercice 19

On néglige les frottements sauf dans la question 3

Une piste est constituée d'une partie rectiligne inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale telle que la longueur  $BA=6\text{m}$ , suivie d'une partie circulaire AC de rayon  $r = 0,5\text{m}$ .

L'ensemble de la piste est situé dans un plan vertical (voir figure 1)

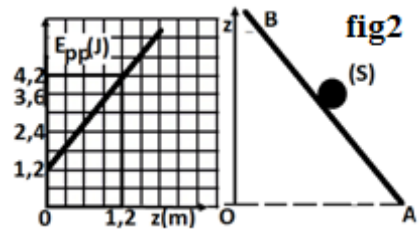
On considère le système : {solide (S), terre}



1 Le solide (S), de masse 250g, supposé ponctuel, est en mouvement sur le plan incliné

1.1 Ecrire, en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $z$  et  $E_{pp0}$ , l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp}$  du système ( $E_{pp0}$  représente la valeur de l'énergie potentielle de pesanteur du système au niveau du plan horizontal passant par O et A).

1.2 L'étude de la variation de  $E_{pp}$  en fonction de l'altitude  $z$ , a donné la courbe de la figure 2 qui vérifie l'équation d'une droite:  $E_{pp} = az + b$  ( $E_{pp}$  en J et  $z$  en m). Déduire les valeurs de  $a$  et  $b$ .



1.3 Déduire les valeurs de l'accélération de pesanteur  $g$ , de  $E_{pp0}$  et de l'altitude  $z_0$  qui correspond à  $E_{pp} = 0$ .

2 Le mobile est lâché maintenant sans vitesse d'un point D situé entre B et A tel que  $DA = L$ .

On suppose que le changement de pente en A ne provoque pas de variation de la vitesse.

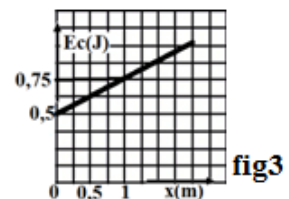
2.1 Exprimer la norme de la vitesse  $V_C$  du mobile au point C en fonction de  $r$ ,  $\alpha$ ,  $L$  et  $g$ .

2.2 Déterminer l'expression de la réaction  $R$  exercée par la piste sur le mobile au point C en fonction de  $m$ ,  $L$ ,  $r$ ,  $\alpha$  et  $g$ .

2.3 Pour quelle valeur de  $L$ , le mobile quitte la partie circulaire de la piste en C? On donne  $\sin \alpha = 0,25$

3 Dans une nouvelle expérience, le solide est lâché sans vitesse initiale. Il passe en B avec la vitesse  $V_B$ . Il est soumis, le long du trajet BA, à une force de frottement de valeur constante  $f$ .

A l'aide d'un dispositif approprié, on trace le diagramme de la figure 3 correspondant à la variation de l'énergie cinétique du mobile en fonction de l'abscisse  $x$  comptée à partir du point B.



3.1 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au mobile, entre la position B et une position M du plan incliné d'abscisse  $x$  quelconque, exprimer  $E_c(M)$  en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $f$ ,  $x$  et  $E_c(B)$ .

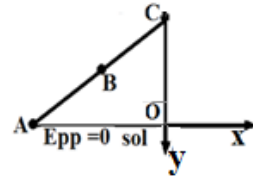
3.2 En exploitant le diagramme de la figure 3, déterminer les valeurs de la force de frottement et de la vitesse au point B.

## Exercice 20

On considère un solide de masse  $m=5\text{kg}$  en mouvement sur une piste inclinée d'un angle  $\alpha=60^\circ$  par rapport à la verticale.

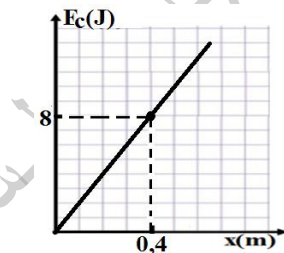
Sous l'action d'une force motrice  $\vec{F}$  supposée constante et parallèle à la ligne de plus grande pente, le solide quitte la position A avec une vitesse nulle pour atteindre la position B telle que  $AB=8\text{m}$  avec une vitesse  $V_B$ .

Le solide est soumis constamment lors de son mouvement sur AC à une force de frottement de module  $f=5\text{N}$ .



1 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, établir l'expression de l'énergie cinétique  $E_C$  en un point d'abscisse  $x$  situé entre A et B en fonction de l'abscisse  $x$ , des forces  $F$  et  $f$ , de l'angle  $\alpha$  de la masse  $m$  et de  $g$ .

2 Le diagramme de la variation de l'énergie cinétique est donné par la courbe  $E_C = f(x)$ .



2.1 Déterminer la valeur de la force motrice  $F$ .

2.2 Etablir en fonction de  $x$ , l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_P(x)$  et celle de l'énergie mécanique  $E_m(x)$  du solide lorsque ce dernier occupe une position d'abscisse  $x$  entre A et B.

2.3 Compléter la figure en traçant les diagrammes correspondants à  $E_P(x)$  et  $E_m(x)$ .

3 Calculer la valeur de la vitesse au point B.

4 Lorsque le solide passe en B la force motrice est supprimée. Il continue alors son mouvement pour atteindre le point C avec une vitesse  $V_C$ . Montrer que le système {solide + Terre} n'est pas conservatif. En déduire la distance BC si la valeur de la vitesse au point C est  $V_C=4\text{m/s}$ .

5 Arrivé en C, le solide quitte le plan incliné avec la vitesse  $\vec{V}_C$ .

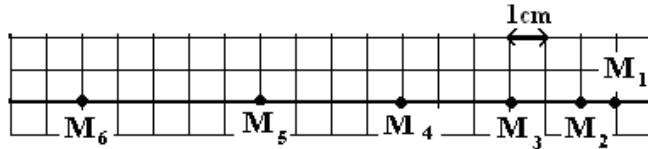
5.1. Représenter le vecteur  $\vec{V}_C$  puis établir dans le repère  $(O, x, y)$ , l'expression de l'équation de la trajectoire du solide si l'origine des instants est l'instant d'arrivée au point C. Conclure.

5.2 Le solide S arrive au point I sur le sol. Calculer la valeur de la vitesse  $\vec{V}_I$  d'arrivée au point I ainsi que l'angle  $\alpha$  qu'elle fait avec l'axe des abscisses.

## Exercice 21

On donne  $g=10\text{m/s}^2$ .

Un solide ponctuel de masse  $m=500\text{g}$  glisse sur un plan AO incliné d'un angle  $\alpha=30^\circ$  par rapport à l'horizontale. On enregistre le mouvement de ce solide pendant des intervalles de temps successifs et égaux  $\theta=50\text{ms}$ . Le



document de la fig1 représente cet enregistrement.

1 Calculer les vitesses aux points  $M_2$ ;  $M_3$ ;  $M_4$  et  $M_5$  .

2 Calculer les accélérations aux points  $M_3$ ;  $M_4$  , en déduire la nature de son mouvement.

3 Le mouvement se fait-il avec frottement ? Si la réponse est positive déterminer la valeur de cette force de frottement  $f$ .

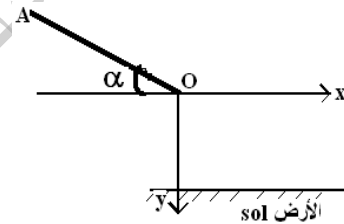
4 Le solide quitte le plan incliné au point O avec la vitesse  $V_0 = 2\text{m.s}^{-1}$  et continue son mouvement dans le vide. (voir fig 2)

4.1 Préciser la direction et le sens du vecteur  $\vec{V}_0$  .

4.2 Etudier le mouvement du solide S et calculer l'équation de sa trajectoire.

4.3 Déterminer les coordonnées du point de chute du solide s'il a mis 0,5s pour effectuer son mouvement dans le vide.

4.4 En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, trouver la vitesse au point de chute.



**Corrigé de l'Exercice1**

1.1 Calcul de la vitesse  $V_B$ .

$$\frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = -mgBC \cos \theta \Rightarrow V_B = \sqrt{-2gBC \cos \theta} = 20\text{m/s}$$

1.2 Calcul de F :

$$\frac{1}{2}mV_B^2 = FAB \Rightarrow F = \frac{mV_B^2}{2AB} = 800\text{N}$$

1.1 Nature du mouvement entre B et C

Nature du mouvement :  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a}$

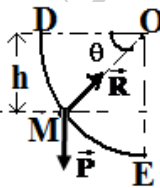
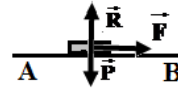
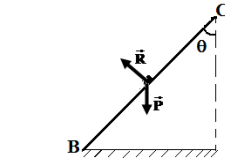
par projection sur  $\vec{AB}$  on obtient :  $-P \cos \alpha = ma \Rightarrow a = -g \cos \theta$  m.r.u.v

2.1.1 Expression de  $V_M$  En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, on obtient :

$$\frac{1}{2}mV_M^2 - \frac{1}{2}mV_D^2 = mgh \text{ avec } h = r \sin \alpha \text{ et}$$

$$\text{soit } v_M = \sqrt{V_D^2 + 2gr \sin \theta}$$

$$\text{Au point E : } V_E = \sqrt{V_D^2 + 2gr} \text{ car } \theta_E = \frac{\pi}{2} \text{ soit } V_E = 12\text{m/s}$$



2.1.2 Expression de la réaction.

En appliquant la R.F.D, on obtient :  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

Par projection sur la normale on trouve  $-P \sin \alpha + R = ma_n$  avec  $a_n = \frac{V_M^2}{r}$  soit

$$R = 3mg \sin \theta + \frac{mV_D^2}{r}$$

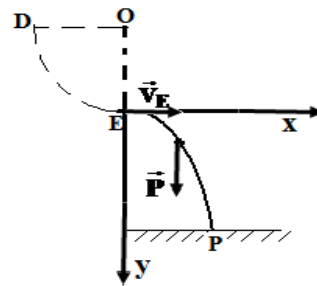
2.2.1 Etude du mouvement après E :

$$\text{Conditions initiales : } \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \vec{v}_E \begin{cases} v_{Ex} = V_E \\ v_{Ey} = 0 \end{cases}$$

En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = V_E \\ v_y = gt \end{cases} \Rightarrow \overline{EM} \begin{cases} x = V_E t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$



L'équation de la trajectoire : (1) donne  $t = \frac{x}{V_E}$  en remplaçant dans (2), on

$$\text{trouve : } y = \frac{g}{2V_E^2} x^2 = 0,035x^2 \quad (3)$$

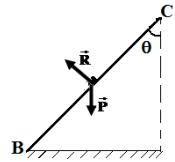
2.2.2 L'abscisse du point P : au point  $y_P = h$  en remplaçant dans (3), on trouve :

$$x_P = V_E \sqrt{2 \frac{y_P}{g}} \text{ avec } y_P = h = 5\text{m A.N : } x_P = 12\text{m}$$

Corrigé de l'Exercice2

1.1. Nature du mouvement du solide S :

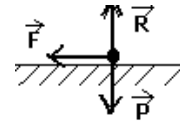
D'après l'enregistrement les distances parcourues forment une progression arithmétique de raison  $r=10^{-3}$ , le mouvement est donc un m. r. u.v d'accélération  $a=r/\theta^2$  où  $\theta = 2.10^{-2}$  s est l'intervalle de temps. Soit  $a=2.5m/s^2$ .



1.2 Calcul de la force F :

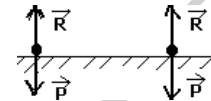
$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow F=ma \quad \text{A.N : } F=0,25N$$



2.1 La vitesse du solide S au point C :

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow \Delta E_C = 0 \Leftrightarrow V_C = V_B = 3m/s.$$



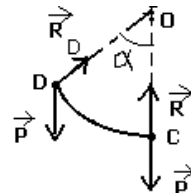
2.2 Les caractéristiques de  $\vec{V}_D$  et de  $\vec{R}_D$  :

❖ Les caractéristiques de  $\vec{V}_D$  :

- Direction : elle fait l'angle  $\alpha$  avec l'horizontale.
- Sens : vers le haut.
- Origine : le point D.
- Valeur :

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_{cD} - E_{cC} = mgh \text{ avec } h=r(1-\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow V_D = \sqrt{V_C^2 - 2gr(1-\cos\alpha)} \quad \text{A.N : } V_D=2m/s$$



❖ Les caractéristiques de  $\vec{R}_D$

- Direction : la normale
- Sens : centripète
- Origine : le point D
- Valeur :  $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R}_D = m\vec{a}$

Par projection suivant la normale on obtient :

$$R_D - P\cos\alpha = mV_D^2/r$$

$$R_D = mg(3\cos\alpha - 2) + mV_C^2/r \quad \text{A.N : } R_D = 1,3N$$

3.1 Etude du mouvement dans le vide :

- La seule force qui s'exerce est le poids
- La RFD :  $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$

Par projection :

- Sur Dx

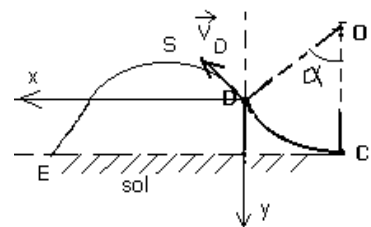
$$a_x = 0 \Rightarrow v_x = v_D\cos\alpha \Rightarrow x = v_D\cos\alpha t$$

- Sur Dy

$$a_y = g \Rightarrow v_y = gt - v_D\sin\alpha \Rightarrow y = \frac{1}{2}gt^2 - v_D\sin\alpha t$$

Equation de la trajectoire :  $t = x / v_0\cos\alpha$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}gx^2 / v_D^2\cos^2\alpha - \tan\alpha.x \quad \text{A.N : } y=5x^2-1,7x$$



### 3.2 Les coordonnées du sommet S de la trajectoire :

Au sommet  $dy/dx=0 \Rightarrow x_S = v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha / g$  A.N :  $x_S = 0,17m$

et  $y_S = -v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g$   $y_S = -0,15m$

### 3.3 L'abscisse du point E de chute sur le sol :

L'ordonnée du point E est  $y_E = r(1 - \cos \alpha)$  en remplaçant dans l'équation de la trajectoire ; on obtient :  $x_E = 0,46m$

### 3.4 Calcul de la vitesse du solide S au point E :

Au point D :  $E_D = \frac{1}{2} m V_D^2 + mgr(1 - \cos \alpha)$

Au point E :  $E_E = \frac{1}{2} m V_E^2$

Comme il y'a conservation de l'énergie mécanique, on peut écrire :

$\frac{1}{2} m V_E^2 = \frac{1}{2} m V_D^2 + mgr(1 - \cos \alpha)$  A.N :  $V_E = 3m/s$ .

### Corrigé de l'Exercice 3

#### 1 Nature du mouvement :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Par projection sur  $AB$  on obtient :  $-P \cos \alpha - f = ma$

$$\Rightarrow a = -g \cos \alpha - \frac{g}{4} = -\frac{3}{4}g \text{ m.r.u.v A.N : } a = -7,5m/s^2$$

#### 2 Calcul de la vitesse de lancement.

$$V_B^2 - V_A^2 = 2a \cdot AB \Rightarrow V_A = \sqrt{-2a \cdot AB} \text{ car si } V_B = 0, V_A \text{ est minimale or } AB = \frac{OD}{\cos \alpha}$$

$$\text{soit } V_A = \sqrt{\frac{3g \cdot OD}{2 \cos \alpha}} \text{ A.N : } V = 7,75m/s.$$

#### 3.1 Expression de $V_M$

En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, on obtient :

$$\frac{1}{2} m V_M^2 - \frac{1}{2} m V_B^2 = mgh \text{ avec } h = r \sin \alpha \text{ et } V_B = 0 \text{ soit}$$

$$V_M = \sqrt{2gr \sin \alpha} = 3,16m/s$$

#### 3.2 Expression de la réaction. En appliquant la R.F.D, on

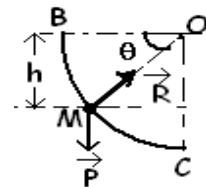
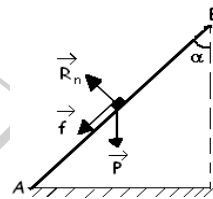
obtient :  $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

Par projection sur la normale on trouve

$$-P \sin \alpha + R = m a_n \text{ avec } a_n = \frac{V_M^2}{r} \text{ soit } R = 3mg \sin \alpha \text{ A.N : } R = 3N$$

#### 4. Caractéristiques du vecteur $\vec{V}_C$ :

$$\vec{V}_C \begin{cases} \text{-direction: horizontale } Ox \\ \text{-sens: celui de } O\vec{x} \\ \text{-origine: le point } C \\ \text{-module: } V_C = \sqrt{2gr} = 4,5m/s \end{cases}$$



5.1 Conditions initiales

$$C \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = OC = r \end{cases} \vec{V}_C \begin{cases} V_{Cx} = V_C \\ V_{Cy} = 0 \end{cases}$$

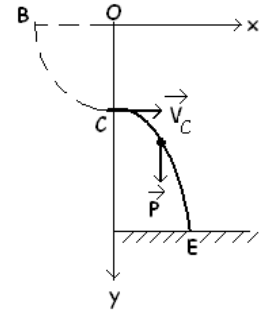
En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases} \Rightarrow \vec{V} \begin{cases} V_x = V_C \\ V_y = gt \end{cases} \Rightarrow O\vec{M} \begin{cases} x = V_C t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 + r \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

L'équation de la trajectoire :(1) donne  $t = \frac{x}{V_C}$  en

remplaçant dans (2), on trouve :  $y = \frac{g}{2V_C^2}x^2 + r$  (3)



5.2 L'abscisse du point E :

Au point E , on a  $y_E = OD = 2r$  en remplaçant dans(3), on trouve :

$$x_E = \sqrt{2r \frac{V_C^2}{g}} \quad \text{A.N : } x_E = 2m$$

Corrigé de l'Exercice4

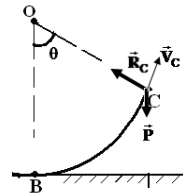
1 La nature du mouvement

- La RFD  $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$
- Projection sur l'axe  $x'x$  :  $0 + 0 = ma \Rightarrow a = 0$

Donc le mouvement est rectiligne uniforme.

Calcul de la vitesse  $V_A$  :

$$x = V_A t + x_0 \Rightarrow V_A = \frac{x - x_0}{t} \quad \text{A.N : } V_A = 7m/s$$



2.1 Caractéristiques de  $\vec{V}_C$  :

- Direction : elle fait l'angle  $\theta$  avec l'horizontale.
- Sens : vers le haut.
- Origine : le point C.
- Valeur :  $\Delta E_c = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_{cC} - E_{cB} = - mgh$  avec  $h=r(1-\cos\alpha)$

$$\Rightarrow V_C = \sqrt{V_B^2 - 2gr(1 - \cos\theta)} \quad \text{A.N : } V_C = 6m/s$$

2.2 Expression de  $R_C$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R}_C = m\vec{a}$$

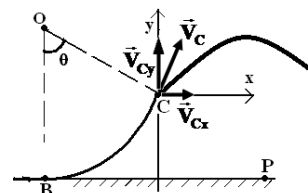
Par projection sur la normale, on obtient :

$$-mg \cos \theta + R_C = m \frac{V_C^2}{r} \quad R_C = m(g \cos \theta + \frac{V_C^2}{r})$$

$$\text{A.N : } R_C = 5,5N$$

3.1 Etude du mouvement du solide S dans le vide :

- La seule force qui s'exerce est le poids
- La RFD :  $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$



En projetant a suivant les axes :

- Sur Cx  $a_x = 0$   $V_x = V_C \cos \theta$   $x = V_C \cos \theta t$  (1)

- Sur Cy  $a_y = -g$   $V_y = -gt + V_C \sin \theta$   $y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_C \sin \theta t$  (2)

Equation de la trajectoire :

$$(1) \Rightarrow t = x / v_0 \cos \theta \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gx^2 / V_C^2 \cos^2 \theta + \tan \theta \cdot x \quad \text{A.N : } y = -0,56x^2 + 1,7x$$

3.2 Les coordonnées du sommet S de la trajectoire :

Au sommet  $dy/dx = 0 \Rightarrow x_S = V_C^2 \sin \theta \cos \theta / g$  A.N :  $x_S = 1,56m$

et  $y_S = v_0^2 \sin^2 \theta / 2g$   $y_S = 1,35m$

La vitesse au point S :  $V_S = V_x = V_C \cos \theta = 3m/s$

3.3 Durée du mouvement :

$$Y = -r(1 - \cos \theta) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_C \sin \theta t \Leftrightarrow -5t^2 + 5,16t + 0,65 = 0 \quad \sqrt{\Delta} = 6,3 \text{ soit } t = 1,14s$$

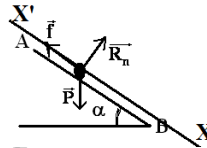
### Corrigé de l'Exercice 5

1.1 L'expression de l'accélération  $a_1$  si f n'est pas négligeable:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_1 \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a}_1$$

par projection sur  $\overline{X'X}$  on obtient :

$$-f + P \sin \alpha = ma_1 \Rightarrow a_1 = g \sin \alpha - \frac{f}{m}$$



1.2. Comme  $a = \text{cte}$

$$\Rightarrow \text{m.r.u.v} \Rightarrow x = \frac{1}{2}a_1 t^2 + \underbrace{v_0 t}_0 + \underbrace{x_0}_0 \text{ soit } x = \frac{1}{2}a_1 t^2$$

1.3 Dédution de l'accélération  $a_2$  si f est négligeable:

Si  $f=0$  l'expression de  $a_1$  devient :  $a_1 = g \sin \alpha = 5m/s^2$

2.1 Montrons que les distances parcourues pendant les intervalles de temps forment une suite arithmétique de raison r :

Les distances parcourues pendant  $\tau$  sont :

$$d_1 = 8,5mm; d_2 = 33,5 - 8,5 = 25mm;$$

$$d_3 = 75 - 33,5 = 41,5mm; d_4 = 133 - 75 = 58mm; d_5 = 207,133 - 74,5mm;$$

$$\text{La raison : } d_2 - d_1 = 16,5mm; d_3 - d_2 = 16,5mm; d_4 - d_3 = 16,5mm; d_5 - d_4 = 16,5mm.$$

Donc ces distantes forment une suite arithmétique de raison  $r = 16,5mm$ .

$$\text{Déduisons } a_2 : r = a\tau^2 \Rightarrow a_2 = \frac{r}{\tau^2} = 4,58m/s^2$$

2.2 Comme  $a_2 < a_1$  il y'a frottement.

La valeur de f :

$$a_2 = -\frac{f}{m} + g \sin \alpha \Rightarrow f = mg \sin \alpha - ma_2 \quad \text{Soit : } f = 0,21N.$$

3 Calcul de V :

$$V = a_2 t = 3a_2 \tau = 0,82m/s$$

4.1 Les équations horaires du mouvement à partir du point B :

Conditions initiales :

$$B \begin{cases} x_0 = x_B = 0 \\ y_0 = y_B = 0 \end{cases} \quad \vec{V}_B \begin{cases} V_{Bx} = V_B \cos \alpha \\ V_{By} = V_B \sin \alpha \end{cases}$$

En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_B \cos \alpha \\ v_y = gt + v_B \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \overline{BM} \begin{cases} x = v_B \cos \alpha t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 + v_B \sin \alpha t \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{soit } \overline{BM} \begin{cases} x = 0,87t & (1) \\ y = 5t^2 + 0,5t & (2) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire :

$$\text{L'équation (1) donne : } t = \frac{x}{v_B \cos \alpha}$$

En remplaçant dans (2), on trouve l'équation de la trajectoire :

$$y = \frac{g}{2v_B^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha \quad \text{Soit } y = 6,67x^2 + 0,58x \quad (3)$$

4.2 Calcul de l'abscisse du point de chute P :

L'équation (3) donne :

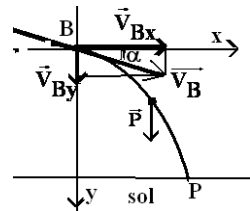
$$y_P = 6,67x^2 + 0,58x \text{ or } y_P = h = 2 \Leftrightarrow 6,67x^2 + 0,58x - 2 = 0$$

$$\Delta = (0,58)^2 - 4 \cdot 6,67 \cdot (-2) \text{ Soit } x_P \approx 0,6m$$

4.3 Calcul de la vitesse  $V_P$ :

Par application du théorème de l'énergie cinétique entre B et P, on trouve :

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_{C_P} - E_{C_B} = W_{\vec{P}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mV_P^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = mgh \Rightarrow V_P = \sqrt{V_B^2 + 2gh} \text{ Soit } V_P = 6,4m/s$$



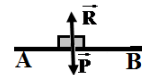
### Corrigé de l'Exercice6

1.1 Nature du mouvement sur AB :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

On projette suivant  $\overline{AB}$

$$0 + 0 = ma \Rightarrow a = 0 \text{ m.r.u}$$

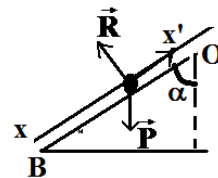


1.2 L'expression de l'accélération a :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

par projection sur  $\overline{xx'}$  on obtient :

$$-P \cos \alpha = ma \Rightarrow a = -g \cos \alpha$$



1.3 La valeur minimale de la vitesse :

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_{C_O} - E_{C_B} = W_{\vec{P}} \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}mV_B^2 = -mgh \Rightarrow V_A = \sqrt{2gh}$$

$$\text{car } V_B = V_A \text{ comme } h = L \cos \alpha; \text{ il vient } V_A = \sqrt{2gL \cos \alpha} = 6m/s$$

2 Calcul de  $V_A$

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_{C_0} - E_{C_B} = W_{\vec{P}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = -mgh$$

$$\text{Soit } V_A = \sqrt{V_0^2 + 2gL \cos \alpha} = 10m/s$$

### 3.1 L'équation de la trajectoire :

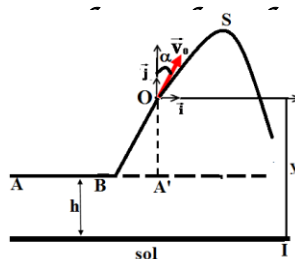
Conditions initiales :

$$O \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \vec{V}_0 \begin{cases} V_{0x} = V_0 \sin \alpha \\ V_{0y} = V_0 \cos \alpha \end{cases}$$

En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{V} \begin{cases} V_x = V_0 \sin \alpha \\ V_y = -gt + V_0 \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} \begin{cases} x = V_0 \sin \alpha t & (1) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \cos \alpha t & (2) \end{cases}$$



L'équation de la trajectoire : L'équation (1) donne :  $t = \frac{x}{V_0 \sin \alpha}$

en remplaçant dans (2), on trouve l'équation de la trajectoire :

$$y = -\frac{g}{2V_0^2 \sin^2 \alpha} x^2 + x \cot \alpha \quad \text{Soit } y = -0,1x^2 + 0,58x$$

### 3.2 Les coordonnées de I

$$Y_I = -A'O - h = -OB \cos \alpha - h = -3$$

On remplace dans l'équation de la trajectoire :

$$-3 = -0,1x^2 + 0,58x \Leftrightarrow -0,1x^2 + 0,58x + 3 = 0$$

$$\Delta = 0,58^2 + 4 \cdot 0,1 \cdot 3 \approx 1,24^2$$

$$\text{Soit } x_I = 9,1 \text{ m d'où } I(9,1 ; -3)$$

### 3.3 La durée de la chute

$$t_I = \frac{x_I}{V_0 \sin \alpha} = \frac{9,1}{8,0,87} = 1,3 \text{ s}$$

### 3.4 Les coordonnées de S

$$\text{Au point S } V_{Sy} = 0 \text{ soit } t_S = \frac{V_0 \cos \alpha}{g} = 0,4 \text{ s}$$

$$\text{soit S } \begin{cases} x = 8,0,87 \cdot 0,4 = 2,78 \text{ m} \\ y = -5,0,4^2 + 8,0,50,4 = 0,8 \text{ m} \end{cases}$$

## Corrigé de l'Exercice 7

### 1.1 Calcul de F :

$$\frac{1}{2} m V_B^2 = -mgAB \sin \alpha + FAB \cos \theta$$

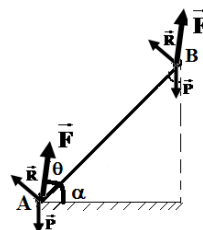
$$\Rightarrow F = \frac{m V_B^2 + 2mgAB \sin \alpha}{2AB} = 1,125 \text{ N}$$

### 1.2. Nature du mouvement entre A et B

$$\text{Nature du mouvement : } \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$$

par projection sur  $\overrightarrow{AB}$  on obtient :

$$-P \sin \alpha + F \cos \theta = ma \Rightarrow a = \frac{-P \sin \alpha + F \cos \theta}{m} = 4 \text{ m/s}^2 \text{ m.r.u.v}$$



1.3. Nature du mouvement :

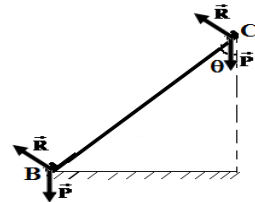
$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

par projection sur  $\overline{AB}$  on obtient :  $-P \sin \alpha = ma \Rightarrow a = -g \sin \alpha = -5 \text{ m/s}^2$

Expression de  $V_C$  En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, on obtient :

$$\frac{1}{2} m V_C^2 - \frac{1}{2} m V_B^2 = -mgh \quad \text{avec } h = BC \sin \alpha$$

$$\text{Soit } V_C = \sqrt{V_B^2 - 2gBC \sin \alpha} = 3 \text{ m/s}$$



2.1. Etude du mouvement après C :

Conditions initiales :

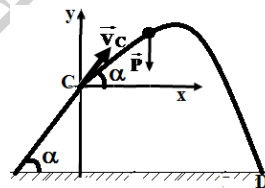
$$C \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \vec{V}_C \begin{cases} V_{Cx} = V_C \cos \alpha \\ V_{Cy} = V_C \sin \alpha \end{cases}$$

En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{V} \begin{cases} V_x = V_C \cos \alpha \\ V_y = -gt + V_C \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{CM} \begin{cases} x = V_C \cos \alpha t \quad (1) \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_C \sin \alpha t \quad (2) \end{cases}$$



L'équation de la trajectoire :(1) donne  $t = \frac{x}{V_C \cos \alpha}$  en remplaçant dans (2), on

$$\text{trouve : } y = -\frac{g}{2V_C^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha \quad -0,74x^2 + 0,58x \quad (3)$$

2.2. 1. Les coordonnées du point D :

Au point D :  $y_D = -h = -AC \sin \alpha = -1,35 \text{ m}$  en remplaçant dans (3), on trouve :

$$-0,74x^2 + 0,58x = -1,35 \Leftrightarrow -0,74x^2 + 0,58x + 1,35 = 0$$

$$\Delta = 0,33 + 4 \times 0,74 \times 1,35 = 3,29 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 2,08 \text{ soit } x_D = \frac{-0,58 - 2,08}{2(-0,74)} \approx 1,8 \text{ m}$$

2.2. 2. Calcul de  $V_D$

$$\frac{1}{2} m V_D^2 - \frac{1}{2} m V_C^2 = mgh \quad \text{avec } h = AC \sin \alpha = -y_D = 1,35 \text{ m}$$

Soit  $V_D = \sqrt{V_C^2 + 2gAC \sin \alpha} = 6 \text{ m/s}$  Comme  $V_D > 5 \text{ m/s}$  le jouet sera brisé

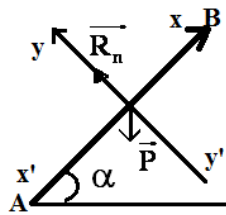
## Corrigé de l'Exercice 8

1.1 L'expression de l'accélération  $a_1$  si  $f$  n'est pas négligeable:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

par projection sur  $\overline{X'X}$  on obtient :

$$-P \sin \alpha = ma \Rightarrow a = -g \sin \alpha = -5 \text{ m/s}^2$$



1.2 Calcul de  $V_B$

$$\Rightarrow \text{m.r.u.v } V_B^2 - V_A^2 = 2a(x_B - x_A) \Rightarrow V_B = \sqrt{V_A^2 + 2a(AB)} = 3 \text{ m/s}$$

$$\text{ou bien } V_B = \sqrt{V_A^2 - 2g \sin \alpha (AB)} = 3 \text{ m/s}$$

1.3 Calcul du temps

$$V_B = at_B + V_A \Rightarrow t_B = \frac{V_B - V_A}{a} = 0,2 \text{ s}$$

2.1 Calcul de la force  $f$ :

Par application du théorème de l'énergie cinétique entre A et B, on trouve :

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_{CB} - E_{CA} = W_{\vec{P}} + W_{\vec{R}} + W_{\vec{f}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 = -mgh - f_{AB} \Rightarrow f_{AB} = -mgh - \frac{1}{2} m V_B^2 + \frac{1}{2} m V_A^2$$

$$\text{avec } h = AB \sin \alpha \Leftrightarrow f = -mg \sin \alpha + \frac{m(V_A^2 - V_B^2)}{2AB} = 1,43 \text{ N}$$

2.2 Calcul de  $R_n$

Par projection sur  $y'y$

$$R_n - P \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow R_n = P \cos \alpha = 0,4 \times 10 \times 0,87 = 3,48 \text{ N}$$

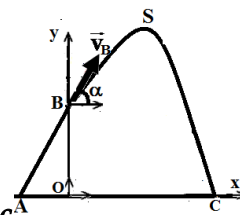
$$R = \sqrt{R_n^2 + f^2} = 3,76 \text{ N}$$

3.1 Les équations horaires du mouvement à partir du point B :

Conditions initiales :

$$\vec{B} \begin{cases} x_0 = x_B = 0 \\ y_0 = y_B = OB = AB \sin \alpha \end{cases}$$

$$\vec{V}_B \begin{cases} V_{Bx} = V_B \cos \alpha \\ V_{By} = V_B \sin \alpha \end{cases}$$



En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{V} \begin{cases} V_x = V_B \cos \alpha \\ V_y = -gt + V_B \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{BM} \begin{cases} x = V_B \cos \alpha t & (1) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_B \sin \alpha t + AB \sin \alpha & (2) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire :

$$\text{L'équation (1) donne : } t = \frac{x}{V_B \cos \alpha}$$

en remplaçant dans (2), on trouve l'équation de la trajectoire :

$$y = -\frac{g}{2V_B^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha + AB \sin \alpha$$

$$\text{Soit } y = -1,67x^2 + 0,58x + 0,35$$

### 3.2. Les coordonnées du sommet S

Au point S :  $V_{Sy} = 0$

$$V_{Sy} = 0 \Leftrightarrow t_S = \frac{V_B \sin \alpha}{g} = 0,1s$$

Calcul de  $x_S$

$$x_S = V_B \cos \alpha t_S = 2 \times 0,87 \times 0,1 = 0,17m$$

Calcul de  $y_S$

Soit on remplace  $t_S$  dans l'équation (2)

$$y_S = -5(0,1)^2 + 2 \times 0,5 \times (0,1) + 0,35 = 0,4m$$

Soit on remplace  $x_S$  dans l'équation (3)

$$y_S = -1,67(0,17)^2 + 0,58 \times 0,17 + 0,35 = 0,4m$$

### 3.3. Calcul de l'abscisse du point de chute C :

$y_C = 0$  L'équation (3) donne :

$$-1,67x^2 + 0,58x + 0,35 = 0$$

$$\Delta = 0,58^2 - 4 \times 1,67 \times 0,35 = 2,67 \text{ soit } \sqrt{\Delta} = 1,64$$

$$x_C = \frac{-0,58 - 1,63}{2(-1,67)} = 0,66m$$

### 3.4 Calcul de la vitesse $V_C$ :

Par application du théorème de l'énergie cinétique entre B et C, on trouve :

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_{C_C} - E_{C_B} = W_{\vec{F}}$$

$$\text{Soit } V_C = 3,32m/s.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = mgh \Rightarrow V_C = \sqrt{V_B^2 + 2gh} \text{ avec } h = OB = AB \sin \alpha$$

Corrigé de l'Exercice 9

1.1. L'expression de l'accélération a si f n'est pas négligeable:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

par projection sur  $\vec{OA}$  on obtient:

$$-P \sin \alpha = ma \Rightarrow a = -g \sin \alpha = cte \Rightarrow m.r.u.v$$

1.2. La relation théorique entre  $V^2$  et x:

$$V^2 - V_0^2 = 2ax = -2g \sin \alpha \cdot x \Rightarrow V^2 = -2g \sin \alpha \cdot x + V_0^2$$

1.3.1 D'après le graphe  $V^2 = 10x + 9$

Par identification entre les expressions théorique et graphique :

$$-10 = -2g \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{10}{2g} = 0,5 \text{ soit } \alpha = 30^\circ$$

1.3.2 La valeur de la vitesse initiale :

$$V_0^2 = 9 \Leftrightarrow V_0 = 3m/s$$

2.1 Calcul de la nouvelle accélération :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}' \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a}'$$

par projection sur  $\vec{OA}$  on obtient

$$a' = -\frac{f}{m} - g \sin \alpha$$

2.2 En appliquant le théorème

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_C - E_0 = W_{\vec{P}} + W_{\vec{f}} + \underbrace{W_{\vec{R}_n}}_0$$

$$E_{CA} - \frac{1}{2} mV_0^2 = -mgx \sin \alpha - fx \Rightarrow f = -mg \sin \alpha - \frac{E_{CA}}{x} + \frac{1}{2x} mV_0^2 \cdot A.N : f = 0,125N$$

3.1 Les équations horaires du mouvement à partir du point A :

Conditions initiales :

$$A \begin{cases} x_0 = x_A = 0 \\ y_0 = y_A = AB = x \sin \alpha \end{cases} \quad \vec{v}_A \begin{cases} v_{Ax} = v_A \cos \alpha \\ v_{Ay} = v_A \sin \alpha \end{cases}$$

En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$$

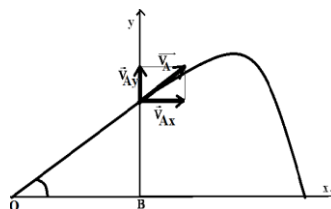
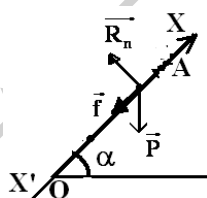
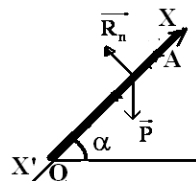
$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_A \cos \alpha \\ v_y = -gt + v_A \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \overline{AM} \begin{cases} x = v_A \cos \alpha t & (1) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_A \sin \alpha t + AB & (2) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire

$$(1) \Rightarrow t = \frac{x}{v_A \cos \alpha}$$

On remplace dans y

$$y = -\frac{g}{2v_A^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x + AB$$



$$\text{Or } v_A = \sqrt{\frac{2E_{CA}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 0,2}{0,1}} = 2 \text{ m/s}$$

$$\text{soit } y = -\frac{10}{2 \times 4 \times \frac{3}{4}} x^2 + 0,58x + 0,2 = -1,67x^2 + 0,58x + 0,2$$

3.2 Calcul des coordonnées du point de chute C :

L'équation (2) donne :

$$\text{or } y_C = 0 \quad -1,67x^2 + 0,58x + 0,2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 + 0,24t - 2 = 0$$

$$\Delta = 1,29 \text{ soit } x = \frac{-0,58 + 1,29}{2 \times 1,67} = 0,21 \text{ m}$$

### Corrigé de l'Exercice 10

1.1 Expression de E en fonction de T et x

$$\Delta E = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \Leftrightarrow \Delta E = W_{\vec{T}} + W_{\vec{R}}$$

$$\Leftrightarrow E(x) - E(0) = T \cdot x \Leftrightarrow E(x) = T \cdot x$$

1.2 Calcul de T

L'énergie mécanique est représentée par une droite dont le coefficient directeur correspond à la tension T ; numériquement T=150N.

2.1 Expression de E<sub>PP</sub> en fonction de x

$$E_{PP}(x) = mgz + E_{P0} \text{ avec } E_{P0} = 0 \text{ et } z = x \sin \alpha \text{ d'où } E_{PP}(x) = mgx \sin \alpha \text{ soit } E_{PP}(x) = 24,5x$$

Expression de E<sub>C</sub> en fonction de x

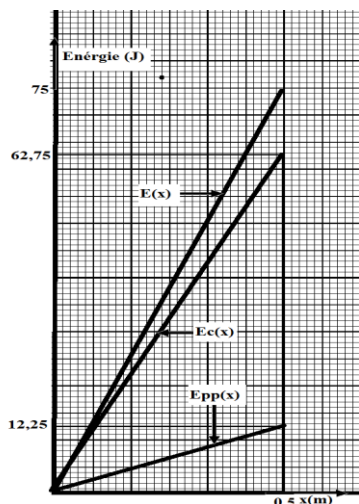
$$E(x) = E_C(x) + E_{PP}(x)$$

$$\Rightarrow E_C(x) = E(x) - E_{PP}(x)$$

$$\text{avec } E(x) = 150x \text{ et } E_{PP}(x) = 24,5x$$

$$\text{soit } E_C(x) = 125,5x$$

2.2 Voir schéma ci-dessous.



### 3 Montrons que l'énergie mécanique est constante

Appliquons le TEM au système (solide-terre) entre A et M

$$\Delta E = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \Leftrightarrow \Delta E = W_{\vec{R}}$$

Donc le système conservatif

$$\Leftrightarrow E(M) - E(A) = 0 \Leftrightarrow E(M) = E(A) = \text{cte}$$

### 4 Calcul de la distance AB

$E(B) = E(A)$  avec  $E(A) = 75\text{J}$  car  $x_A = 0,5\text{m}$  et  $E(B) = mgx_B \sin \alpha$  soit

$$x_B = \frac{E(A)}{mg \sin \alpha} = 3,06\text{m} \quad AB = x_B - x_A \text{ avec } x_A = 0,5\text{m} \text{ soit } AB = 2,56\text{m}$$

## Corrigé de l'Exercice 11

### 1.1. Expression de $V_C$ en fonction de $r$ , $L$ , $g$ et $\alpha$

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_C - E_D = W_{\vec{P}}$$

$$= \frac{1}{2} m V_C^2 = mgh = mg(L \sin \alpha - 2r) \Rightarrow V_C = \sqrt{2g(L \sin \alpha - 2r)}$$

### 1.2. Expression de $R$

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Par projection sur la normale, on obtient :

$$mg + R = m \frac{V_C^2}{r} \Rightarrow R = \frac{2gm(L \sin \alpha - 2r)}{r} - mg \Leftrightarrow R = \frac{2mgL \sin \alpha}{r} - 5mg$$

### 1.3. La valeur de $L$ pour que le mobile quitte la piste

$$R = 0 \Leftrightarrow \frac{2mgL \sin \alpha}{r} - 5mg = 0 \Leftrightarrow L = \frac{5r}{2 \sin \alpha} = \frac{5 \times 0,5}{2 \times 0,25} = 5\text{m}$$

### 2.1 Expression de $E_C(M)$ en fonction de $E_C(B)$ , $m$ , $g$ , $f$ et $x$

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} = mgx \sin \alpha - fx \Leftrightarrow E_C(M) - E_C(B) = (mg \sin \alpha - f)x$$

$$\Rightarrow E_C(M) = (mg \sin \alpha - f)x + E_C(B) = (mg \sin \alpha - f)x + \frac{1}{2} m V_B^2$$

### 2.2 Dédution des valeurs de $f$ et de $V_B$

Détermination de l'équation de la droite à partir du diagramme

Si  $x=0$   $E_C = 0,5\text{J}$  soit  $b=0,5$

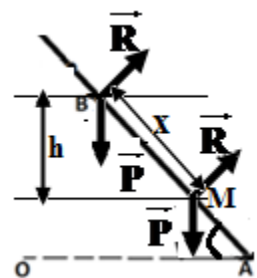
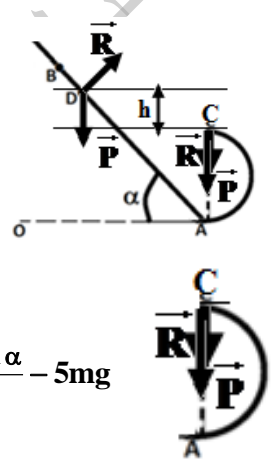
Si  $x=1$  ;  $E_C = 0,75\text{J}$   $a=0,25$

Donc  $E_C = 0,25x + 0,5$

Par identification entre les deux expressions de  $E_C(M)$ , on obtient :

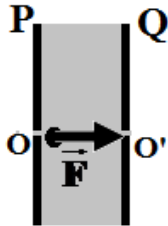
$$(mg \sin \alpha - f) = 0,25 \Rightarrow f = mg \sin \alpha - 0,25 = 0,375\text{N}$$

$$\frac{1}{2} m V_B^2 = 0,5 \Rightarrow V_B = \sqrt{\frac{2 \times 0,5}{m}} = 2\text{m/s}$$



## Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme.

### 1. Cas où $\vec{V}_0$ est nulle ou parallèle à $\vec{F}$



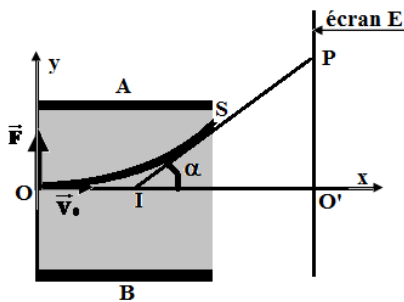
- Nature du mouvement

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Leftrightarrow \text{m.r.u.v}$$

- Vitesse au point de sortie O'

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = |q|U \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2|q|U}{m} + V_0^2}$$

### 2. Cas où $\vec{V}$ est non parallèle à $\vec{F}$



- Equation de la trajectoire :  $Y = \frac{qEx^2}{2mV_0^2}$

Coordonnées du point de sortie S:

$$x_s = l;$$

$$Y = \frac{qEl^2}{2mV_0^2}$$

- Expression de  $V_S$ :

$$V_S = \sqrt{\left(\frac{qEl}{mV_0}\right)^2 + V_0^2}$$

- Déviation angulaire électrique:

$$\text{tg}\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_S \Leftrightarrow \text{tg}\alpha = \frac{qEl}{mV_0^2}$$

- Nature du mouvement à la sortie du champ :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{V} = \vec{c}te \end{cases} \Leftrightarrow \text{m.r.u}$$

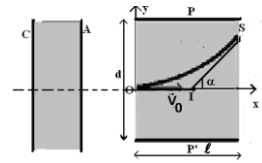
### Exercice 1

1 On applique une différence de potentielle  $U_0=1140V$  entre une cathode C et une anode A.

Un électron est émis sans vitesse initiale par la cathode et arrive sur l'anode avec la vitesse  $\bar{v}_0$ . Calculer  $v_0$ .

A.N :  $e=1,6.10^{-19} C$ ;  $m=9,1.10^{-31} kg$ .

2 L'électron pénètre au point O avec la vitesse  $\bar{v}_0$  précédente entre les plaques P et P' de longueur  $l$  distante de  $d$  telle que ( $l=d$ ). On applique entre les plaques P et P' une différence de potentiel  $U$ .



2.1 Déterminer les équations horaires du mouvement de l'électron sur les axes Ox et Oy.

2.2 Donner l'équation de la trajectoire et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme :  $y = \frac{U}{4dU_0} x^2$

3 La tangente à la trajectoire au point S fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale tel que  $\tan\alpha=0,4$  ; calculer la différence de potentiel  $U$  entre les plaques P et P'.

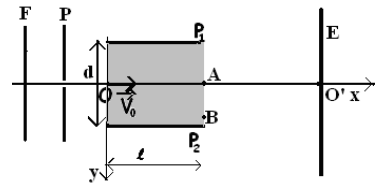
### Exercice 2

Des électrons sont émis avec une vitesse initiale négligeable par un filament F chauffé.

1 On établit une tension  $U_1 = V_P - V_F$  entre le filament

F et une plaque P disposée parallèlement à celui-ci.

Il en résulte un champ électrostatique uniforme  $\bar{E}_1$  régnant entre F et P. Les électrons arrivent alors en P avec une vitesse  $\bar{v}_0$  de module  $v_0 = 0,53.10^8 m/s$  (voir schéma). Préciser le signe de  $U_1$  et calculer sa valeur.



On donne :  $e = 1,6.10^{-19} C$  ;  $m = 9,1.10^{-31} kg$ .

2 La plaque P a un trou qui laisse passer les électrons.

On dispose deux plaques  $P_1$  et  $P_2$  perpendiculairement au plan  $xOy$  (voir schéma). Les électrons pénètrent entre les plaques en O animés de la vitesse  $\bar{v}_0$  parallèle à Ox.

On applique entre  $P_1$  et  $P_2$  une tension  $U_2 = V_{P2} - V_{P1} = 300V$  et on donne  $l = 6cm$  et  $d = 1,5cm$ .

2.1 Déterminer l'équation de la trajectoire du mouvement d'un électron entre  $P_1$  et  $P_2$ .

2.2 Quelle est la déviation linéaire AB des électrons à la sortie des plaques ? Quelle est la valeur de la déviation angulaire  $\alpha$  ?

2.3 Trouver la nature du mouvement d'un électron après B et déterminer l'équation de sa trajectoire.

2.4 Calculer les coordonnées du point d'impact des électrons sur l'écran E parallèle à (Oy) et placé à 46cm de A.

### Exercice 3

Une particule  ${}^4_2\text{He}^{2+}$  pénètre dans le champ électrostatique uniforme créé par deux armatures parallèles et horizontales de longueur  $l=10\text{cm}$  et distante  $d=6\text{cm}$ . La particule pénètre en un point O équidistant des deux armatures avec une vitesse  $V_0=3.10^5\text{ m/s}$  faisant un angle  $\alpha=30^\circ$  avec l'horizontale et dirigée vers le haut.

1 Faire une figure et préciser les charges des armatures pour que la particule soit déviée vers le bas.

2 Etablir l'expression de l'équation cartésienne de la trajectoire entre les armatures. Préciser la nature du mouvement et de la trajectoire.

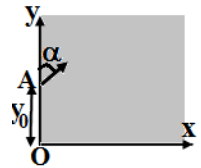
3 Quelle est la valeur minimale  $U_m$  de la tension à appliquer entre les armatures pour que la particule sorte du champ.  $e=1,6.10^{-19}\text{C}$ ;  $m_p=1,67.10^{-27}\text{kg}$

4 Déterminer la tension  $U$  à appliquer entre les armatures pour que la particule sorte du champ par un point O' se trouvant à la même hauteur que le point O où elle est rentrée.

5 Calculer la tension  $U_0$  accélératrice qui a été nécessaire pour amener la particule à la vitesse  $V_0=30^5\text{ m/s}$  à partir du repos.

### Exercice 4

1 Un champ électrique est créé par un condensateur plan constitué de deux plaques parallèles et horizontales  $P_1$  et  $P_2$  très longues reliées à un générateur de tension constante  $U=250\text{ V}$  et séparées d'une distance  $d$ , comme l'indique la figure ci-contre. Tous les électrons pénètrent dans le champ, supposé uniforme, au point A et sont animés de la même vitesse  $\vec{v}_0$  faisant l'angle  $\alpha=45^\circ$ .



1.1 Montrer, par un calcul, qu'il est légitime de négliger la force de pesanteur par rapport à la force électrique pour l'électron.

1.2 On veut que le faisceau soit dévié vers le bas.

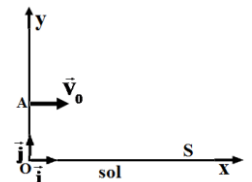
Reproduire la figure et représenter (sans souci d'échelle) la force qui s'exerce sur la particule à son entrée dans le champ ainsi que le champ électrique et les signes des plaques.

1.3 Etablir l'expression de l'équation cartésienne de la trajectoire.

1.4 Déterminer la valeur max de  $y_0$  pour que l'électrons ne touche pas la plaque  $P_1$

A. N :  $m=9.10^{-31}\text{kg}$  ;  $v_0 = 1.10^7\text{ m.s}^{-1}$  ;  $d=0,04\text{m}$  ;  
 $e=1,6.10^{-19}\text{C}$ .

1.5 Déterminer l'abscisse du point P d'impact de l'électron sur la plaque inférieure si  $y_0$  prend la valeur calculée précédemment.



2 Une bille homogène de masse  $m$  est lancée horizontalement avec une vitesse initiale  $v_0 = 14\text{ m.s}^{-1}$ . A l'instant initial, son altitude par rapport au sol est comme l'indique la figure

2.1 Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire.

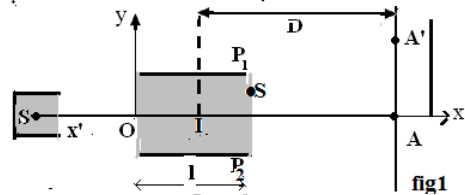
2.2 Au moment du lancement, la bille est au point A au dessus du sol. Elle touche le sol au point S. Quelle est la valeur de la distance OA si  $OS=7,67m$ .

- 3 Dans chaque cas, quelle est l'influence de la masse du corps sur :
- La force subie par ce corps ?
  - L'accélération du mouvement ?

### Exercice 5

1. On se propose de déterminer la vitesse d'éjection des particules  ${}^4_2\text{He}^{2+}$  (ou noyaux d'hélium) émis par le radium.

On place la substance en S au fond d'un cylindre creux en plomb d'axe  $x'x$  et on admettra que les particules émises sortent du cylindre avec un vecteur vitesse  $\vec{V}_0$  parallèle à l'axe  $x'x$ .



Le faisceau pénètre en O dans l'espace

vide d'air entre deux plaques horizontales  $P_1$  et  $P_2$  d'un condensateur dont la distance est  $d=10cm$  et la longueur  $l=15cm$ . En l'absence de champ électrique entre les plaques on observe, une tache en A, sur une plaque photographique disposée perpendiculairement à  $x'x$  à une distance D du centre des plaques.

On crée un champ électrique uniforme en appliquant entre  $P_1$  et  $P_2$  une différence de potentiel constante  $U=2,05.10^3$  V. On constate que la tache se forme en  $A'$ .

1.1. Le champ électrique créé  $\vec{E}$  va-t-il de  $P_1$  vers  $P_2$  ou de  $P_2$  vers  $P_1$  ?

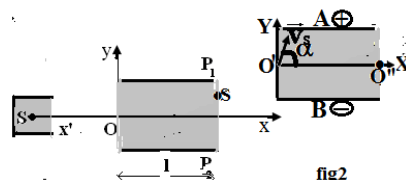
1.2. Etudier le mouvement d'une particule entre les plaques du condensateur dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  : équation et nature de la trajectoire.

1.3. Que devient ce mouvement lorsque la particule n'est plus soumise au champ électrique  $\vec{E}$  ?

1.4. Déterminer la vitesse d'éjection  $V_0$  des particules si la mesure de la déviation linéaire  $AA'=17,4.10^{-2}m$ .

1.5. Déterminer alors l'instant d'arrivée au point S et calculer les composantes du vecteur  $\vec{V}_S$  ; déduire la valeur de  $V_S$ . Montrer que l'angle  $\alpha$  que fait ce vecteur avec l'horizontale est de  $30^\circ$  environ.

2 On supprime l'écran, et on le remplace par un condensateur constitué de deux armatures horizontales A et B. Le mouvement du faisceau de particules est maintenant étudié lorsqu'il pénètre après sa sortie du premier champ  $\vec{E}$  dans le condensateur à la vitesse de valeur  $V_S$  dont la direction fait l'angle  $\alpha$  avec l'horizontale (voire la figure 2).



La longueur de l'armature est  $l' = 10 \text{ cm}$  ; la distance les séparant est  $d' = 4 \text{ cm}$  ; la tension entre les armatures est  $U'$ .

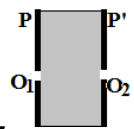
2.1. Etablir les équations horaires du mouvement entre les armatures du condensateur et établir l'expression de l'équation de la trajectoire entre les armatures du condensateur dans le repère  $(O' XY)$ .

2.2. Déterminer la valeur de  $U'$  pour que le faisceau sorte des armatures au point  $O''$ . On donne :  $e=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $D=30 \text{ cm}$  et  $m_p=1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

### Exercice 6

On étudie le mouvement des ions  ${}^6_3\text{Li}^+$  dans différents champs électriques et magnétique.

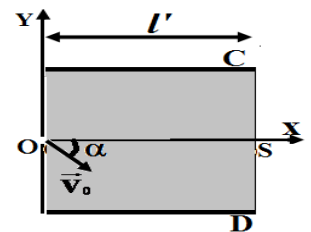
1. Dans une première expérience les ions pénètrent au point  $O_1$  sans vitesse initiale dans un champ électrique  $\vec{E}_0$  crée entre deux plaques  $P$  et  $P'$  et sont accélérés par une tension  $U_0=U_{PP'}=1252,5 \text{ V}$ .



Montrer que la valeur de la vitesse  $V_0$  des ions au point  $O_2$  est  $V_0=2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ .

On donne :  $e=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ;  $m_n= m_p=1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

2. Dans une troisième expérience l'ion entre avec une vitesse de valeur  $V_0$  dans un champ électrique  $\vec{E}$  crée entre les armatures  $C$  et  $D$  d'un condensateur plan.



Soit  $l'$  la longueur de ces armatures et  $d$  leur écartement.

3.1. La vitesse  $\vec{V}_0$  est contenue dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et fait un

angle  $\alpha=15^\circ$  avec  $Ox$ . Déterminer le sens de la force électrique pour que les ions passent par le point  $S$ .

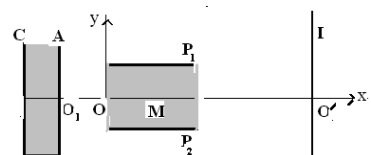
3.2. Etablir l'expression de l'équation de la trajectoire des ions entre les armatures  $C$  et  $D$ .

3.3. Calculer alors la valeur de  $V_0$ . On donne :  $E=2,5 \cdot 10^4 \text{ V/m}$  et  $l'=20 \text{ cm}$

3.4. Déterminer la distance  $d$  entre les armatures  $C$  et  $D$  si la distance minimale séparant la trajectoire de l'ion et la plaque inferieure est  $0,8 \text{ cm}$  et si le point  $O$  est équidistant des armatures.

### Exercice 7

1° Un faisceau d'électrons est émis dans le vide avec une vitesse initiale négligeable par une cathode  $C$  et est accéléré par une tension  $U_0$  appliquée entre l'anode  $A$  et la cathode  $C$ . La plaque de l'anode est percée d'un trou  $O_1$  comme l'indique la fig.



a) Exprimer littéralement la vitesse  $V_1$  des électrons lorsqu'ils traversent le trou  $O_1$  et calculer sa vitesse pour  $U_0=1000 \text{ V}$ .

b) Quelle est la nature de leur mouvement après la traversée de  $O_1$  ?  
 2° Les électrons pénètrent en suite au pt O entre les armatures  $P_1$  et  $P_2$  d'un condensateur plan de longueur  $l$  et distantes de  $d$ . La tension entre les armatures est  $U_{P_1P_2} = + 100V$ .

a) Quelle est la vitesse  $V_0$  des électrons à leur entrée dans le condensateur ?

b) Etudier le mouvement des électrons dans le condensateur plan et en déduire l'équation de la trajectoire des électrons On raisonnera dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Représenter sur un schéma la trajectoire des électrons.

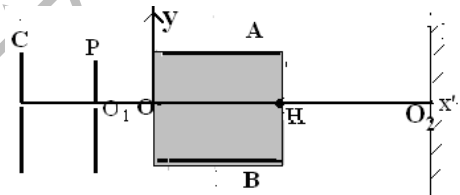
Vont-ils pouvoir attendre l'écran E sans toucher l'une des plaques  $P_1P_2$  ?

3° A la sortie du condensateur, le faisceau d'électrons arrive sur un écran fluorescent noté E de centre  $O'$ , situé à la distance  $L$  du pt M milieu de  $OO'$  (fig ).

Soit I le pt d'impact de ce faisceau sur l'écran. Quelle est la déviation  $O'I$  du spot sur l'écran ? A.N:  $q=-e=- 1,6.10^{-19} C$  ;  $m = 9,1.10^{-31} kg$  ;  $d = 2 cm$  ;  $l = 6 cm$  et  $L = 12 cm$ .

### Exercice 8

La cathode C d'un oscilloscope émet des électrons dont la vitesse à la sortie du métal est négligeable .Ces électrons traverse en suite une anode P, en un pt  $O_1$ .



1° On établie une tension  $U_0 = V_P - V_C$

a) Déterminer l'expression de la vitesse  $v_0$  des électrons à leur passage en  $O_1$ .  
 A .N :  $U_0 = 1000V$ .

b) Quelle est la nature du mouvement des électrons après P.

2° Les électrons constituant un faisceau homocinétique, pénètrent au pt O entre les armatures horizontales A et B d'un condensateur plan. Les armatures distantes de  $d$  ont une longueur  $l$ . On établit entre ses armatures une tension  $U_{AB}$ . On étudie le mouvement entre AB.

a) Déterminer l'expression de la trajectoire dans le repère  $(O, x, y)$ .

b) Exprimer la condition que doit vérifier  $U_{AB}$  pour que les électrons sortent du condensateur.

c) On donne  $d = 2cm$ ,  $l = 10cm$ . Faire l'A.N

3° Le faisceau arrive en suite sur un écran fluorescent E situé à la distance  $L = 20cm$  du centre de symétrie I du condensateur.

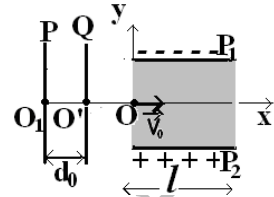
Montrer que le faisceau forme un pt lumineux (spot)  $O_2$  au centre de l'écran quand  $U_{AB} = 0$  et déterminer le déplacement  $Y = O_2M$  du spot sur l'écran quand  $U_{AB} = 200V$ .

### Exercice 9

Les ions  $^{40}\text{Ca}^{2+}$  quittent la chambre d'ionisation au point  $O_1$  sans vitesse initiale grâce à un champ électrique  $\vec{E}_0$  existant entre deux plaques P et Q telle que  $U_0 = U_{PQ} = 500\text{V}$ .

1.1 Déterminer le sens du champ  $\vec{E}_0$  régnant entre P et Q et calculer sa valeur si  $d_0 = 5\text{cm}$ .

1.2 Calculer la vitesse  $V_0$  des ions lorsqu'ils arrivent en  $O'$ .



2 Sachant qu'il n'existe aucun champ entre  $O'$  et  $O$ , déterminer la nature du mouvement des ions entre ces deux points.

3 Les ions pénètrent au point  $O$  dans un autre champ électrique  $\vec{E}$  créée entre deux plaques  $P_1$  et  $P_2$  distantes de  $d$  et de longueur  $l$  chacune.

3.1 Trouver l'équation de la trajectoire dans le repère  $(O ; x ; y)$  et préciser sa nature.

3.2 Déterminer les coordonnées du point de sortie  $S$ .

3.3 Déterminer l'instant d'arrivée au point  $S$  et calculer les composantes du vecteur  $\vec{v}_S$  et en déduire l'angle  $\alpha$  que fait ce vecteur avec l'horizontale.

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C} ; l = 10\text{cm} ; m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}\text{kg} ; E = 10^3\text{V/m}.$$

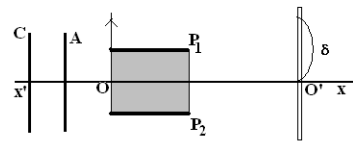
### Exercice 10

On applique une différence de potentielle  $U = V_A - V_C = 101\text{V}$  entre une cathode C et une anode A. Un faisceau

d'électrons est émis sans vitesse initiale par la cathode et pénètre au point  $O$  dans le champ électrique  $\vec{E}$ . Ce champ est dû à un condensateur

plan constitué de deux plaques  $P_1$  et  $P_2$  parallèle distante de  $d = 4\text{cm}$  de longueur chacune  $l = 4\text{cm}$  entre les quelles existe une ddp  $U_1 = V_{P_1} - V_{P_2} = 20\text{V}$ .

L'écran E est placé à  $L = 52\text{cm}$  du point  $O$  situé au milieu de la distance séparant les deux plaques.



1 Calculer la valeur de sa vitesse  $\vec{V}_0$  à son arrivée sur au point  $O$ .

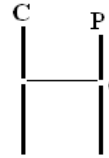
2 Etablir l'équation de la trajectoire de l'électron entre les armatures  $P_1$  et  $P_2$ .

3 Trouver l'équation de la trajectoire de l'électron après sa sortie du champ et calculer la déviation  $\delta$  de l'électron sur l'écran.

Exercice 11

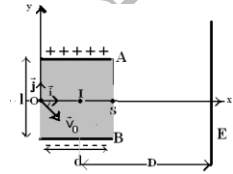
1° Dans un tube sous vide un électrons est émis sans vitesse initiale par une cathode C et est accéléré par une tension U positive appliquée entre la cathode C et une plaque P.

Calculer l'énergie cinétique de l'électron à son arrivée sur la plaque P. En déduire la valeur de sa vitesse  $\vec{V}_0$  à son arrivée sur la plaque P.



2° L'électron pénètre en O avec la vitesse  $\vec{V}_0$  dans l'espace séparant les armatures A et B d'un condensateur plan.

Soit d la longueur de ces armatures, l leur écartement, D la distance du centre I du condensateur à un écran fluorescent E et U la tension entre les armatures A et B.



2.1 La vitesse est contenue dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et fait un

angle  $\alpha$  avec Ox comme l'indique la figure. Etablir l'équation de la trajectoire de l'électron entre les armatures A et B.

2.2 Etablir la relation qui doit lier l'angle  $\alpha$  avec les grandeurs U, U', d et l pour que l'électron passe par le point S. Calculer alors la valeur correspondante de l'angle  $\alpha$ .

3 L'électron pénètre maintenant dans le condensateur avec une vitesse  $\vec{V}_0$  parallèle à  $\vec{i}$  de même sens. Un écran vertical est placé à la distance D du point d'intersection I entre la tangente et l'axe Ox. Calculer la déviation  $y_M$  sur l'écran.  $U=1000V; U'=120V; q=-e=-1,6.10^{-19}C; m = 9,1.10^{-31} kg ; d = 6 cm ; l = 2 cm ; D = 30 cm$

Corrigé de l'exercice1

1° Expression de la vitesse V :

$$\frac{1}{2} mV_0^2 = eU_0 \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}} \quad \text{A.N : } V_0 = 2.10^7 \text{ m/s}$$

2.1 Les équations horaires :

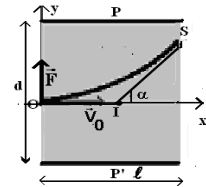
Conditions initiales :

$$C \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \vec{V}_0 \begin{cases} V_{0x} = V_0 \\ V_{0y} = 0 \end{cases}$$

En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{F}{m} \end{cases} \Rightarrow \vec{V} \begin{cases} V_x = V_0 \\ V_y = \frac{F}{m} t \end{cases} \Rightarrow \text{OM} \begin{cases} x = V_0 t & (1) \\ y = \frac{F}{2m} t^2 & (2) \end{cases}$$



2.2 L'équation de la trajectoire :

L'équation (1) donne :  $t = \frac{x}{V_0}$

en remplaçant dans (2), on trouve l'équation de la trajectoire :

$$y = \frac{F}{2mV_0^2} x^2 = \frac{eU}{2mdV_0^2} x^2 \Rightarrow y = \frac{U}{4dU_0} x^2$$

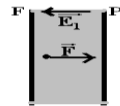
3 La valeur de la déviation angulaire :

$$\tan \alpha = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{U}{2dU_0} l \text{ Soit } \tan \alpha = \frac{U}{2U_0} \Rightarrow U = 2U_0 \tan \alpha \quad \text{car } l = d \quad \text{A.N : } U = 912V.$$

Corrigé de l'exercice2

1.1 Le signe de  $U_1 = V_P - V_F$  :

Les électrons se déplacent de F vers P sous l'action de la force électrique  $\vec{F}$ . Comme  $q < 0$  le champ électrique  $\vec{E}_1$  est dirigé de P vers F c'est-à-dire que  $V_P > V_F \Rightarrow V_P - V_F > 0 \Leftrightarrow U_1 > 0$



1.2 Calcul de  $U_1$  :

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} mV_0^2 = eU_1 \Rightarrow U_1 = \frac{mV_0^2}{2e} \quad \text{A.N : } U_1 = 8.10^3 V$$

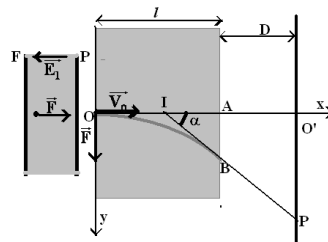
2.1 L'équation de la trajectoire :

Conditions initiales :  $O \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \vec{V}_0 \begin{cases} V_{0x} = V_0 \\ V_{0y} = 0 \end{cases}$

En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{F}{m} \end{cases} \Rightarrow \vec{V} \begin{cases} V_x = V_0 \\ V_y = \frac{F}{m} t \end{cases} \Rightarrow \text{OM} \begin{cases} x = V_0 t & (1) \\ y = \frac{F}{2m} t^2 & (2) \end{cases}$$



L'équation (1) donne :  $t = \frac{x}{V_0}$

en remplaçant dans (2), on trouve l'équation de la trajectoire :

$$y = \frac{F}{2mV_0^2} x^2 = \frac{eU_2}{2mdV_0^2} x^2$$

## 2.2 La déviation linéaire AB :

$$AB = y_B = \frac{eU_2}{2mdV_0^2} x_B^2 \text{ avec } x_B = l \text{ soit } y_B = \frac{eU_2}{2mdV_0^2} l^2 \quad \text{A.N : } y_B = 0,23.10^{-2} \text{ m}$$

La valeur de la déviation angulaire :

$$\tan \alpha = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{eU_2}{mdV_0^2} l \text{ soit } \alpha = 4,38^\circ$$

Autre méthode  $\tan \alpha = \frac{2AB}{l} \text{ soit } \alpha = 4,38^\circ$

## 2.3 Nature du mouvement de l'électron après B :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{0} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \text{m.r.u}$$

L'équation de la trajectoire :

$$y = ax + b \text{ avec } \begin{cases} a = \tan \alpha = 0,077 \\ b = y_B - ax_B = -0,23.10^{-2} \text{ m} \end{cases} \quad \text{d'où } y = 7,7.10^{-2} x - 0,23.10^{-2} \text{ m}$$

## 2.4 Les coordonnées du point d'impact P :

$$P \begin{cases} x_P = l + D = 52.10^{-2} \text{ m} \\ y_P = \left( \frac{l}{2} + D \right) \tan \alpha = 3,77.10^{-2} \text{ m} \end{cases}$$

## Corrigé de l'exercice 3

### 1 Signe des plaques

Les ions sont chargés positivement, ils se déplacent de  $P_1$  vers  $P_2$  sous l'action de la force électrique  $\vec{F}$ . Les ions sont donc attirés par  $P_2$  qui est chargée négativement ;  $P_1$  est alors chargée positivement.

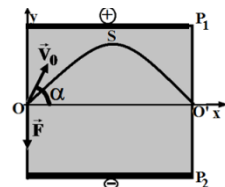
### 2 Nature du mouvement

Conditions initiales :

$$O \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \vec{V}_0 \begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos \alpha \\ V_{0y} = V_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{F}{m} \end{cases} \Rightarrow \vec{V} \begin{cases} V_x = V_0 \cos \alpha \\ V_y = -\frac{F}{m} t + V_0 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow O\vec{M} \begin{cases} x = V_0 \cos \alpha t & (1) \\ y = -\frac{F}{2m} t^2 + V_0 \sin \alpha t & (2) \end{cases}$$



L'équation de la trajectoire :

(1)  $\Rightarrow t = x / (v_0 \cos \alpha)$  ; en remplaçant t dans (2), on obtient :

$$y = -\frac{F}{2mV_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

$$y = -\frac{qU}{2mdV_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

3 L'ordonnée du point S le plus haut de la trajectoire :  
D'après la relation indépendante du temps :

$$V_{Sy}^2 - V_{0y}^2 = 2a_y(y_S - y_0)$$

$$\Rightarrow y_S = \frac{-V_{0y}^2}{2a_y} = \frac{-V_0^2 \sin^2 \alpha}{-2 \frac{F}{m}} = \frac{mV_0^2 \sin^2 \alpha}{2F}$$

Pour que l'électron ne touche pas la plaque il faut que

$$y_S < \frac{d}{2} \Leftrightarrow \frac{mV_0^2 \sin^2 \alpha}{2F} < \frac{d}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{mdV_0^2 \sin^2 \alpha}{qU} < d \Rightarrow U > \frac{mV_0^2 \sin^2 \alpha}{q}$$

$$U > \frac{6,68 \cdot 10^{-27} \times (3 \cdot 10^5)^2 \times \frac{1}{4}}{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19}} \Leftrightarrow U > 469,675 \text{ V}$$

La valeur minimale  $U_{\min}$  pour que l'électron ne touche pas la plaque  $P_1$

$$U_m = 470 \text{ V}$$

4 A la sortie du champ  $y=0$  et  $x=l$

$$0 = -\frac{qU}{2mdV_0^2 \cos^2 \alpha} l^2 + l \tan \alpha$$

$$\Leftrightarrow U = \frac{mdV_0^2 \sin 2\alpha}{ql} = \frac{6,68 \cdot 10^{-27} \times 6 \cdot 10^{-2} \times (3 \cdot 10^5)^2 \times 0,87}{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,1} \approx 981 \text{ V}$$

5 La tension accélératrice  $U_0$

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} mV_0^2 = qU_0$$

$$U_0 = \frac{mV_0^2}{2q} = \frac{mV_0^2}{4e} = \frac{6,68 \cdot 10^{-27} \times (3 \cdot 10^5)^2}{4 \times 1,6 \cdot 10^{-19}} = 939 \text{ V}$$

### Corrigé de l'exercice 4

1.1 Vérification

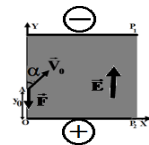
$$P = mg = 9 \cdot 10^{-30} \text{ N. et } F = eU/d = 1 \cdot 10^{-15} \text{ N.}$$

$$\frac{F}{P} = \frac{1}{9} \cdot 10^{15} \Rightarrow P \ll F$$

1.2 Signes des plaques :

Les ions étant déviés vers le bas (vers la plaque  $P_2$ ) la force électrique est dirigée vers le bas.

Comme  $q < 0$ ,  $\vec{E}$  est opposé à  $\vec{F}$  et  $\vec{E}$  est dirigé vers les potentiels décroissants c'est-à-dire de la plaque  $P_2$  qui est chargée positivement vers la plaque  $P_1$  qui est chargée négativement.



### 1.3 Etude du mouvement entre P<sub>1</sub> et P<sub>2</sub> :

- Conditions initiales :

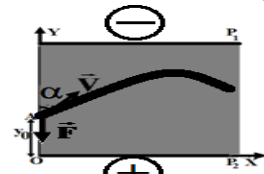
$$\overline{OA} \begin{cases} x_A = x_0 = 0 \\ y_A = y_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \overline{V_0} \begin{cases} V_{0x} = V_0 \sin \alpha \\ V_{0y} = V_0 \cos \alpha \end{cases}$$

- Étude dynamique ;

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{F}{m} \end{cases} \quad \overline{V} \begin{cases} v_x = V_0 \sin \alpha \\ v_y = -\frac{F}{m}t + V_0 \cos \alpha \end{cases}$$

$$\overline{OG} \begin{cases} x = (V_0 \sin \alpha)t & (1) \\ y = -\frac{F}{2m}t^2 + (V_0 \cos \alpha)t + y_0 & (2) \end{cases}$$



### L'équation de la trajectoire :

- (1)  $\Leftrightarrow t = x / (v_0 \sin \alpha)$  ; en remplaçant t dans (2), on obtient :

$$y = -\frac{F}{2mV_0^2 \sin^2 \alpha} x^2 + x \cot \alpha + y_0$$

$$y = -11x^2 + x + y_0$$

### 1.4 L'ordonnée du point S le plus haut de la trajectoire :

D'après la relation indépendante du temps :

$$V_{Sy}^2 - V_{0y}^2 = 2a_y (y_S - y_0)$$

$$\Rightarrow y_S = \frac{-V_{0y}^2}{2a_y} + y_0 = \frac{-V_0^2 \cos^2 \alpha}{-2\frac{F}{m}} + y_0$$

$$y_S = \frac{mV_0^2 \cos^2 \alpha}{2F} + y_0$$

Pour que l'électron ne touche pas la plaque P<sub>1</sub> il faut que

$$y_S < d \Leftrightarrow \frac{mV_0^2 \cos^2 \alpha}{2F} + y_0 < d$$

$$\Rightarrow y_0 < d - \frac{mV_0^2 \cos^2 \alpha}{2F}$$

$$y_0 < 4 \cdot 10^{-2} - \frac{9 \cdot 10^{-31} \cdot (10^7)^2 \cdot 1}{2 \cdot 10^{-15}} \Leftrightarrow y_0 < 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

La valeur max pour que l'électron ne touche pas la plaque P<sub>1</sub> est

$$y_0 = 1,75 \text{ cm}$$

### 1.5 L'abscisse du point d'impact P :

L'ordonnée du point P est nulle

$$0 = -11x^2 + x + 1,75 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 11 \cdot 1,75 \cdot 10^{-2} \cdot 11 = 1,77 \quad \text{soit } x_P = 0,11 \text{ m}$$

## 2.1 Les équations horaires du mouvement

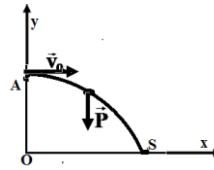
Conditions initiales :

$$A \begin{cases} x_0 = x_A = 0 \\ y_0 = y_A \end{cases} \vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = V_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$$

En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = V_0 \\ v_y = -gt \end{cases} \Rightarrow \overline{AM} \begin{cases} x = V_0 t & (1) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 & (2) \end{cases}$$



L'équation de la trajectoire : (1) donne  $t = \frac{x}{V_0}$  en remplaçant dans (2), on

trouve :  $y = -\frac{g}{2V_0^2}x^2 + y_0$  (3)

2.2 L'abscisse du point S : au point  $y_S = 0$  en remplaçant dans (3), on trouve :

$$0 = -\frac{g}{2V_0^2}x^2 + y_0 \Rightarrow y_0 = \frac{g}{2V_0^2}x^2 = \frac{10}{2 \times 14^2} 7,67^2 = 1,5 \text{ m}$$

3 L'influence de la masse :

-sur la force : la masse n'a pas d'influence sur la force électrique car elle est indépendante de la masse par contre le poids est proportionnelle à la masse.

-sur l'accélération : l'accélération du mouvement dans le champ est inversement proportionnelle à la masse par contre l'accélération dans le champ de pesanteur est indépendante de la masse.

### Corrigé de l'exercice 5

1.1 Détermination du sens du champ  $\vec{E}$  :

Comme la déviation se fait vers le haut  $F$  est dirigé vers le haut et comme  $q > 0$   $E$  a le même sens c'est-à-dire de  $P_2$  vers  $P_1$ .

1.2. La déviation étant vers le haut, la force  $\vec{F}$  est dirigée vers le haut et  $\vec{E}$  est dirigée vers le haut car  $q > 0$ .

Conditions initiales:

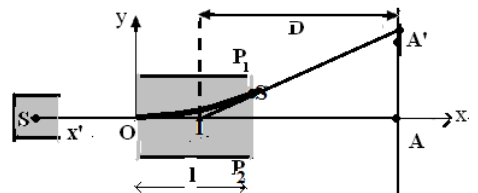
$$O \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = V_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$$

Le PFD (Théorème du centre d'inertie) :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$$

On projette sur  $Ox$

$$0 = ma_x \Rightarrow a_x = 0 \text{ m.r.u} \begin{cases} a_x = 0 \\ v_x = V_0 \\ x = V_0 t(1) \end{cases}$$



On projette sur  $Oy$   $F = ma_y \Rightarrow a_y = F/m$  m.r.u.v

$$\begin{cases} a_y = \frac{F}{m} \\ v_y = \frac{F}{m} t \\ y = \frac{F}{2m} t^2 & (2) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire :

(1)  $\Rightarrow t = x / v_0$ ; en remplaçant  $t$  dans (2), on obtient :

$$y = \frac{F}{2mV_0^2} x^2 = \frac{2eU}{2.4m_p d V_0^2} x^2 = \frac{eU}{4m_p d V_0^2} x^2$$

1.3. Lorsque le champ est supprimé, il n'y a plus de force :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{0} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \text{ m.r.u}$$

1.4. Calcul de la vitesse  $V_0$

$$\tan \alpha = \frac{AA'}{AI} \Rightarrow AA' = AI \tan \alpha = D \tan \alpha \quad \text{avec} \quad \tan \alpha = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{eUl}{2m_p d V_0^2}$$

$$\Rightarrow AA' = D \frac{eUl}{2m_p d V_0^2} \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{DeUl}{2m_p d AA'}} = 5.10^5 \text{ m/s}$$

1.5 La durée du trajet OS

$$t_s = x_s / V_0 = 3.10^{-7} \text{ s}$$

Les coordonnées de  $\vec{V}_s$

$$\vec{V}_s \begin{cases} V_{sx} = V_0 = 5.10^5 \text{ m/s} \\ V_{sy} = \frac{F}{m} t_s = \frac{2eU}{4m_p d} t_s = \frac{eU}{2m_p d} t_s = 2,95.10^5 \text{ m/s} \end{cases}$$

Déduction de  $V_s$  :

$$V_s = \sqrt{V_{sx}^2 + V_{sy}^2} = 5,8.10^5 \text{ m/s}$$

La déviation angulaire  $\alpha$

$$\tan \alpha = \frac{V_{sy}}{V_{sx}} = 0,58 \text{ soit } \alpha \approx 30^\circ$$

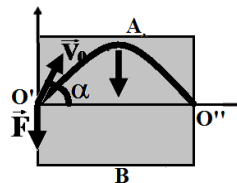
2.1 Etude du mouvement entre A et B :

- Conditions initiales

$$O' \begin{cases} x_{O'} = x_0 = 0 \\ y_{O'} = y_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{V}_s \begin{cases} V_{sx} = V_s \cos \alpha \\ V_{sy} = V_s \sin \alpha \end{cases}$$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{F}{m} \end{cases} \quad \vec{V} \begin{cases} V_x = V_s \cos \alpha \\ V_y = -\frac{F}{m} t + V_s \sin \alpha \end{cases} \quad O'G \begin{cases} x = (V_s \cos \alpha) t & (1) \\ y = -\frac{F}{2m} t^2 + (V_s \sin \alpha) t & (2) \end{cases}$$



L'équation de la trajectoire :

(1)  $t = x / (V_s \cos \alpha)$ ; en remplaçant  $t$  dans (2), on obtient :

$$y = -\frac{F}{2mV_s^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha = -\frac{eU'}{4m_p d' V_s^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

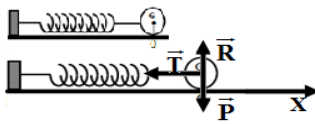
2.2 Calcul de U' pour que l'électron sorte par le point O''

$$0 = -\frac{eU'}{4m_p d V_S^2 \cos^2 \alpha} l^2 + l \tan \alpha \Leftrightarrow \frac{eU'}{4m_p d V_S^2 \cos^2 \alpha} l = \tan \alpha$$

$$\Rightarrow U' = \frac{2m_p d V_S^2 \sin 2\alpha}{el} = \frac{2 \times 1,67 \cdot 10^{-27} \times 4 \cdot 10^{-2} \times (5,8 \cdot 10^5)^2 \sin 60}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 10^{-1}} \approx 2444 \text{ V}$$

**Oscillateur mécanique:****1. Le pendule élastique horizontal:**

- ✓ Equation différentielle:



- ✓ Equation horaire:

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

- ✓ Période du mouvement:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ or } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \text{ soit } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

- ✓ Energie mécanique:

$$E_m = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}Kx^2 \Leftrightarrow E_m = \frac{1}{2}Kx_m^2$$

**2. Le pendule élastique vertical:**

- ✓ Condition d'équilibre :

$$\text{A l'équilibre : } \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow P - T_0 = 0 \Leftrightarrow mg = Kx_0$$

- ✓ Equation différentielle:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

En projetant suivant l'axe  $x'x$  :

$$P - T = ma \Leftrightarrow P - K(\Delta l + x) = ma \Leftrightarrow -kx = ma$$

$$\Rightarrow a + \frac{K}{m}x = 0$$

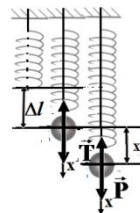
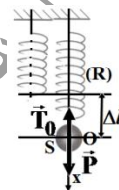
$$x'' + \frac{Kx}{m} = 0 \Leftrightarrow x'' + \omega^2 x = 0 : \text{m.r.s}$$

- ✓ Energie mécanique:

$$E_m = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}K(x^2 + \Delta l^2)$$

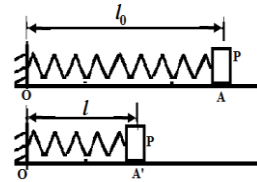
$$= \frac{1}{2}m\omega^2(x_m^2 - x^2) + \frac{1}{2}K(x^2 + \Delta l^2) \text{ avec } m\omega^2 = k.$$

$$= \frac{1}{2}k(x_m^2 - x^2) + \frac{1}{2}K(x^2 + \Delta l^2) = \frac{1}{2}K(x_m^2 + \Delta l^2)$$



## Exercice 1

Un jouet est constitué pour l'essentiel d'un palet P de très petites dimensions, assimilable à un point, de masse  $m=100\text{g}$ , lancé à l'aide d'un ressort sur un plateau AB horizontal de longueur  $AB=L=1\text{m}$  sur lequel il peut glisser.



1 Lorsque P est en A, le ressort a sa longueur naturelle  $OA=l_0=10\text{cm}$ . La raideur du ressort est  $K=250\text{N/m}$ . On comprime le ressort de telle sorte qu'il ait la longueur  $OA'=l=3,6\text{cm}$ , P restant en contact avec le ressort. Puis on lâche, le palet sans vitesse initiale (fig 1).

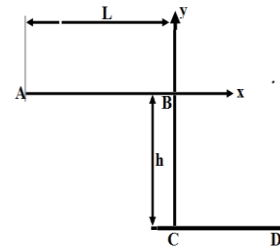
1.1 Quelle est l'énergie mécanique du système palet-ressort au moment où on lâche? Faire l'application numérique.

1.2 On néglige les frottements du palet sur le trajet A'A.

On peut montrer et on admettra que le ressort reste en contact avec le palet jusqu'au moment où celui-ci arrive en A. Utiliser la conservation de l'énergie pour trouver l'expression de la vitesse  $V_A$  du palet en fonction de  $K, l, l_0$  et  $m$ . Faire l'application numérique.

1.3 A l'aide d'un système approprié, on a mesuré les vitesses  $V_A$  et  $V_B$  et on a trouvé  $V_A=3,2\text{m/s}$  et  $V_B=3,0\text{m/s}$ . On admet que l'ensemble des forces de frottement qu'exerce le plateau sur le palet pendant le trajet AB est réductible à une force unique  $\vec{f}$  constante opposée à la vitesse du palet. Calculer l'intensité  $f$  de  $\vec{f}$ .

2 Arrivé en B, le palet quitte le plateau avec le vecteur vitesse  $\vec{V}_B$  pour tomber 1m plus bas.



2.1 Etablir l'équation de la trajectoire du palet dans le repère  $(Bx ; By)$  après passage en B (fig 2).

2.2 Le palet heurte en D le plan horizontal situé à la distance  $BC=h=1\text{m}$  au dessous du plateau AB. Quelles sont les coordonnées de D ?

2.3 Quelles sont les composantes du vecteur vitesse  $\vec{V}_D$  du palet quand il arrive en D ? Quelle est la valeur de  $V_D$  ?

## Exercice 2

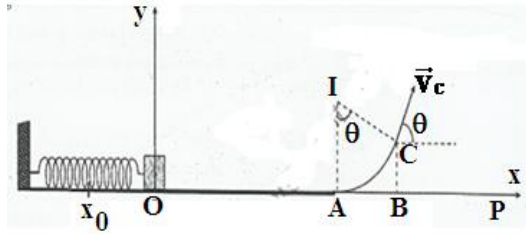
Une piste de lancement est composée :

- D'une portion rectiligne  $OB=d$  sur laquelle est disposé un lanceur
- D'un arc de cercle  $\overset{\frown}{AC}$  de rayon  $r$  de centre I et d'angle au sommet  $\theta$ .
- Le lanceur est un ressort à spires non jointives de raideur  $K$  au bout duquel on place un solide de masse.

Données :

$$m = 100\text{g}; d = 5\text{m}; K = 360\text{N}\cdot\text{m}^{-1}; \theta = 45^\circ; X_0 = 10\text{cm}; \text{ et } g = 9,8\text{ms}^{-2}; r = 5\text{m}$$

Dans tout l'exercice, on prendra le point O comme origine des espaces et on négligera les frottements. A l'équilibre, le centre d'inertie  $G_0$  du solide est en O. On comprime le ressort de  $X_0$  et on le lâche sans vitesse initiale.



1. On suppose que le solide reste accroché au ressort lorsqu'on lâche le système.

- 1.1. Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement du solide.
- 1.2. Détermination de la solution de l'équation différentielle.
  - 1.2.1 Montrer que  $x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  vérifie l'équation différentielle précédente.
  - 1.2.2 Calculer  $\omega_0$ , et  $X_m$  et écrire l'expression de  $x$ .
- 1.3. Montrer que l'énergie mécanique est constante puis calculer sa valeur.

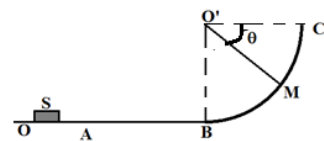
2. En réalité, arrivé en O, le solide est propulsé avec une vitesse  $\vec{V}_0$ . Il parcourt la distance OA, puis l'arc de cercle AC et quitte la piste en C avec une vitesse  $\vec{V}_C$  qui fait avec l'horizontale, un angle  $\theta$ .

- 2.1. Calculer la valeur de  $V_0$  de la vitesse  $\vec{V}_0$ .
- 2.2. Montrer que  $V_A = 6 \text{ m/s}$ .
- 2.3. Calculer la vitesse  $V_C$  du solide en C.
- 2.4. On prendra  $V_C = 2,7 \text{ m/s}$ 
  - 2.4.1 dans le repère  $(O, x, y)$ , établir les équations horaires du mouvement du solide.
  - 2.4.2 En déduire l'équation de la trajectoire.
  - 2.4.3 Déterminer les coordonnées du point d'impact P ainsi que sa vitesse  $V_P$ .

### Exercice 3

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un ressort (R) à spires non jointives de raideur  $K = 16 \text{ N/m}$  et d'un solide S de masse  $m = 40 \text{ g}$ . Le pendule peut osciller librement sans amortissement ni frottement sur un banc horizontal. A l'instant  $t = 0$ , on lance le solide S à partir de sa position d'équilibre O avec une vitesse  $\vec{v}_0$  de valeur  $V_0 = 1,4 \text{ m/s}$  suivant l'axe  $X'X$  (voir fig1). Le mouvement du solide est reporté au repère  $(O ; \vec{i})$ .

- 1.1 Déterminer la nature du mouvement et calculer sa période.
- 1.2 Trouver l'équation horaire du mouvement.
- 1.3 Donner l'expression de l'énergie mécanique du système (ressort+solide) en fonction de  $m$ ,  $k$ ,  $x$  et  $V$  à un instant  $t$  quelconque.
- 2 Au deuxième passage par la position d'équilibre S se détache du ressort, continue son mouvement et aborde en B une piste circulaire BC de rayon  $r = 10 \text{ cm}$  (fig2). Les frottements sont négligeables.



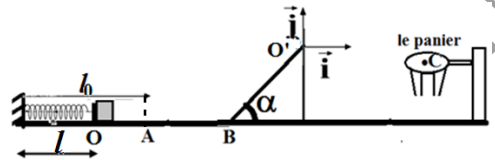
- 2.1 Calculer la vitesse au point B.
- 2.2 Déterminer l'expression de la vitesse du solide au point M et calculer sa valeur pour  $\theta = \widehat{O'M} = 30^\circ$ .
- 2.3 Calculer la valeur de la réaction de la piste au point M. Bac D 2011sc

#### Exercice 4

On négligera tous les frottements.

On considère un jouet d'enfant dont le schéma est représenté ci-dessous.

Le jeu consiste à propulser par l'intermédiaire d'un ressort de raideur  $K$  un palet de masse  $m$  de sorte à l'envoyer dans un panier assimilable à un point C.



Le guide OABO' sur lequel glisse le palet est situé dans un plan vertical.

La partie OAB est rectiligne et horizontale, tandis que BO' également rectiligne est inclinée d'un angle  $\alpha=30^\circ$  par rapport à l'horizontale.

1.1 Etablir dans le repère  $(O', \vec{i}, \vec{j})$ , l'équation cartésienne de la trajectoire du palet, assimilé à son centre d'inertie G, après avoir quitté la piste en O'. On prendra pour origine des dates, l'instant de passage en O'. (1pt)

1.2 Calculer la vitesse  $V_0$  avec laquelle le palet quitte le point O', pour traverser le panier au point C tel que 
$$\begin{cases} x_C = 0,5 \\ y_C = -0,1265 \end{cases}$$

On donne  $V_0=2$  m/s, calculer la vitesse  $V_B$  avec laquelle le palet a abordé le plan incliné en B.

2 Calculer le raccourcissement  $\Delta l$  du ressort pour que le palet puisse être envoyé dans le panier en appliquant la conservation de l'énergie mécanique entre les points O et A.

3 On fixe maintenant le palet au ressort. Soit  $G_0$  la position de son centre d'inertie à l'équilibre. On tire sur le ressort pour l'allonger de  $x_0 = 4$  cm et on le lâche sans vitesse initiale à un instant pris comme origine des dates.

Etablir l'équation différentielle caractérisant le mouvement de l'oscillateur et écrire l'équation horaire du mouvement.

4.1 Pour une position  $x$  quelconque donner l'expression de l'énergie mécanique du système (ressort-solide S) en fonction de  $K$ ,  $m$ ,  $x$  et  $V$ . Donner cette expression en fonction de  $K$  et  $x_0$ .

4.2 Montrer que l'énergie cinétique du solide peut s'écrire sous la forme :

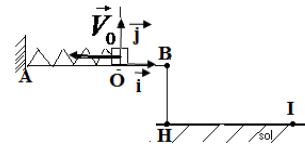
$$E_c = 50(x_0^2 - x^2) \quad .g= 10 \text{ m/s}^2 ; m = 40\text{g} ; BO' = l = 50 \text{ cm} ; k = 100\text{N/m}. \quad (1\text{pt})$$

#### Exercice 5

On négligera les frottements sauf dans la question 4.

Un ressort de masse négligeable à spires non jointives, de coefficient de raideur  $K=20$  N/m est fixé par l'une de ses extrémités en A et on accroche à l'autre extrémité un solide S de masse  $m = 0,2\text{kg}$  qui peut se déplacer le long d'une table horizontale.

Le solide S étant en position d'équilibre, on lui communique une vitesse  $\vec{v}_0$  dirigée suivant l'axe du ressort dans le sens opposé à  $\vec{i}$  (voir figure) et de module  $V_0 = 0,8\text{m/s}$  à la date  $t = 0$ .



1. Etablir l'équation différentielle du mouvement du solide S.

2. Après avoir précisé les valeurs numériques de la pulsation  $\omega$ , de l'amplitude  $x_m$  et de la phase initiale  $\varphi$ , écrire l'équation horaire du mouvement du solide S.

3.1. Sachant que  $E_p = 0$  lorsque le ressort n'est pas déformé, exprimer à la date  $t$ , l'énergie mécanique  $E_m$  du système (ressort + solide S) en fonction de  $K$ ,  $m$ ,  $x$  et  $v$ . Calculer l'énergie mécanique  $E_m$  à la date  $t = 0$ .

3.2. Donner l'expression de l'énergie mécanique  $E_m$  en fonction de  $K$  et de l'amplitude  $x_m$  du mouvement.

4. Au moment où le solide S passe par sa position d'équilibre dans le sens positif il se détache du ressort et poursuit son mouvement suivant OB.

Trouver l'intensité de la réaction de la table sachant que le solide S arrive en B avec une vitesse de valeur  $V_B = 0,4\text{m/s}$  et que  $OB = d = 10\text{cm}$ .

5. Le solide S quitte la table au point B.

5.1. Déterminer les équations horaires du mouvement du solide S après B dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

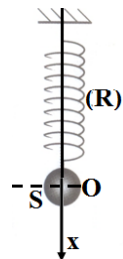
5.2. Trouver l'abscisse du point de chute I dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  sachant que  $BH = h = 1,25\text{ m}$ .

### Exercice 6

Les frottements sont supposés négligeables. On prendra  $g=10\text{m/s}^2$

Le pendule élastique représenté par la figure est constitué de:

- Un ressort (R) à spires non jointives, d'axe vertical, de masse négligeable et de raideur  $k=60\text{N/m}$ .
- Un solide (S) de centre d'inertie G et de masse M. La position de G est, à chaque instant, donnée par son abscisse  $x$  dans le repère  $(O, \vec{i})$ ; O étant la position de G à l'équilibre.



Le solide (S) est écarté verticalement vers le bas de sa position d'équilibre d'une distance  $x_m=2\text{cm}$ , puis abandonné à lui-même sans vitesse initiale à la date  $t=0$ .

1 Après avoir étudié l'équilibre du solide S calculer sa masse M sachant que l'allongement à l'équilibre  $\Delta l=4\text{cm}$ .

2 Montrer que le mouvement de S est rectiligne sinusoïdal et trouver son équation horaire.

3 On prendra le plan horizontal passant par O comme plan de référence de l'énergie potentielle de pesanteur du système (ressort, solide, Terre).

3.1 Exprimer l'énergie potentielle du système à une date  $t$  quelconque, en fonction de  $k$ ,  $x$  et  $\Delta l$ .

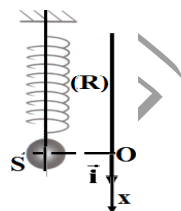
3.2 Donner l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de  $k, \Delta l$  et  $x_m$ .

3.3 Déduire l'expression de l'énergie cinétique du système en fonction de  $k, x$  et  $x_m$ .

### Exercice 7

On néglige la résistance de l'air.

Un pendule élastique vertical est constitué d'un solide S de masse  $m$  et d'un ressort R de raideur  $K$ . Les courbes donnent les variations des énergies mécanique  $E$  et potentielle  $E_P$  du système (solide, ressort, terre) en fonction de l'abscisse  $x$  du centre d'inertie G du solide dans le repère  $(O, \vec{i})$ .



La position d'équilibre du solide coïncide avec l'origine O du repère et le plan horizontal passant par O est pris comme plan de référence de l'énergie potentielle de pesanteur du système.

1. Trouver l'équation différentielle du mouvement.

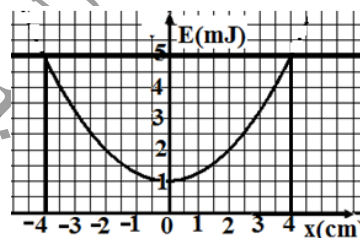
2. Etablir l'expression de l'énergie potentielle du système en fonction de  $K, x$  et  $x_0$  où  $x_0$  est l'allongement à l'équilibre.

3. Montrer que l'énergie mécanique est conservée au cours des oscillations?

4. Trouver l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de  $K, x_m$  et  $x_0$  où  $x_m$  est l'amplitude des oscillations.

5. En se basant sur le graphe déterminer l'amplitude  $x_m$ , la raideur  $K$  du ressort et son allongement à l'équilibre  $x_0$ .

6. Montrer que l'énergie cinétique  $E_C$  du solide peut être exprimée en fonction de  $K, x_m$  et  $x$ .



### Exercice 8

On néglige les frottements

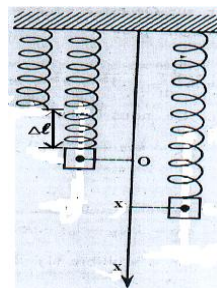
On fixe l'une des extrémités d'un ressort à spires non jointives de raideur  $K$  et de masse négligeable comme l'indique la figure.

Le ressort s'allonge de  $\Delta l = 2\text{cm}$  lorsqu'on suspend à son autre extrémité une masse ponctuelle  $m = 400\text{g}$ .

1. Calculer la valeur de la constante de raideur  $K$  du ressort.

2. Le point matériel effectue des oscillations et à un instant  $t$  quelconque ce point matériel a pour abscisse  $x$  et pour vitesse  $V$ .

On prend pour origine des énergies potentielles de pesanteur le plan horizontal passant par l'origine O des abscisses et pour origine des énergies potentielles élastiques l'énergie potentielle du ressort lorsqu'il n'est ni comprimé ni allongé.



- 2.1. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{PP}$  en fonction de  $m, g$  et  $x$ .
- 2.2. Exprimer l'énergie potentielle élastique du ressort  $E_{Pe}$  en fonction de  $m, g$ ,  $x$  et  $K$ .
3. Exprimer l'énergie mécanique  $E_m$  du système (ressort-masse- terre) en fonction de  $m, g, x, V$  et  $K$ .
4. Déterminer la nature du mouvement et écrire son équation horaire si à l'instant  $t=0$ ,  $x_0=0$  et  $V_0 = -2m/s$ .
5. Calculer la valeur de  $E_m$ ,

### Exercice 9

Les frottements sont négligeables.

On considère un ressort très long à spires non jointives de masse négligeable et de raideur  $K$ .

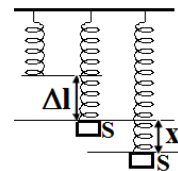


1. Le ressort est placé sur une table horizontale. On fixe l'une des extrémités du ressort et on accroche à son autre extrémité un solide ponctuel de masse  $m$ . On déplace le solide de sa position d'équilibre d'une distance  $x_0 = 5\text{cm}$  et on l'abandonne sans vitesse initiale.

- 1.1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur le solide et montrer que le système {ressort + solide + terre} est conservatif.
- 1.2. Pour une position  $x$  quelconque donner l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de  $K, m, x$  et de la vitesse  $V$  du solide.
- 1.3. Donner cette expression en fonction de  $K$  et  $x_0$ . Déduire l'expression de  $V$  en fonction de  $K, m, x_0$  et  $x$ .
- 2.1. Montrer que l'énergie potentielle élastique du ressort peut s'écrire sous la forme :  $E_{pe} = a V^2 + b$ .
- 2.2. L'expérience montre que  $E_{pe} = - 0,1 V^2 + 2,5 \cdot 10^{-2}$ . Déduire les valeurs de  $m$  et de  $K$ .
- 2.3. Calculer la vitesse du solide lors du passage par sa position d'équilibre.

### Exercice 10

On considère le système ci-contre constitué d'un solide  $S$  de masse  $m$  accroché à l'extrémité inférieure d'un ressort  $R$  vertical à spire non jointives, de masse négligeable et de raideur  $K$  dont l'extrémité supérieure est fixe. Soit  $\Delta l$  l'allongement du ressort à l'équilibre. On écarte le solide  $S$  de sa position d'équilibre vers le bas d'une distance  $x_0$  et on l'abandonne sans vitesse à un instant pris comme origine des instants.



1. On prend comme origine des énergies potentielles de pesanteur le plan horizontal passant par la position d'équilibre et comme origine des énergies potentielles élastiques la position du ressort lorsqu'il n'est ni allongé ni comprimé.

1.1. Etablir l'expression de l'énergie mécanique  $E$  du système {solide+ressort+terre} en fonction de  $x$ ,  $V$ ,  $\Delta l$ ,  $m$  et  $K$ .

1.2. Montrer que cette énergie est constante et l'exprimer en fonction de  $K$ ,  $x_0$  et  $\Delta l$ .

1.3. Déduire la nature du mouvement.

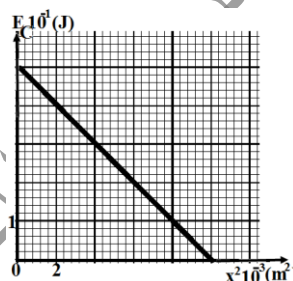
2. Un dispositif approprié permet de tracer la courbe représentative de l'énergie cinétique en fonction de  $x^2$  comme l'indique le graphe.

2.1. Trouver l'expression de l'énergie cinétique en fonction de  $K$ ,  $x$  et  $x_0$ .

2.2. Déterminer graphiquement l'équation  $E_C=f(x^2)$ .

2.3. Par identification des deux expressions précédentes, déterminer les valeurs de  $K$  et de  $x_0$ .

2.4. Calculer les valeurs de l'allongement  $\Delta l$  et de la masse  $m$  si l'énergie mécanique vaut 1 joule.

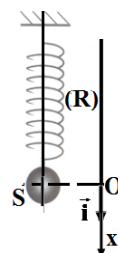


### Exercice 11

On néglige la résistance de l'air.

Un pendule élastique vertical est constitué d'un solide  $S$  de masse  $m$  et d'un ressort  $R$  de raideur  $K$ . Les courbes donnent les variations des énergies mécanique  $E$  et potentielle  $E_P$  du système (solide, ressort, terre) en fonction de l'abscisse  $x$  du centre d'inertie  $G$  du solide dans le repère  $(O, \vec{i})$ .

La position d'équilibre du solide coïncide avec l'origine  $O$  du repère et le plan horizontal passant par  $O$  est pris comme plan de référence de l'énergie potentielle de pesanteur du système.

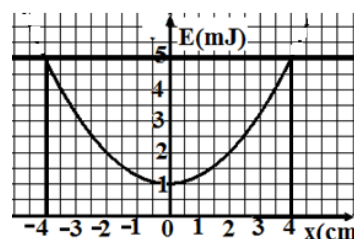


1. Trouver l'équation différentielle du mouvement.

2. Etablir l'expression de l'énergie potentielle du système en fonction de  $K$ ,  $x$  et  $x_0$  où  $x_0$  est l'allongement à l'équilibre.

3. Montrer que l'énergie mécanique est conservée au cours des oscillations?

4. Trouver l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de  $K$ ,  $x_m$  et  $x_0$  où  $x_m$  est l'amplitude des oscillations.



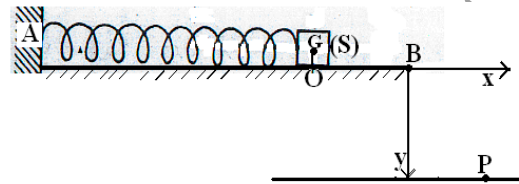
5. En se basant sur le graphe déterminer l'amplitude  $x_m$ , la raideur  $K$  du ressort et son allongement à l'équilibre  $x_0$

6. Montrer que l'énergie cinétique  $E_C$  du solide peut être exprimée en fonction de  $K$ ,  $x_m$  et  $x$ .

### Exercice 12

Un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur  $K$  ; est placé sur une table horizontale.

L'une des extrémités du ressort est soudée en un point  $A$  et l'autre extrémité est fixée à un solide  $S$  de centre d'inertie  $G$  et de masse  $m=100g$ .



Le solide  $S$  qu'on assimile à un point matériel peut glisser sans frottement sur la table.

1. On écarte le solide  $S$  de sa position d'équilibre d'une distance de 3cm et on l'abandonne sans vitesse initiale à un instant qu'on prendra pour origine des temps. Le mouvement de  $S$  sera étudié dans le repère d'axe  $Ox$  dont l'origine  $O$  coïncide avec la position du centre d'inertie  $G$  à l'équilibre (voir fig).

1.1. Montrer que le mouvement de  $S$  est rectiligne sinusoïdal.

1.2. Exprimer la raideur  $K$  du ressort en fonction de la masse  $m$  et de la période  $T$  du mouvement. Calculer  $K$  sachant que la durée de 10 oscillations du solide est 3,14s.

1.3. Déterminer l'équation horaire du mouvement de  $S$ .

1.4. Calculer l'énergie mécanique du système (solide  $S$  + ressort).

2. Au passage par la position d'équilibre dans le sens positif le solide se détache et continue son mouvement sur la table pour la quitter au point  $B$ .

2.1. Déterminer l'équation de la trajectoire du mouvement aérien dans le repère  $(B, x, y)$  de la figure.

2.2. Trouver les coordonnées du point de chute  $P$  si la durée de cette chute est 0.4s.

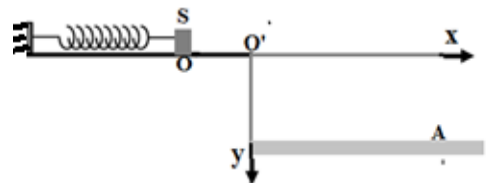
### Exercice 13

*Les frottements sont négligeables*

On considère un ressort à spires non jointives de masse négligeable et de raideur  $K=50N/m$ . Le ressort est placé sur une table horizontale.

On fixe l'une des extrémités du ressort et on accroche à son autre extrémité un solide ponctuel  $S$  de masse  $m=500g$ .

A l'instant  $t=0$ , on déplace le solide de sa position d'équilibre d'une distance



$x_0 = 2\text{cm}$  et on lui communique une vitesse  $v_0 = \frac{\sqrt{3}}{5}\text{m/s}$ .

1.1. Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement du centre d'inertie du solide.

1.2. Déterminer l'équation horaire du mouvement. Quelle est la vitesse au passage par la position d'équilibre dans le sens positif ?

1.3. Exprimer l'énergie mécanique de cet oscillateur et montrer qu'elle est constante. Retrouver la valeur maximale de la vitesse du mobile en utilisant le principe de la conservation de l'énergie mécanique.

2. Le solide se détache du ressort au passage par la position d'équilibre  $O$  dans le sens positif et continue son mouvement sur la table pour la quitter au point  $O'$  et atteindre le point  $A$  au sol situé  $5\text{ cm}$  plus bas (voir figure).

*L'instant de passage de  $S$  en  $O'$  est considéré comme origine des dates.*

2.1. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de  $S$  dans le repère  $(O', x, y)$ .

2.2. Trouver les coordonnées du point  $A$ .

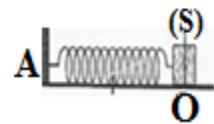
2.3. Calculer les composantes du vecteur vitesse  $\vec{V}_A$  au point  $A$  ; en déduire son module puis préciser l'angle  $\beta$  qu'il fait avec la verticale passant par  $A$ .

#### Exercice 14

*Les frottements sont négligeables.*

Soit un ressort  $R$  élastique de masse négligeable, de constante de raideur  $K=20\text{N/m}$ , guidé par une tige horizontale. Une des extrémités est fixée en un point  $A$

l'autre est attachée à un solide ponctuel  $S$  de masse  $m$ , qui coulisse sur la tige. Dans la position d'équilibre, le centre d'inertie  $G$  du solide est en  $O$ .

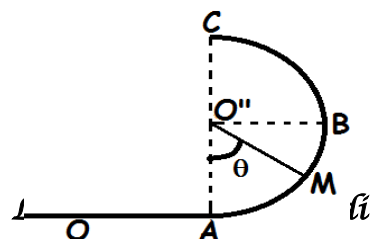


1. Etablir l'équation différentielle du mouvement de  $S$ .

2. Ecrire l'équation horaire du mouvement  $x=f(t)$  sachant qu'à l'instant  $t=0$  le centre d'inertie  $G$  du solide passe en  $O$  dans le sens positif et qu'il décrit un segment de  $4\text{cm}$  au cours des oscillations dont la période est  $T=0,05\text{s}$ .

3. Montrer que l'énergie mécanique  $E$  du système est égale à  $4 \cdot 10^{-3}\text{J}$ , sachant que l'énergie potentielle de pesanteur au niveau de la tige est nulle.

4. Calculer l'énergie cinétique du système à l'instant  $t=0,25\text{s}$ .



5. A la date  $t=5s$ , la masse se détache du ressort et se déplace suivant une piste OABC constituée de deux parties:

- OA rectiligne.
- ABC en forme de demi-cercle de centre O'' et de rayon  $r=10cm$ .

5.1. Calculer la vitesse du solide S à l'arrivée en A.

5.2. Trouver l'expression de la vitesse de S en M tel que  $(\vec{AO''M}) = \theta$  et calculer sa valeur au point C. On donne  $g=10m/s^2$ .

## Corrigé de l'exercice 1

## 1.1 Calcul de l'énergie mécanique à l'instant où on lâche le palet

L'expression de l'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe}$$

$$\text{Or } E_{pp}=0 \text{ à } t=0; E_c=0; E_{pe} = \frac{1}{2}K\Delta^2$$

$$\text{soit } E_m = E_p = \frac{1}{2}K\Delta^2 = \frac{1}{2}K(l-l_0)^2 \quad (1) \quad \text{A.N : } E_m=0,512\text{J}$$

## 1.2 Au point A pas d'allongement

$$E_A = \frac{1}{2}mV_A^2$$

Comme l'énergie mécanique est toujours constante :

$$E_m = \frac{1}{2}mV_A^2 = \frac{1}{2}K\Delta^2 \Rightarrow V_A = \sqrt{\frac{K}{m}}(l_0 - l)$$

$$\text{A.N : } V_A = 3,2\text{m/s.}$$

## 1.3 Calcul de f

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}}$$

$$E_{CB} - E_{CA} = \underbrace{W_{\vec{F}}}_0 + W_{\vec{f}} + \underbrace{W_{\vec{R}_n}}_0$$

$$\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = -fxL \Rightarrow f = \frac{m}{2L}(V_A^2 - V_B^2) \quad \text{A.N: } f=0,062\text{N}$$

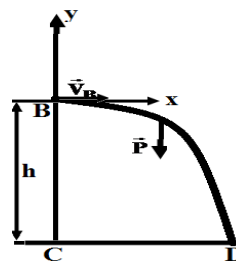
## 2 Conditions initiales :

$$O \begin{cases} x_B = x_0 = 0 \\ y_B = y_0 = 0 \end{cases} \quad \vec{v}_B \begin{cases} v_{Bx} = V_B \\ v_{By} = 0 \end{cases}$$

En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = V_B \\ v_y = -gt \end{cases} \Rightarrow \text{B.M} \begin{cases} x = V_B t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (1)$$



L'équation de la trajectoire

$$(1) \Rightarrow t = \frac{x}{V_B}$$

$$\text{On remplace } t \text{ dans } y \text{ soit } y = -\frac{g}{2V_B^2}x^2$$

2.2 Lorsque le palet touche le sol au point au point D nous aurons  $y_D = -h$ 

$$y_D = -\frac{g}{2V_B^2}x_D^2 = -h \Leftrightarrow x_D = \sqrt{\frac{2h}{g}}V_B = 1,36\text{m}$$

L'instant  $t_D$  correspondant est  $t_D = \frac{x_D}{V_B} = 0,45\text{s}$ 2.3 Les composantes  $\vec{v}_D$ 

$$\vec{v}_D \begin{cases} v_{Dx} = V_B = 3 \\ v_{Dy} = -gt_D = 4,45 \end{cases}$$

D'où la valeur  $v_D = \sqrt{v_{Dx}^2 + v_{Dy}^2} = 5,37\text{m/s}$

## Corrigé de l'exercice 2

L'équation différentielle du mouvement :  
soit  $x$  l'abscisse du solide par rapport à l'origine

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Proj/Ox :

$$-T + 0 + 0 = ma \Rightarrow -Kx = ma \Leftrightarrow a + \frac{K}{m}x = 0$$

C'est une équation différentielle du second degré dont la solution est de la forme :  
 $x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

2.1 La dérivée seconde de l'équation donne :  $a + \omega_0^2 x = 0$  ce qui montre que  
 $x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  est une solution de l'équation différentielle.

2.2 Calcul des constantes :

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{360}{0,1}} = 60 \text{ rad/s}$
- Le solide a été lâché sans vitesse initiale  $X_m = x_0 = 0,1 \text{ m}$
- La phase initiale se calcule à partir des conditions initiales :

$$\cos \varphi = \frac{x_0}{X_m} = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

L'équation horaire du mouvement est :  $x = 0,1 \cos(60t)$

3. On considère que le système étudié est constitué de (la terre-ressort-solide)  
Ce qui le rend pseudo- isolé et permet de dire que  $E_m = Cte$

$$\text{Calcul de } E_m : E_m = E_{mi} = \frac{1}{2} K x_0^2 \quad \text{A.N : } E_m = \frac{1}{2} \times 360 \times (0,1)^2 = 1,8 \text{ J}$$

II.

1. Calcul de la vitesse de passage par l'équilibre :

$$\text{L'énergie est conservée : } E_{m(\text{éq})} = E_{mi} \quad \frac{1}{2} m V_0^2 = E_{mi} \quad , V_0 = \sqrt{\frac{2E_{mi}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,8}{0,1}} = 6 \text{ m/s}$$

2-En appliquant le théorème de variation de l'énergie cinétique entre O et B on trouve :

$$\Delta E_c = E_{cA} - E_{cO} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_n)$$

$$\frac{1}{2} m V_A^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 = 0 \quad , V_A^2 = V_0^2 \Rightarrow V_A = V_0 = 6 \text{ m/s;}$$

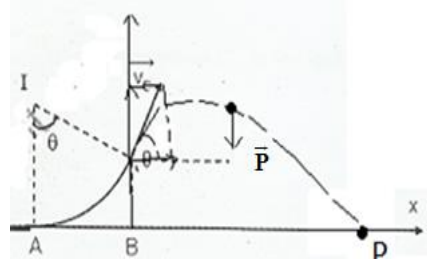
3-La vitesse au point C

$$V_C = \sqrt{V_A^2 - 2gr(1 - \cos \theta)}$$

$$\text{A.N : } V_C = \sqrt{36 - 2 \cdot 9,8 \times 5 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 2,7 \text{ m/s}$$

4.1. Conditions initiales :

$$\begin{cases} x_0 = d \\ y_0 = h = r(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad \vec{V} \begin{cases} V_{cx} = V_c \cos\theta \\ V_{cy} = V_c \sin\theta \end{cases}$$



Etude du mouvement

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \quad \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\text{Proj}/0x : 0 = ma_x, m \neq 0$$

$$a_x = 0 \text{ le mvt est r.u}$$

Les équations horaires du mvt sur ox sont :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ V_{ox} = V_c \cos\theta \\ x = V_c \cos\theta t + d \end{cases}$$

Proj/0y :  $-mg = ma_y \Rightarrow a_y = -g$  le mvt est r.u.v

Les équations horaires du mvt sur oy sont :

$$\begin{cases} a_y = -g \\ V_y = -gt + V_c \sin\theta \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_c \sin\theta t + r(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

4.2. L'équation de la trajectoire :

$$t = \frac{x - d}{V_c \cos\theta}$$

On remplace dans y et on obtient :

$$y = -\frac{g}{2V_c^2 \cos^2\theta} x^2 + x \left( \frac{gd}{V_c^2 \cos^2\theta} + \tan\theta \right) - \frac{gd^2}{V_c^2 \cos^2\theta} - d \tan\theta + r(1 - \cos\theta)$$

$$\text{Soit : } y = -1,3x^2 + 14,4x - 37$$

4.3. Les coordonnées du point de chute : au point de chute  $y_P = 0$

$$-1,3x^2 + 14,4x - 37 = 0 \text{ soit } x_P = 10,2m$$

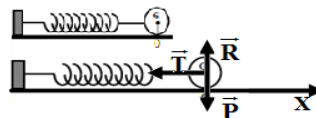
Corrigé de l'exercice 3

1.1 Nature du mouvement.

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$$

En projetant suivant l'axe Ax :

$$-T = ma \Leftrightarrow -kx = ma \Rightarrow a + \frac{K}{m}x = 0$$



C'est l'équation différentielle caractérisant un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation  $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

La valeur de la période :  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{10} = 0,314s$

1.2 L'équation horaire du mouvement :

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Calcul de la pulsation :  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 20 \text{ rad/s}$

Conditions initiales :  $\begin{cases} x_0 = x_m \cos \varphi & (1) \\ v_0 = -x_m \omega \sin \varphi & (2) \end{cases}$

à  $t = 0$   $x_0 = 0 \text{ m}$  et  $v_0 = 1,4 \text{ m/s}$

$v_0^2 = \omega^2(x_m^2 - x_0^2) \Rightarrow x_m = \left| \frac{v_0}{\omega} \right| = 7.10^{-2} \text{ m}$  Soit  $x_m = 7.10^{-2} \text{ m}$ .

Calcul de la phase initial  $\varphi$

(1)  $\Rightarrow \cos \varphi = \frac{x_0}{x_m} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$  car  $v_0 > 0$

D'où l'équation horaire :  $x = 7.10^{-2} \cos(20 t - \frac{\pi}{2})$

1.3 L'expression de l'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe} \quad \text{or} \quad E_{pp} = 0; \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{et} \quad E_{pe} = \frac{1}{2} k x^2$$

D'où  $E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$

2.1 Calcul de  $V_B$

$$\Delta E_c = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_{cB} - E_{cO} = 0 \Rightarrow V_B = v_0 = x_m \omega = 1,47 \text{ m/s}$$

2.2 Calcul de  $V_M$

$$\Delta E_c = \sum W_{\vec{F}} \Leftrightarrow E_{cM} - E_{cB} = -mgh \quad \text{avec} \quad h = r(1 - \sin \alpha)$$

$$\Rightarrow v_M = \sqrt{v_B^2 - 2gr(1 - \sin \theta)} \quad \text{A.N : } v_M \approx 1 \text{ m/s}$$

2.3 Expression de  $R_M$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R}_C = m\vec{a}$$

Par projection sur la normale, on obtient :

$$-mg \sin \theta + R = m \frac{v_M^2}{r} \quad R = m(g \sin \theta + \frac{v_M^2}{r}) \quad \text{A.N : } R = 0,6 \text{ N}$$

### Corrigé de l'exercice 4

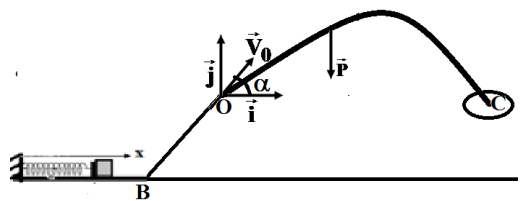
Conditions initiales :

$$O \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \vec{V}_0 \begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos \alpha \\ V_{0y} = V_0 \sin \alpha \end{cases}$$

En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = V_0 \cos \alpha \\ v_y = -gt + V_0 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \overline{OM} \begin{cases} x = V_0 \cos \alpha t & (1) \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin \alpha t & (2) \end{cases}$$



L'équation de la trajectoire

$$(1) \Rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$$

On remplace t dans y :  $y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$

1.2. Calcul de  $V_0$ 

La trajectoire passe par C alors les coordonnées de C vérifie l'équation de la trajectoire :

$$-0,1265 = -\frac{10}{2V_0^2 \frac{3}{4}} 0,5^2 + 0,58x0,5 \Leftrightarrow V_0 = 2\text{m/s}$$

1.3 Calcul de  $V_B$ 

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}}$$

En appliquant le théorème  $E_{CO} - E_{CB} = W_{\vec{P}} + W_{\vec{f}} + \underbrace{W_{\vec{R}_n}}_0$

$$\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = -mgx \sin \alpha \Rightarrow V_B = \sqrt{V_0^2 + 2OBg \sin \alpha} = 3\text{m/s}$$

2 Calcul de  $\Delta l$ 

Au point B on a  $E_{m1} = \frac{1}{2}mV_B^2$

Au point O on a  $E_{m2} = \frac{1}{2}K\Delta l^2$  L'énergie mécanique du système étant

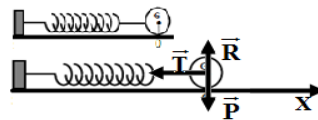
conservée  $\frac{1}{2}K\Delta l^2 = \frac{1}{2}mV_B^2 \Rightarrow \Delta l = V_B \sqrt{\frac{m}{K}} = 0,03\text{m}$

## 3.1 Nature du mouvement.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$$

En projetant suivant l'axe Ax :

$$-T = ma \Leftrightarrow -kx = ma \Rightarrow a + \frac{K}{m}x = 0$$



C'est l'équation différentielle caractérisant un mouvement rectiligne

sinusoïdal de pulsation  $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

## 3.2 L'équation horaire du mouvement :

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

La valeur de la pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0,04}} = 50\text{rad/s} \quad \text{Conditions initiales : } \begin{cases} x_0 = x_m \cos \varphi & (1) \\ V_0 = -x_m \omega \sin \varphi & (2) \end{cases}$$

à  $t = 0$   $x_0 = 4.10^{-2}\text{m}$  et  $V_0 = 0$

$$V^2 = \omega^2(x_m^2 - x_0^2) \Leftrightarrow x_m = x_0 = 4.10^{-2}\text{m}$$

Calcul de la phase initial  $\varphi$

$$(1) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{x_0}{x_m} = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

D'où l'équation horaire :  $x = 4.10^{-2} \cos(50t)$

## 4.1. L'expression de l'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe}$$

$$\text{or } E_{pp} = 0; E_c = \frac{1}{2} mV^2; E_{pe} = \frac{1}{2} Kx^2$$

$$\text{soit } E_m = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} Kx^2 \quad (1)$$

Comme l'énergie mécanique est toujours constante alors lorsque  $x=x_0$ , la vitesse est nulle et l'énergie mécanique devient :

$$E_m = \frac{1}{2} Kx_0^2 \quad (2)$$

4.2 L'expression de  $E_C$  :1<sup>ère</sup> méthode

En égalisant les relations (1) et (2) on obtient :

$$E_C + E_P = \frac{1}{2} Kx_0^2 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2} Kx_0^2 - E_P = \frac{1}{2} Kx_0^2 - \frac{1}{2} Kx^2$$

$$E_C = \frac{K}{2} (x_0^2 - x^2) = 50(x_0^2 - x^2)$$

2<sup>ème</sup> méthode

$$E_C = \frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 (x_0^2 - x^2) = \frac{1}{2} k(x_0^2 - x^2) = 50(x_0^2 - x^2)$$

## Corrigé de l'exercice 5

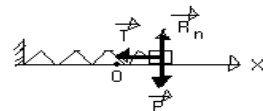
## 1 L'équation différentielle du mouvement :

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$$

En projetant suivant l'axe Ox  $-T = ma \Leftrightarrow$

$$a + (k/m)x = 0$$

1. • Calcul de la pulsation  $\omega$ 

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{A.N : } \omega = 10 \text{ rad/s}$$

• Calcul de l'amplitude  $x_m$  et de la phase initiale  $\varphi$ 

A  $t=0$  :  $x_0=0$  et  $v_0=-0,8 \text{ m/s} \Leftrightarrow x_m \cos \varphi = 0$  et  $-x_m \omega \sin \varphi = -0,8$

Soit  $x_m = 8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$  et  $\varphi = \pi/2$  d'où l'équation horaire :  $x = 8 \cdot 10^{-2} \cos(10t + \pi/2)$

## 3.1 Expression de l'énergie mécanique en fonction de K, m, v et x :

$E_m = E_c + E_p \Leftrightarrow E_m = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} kx^2$  ; à  $t=0$   $E_m = \frac{1}{2} mV_0^2$  sa valeur est alors:

$$E_m = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

3.2 Expression de l'énergie mécanique en fonction de K et de  $x_m$  :

$E_m = \frac{1}{2} m x_m^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$  comme  $m\omega^2 = k \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} k x_m^2$

4 • Calcul de la réaction R :  $R = \sqrt{R_n^2 + P^2}$

- Déterminons  $R_n$  puis  $f$  :

En appliquant la R.F.D, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R}_n + \vec{f} = m\vec{a}$$

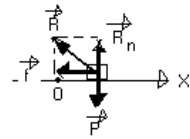
En projetant suivant la verticale descendante :

$$P - R_n = 0 \Rightarrow R_n = P \quad \text{A.N : } R_n = 2N.$$

En projetant suivant l'axe  $Ox$  :

$$-f = ma \text{ avec } a = (v_B^2 - v_O^2)/2d \Rightarrow f = -m(v_B^2 - v_O^2)/2d \quad \text{A.N : } f = 0,48N.$$

$R$  serait alors :  $R = 2,06N$ .



### 5.1 Etude du mouvement de chute dans le vide :

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

En projetant suivant l'axe  $Ox$  :  $a_x = 0 \Rightarrow$  m.r.u d'équation horaire :  $x = v_{Bt} + d$

En projetant suivant l'axe  $Oy$  :  $a_y = -g \Rightarrow$  m.r.u.v d'équation horaire :  $y = -\frac{1}{2}gt^2$

### 5.2 L'abscisse du point d'impact I sur le sol :

au point I  $y_I = -h \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  soit  $x_I = v_{Bt} + d$  A.N :  $x_I = 0,3m$

### Corrigé de l'exercice 6

#### 1 Etude de l'équilibre :

A l'équilibre :  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0}$

$$P - T_0 = 0 \Rightarrow M = \frac{K\Delta\ell}{g} \quad \text{Soit } M = 0,24kg$$

#### 2 Nature du mouvement.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

En projetant suivant l'axe  $x'x$  :

$$P - T = ma \Leftrightarrow P - K(\Delta\ell + x) = ma \Leftrightarrow -kx = ma \Rightarrow a + \frac{K}{m}x = 0$$

C'est l'équation différentielle caractérisant un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{60}{0,24}} = 15,8 \text{ rad/s}$$

L'équation horaire du mouvement :

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

La pulsation :  $\omega = 15,8 \text{ rad/s}$  et l'amplitude  $x_m = 2cm$ .

Calcul de la phase initial  $\varphi$

$$\cos \varphi = \frac{x_0}{x_m} = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

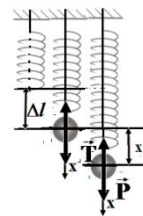
D'où l'équation horaire :

$$x = 2.10^{-2} \cos(15,8 t)$$

#### 3.1 Expression de l'énergie potentielle

$$E_p = E_{pp} + E_{pe} \text{ avec } E_{pp} = -mgx \text{ et } E_{pe} = \frac{1}{2}K(\Delta\ell + x)^2$$

En remplaçant, on obtient :  $E_p = \frac{1}{2}K(\Delta\ell^2 + x^2)$



### 3.2 Expression de l'énergie mécanique :

$E_m = E_c + E_p$  Soit

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} K(x^2 + \Delta l^2) \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 (x_m^2 - x^2) + \frac{1}{2} K(x^2 + \Delta l^2) \text{ avec } m\omega^2 = k \\ &= \frac{1}{2} k(x_m^2 - x^2) + \frac{1}{2} K(x^2 + \Delta l^2) = \frac{1}{2} K(x_m^2 + \Delta l^2) \end{aligned}$$

Déduction de l'expression de  $E_C$  :

$$E_C = E_m - E_p = \frac{1}{2} K(x_m^2 + \Delta l^2) - \frac{1}{2} K(x^2 + \Delta l^2) = \frac{1}{2} K(x_m^2 - x^2)$$

### Corrigé de l'exercice 7

#### 1 Etude de l'équilibre :

A l'équilibre :  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow P - T_0 = 0 \Leftrightarrow mg = Kx_0$$

Nature du mouvement.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

En projetant suivant l'axe  $x'x$

$$P - T = ma \Leftrightarrow P - K(\Delta l + x) = ma \Leftrightarrow -kx = ma \Rightarrow a + \frac{K}{m}x = 0$$

C'est l'équation différentielle caractérisant un mouvement rectiligne sinusoïdal

#### 2 Expression de l'énergie potentielle

$$E_p = E_{pp} + E_{pe} \text{ avec } E_{pp} = -mgx \text{ et } E_{pe} = \frac{1}{2} K(x_0 + x)^2$$

En remplaçant, on obtient :  $E_p = \frac{1}{2} K(x_0^2 + x^2)$

#### 4 Expression de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_m = \sum W_{\vec{F}_{\text{ext}}} + \sum W_{\vec{F}_{\text{int dissip}}} = 0 \Leftrightarrow E_m = E_{m0}$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} K(x_0^2 + x^2) = \frac{1}{2} K(x_0^2 + x_m^2)$$

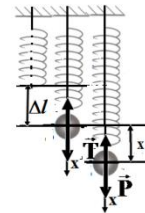
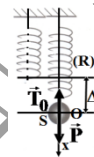
#### 5 D'après la courbe $x_m = 4.10^{-2} \text{ m}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} Kx_0^2 = 10^{-3} \\ \frac{1}{2} Kx_0^2 + \frac{1}{2} Kx_m^2 = 510^{-3} \end{cases}$$

Soit  $x_0 = 2.10^{-2} \text{ m}$  et  $K = 5 \text{ N/m}$

#### 6 L'expression de $E_C$ :

$$E_C = E_m - E_p = \frac{1}{2} K(x_m^2 + x_0^2) - \frac{1}{2} K(x^2 + x_0^2) = \frac{1}{2} K(x_m^2 - x^2)$$



**I. RESUME DE COURS**

**I. Matrices**

**I.1) Définition et vocabulaire**

1) Une matrice de dimension  $n \times p$  est un tableau rectangulaire de nombres (réels ou complexes) comportant  $n$  lignes et  $p$  colonnes.

Ces nombres sont appelés coefficients de la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ où } A = (a_{i,j})_{\substack{i \in \{1,2,\dots,n\} \\ j \in \{1,2,\dots,p\}}}.$$

Le coefficient  $a_{i,j}$  est à l'intersection entre la ligne  $i$  et la colonne  $j$ .

2) Une matrice ligne est une matrice comportant une seule ligne.

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_p).$$

3) Une matrice colonne est une matrice comportant une seule colonne.  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$

4) Une matrice carrée est une matrice qui a le même nombre de ligne et le même nombre de colonne. On notera dans ce cas  $n$  le nombre de lignes et de colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

5) Les éléments de la diagonale (diagonale principale) dans une matrice carrée sont les éléments du type  $a_{i,i}$ .

6) Une matrice diagonale est une matrice carrée dont les coefficients en dehors de la diagonale principale sont nuls. Les coefficients de la diagonale peuvent être ou ne pas être nuls. C'est-à-dire si  $i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$ .

7) Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée à coefficients dont les valeurs sous la diagonale principale sont nulles :

A est triangulaire supérieure si et seulement si :  $i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$

8) Une matrice triangulaire inférieure est une matrice carrée à coefficients dont les valeurs au-dessus de la diagonale principale sont nulles :

A est triangulaire inférieure si et seulement si :  $i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$

9) La matrice identité ou matrice unité est une matrice carrée avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

10) La matrice transposée de A est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A. On la note  $A^T$ .

Si A est de dimension  $n \times p$ , alors  $A^T$  est de dimension  $p \times n$ .

## I.2) Opérations sur les matrices

### 1) Addition de matrices

**Définition 1 :**

On appelle somme de deux matrices A et B de même dimension la matrice obtenue en additionnant les coefficients situés aux mêmes emplacements.

Cette matrice est notée  $A + B$ .

**Propriétés**

Soient A, B et C des matrices de même dimension

1) Associativité :  $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$

2) Commutativité :  $A + B = B + A$ .

## 2) Multiplication d'une matrice par un réel

**Définition :**

On appelle produit d'une matrice A par un réel k la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients de A par k.

Cette matrice est notée  $k \times A$  ou  $kA$ .

**Remarques :**

La matrice  $(-1) \times A$  est notée  $-A$  et est appelée matrice opposée de A.

On définit la soustraction de deux matrices par :  $A - B = A + (-B)$ .

## 3) Multiplication de vecteur-ligne par vecteur-colonne

**Définition :**

A étant une matrice ligne de dimension  $1 \times p$  et B une matrice colonne de dimension  $p \times 1$ , on appelle produit  $A \times B$  le nombre obtenu en multipliant le premier élément de A par le premier élément de B, le deuxième élément de A par le deuxième élément de B, etc. puis en ajoutant tous ces produits.

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_p), B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \Rightarrow A \times B = a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + \dots + a_p \times b_p$$

**Remarque :**

Il faut que A ait autant de colonnes que B de lignes pour que le produit soit possible.

## 4) Multiplication d'une matrice $n \times p$ par une matrice colonne

**Définition :**

A étant une matrice de dimension  $n \times p$  et B une matrice colonne de dimension

$p \times 1$ , on appelle produit  $A \times B$  la matrice colonne de dimension  $n \times 1$  obtenu en multipliant chaque ligne de A par la matrice colonne B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{1,1} \times b_1 + a_{1,2} \times b_2 + \dots + a_{1,p} \times b_p \\ a_{2,1} \times b_1 + a_{2,2} \times b_2 + \dots + a_{2,p} \times b_p \\ \vdots \\ a_{n,1} \times b_1 + a_{n,2} \times b_2 + \dots + a_{n,p} \times b_p \end{pmatrix}$$

**Remarque :**

**Il faut que A ait autant de colonnes que B de lignes pour que le produit soit possible.**

### **5) Multiplication d'une matrice ligne $1 \times n$ par une matrice $n \times p$**

**Définition :**

**A étant une matrice ligne de dimension  $1 \times n$  et B une matrice de dimension  $n \times p$ , On appelle produit  $A \times B$  la une matrice ligne de dimension  $1 \times n$  obtenue en multipliant la matrice A par chaque colonne de la matrice B.**

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) ; B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix}$$

$$A \times B = (a_1 \times b_{1,1} + a_2 \times b_{2,1} + \dots + a_n \times b_{n,1}, a_1 \times b_{1,2} + a_2 \times b_{2,2} + \dots + a_n \times b_{n,2}, \dots, a_1 \times b_{1,p} + a_2 \times b_{2,p} + \dots + a_n \times b_{n,p})$$

## 6) Multiplication de deux matrices quelconques

**Définition :**

A étant une matrice de dimension  $n \times p$  et B une matrice de dimension  $p \times m$ . On appelle produit  $A \times B$  la matrice de dimension  $n \times m$  obtenu en multipliant chaque ligne de A par chaque colonne de B.

Plus précisément, le coefficient de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne du produit  $A \times B$  est obtenu en multipliant la  $i^{\text{ème}}$  ligne de A par la  $j^{\text{ème}}$  colonne de B.

**Remarques :**

- 1) Pour pouvoir faire le produit de deux matrices  $A \times B$ , il faut absolument que le nombre de colonne de A (celle de gauche) soit identique aux nombres de lignes de B (celle de droite).
- 2) Le produit  $A \times B$  a autant de lignes que A et autant de colonnes que B.
- 3) La possibilité de faire le produit  $A \times B$  n'implique pas celle de  $B \times A$ .
- 4) Pour toute matrice A carré de taille n :  $A \times I_n = I_n \times A = A$ . C'est-à-dire que la matrice unité a le même rôle que le nombre 1 dans la multiplication.

## 7) Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

**Définitions :**

Soit A une matrice carrée d'ordre 2.

Dire que B est la matrice inverse de A signifie que :  $AB = BA = I_2$ .

où  $I_2$  désigne la matrice unité d'ordre 2.

Dans ce cas, on admettra que B est unique et on notera  $B = A^{-1}$ .

Le nombre  $\Delta = ad - bc$  est appelé déterminant de la matrice carrée  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On note  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ .

Une matrice carrée  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est inversible si et seulement si  $ad - bc \neq 0$ .

Dans ce cas, son inverse est la matrice  $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

Remarque :

Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est différent de zéro.

### Application

Résolution de systèmes de 2 équations à 2 inconnues (Cas général)

Le système  $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$  peut s'écrire sous la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ .

soit  $AX = B$ , où  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ .

Si A est inversible, on obtient :  $X = A^{-1}B$ .

8) Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ . Le déterminant de A est noté  $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Il est calculé par la formule  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - gec - dbi - ahf$ .

Il est obtenu en développant suivant une ligne ou une colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

## II. Systèmes d'équations linéaires

### 1- Définitions et propriétés

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

1. On appelle système linéaire de p équations à n inconnues tout système d'équations de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \dots + a_{p,n}x_n = b_p \end{array} \right.$$

Où  $a_{i,j}$  et  $b_i$  sont des réels donnés ;  $1 \leq i \leq p$  et  $1 \leq j \leq n$ .

2. Le coefficient de l'inconnue  $x_j$  dans l'équation numéro  $i$  est  $a_{i,j}$  : Le premier indice indique le numéro de l'équation le deuxième indice indique le numéro de l'inconnue dont il est le coefficient.

Le système linéaire (S) est dit homogène si pour tout  $i$  ;  $b_i = 0$  . Un système homogène possède toujours une solution : la solution évidente (ou triviale) :  $(0,0,\dots,0)$ .

3. La matrice  $A$  du système (S) est le tableau à  $n$  lignes et  $m$  colonnes composé des coefficients des inconnues du système :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

4. La matrice complète  $M$  du système (S) est la matrice :

$$M = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} & b_p \end{array} \right)$$

## 2. Solutions d'un système linéaire

1. Une solution d'un système linéaire (S) est un  $n$ -uplet  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de nombres réels ou complexes vérifiant simultanément les équations de (S).

Autrement dit, la suite  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  est une solution du système si en remplaçant  $x_i$  par  $p_i$  pour tous les indices  $i$ , toutes les équations du système sont vérifiées.

2. Un système linéaire  $(S)$  peut ne pas avoir de solution comme il peut en avoir une seule ou une infinité.

3. Deux systèmes linéaires  $(S_1)$  et  $(S_2)$  sont dits équivalents si toute solution de  $(S_1)$  est solution de  $(S_2)$  et réciproquement.

### 3. Système carré

1. Un système linéaire de  $p$  équations à  $n$  inconnues est dit carré si  $n=p$ .

2. Un système carré est appelé système de Cramer, s'il possède une solution unique. C'est le cas de déterminant non nul. Sinon, le système n'est pas un système de Cramer, il peut n'avoir aucune solution ou bien une infinité de solutions.

3. Dans un système carré, le déterminant du système est calculé à partir du tableau de nombres suivant :

4.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Méthode particulière : On peut calculer le déterminant selon la règle de Sarrus

5. Un système carré est dit triangulaire supérieur à diagonale unité si :  $a_{i,j} = 0$  pour  $i > j$  et  $a_{i,i} = 1$  avec  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n$ .

#### Théorème

Un système triangulaire à diagonale unité admet une solution unique.

## 4. Résolution d'un système linéaire

### 4.1. Opérations élémentaires : notation et définitions

On note de haut en bas  $L_1, L_2, \dots, L_p$  les  $p$  équations ou lignes d'un système.

On définit sur ces lignes les opérations suivantes dites élémentaires :

- a) Permutation de deux lignes :  $L_i \leftrightarrow L_j$
- b) Multiplication d'une ligne par un réel ou un complexe non nul :  $L_i \leftarrow \mu L_i$   
( $\mu \neq 0$ )
- c) Addition à une ligne d'un multiple d'une autre :  
 $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$  ( $i \neq j$ )

### Théorème

Etant donné un système linéaire, on obtient un système équivalent en effectuant une succession d'opérations élémentaires.

Un système triangulaire à diagonale unité admet une solution unique.

### 4.2. Méthode du pivot de Gauss :

La méthode du Pivot de Gauss consiste à faire une succession d'opérations élémentaires pour résoudre des systèmes d'équations linéaires quelconques.

Elle a pour objectif de "triangulariser" le système, c'est à dire : obtenir un système équivalent (qui possède les mêmes solutions) mais tel que pour chaque ligne, la ligne qui la suit possède au moins une inconnue de moins.

## II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

### QCM 1

Dans ce QCM, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

1) Que vaut le déterminant de la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ?

- A.  $ad - cb$
- B.  $ab - cd$
- C.  $ac - bd$
- D.  $cb - ad$

2) Soient A et B des matrices carrées de même ordre. B est l'inverse de A. Laquelle de ces propositions est fautive ?

- A.  $B = A^{-1}$
- B.  $B^{-1} = A^{-1}$
- C.  $BA = I_n$
- D.  $AB = I_n$

3) Si A est une matrice inversible telle que  $AX = B$ , alors on a :

- A.  $X = B \times A^{-1}$
- B.  $X^{-1} = A^{-1} \times B$
- C.  $X = A^{-1} \times B$
- D.  $X^{-1} = A^{-1} B^{-1}$

4) La multiplication matricielle est associative. Laquelle de ces formules illustre cette propriété ?

- A.  $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- B.  $A \times B = B \times A$
- C.  $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- D.  $(A \times B) + C = A \times C + B \times C$

5) La multiplication matricielle est distributive par rapport à l'addition. Laquelle de ces formules illustre cette propriété ?

- A.  $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- B.  $(A + B) \times C = C \times A + C \times B$
- C.  $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- D.  $(A + B) + C = (A + C) + B$

## QCM 2

Dans ce QCM, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

1) Soient A et B des matrices carrées de même ordre. I la matrice unité.

Laquelle de ces propositions est fautive ?

- A.  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- B.  $(A+I)^2 = A^2 + 2A + I$
- C.  $(A+B)^2 = (B+A)^2$
- D.  $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$

2) Soit A et B deux matrices.

- A. Si la somme  $A+B$  est définie, alors le produit  $AB$  est défini.
- B. Si la somme  $A+B$  est définie, alors le produit  $BA$  est défini.
- C. Si le produit  $AB$  est défini, alors la somme  $A+B$  est définie.
- D. Si les produits  $AB$  et  $BA$  sont définis, alors la somme  $A+B$  est définie.

3) Soit A une matrice,  ${}^tA$  la transposée de A.

- A. Le produit  $A \times A$  est toujours défini.
- B. La somme  $A + {}^tA$  est toujours définie
- C. Le produit  $A \times {}^tA$  est toujours défini.
- D. Si A est carrée alors  $A \times {}^tA = {}^tA \times A$ .

4) Soit S un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues.

- A. Le système S a forcément une infinité de solutions.
- B. Si les deux équations ont le même premier membre, alors le système S a une infinité de solutions.
- C. L'ensemble des solutions du système S est forcément une droite affine.
- D. Si le système S a une solution, alors il en a une infinité.

5) Quelle relation a, b et c doivent-ils satisfaire pour que le système

$$\begin{cases} 2x - 4y + 10z = a \\ 4x - 5y + 8z = b \\ -2x + y + 2z = c \end{cases}$$

ait des solutions ?

- A.  $a - b - c = 0$
- B.  $a + b + c = 0$
- C.  $2a + b - 3c = 0$
- D. Toutes les valeurs de a, b et c conviennent.

### III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

#### Exercice 1

Soit les matrices :  $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  ;  $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) Calculer les produits suivants :  $AB$  et  $BA$
- 2) Que peut-on conclure ?

#### Exercice 2

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

- 1) Calculer  $A^3 - A$ .
- 2) En déduire que  $A$  est inversible puis déterminer  $A^{-1}$ .

#### Exercice 3

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

Déterminer la matrice inverse  $A^{-1}$  de  $A$  puis en déduire les solutions des systèmes suivants :

a)  $\begin{cases} 3x - 10y = 4 \\ -2x + 8y = 7 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 3x - 10y = 1.5 \\ -2x + 8y = -0.4 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 3x - 10y = 15 \\ -2x + 8y = -5 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} 3x - 10y = 1.25 \\ -2x + 8y = 0.5 \end{cases}$

#### Exercice 4

Résoudre le système suivant en utilisant la méthode du déterminant

$$(S) = \begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ 2x - y + z = -6 \\ 3x + 5y - 7z = -2 \end{cases}$$

#### Exercice 5

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1° Montrer que  $A^2 = A + 2I_3$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3$$

2° On pose  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que  $A = M - I_3$  et que  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $M^k = 3^{k-1} M$

b) En déduire que  $A^n = (-1)^n I_3 + \left( \sum_{k=1}^n C_n^k 3^{k-1} (-1)^{n-k} \right) M$  puis que

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} M + (-1)^n I_3$$

3° a) Montrer que  $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Soit  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $AP = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  puis que  $A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$

## V. EXERCICES DE SYNTHÈSE

### Exercice 1

Soit la matrice 
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer la matrice  $M$  telle que  $A = M - I_3$ .
- 2) Vérifier que  $M^2$  est la matrice nulle. En déduire  $A^2$ .
- 3) Déduire  $A^{-1}$

4) Résoudre le système 
$$\begin{cases} -2x - 2y + z = -7 \\ 3x + 5y - 3z = 14 \\ 5x + 10y - 6z = 26 \end{cases}$$

### Exercice 2

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculer  $P \times Q$  et  $Q \times P$  puis en déduire que les matrices  $P$  et  $Q$  sont inverses l'une de l'autre.
- 2) Vérifier que  $Q \times A \times P = B$  et montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a 
$$B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix}.$$
- 3) Justifier que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $A^n = P \times B^n \times Q$  et en déduire l'expression de  $A^n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 3

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} -27 & 12 & -6 & -3 \\ -25 & 0 & -50 & -75 \\ -1 & 6 & 22 & -39 \\ 20 & 30 & 10 & 30 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le produit  $MB$ .

2) Sachant que  $AM = \lambda I_4$ , c'est-à-dire que  $AM = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ; calculer la

valeur du nombre réel  $\lambda$ .

3) En déduire la matrice inverse de  $A$ .

4) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -5x + y + 2t = 3 \\ 2x + y + z + 4t = 15 \\ x - 2y + 3z - t = -9 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

#### Exercice 4

On considère les matrices :  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer  $M^2 = M \times M$ . On donne  $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$

2. a) Vérifier que :  $M^3 = M^2 + 8M + 6I$

b) Exprimer  $M^4$  sous la forme :  $M^4 = \alpha M^2 + \beta M + \gamma I$  où  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des entiers naturels à déterminer.

3) En déduire que  $M$  est inversible et déterminer  $M^{-1}$ .

4) On cherche à déterminer trois entiers  $a, b$  et  $c$  tels que la courbe de la fonction  $f(x) = ax^2 + bx + c$  passe par les points  $A(1,1), B(-1,-1)$  et  $C(2,5)$ .

a) Montrer que ça revient à trouver les entiers  $a, b$  et  $c$  tels que :

$$M \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

b) Déterminer alors ces entiers.

### Exercice 5

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ .

1) Calculer  $A^2$  et vérifier que  $A^2 = A + 2I_2$  où  $I_2$  est la matrice identité d'ordre 2.

2) En déduire une expression de  $A^3$  sous la forme  $\alpha A + \beta I_2$  où  $\alpha$  et  $\beta$  des réels.

3) On considère les suites numériques  $(r_n)$  et  $(s_n)$  définies par

$$\begin{cases} r_0 = 0 \text{ et } s_0 = 1 \\ r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n \end{cases}$$

a) Calculer  $r_1, s_1; r_2, s_2; r_3$  et  $s_3$ .

b) Vérifier que  $A^2 = r_2 A + s_2 I_2$  et  $A^3 = r_3 A + s_3 I_2$ .

c) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^n = r_n A + s_n I_2$ . (On admet que  $A^0 = I_2$ )

4) Démontrer que la suite  $(k_n)$  définie par  $k_n = r_n - s_n$  est géométrique de raison  $-1$ .

En déduire l'expression de  $k_n$  en fonction de  $n$ .

5) On admet que la suite  $(t_n)$  définie par  $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$  est géométrique de raison 2.

a) Déduire l'expression de  $t_n$  en fonction de  $n$ .

b) Déduire des questions précédentes, une expression explicite de  $r_n$  et  $s_n$  en fonction de  $n$

c) En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul, une expression des coefficients de la matrice  $A^n$ .

### Exercice 6 ( traduit)

Deux ouvriers accomplissent un travail. Si les deux ouvriers travaillent simultanément ils peuvent achever ce travail en 12h. Si chacun fait la moitié du travail seul le travail se termine en 25h.

a) Quel est le temps nécessaire à chaque ouvrier pour accomplir le travail seul ?

b) Si le travail est rémunéré à 15000 UM et si les deux ouvriers travaillent simultanément et sont payés au prorata de leurs efforts, quelle serait le montant mérité par chacun ?

يقوم عاملان بإنجاز عمل معين بحيث إذا عملا معا في آن واحد يمكنهما إكماله في 12 ساعة. أما إذا قام كل واحد منهما بإنجاز نصف العمل فإن العمل يكتمل خلال 25 ساعة.

(a) ما هو الزمن اللازم لكل عامل لكي يكمل العمل وحده؟

(b) إذا كان العمل مقابل 15000 أوقية وكان العاملان يعملان في آن واحد وكانت أجرة كل منهما حسب جهده، فما هو المبلغ المستحق لكل واحد منهما؟

## IV. CORRIGES DES EXERCICES

### Corrigé 1

$$A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 44 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 42 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B \times A \neq A \times B.$$

La multiplication des matrices n'est pas commutative.

### Corrigé 2

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - A = 4I_3$$

On en déduit que  $\frac{1}{4}(A^3 - A) = I_3$ . Donc  $\frac{1}{4}(A^2 - I) \times A = I_3$ . D'où A est

inversible et son inverse est la matrice  $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I)$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I) = \frac{1}{4} \left( \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On peut écrire:  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$

**Verification:**

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

### Corrigé 3

1) Pour calculer la matrice inverse de A, on a :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -10 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 3 \times 8 - (-2) \times (-10) = 4 .$$

Comme  $\det A \neq 0$  alors A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

2) On peut remarquer que la matrice associée aux quatre systèmes est A .  
D'où la déduction de la résolution de ces systèmes.

On considère la matrice colonne  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

a) Soit  $B_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ . Résoudre le système  $\begin{cases} 3x - 10y = 4 \\ -2x + 8y = 7 \end{cases}$  équivaut à résoudre

l'équation  $AX = B_1$ .

La solution de ce système est

$$X = A^{-1} \times B_1 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 4 + \frac{5}{2} \times 7 \\ \frac{1}{2} \times 4 + \frac{3}{4} \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{51}{2} \\ \frac{29}{4} \end{pmatrix}.$$

La solution de ce système est donc  $\begin{cases} x = \frac{51}{2} \\ y = \frac{29}{4} \end{cases}$

b) Soit  $B_2 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -0.4 \end{pmatrix}$ . Résoudre le système  $\begin{cases} 3x - 10y = 1.5 \\ -2x + 8y = -0.4 \end{cases}$  équivaut à

résoudre l'équation  $AX = B_2$ .

La solution de ce système est

$$X = A^{-1} \times B_2 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1.5 \\ -0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1.5 + \frac{5}{2} \times (-0.4) \\ \frac{1}{2} \times 1.5 + \frac{3}{4} \times (-0.4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.45 \end{pmatrix}.$$

La solution de ce système est donc  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0.45 \end{cases}$

c) Soit  $B_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix}$ . Résoudre le système  $\begin{cases} 3x - 10y = 15 \\ -2x + 8y = -5 \end{cases}$  équivaut à résoudre

l'équation  $AX = B_3$ .

La solution de ce système est

$$X = A^{-1} \times B_3 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 15 + \frac{5}{2} \times (-5) \\ \frac{1}{2} \times 15 + \frac{3}{4} \times (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.5 \\ 3.75 \end{pmatrix}.$$

La solution de ce système est donc  $\begin{cases} x = 17.5 \\ y = 3.75 \end{cases}$

d) Soit  $B_4 = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ . Résoudre le système  $\begin{cases} 3x - 10y = 1.25 \\ -2x + 8y = 0.5 \end{cases}$  équivaut à résoudre

l'équation  $AX = B_4$ .

La solution de ce système est

$$X = A^{-1} \times B_3 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1.25 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1.25 + \frac{5}{2} \times 0.5 \\ \frac{1}{2} \times 1.25 + \frac{3}{4} \times 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solution de ce système est donc  $\begin{cases} x = 3.75 \\ y = 1 \end{cases}$

#### Corrigé 4

On a :

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7.$$

Le système admet une solution unique.

$$\det_x = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -6 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -3 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} + 6 \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \Rightarrow$$

$$x = \frac{\det_x}{\det(S)} = \frac{-14}{7} = -2$$

$$\det_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \\ 3 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 35 \Rightarrow$$

$$y = \frac{\det_y}{\det(S)} = \frac{35}{7} = 5$$

$$\det_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 21 \Rightarrow$$

$$z = \frac{\det_z}{\det(S)} = \frac{21}{7} = 3. \text{ La solution du système (S) est le triplet } (-2; 5; 3).$$

**Corrigé 5**

1) On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3.$$

Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3$$

On a :  $A^0 = I_3 = 0 \times A + 1 \times I_3 = \frac{2^0 - (-1)^0}{3} A + \frac{2^0 + 2(-1)^0}{3} I_3$ , donc la proposition est vraie pour  $n=0$ .

Si on suppose que  $A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3$  alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = \left( \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3 \right) \times A = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A^2 + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} A \\ &= \frac{2^n - (-1)^n}{3} \left( \frac{2^2 - (-1)^2}{3} A + \frac{2^2 + 2(-1)^2}{3} I_3 \right) + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} A \\ &= \frac{2^n - (-1)^n}{3} (A + 2I_3) + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} A \\ &= \left( \frac{2^n - (-1)^n}{3} + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \right) A + \frac{2^n - (-1)^n}{3} \cdot 2I_3 \\ &= \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3} A + \frac{2^{n+1} + 2(-1)^{n+1}}{3} I_3 \end{aligned}$$

Ce qui prouve que la propriété est vraie pour  $n+1$ .

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3$$

$$2^\circ \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ d'où } A = M - I_3$$

Par conséquent on a :  $M = A + I_3$ . Comme la matrice identité permutent avec toutes les autres matrices, on a donc :

$$M^k = (A + I_3)^k = \sum_{p=0}^k C_k^p A^p I_3^{k-p} = \sum_{p=0}^k C_k^p A^p.$$

D'après la question précédente on a :  $A^p = \frac{2^p - (-1)^p}{3} A + \frac{2^p + 2(-1)^p}{3} I_3$ , ce

qui entraîne que

$$M^k = \sum_{p=0}^k C_k^p \left( \frac{2^p - (-1)^p}{3} A + \frac{2^p + 2(-1)^p}{3} I_3 \right) = \frac{1}{3} A \left( \sum_{p=0}^k C_k^p 2^p - \sum_{p=0}^k C_k^p (-1)^p \right) + \frac{1}{3} I_3 \left( \sum_{p=0}^k C_k^p 2^p + 2 \sum_{p=0}^k C_k^p (-1)^p \right)$$

Or on a  $\sum_{p=0}^k C_k^p 2^p = (1+2)^k = 3^k$  ;  $\sum_{p=0}^k C_k^p (-1)^p = (1-1)^k = 0$ .

D'où  $M^k = \frac{1}{3} A (3^k - 0) + \frac{1}{3} I_3 (3^k + 2 \times 0) = 3^{k-1} (A + I_3) = 3^{k-1} M$

b) Puisque  $A = M - I_3$ , on a

$$A^n = (M - I_3)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k M^k I_3^{n-k} \Leftrightarrow$$

$$A^n = (-1)^n I_3 + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_n^k M^k I_3^{n-k} \Leftrightarrow$$

$$A^n = (-1)^n I_3 + \left( \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_n^k 3^{k-1} \right) M.$$

En écrivant  $3^{k-1}$  sous la forme  $\frac{1}{3} \cdot 3^k$ , On trouve

$$A^n = (-1)^n I_3 + \frac{1}{3} M \sum_{k=1}^n C_n^k 3^k (-1)^{n-k} \Leftrightarrow$$

$$A^n = (-1)^n I_3 + \frac{1}{3} M I_3 + \frac{1}{3} M \left( \sum_{k=0}^n C_n^k 3^{k-1} (-1)^{n-k} - (-1)^n \right) \Leftrightarrow$$

$$A^n = (-1)^n I_3 + \frac{1}{3} M \left[ (3-1)^n - (-1)^n \right].$$

Par conséquence on a :  $A^n = (-1)^n I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} M$

3. a) On a :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ;$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

en plus on a

$$P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en déduit alors que } AP = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si on pose } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ cette dernière relation s'écrit : } AP = PB.$$

Donc  $A^2P = A(AP) = A(PB) = (AP)B = (PB)B = PB^2$

On montre facilement par récurrence que  $A^n.P = P.B^n$  (1).

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Elle est évidemment vraie pour  $n = 1$  et on vient de le prouver pour  $n = 2$ .

Si on suppose que  $B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$  alors

$$B^{n+1} = B^n.B = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ce qui achève la démonstration.

La relation (1) nous donne alors que :

$$A^n.P = P.B^n = P. \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = P. \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

**I. RESUME DE COURS**

**Le nombre i**

Il existe dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  un élément n'appartenant pas à  $\mathbb{R}$ , noté  $i$  tel que  $i^2 = -1$ .

Le nombre  $i$  est solution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $x^2 + 1 = 0$ .

On a alors :  $i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad \frac{1}{i} = -i.$

**Opérations dans  $\mathbb{C}$**

Soient  $a, b, a'$  et  $b'$  des réels.  $z = a + ib, z' = a' + ib'$ .

1) $(a + ib = a' + ib') \Leftrightarrow (a = a'; b = b')$	4) $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$
2) $z + z' = a + a' + i(b + b')$	5) $(a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$
3) $zz' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$	6) $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$
7) $a + ib \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$	

**Définitions et vocabulaire**

Soient  $a$  et  $b$  des réels et  $z = a + ib$ .

Forme algébrique de $z$	L'écriture $z = a + ib$
Partie réelle de $z$	$\text{Re}(z) = a$
Partie imaginaire de $z$	$\text{Im}(z) = b$
Le conjugué de $z$	$\bar{z} = a - ib$
Le module de $z$	$ z  = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument de $z$ où $z \neq 0$ . On note $\arg z$	$\arg z = \theta \Rightarrow \left( \cos \theta = \frac{a}{ z }, \sin \theta = \frac{b}{ z } \right)$
Forme trigonométrique de $z$ avec ( $z \neq 0; \arg z = \theta$ )	$z =  z (\cos \theta + i \sin \theta)$
Forme exponentielle de $z$ avec ( $z \neq 0; \arg z = \theta$ )	$z =  z e^{i\theta}$

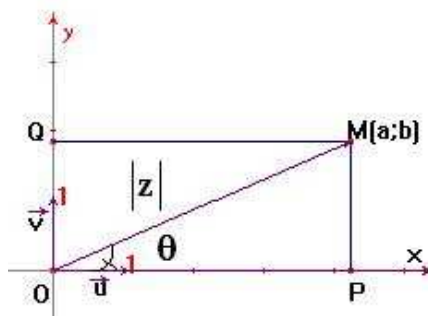
## Représentation géométrique des nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Soient  $a$  et  $b$  des réels.

A tout nombre complexe  $z = a + ib$ , on peut associer le point  $M(a; b)$  du plan.

Le plan est appelé le plan complexe.

Le point image du nombre complexe $z = a + ib$	$M(a; b)$
Le vecteur image du nombre complexe $z = a + ib$	$\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
L'affixe du point $M(a; b)$ et du vecteur $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	Le nombre complexe $z = a + ib$
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$	Le nombre $z_B - z_A$
L'affixe du milieu du segment $[AB]$	Le nombre $\frac{z_A + z_B}{2}$
La distance $AB$	$AB =  z_B - z_A $



## Conjugué d'un nombre complexe

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $z, z_1, z_2$  des nombres complexes.

1) $z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib$	7) $\overline{\bar{z}} = z$
2) $z = a + ib \Rightarrow z\bar{z} = a^2 + b^2$	8) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
3) $z$ est réel $\Leftrightarrow \bar{z} = z$	9) $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$
4) $z$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$	10) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n, \quad n \in \mathbb{Z}$
5) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$	11) $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = \frac{1}{\bar{z}_1}, \quad z_1 \neq 0$
6) $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$	12) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0$

## Module d'un nombre complexe

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $z, z_1, z_2$  des nombres complexes.

1) $ z  = \sqrt{zz}$	7) $\left  \frac{1}{z} \right  = \frac{1}{ z }, \quad z \neq 0$
2) $z = a + ib \Rightarrow  z  = \sqrt{a^2 + b^2}$	8) $\left  \frac{z_1}{z_2} \right  = \frac{ z_1 }{ z_2 }, \quad z_2 \neq 0$
3) $ z  = 0 \Leftrightarrow z = 0$	9) $ z_1 + z_2  \leq  z_1  +  z_2 $ (L'inégalité triangulaire)
4) $ \bar{z}  =  -z  =  z $	10) $AB =  z_B - z_A $
5) $ z_1 z_2  =  z_1   z_2 $	
6) $ z^n  =  z ^n, \quad n \in \mathbb{Z}$	

## Argument d'un nombre complexe

Soient  $z, z_1, z_2$  des nombres complexes non nuls.

1) $\arg \bar{z} = \arg \frac{1}{z} = -\arg z$	5) $z$ est réel $\Leftrightarrow \arg z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
2) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$	6) $z$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
3) $\arg z^n = n \arg z, \quad n \in \mathbb{Z}$	Soient $A, B, C, D$ des points tels que $AB \neq 0, CD \neq 0$ .
4) $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$	7) $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overline{AB}) \quad [2\pi]$
	8) $\arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = (\overline{AB}; \overline{CD}) \quad [2\pi]$

## Notation exponentielle $e^{ix}$

Soient  $x$  et  $y$  des réels.

1) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$	7) $e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$
2) $\frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix} = \cos x - i \sin x$	8) $\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$
3) $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$	9) $(e^{ix})^n = e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}$
4) $e^{i\pi} = -1$	10) $ e^{ix}  = 1$
5) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$	11) Si $z = \lambda e^{ix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , alors
6) $e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$	$\begin{cases} \lambda > 0 \Rightarrow \arg z = x \\ \lambda < 0 \Rightarrow \arg z = \pi + x \end{cases}$

## Formules d'Euler – Formule de Moivre

<b>Formules d'Euler</b>	Soit $x \in \mathbb{R}$ $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
<b>Formule de Moivre</b>	Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ ; $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$

Les formules d'Euler permettent dans certains cas de transformer un polynôme en  $\cos x$  et  $\sin x$  en une somme de cosinus et de sinus des multiples de  $x$  (linéarisation).

La formule de Moivre permet d'exprimer  $\cos nx$  et  $\sin nx$  pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  sous forme d'un polynôme en  $\cos x$  et  $\sin x$ .

## Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

### 1. Cas particulier : équation à coefficients réels

$az^2 + bz + c = 0$  où  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ;  $a \neq 0$ .

❖ Le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$	deux solutions réelles distinctes	$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	une solution réelle double	$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$
$\Delta < 0$	deux solutions complexes conjuguées :	$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{ \Delta }}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{ \Delta }}{2a}$

### 2. Equation à coefficients complexes $a, b, c \in \mathbb{C}$ ; $a \neq 0$ .

❖ Le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$

❖ Les racines carrées du discriminant sont les nombres complexes  $\delta = x + iy$  et  $-\delta = -x - iy$  tel que  $\delta^2 = \Delta$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$  :

$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 =  \Delta  \\ x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(\Delta) \\ 2xy = \operatorname{Im}(\Delta) \end{cases}$	Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ : $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$
--	---

### 3. Somme et produit des solutions:

Somme :  $s = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ ;    Produit:  $p = z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ .

## Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  et  $Z \in \mathbb{C}$ , ( $Z \neq 0$ ).

⌚ Les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^n = 1$  sont les nombres  $z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$  où  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Ces solutions sont appelées racines n-ièmes de l'unité (de 1).

⌚ Les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^n = Z$  sont les nombres  $z_k = \sqrt[n]{|Z|} e^{i \left( \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)}$  où  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ;  $\theta = \arg Z$ . Ces solutions sont appelées racines n-ièmes du nombre complexe non nul  $Z$ .

⌚ Tout nombre  $Z$  non nul admet  $n$  racines n-ièmes distincts deux à deux de même modules.

⌚ On obtient les  $n$  racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul en multipliant l'une quelconque d'entre elles par les  $n$  racines n-ièmes de l'unité:

Si  $z_0^n = Z$ , alors  $z_k = z_0 e^{i \frac{2k\pi}{n}}$  où  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

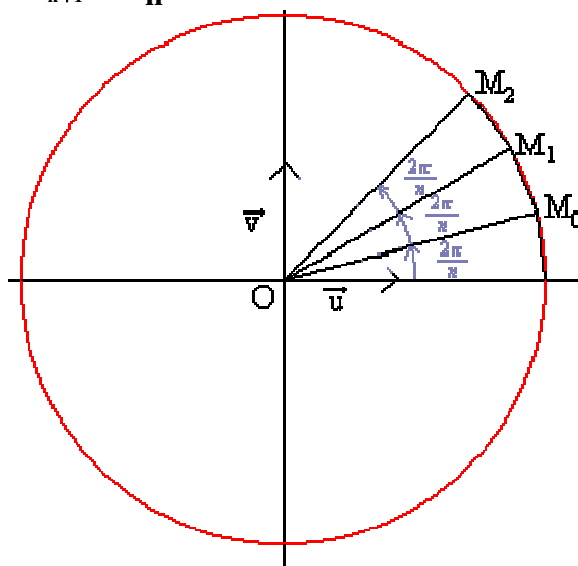
⌚ La somme des  $n$  racines n-ièmes d'un nombre complexe  $Z$  ( $Z \neq 0$ ) est nulle.

⌚ Dans le plan complexe, les images des  $n$  racines n-ièmes d'un nombre complexe sont situées sur le même cercle de centre  $O$  et de rayon  $r = \sqrt[n]{|Z|}$ .

Ces points sont les sommets d'un polygone régulier.

⌚ Si  $M_k$  est l'image du racine n-ième  $z_k$  de  $Z$  avec  $\arg Z = \theta$ , alors :

$OM_k = \sqrt[n]{|Z|}$  et  $(\overrightarrow{OM_k}; \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \frac{2\pi}{n}$ .



## Applications géométriques des nombres complexes

### 1) Nature d'un triangle

Soit ABC un triangle. On pose  $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

Nature du triangle ABC	Relation caractéristique
Équilatéral	$Z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Rectangle en A	Z est un imaginaire pur
Rectangle isocèle en A	$Z = i$ ou $Z = -i$
Isocèle en A	$ Z  = 1$

### 2) Alignement et orthogonalité

Soient A,B,C,D des points du plan.

Relation complexe	Interprétation géométrique
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel	A,B,C sont alignés ( $A \neq B, A \neq C$ )
$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est réel	Les droites (AB) et (CD) sont parallèles, ( $A \neq B; C \neq D$ )
$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \pm i$	$AB = CD$ et $(AB) \perp (CD)$ où ( $A \neq B, C \neq D$ )
$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur	$(AB) \perp (CD)$ où ( $A \neq B, C \neq D$ )
$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \lambda e^{i\theta}; \lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$(\overline{AB}, \overline{CD}) = \theta [2\pi]$ et $CD = \lambda AB$
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_D}{z_C - z_D}$ est réel	A,B,C,D sont alignés ou cocycliques

### 3) Lieux géométriques simples

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Considérons un point variable  $M$  d'affixe  $z$ . Le point  $M'$  d'affixe  $z'$ . Les points  $A, B, \Omega$  sont fixes et d'affixes respectives  $a, b, \omega$ .

Relation complexe	Ensemble des points M
$ z - \omega  = r, r > 0$	Cercle de centre $\Omega$ et de rayon $r$
$ z - a  =  z - b $	Médiatrice de $[AB]$
$\arg \frac{z - a}{z - b} = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$	Cercle de diamètre $[AB]$ privé de $A$ et $B$
Le nombre $\frac{z - a}{z - b}$ est imaginaire pur	Cercle de diamètre $[AB]$ privé de $B$
$\arg \frac{z - a}{z - b} = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$	Demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé de $A$ et $B$
$\arg \frac{z - a}{z - b} = 0 \quad [\pi]$	Droite $(AB)$ privée de $A$ et $B$
Le nombre $\frac{z - a}{z - b}$ est réel	Droite $(AB)$ privée de $B$
$\left  \frac{z - a}{z - b} \right  = k, k > 0; k \neq 1$	Cercle centré sur $(AB)$ de diamètre $[IJ]$ tel que $I = \text{bar}\{(A,1);(B,k)\}; J = \text{bar}\{(A,1);(B,-k)\}$
$\arg \frac{z - a}{z - b} = \alpha \quad [\pi], \alpha \neq 0 \quad [\pi]$	Cercle passant par $A$ et $B$ privé de $A$ et $B$
$\arg \frac{z - a}{z - b} = \alpha \quad [2\pi], \alpha \neq 0 \quad [\pi]$	Arc capable d'extrémités $A$ et $B$ exclues

## Nombres complexes et transformations

### 1. Expressions complexes des transformations usuelles

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .  
 Considérons la transformation qui associe à tout point M d'affixe  $z$  le point M' d'affixe  $z'$ .

Transformation	Ecriture complexe
Translation de vecteur d'affixe $z_0$	$z' = z + z_0$
Homothétie de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ et de rapport $k$	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Symétrie de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$	$z' - \omega = -(z - \omega)$
Rotation de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ et d'angle de mesure $\theta$	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$
Symétrie d'axe x'x	$z' = \bar{z}$
Symétrie d'axe y'y	$z' = -\bar{z}$
Similitude directe de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ , de rapport $k$ , $k \in \mathbb{R}^*$ et d'angle de mesure $\theta$ .	$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$

### 2) Etude de l'expression $z' = az + b$ où $a, b \in \mathbb{C}; a \neq 0$

Soient  $f$  la transformation qui associe à tout point M d'affixe  $z$  le point M' d'affixe  $z' = az + b$ .

		Transformation
$a = 1$		Translation de vecteur d'affixe $b$
$a \neq 1$		$f$ admet un unique point invariant $\Omega$ d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$
	$a \in \mathbb{R}^*$	Homothétie de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ et de rapport $a$
	$ a  = 1$	Rotation de centre $\Omega$ d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ et d'angle de mesure $\theta = \arg a$
	$a = -1$	Symétrie centrale de centre $\Omega$ d'affixe $\omega = \frac{b}{2}$
	Cas général	Similitude directe de centre $\Omega$ d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ , de rapport $k =  a $ et d'angle de mesure $\theta = \arg a$

## II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

### QCM 1

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

Ecrire le numéro de chaque question et donner la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses			
		A	B	C	D
1	Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de $z$ , alors	$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{1}{z}$	$\frac{\bar{z}}{z} = -z$	$\bar{z}z = i$	$\bar{z} = z$
2	Si $z = -1 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ , alors la forme exponentielle de $z$ est :	$e^{i\frac{\pi}{2}}$	$\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$	$i\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$	$(-1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$
3	Si $z +  z  = 2 + 4i$ , alors	$z = -3 + 4i$	$z = -3 - 4i$	$z = 4i$	$z = -4 + 3i$
4	Si $z = (1 - i)e^{i\frac{\pi}{6}}$ , alors	$\arg z = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$	$\arg z = \pi + \frac{\pi}{6}$	$\arg z = \frac{\pi}{6}$	$\arg z = -\frac{\pi}{12}$
5	Si $z = 4 + (1 - 5i)i$ , alors la partie réelle de $z$ est	9	8	4	-1
6	Si $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ; $z_2 = -2e^{i\frac{\pi}{2}}$ , alors le rapport $\frac{z_2}{z_1}$ est égal à	$\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	-1 - i	1 - i

## QCM 2

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

Ecrire le numéro de chaque question et donner la réponse qui lui correspond.

	Questions	Réponses			
		A	B	C	D
1	La forme algébrique de $\frac{2+5i}{3-2i}$ est	$2+5i$	$\frac{-4}{13} + \frac{19}{13}i$	$\frac{16}{13} + \frac{19}{13}i$	$\frac{6}{5} + 2i$
2	Le module de $\frac{(2-2i\sqrt{3})^2}{(1+i)(2i)^3}$ est	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{8}$	$\sqrt{2}$
3	Si $\frac{\pi}{4}$ est un argument de $z$ , alors le nombre $z^3 e^{i\frac{\pi}{4}}$ est	réel positif	imaginaire pur	réel négatif	d'argument $\frac{\pi}{4}$
4	Si $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , alors le triangle $ABC$ est :	isocèle et non rectangle	équilatéral	rectangle et isocèle	rectangle et non isocèle
5	L'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $\left  \frac{z-1+2i}{2+3i} \right  = \sqrt{13}$ est :	un cercle	la médiatrice d'un segment	une droite privée d'un point	un cercle privé de deux points
6	Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}^*$ . La forme algébrique de $(e^{i\theta})^n$ est :	$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$	$\cos(\theta^n) + i\sin(\theta^n)$	$n\cos\theta + i\sin\theta$	$e^{in\theta}$

### III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

#### Exercice 1

Écrire sous forme algébrique chacun des nombres :

$$z_1 = (3+2i)(2-3i), \quad z_2 = \frac{1+5i}{5-i},$$

$$z_3 = 2-3i + \frac{2i+4}{2+3i}, \quad z_4 = (1+2i)(3-5i)(1-2i),$$

$$z_5 = \frac{3-5i}{5+i} + \frac{4-3i}{3+i}, \quad z_6 = \frac{2+5i}{4-i} + \frac{4+i}{2-5i},$$

$$z_7 = (1-2i)^3, \quad z_8 = \frac{2+3i}{3i} + \frac{5i}{3-2i}$$

#### Exercice 2

On pose  $f(z) = (3-2i)z^2 + (5-i)z + 2+5i$

Calculer et donner la forme algébrique de chacun des nombres :

$$f(i), \quad f(3+2i), \quad f(1+i), \quad f(5-i)$$

#### Exercice 3

On pose  $f(z) = (5+i)z + (1+2i)\bar{z} + 4-3i$  où  $\bar{z}$  désigne le conjugué de  $z$

Calculer et donner la forme algébrique de chacun des nombres :

$$f(5-i), \quad f(1+2i), \quad f(3+4i), \quad f(5+3i)$$

#### Exercice 4

Soit  $f(z) = \frac{(1-2i)z + 2 + 3i}{(3-2i)z - 2 - 5i}$  où  $z$  est un nombre complexe.

1) Calculer et donner la forme algébrique de chacun des nombres :

$$f(5+i), \quad f(2i), \quad f(3+2i), \quad f(1-i)$$

2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  chacune des équations

$$f(z) = 1, \quad f(z) = \frac{3}{2}.$$

Écrire les solutions sous forme algébrique.

### Exercice 5

Soit

$$Z_1 = (1+5i)^{2020} + (1-5i)^{2020}$$

$$Z_2 = (1+5i)^{2020} - (1-5i)^{2020}$$

Montrer que  $Z_1$  est réel et  $Z_2$  imaginaire pur.

### Exercice 6

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivant:

$$z_1 = 4 - 3i, \quad z_2 = (3+i)(2+5i),$$

$$z_3 = \frac{2+4i}{2+3i}, \quad z_4 = (1+2i)(3-5i)(1-2i),$$

$$z_5 = \frac{(3-5i)(5+2i)^3}{(2+5i)^4}$$

### Exercice 7

Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants:

$$z_1 = 4 + 4i, \quad z_2 = 3 + i\sqrt{3}, \quad z_3 = \frac{4+4i}{3+i\sqrt{3}},$$

$$z_4 = (4+4i)(3+i\sqrt{3}), \quad z_5 = \frac{(3-i\sqrt{3})(4+4i)^3}{(3+i\sqrt{3})^4}.$$

### Exercice 8

En utilisant les résultats de l'exercice précédent, écrire chacun des nombres suivants sous forme trigonométrique et exponentielle.

$$z_1 = 4 + 4i, \quad z_2 = 3 + i\sqrt{3}, \quad z_3 = \frac{4+4i}{3+i\sqrt{3}},$$

$$z_4 = (4+4i)(3+i\sqrt{3}), \quad z_5 = \frac{(3-i\sqrt{3})(4+4i)^3}{(3+i\sqrt{3})^4}.$$

### Exercice 9

Soit  $z_1 = 4 + 4i$ ,  $z_2 = 3 + i\sqrt{3}$ ,  $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ ,  $z_4 = z_1 z_2$

1) Ecrire  $z_1$  et  $z_2$  sous la forme trigonométrique.

2.a) Donner les formes trigonométrique et algébrique de  $z_3$ .

b) En déduire  $\cos \frac{\pi}{12}$ ,  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

3.a) Donner les formes trigonométrique et algébrique de  $z_4$ .

b) En déduire  $\cos \frac{5\pi}{12}$ ,  $\sin \frac{5\pi}{12}$ .

### Exercice 10 (Bac)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

1.a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $E_1 : z^2 + 2z + 10 = 0$

On note  $z_1$  et  $z_2$  ses solutions avec  $\text{Im} z_2 \leq 0$ .

b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $E_2 : z^2 - 4z + 20 = 0$

On note  $z_3$  et  $z_4$  ses solutions avec  $\text{Im} z_4 \leq 0$ .

2) On considère les points A, B, K, L et E d'affixes respectives  $z_A = z_1$ ,  $z_B = z_2$ ,  $z_K = z_3$ ,  $z_L = z_4$  et  $z_E = z_3 - 2i$ .

a) Placer les points A, B, K, L, et E dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

b) Ecrire  $z_E = z_3 - 2i$  sous forme algébrique et trigonométrique.

c) Déterminer la nature du quadrilatère ABLE et du triangle AKE.

3) Pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $z \neq -1 + 3i$  on pose :  $f(z) = \frac{z - 2 - 4i}{z + 1 - 3i}$ .

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles des points M du plan d'affixe  $z$  dans chacun des cas suivants :

$\Gamma_1$  tel que  $|f(z)| = 1$ .

$\Gamma_2$  tel que  $|f(z) - 1| = \sqrt{10}$ .

### Exercice 11

1. On pose  $P(z) = z^3 - 5z^2 + 12z - 8$  où  $z$  est un nombre complexe.

a) Calculer  $P(1)$ .

b) Déterminer  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$  on a :  $P(z) = (z - 1)(z^2 + az + b)$ .

c) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $P(z) = 0$ .

2. On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Soient les points A, B et C d'affixes respectives :  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 2 + 2i$  et  $z_3 = 2 - 2i$ .

a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ .

b) Placer les points A, B et C dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

3.a) Ecrire le nombre  $\frac{z_2}{z_3}$  sous forme algébrique. En déduire la nature du triangle OBC.

b) Déterminer et représenter l'ensemble  $\Gamma$  des points M d'affixe  $z$  telle que

$$\left| \frac{z-1}{z-2-2i} \right| = 1.$$

### Exercice 12

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique : 3 cm).

On désigne par A ; B et C les points d'affixes respectives  $1+5i$  ;  $-1+i$  et  $3i$ .

Soit  $f$  l'application qui à tout point M du plan P, distinct de C, d'affixe  $z$ ,

associe le point M' d'affixe  $z'$  définie par :  $z' = \frac{3iz+6+4i}{z-3i}$ . On note  $f(M)=M'$ .

1) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe  $z$  dans les cas suivants :

a)  $|z'| = 3$

b)  $|z' - 3i| = 3$

c)  $z' \in \mathbb{R}$

d)  $\arg z' = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

e)  $\arg z' = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$ .

2) Montrer que les points A ; B ; M et M' sont cocycliques ou alignés .

### Exercice 13

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

1) On pose :  $P(z) = z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i)z - 12 - 60i$  où  $z$  est un nombre complexe.

a) Calculer  $P(3)$  et déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$  :

$$P(z) = (z-3)(z^2 + az + b).$$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation  $P(z) = 0$ .

c) Soient les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  images des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  avec  $\text{Im}(z_A) < \text{Im}(z_B) < \text{Im}(z_C)$ . Calculer l'affixe du point  $G$  barycentre du système  $\{(A;2), (B;-2), (C;2)\}$  et placer les points  $A, B, C$  et  $G$ .

2) Pour tout réel  $k$  différent de 2, on définit l'application  $f_k$  du plan  $P$  dans lui-même qui à tout point  $M$  du plan associe le point  $M'$  tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC}.$$

a) Pour quelles valeurs de  $k$ , l'application  $f_k$  est une translation? Déterminer alors son vecteur.

b) On suppose que  $k \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ . Montrer que  $f_k$  admet un unique point invariant  $\Omega_k$ . Reconnaître alors  $f_k$  et donner ses éléments caractéristiques en fonction de  $k$ .

c) Déterminer et construire le lieu géométrique des points  $\Omega_k$  lorsque  $k$  décrit  $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ . Reconnaître  $\Omega_1$ .

d) Pour  $k=1$ ; déterminer et construire le lieu géométrique du point  $R$  centre de gravité du triangle  $AMM'$  lorsque  $M$  décrit le cercle  $\Gamma$  de centre  $G$  passant par  $C$ .

3) Pour tout point  $M$  du plan on pose  $\varphi(M) = 2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2$  et  $\Gamma_m$  l'ensemble des points  $M$  tels que  $\varphi(M) = k$ , où  $k$  est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de  $k$ , la nature de  $\Gamma_m$ .

b) Déterminer et construire  $\Gamma_m$  pour  $k = 10$

### Exercice 14

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante sachant qu'elle admet une racine réelle :

$$z^3 - (6+3i)z^2 + (21+19i)z - 26(1+i) = 0$$

### Exercice 15 (Bac)

Dans  $\mathbb{C}$  on donne :  $a = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$

- 1) Calculer  $a^2$ . Donner le module et un argument de  $a^2$ .
- 2) En déduire le module et un argument de  $a$ .
- 3) En déduire  $\cos \frac{5\pi}{12}$ ,  $\sin \frac{5\pi}{12}$ .
- 4) Donner les entiers naturels  $n$  tels que  $a^n$  soit réel.

### Exercice 16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On pose :

$$P(z) = z^3 - (11 + 6i)z^2 + (28 + 38i)z - 12 - 60i \text{ où } z \text{ est un nombre complexe.}$$

- 1) Calculer  $P(3)$  et déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$  :  
 $P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$ .
- 2) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation  $P(z) = 0$ .

### Exercice 17

Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :

$$P(z) = z^3 - (1 + 2\cos \theta)z^2 + (1 + 2\cos \theta)z - 1 \text{ où } \theta \in [0; 2\pi[.$$

Calculer  $P(1)$  puis déterminer les solutions  $z_0$ ,  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation  $P(z) = 0$  sachant que  $z_0$  est réel, et  $\text{Im } z_1 \geq 0$  si  $\sin \theta \geq 0$ .

### Exercice 18

Dans le plan orienté, on considère deux triangles ABC et DEF équilatéraux directs. Les points G et H tels que EDBG et CDFH soient des parallélogrammes. Soient  $a, b, c, d, e, f, g$  et  $h$  les affixes respectives des points A, B, C, D, E, F, G et H.

- 1) Exprimer  $c - a$  en fonction de  $b - a$ , puis  $f - d$  en fonction de  $e - d$ .
- 2) Exprimer  $g$  en fonction de  $b, d$  et  $e$ ; puis  $h$  en fonction de  $c, d$  et  $f$ .
- 3) Démontrer que le triangle AGH est équilatéral.

### Exercice 19

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $P(z) = z^3 - (1+4i)z^2 - (9-i)z - 6 + 18i$ .

1.a) Calculer  $P(3i)$  et déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que  $\forall z \in \mathbb{C}$  :

$$P(z) = (z - 3i)(z^2 + az + b)$$

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ .

c) On considère les points  $A, B$  et  $C$  images des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  tels que  $|z_C| \leq |z_B| \leq |z_A|$ . Placer les points  $A, B$  et  $C$  et déterminer la nature du triangle  $ABC$ .

d) Soit  $A' = \text{bar}\{(A; -5), (B; 6), (C; 12)\}$ . Vérifier que l'affixe de  $A'$  est  $z_{A'} = -3 + i$ .

Placer  $A'$ .

2° On considère l'ellipse  $\Gamma$  de sommets  $A, A'$  et  $B$ .

a) Déterminer le centre  $I$  et l'excentricité de  $\Gamma$ .

b) Ecrire une équation cartésienne de  $\Gamma$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

c) Préciser les points d'intersection de  $\Gamma$  avec l'axe  $(Ox)$ .

d) Déterminer les foyers et les directrices de  $\Gamma$  puis construire  $\Gamma$ .

### Exercice 20

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Pour tout

nombre complexe  $z$  on pose :  $P(z) = z^3 - (7+3i)z^2 + (12+15i)z - 4 - 18i$ .

1.a) Calculer  $P(2)$  et déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que  $\forall z \in \mathbb{C}$  :

$$P(z) = (z - 2)(z^2 + az + b)$$

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ .

c) On considère les points  $A, B$  et  $D$  images des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  tels que  $\text{Im}(z_A) \leq \text{Im}(z_B) \leq \text{Im}(z_D)$ . Placer les points  $A, B$  et  $D$  et déterminer la nature du triangle  $ABD$ .

2.a) Déterminer le barycentre du système  $\{(A; 9), (B; -6), (C; 2)\}$ , où  $C$  est le symétrique de  $A$  par rapport à  $(BD)$ .

b) Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma_1$  des points  $M$  du plan tels que  $9MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2 = -10$ .

c) Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma_2$  des points  $M$  du plan tels que  $4MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2 = -10$ .

d) Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma_3$  des points  $M$  du plan tels que  $(9\overline{MA} - 6\overline{MB} + 2\overline{MC})(\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC}) = 10$ .

3° Soit  $S^0 = \text{id}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, S^{n+1} = S \circ S^n$  où  $S$  est la similitude directe qui transforme  $A$  en  $B$  et  $B$  en  $D$ .

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $S^{2018}$

b) Justifier que  $S^{2020^{2020}}$  est une homothétie de rapport positif.

## V. EXERCICES DE SYNTHÈSE

### Exercice 1

Dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$ , on pose:

$$P(z) = z^3 - (4 + 8i)z^2 + (-16 + 20i)z + 24 + 8i.$$

1.a) Calculer  $P(2i)$ .

b) Déterminer les complexes  $\alpha$  et  $\beta$  tels que pour tout complexe  $z$  on a:

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

c) Résoudre l'équation  $P(z) = 0$ .

### Exercice 2

Soit  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$  et  $z_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$ .

1) Ecrire  $z_1, z_2$  et  $z_3$  sous forme trigonométrique.

2) Ecrire  $z_3$  sous forme algébrique.

3) En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{7\pi}{12}$  et  $\sin \frac{7\pi}{12}$ .

4) Justifier les affirmations suivantes :

Le nombre  $(z_1)^{2019}$  est réel.

Le nombre  $(z_2)^{2019}$  est imaginaire pur.

### Exercice 3

Déterminer suivant les valeurs de  $\theta$  ( $\theta \in [0; 2\pi[$ ) le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivant:

$$z_1 = \cos\theta + i(1 + \sin\theta),$$

$$z_2 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta,$$

$$z_3 = 1 + \sin\theta - i\cos\theta$$

$$z_4 = 1 + i \tan \theta$$

$$z_5 = \frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 + \cos \theta - i \sin \theta},$$

$$z_6 = \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}.$$

#### Exercice 4

1) Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $P(z) = z^3 + (2 - 2i)z^2 + (2 - 4i)z - 4i$ .

a) Calculer  $P(2i)$ .

b) Déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z$  on a :

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b).$$

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation  $P(z) = 0$ .

2) On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_A = -1 - i$ ,  $z_B = 2i$  et  $z_C = -1 + i$ .

a) Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

b) Déterminer l'affixe du point  $D$  tel que  $ABCD$  soit un parallélogramme.

c) Déterminer et construire l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  telle que :  $|z + 1 - i| = 3$ .

#### Exercice 5

Soit  $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ . On pose  $\alpha = z + z^2 + z^4$ .

1) Calculer  $\alpha + \bar{\alpha}$  et  $\alpha\bar{\alpha}$ .

2) En déduire que :  $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2}$  ;

et que  $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

### Exercice 6

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $z \neq 1 + 2i$  on pose :  $f(z) = \frac{z - 3 - i}{z - 1 - 2i}$ .

1) Calculer le nombre  $\alpha = f(1 + 3i)$  puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.

2) On considère les deux points A et B d'affixes respectives  $z_A = 1 + 2i$  et  $z_B = 3 + i$ .

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles  $\Gamma_k$  des points M du plan d'affixe  $z$  dans chacun des cas suivants :

a)  $\Gamma_1$  tel que  $|f(z)| = 1$  ;                      b)  $\Gamma_2$  tel que  $f(z)$  soit imaginaire pur. ;

c)  $\Gamma_3$  tel que  $f(z)$  soit réel ;                      d)  $\Gamma_4$  tel que  $|f(z) - 1| = \sqrt{5}$ .

3.a) Déterminer et représenter dans le repère précédent un point C tel que le triangle ABC soit rectangle isocèle en C (deux solutions possibles).

b) Vérifier que C est commun entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

### Exercice 7

Simplifier les expressions suivantes:

1)  $C_n = 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$  ; (On pourra calculer  $C_n + iS_n$ )  
 $S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$

2)  $C_n = \cos^2 x + \cos^2 x \cos 2x + \dots + \cos^n x \cos nx$  ; (On pourra calculer  
 $S_n = \cos x \sin x + \cos^2 x \sin 2x + \dots + \cos^n x \sin nx$   
 $C_n + iS_n$ ).

### Exercice 8

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :  
 $z^2 - 2z - 2 - 4i = 0$

2) On considère le polynôme P définie sur C par :  
 $P(z) = z^3 - (2 + 2i)z^2 - 2z - 8 + 4i$ .

a) Calculer  $P(2i)$  et déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$

b) Résoudre, dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives  $z_A = (1+i)^2$ ,  $z_B = \frac{5+5i}{2+i}$  et  $z_C = \frac{1-5i}{2+3i}$ .

a) Donner la forme algébrique de  $z_A$ ,  $z_B$  et  $z_C$

b) Placer les points A, B et C

c) Déterminer et construire l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

4) Soit  $f$  l'application définie pour tout complexe  $z \neq 3+i$  par  $f(z) = \frac{(1-i)z+2}{z-3-i}$

Montrer que pour tout  $z \neq 3+i$ , on a :  $f(z) = (1-i) \frac{z+1+i}{z-3-i}$

5) Déterminer et construire les ensembles de points M dans chacun des cas suivants :

a.  $\Gamma_1$  tel que  $|f(z)| = \sqrt{2}$ .

b.  $\Gamma_2$  tel que  $\arg(f(z)) = \frac{\pi}{4} [\pi]$

c.  $\Gamma_3$  tel que  $\arg(f(z)) = \frac{3\pi}{4} [\pi]$

d.  $\Gamma_4$  tel que  $|f(z) - 1 + i| = 2\sqrt{10}$ .

### Exercice 9

On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit  $f_a$  l'application qui associe au point M d'affixe  $z$  le point M' d'affixe  $z'$  telle que :  $z' = (a + \frac{1}{2}i)z + 4 - 4a - 2i$ ,  $a \in \mathbb{C}$

1) Reconnaître l'application  $f_a$  et la caractériser pour chacune des valeurs suivantes du nombre complexe  $a$  :

a)  $a = 1 - \frac{1}{2}i$       b)  $a = 2 - \frac{1}{2}i$       c)  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$       d)  $a = \frac{1}{2}$

2) Dans la suite de l'exercice on suppose que  $a \in \mathbb{R}$  et on note  $\theta = \arg(a + \frac{1}{2}i)$ .

Soit les points  $M_0(3;0)$  et  $\Omega(4;0)$ . Pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $M_{n+1} = f_a(M_n)$ . On note  $z_n$  l'affixe du point  $M_n$ .

a) Calculer et écrire sous forme algébrique :  $z_1$  et  $z_2$  en fonction de  $a$ .

b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $z_n = 4 - (a + \frac{1}{2}i)^n$ .

c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose :  $V_n = |z_n - 4|$ . Pour quelles valeurs de  $\theta$  ; la suite  $(V_n)$  est elle convergente ?

d) Calculer en fonction de  $n$  :  $S_n = \sum_{k=0}^n d_k$ .

e) Pour  $a = \frac{1}{2}$  ; déterminer la nature du triangle  $\Omega M_n M_{n+1}$ . Placer les points  $M_0$  ;  $M_1$  et  $M_2$ . Calculer  $S_n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  puis interpréter géométriquement.

**Exercice 10 (Bac)**

On considère un triangle ABC de sens direct et on construit à l'extérieur de ce triangle trois triangles ACQ, BAR et CBP rectangle et isocèle respectivement en A, B et C. Soient P', Q' et R' les milieux respectifs des segments [BP], [CQ] et [AR].

L'objectif de cette partie est de montrer que les triangles ABC, PQR et P'Q'R' sont de même centre de gravité. On considère le plan complexe muni du repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Soient  $a, b, c, p, q, r, p', q'$  et  $r'$  les affixes respectives des points A, B, C, P, Q, R, P', Q' et R'.

1) Faire une construction illustrant les données précédentes.

2.a) Montrer que  $p' = \frac{b - ic}{1 - i}$  puis écrire q' en fonction de a et c ; r' en fonction de a et b.

b) Calculer  $p'+q'+r'$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$  puis en déduire que les triangles  $ABC$  et  $P'Q'R'$  ont le même centre de gravité  $G$  d'affixe  $g$ .

3) Exprimer chacun des complexes  $p$ ,  $q$  et  $r$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$  puis montrer que les triangles  $ABC$  et  $PQR$  ont le même centre de gravité  $G$ .

### Exercice 11 (Bac)

1) Dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$ , on pose:  
 $P(z) = z^3 + (2-2i)z^2 + (-2-8i)z - 8 + 4i$ .

a) Calculer  $P(2i)$ .

b) Résoudre l'équation  $P(z) = 0$ .

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère la transformation  $f$  d'expression :  $z' = \frac{1}{3}iz + \frac{2}{3} + 2i$ .

a) Montrer que  $f$  est une similitude directe. Préciser le centre  $A$ , le rapport et un angle de  $f$ .

b) Calculer l'affixe  $z_C$  du point  $C$  image de  $B(-1,-3)$  par  $f$ . Vérifier que le triangle  $ABC$  est rectangle. Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sur la figure.

c) Calculer l'affixe  $z_G$  du point  $G$  barycentre du système  $S = \{(A,2);(B,3);(C,-1)\}$ .

3.a) Déterminer puis construire les trois ensembles  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  des points  $M$  du plan définis par :

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow 2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 = 16$$

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MB^2 - MC^2 = 16$$

$$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow (2\overline{MA} + 3\overline{MB} - \overline{MC}) \cdot (\overline{MB} - \overline{MC}) = 0$$

b) Que peut-on dire à propos de la position relative des ensembles  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ ?

### Exercice 12 (Bac)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $P(z) = z^3 - (4+8i)z^2 + (-14+24i)z + 32 + 4i$ .

1.a) Calculer  $P(2i)$  et déterminer deux nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre complexe  $z$  on a :  $P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$ .

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ . On note  $z_1, z_2$  et  $z_3$  ses solutions avec  $|z_1| < |z_2| < |z_3|$ .

c) Soit  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $z_1, z_2$  et  $z_3$ . Déterminer l'affixe du point  $G$  barycentre du système  $\{(O, 5); (A, -7); (C, 4)\}$ . Placer  $A, B, C$  et  $G$  sur la figure.

2) Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $Q(z) = z^2 - (4 + 6i)z - 2 + 16i$ .

On note  $\Gamma$  l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $Q(z)$  soit imaginaire pur (ou nul).

a) En posant  $z = x + iy$ , donner une équation cartésienne de  $\Gamma$  et montrer que  $\Gamma$  est une conique de centre  $G$ .

b) Préciser les sommets et l'excentricité de  $\Gamma$  puis la construire dans le repère précédent.

### Exercice 13 (Bac)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

1) Pour tout nombre complexe  $z$  on pose  $P(z) = z^3 - (5 + 4i)z^2 + (7 + 10i)z + 5 - 10i$ .

Calculer  $P(i)$  puis déterminer les solutions  $z_0; z_1$  et  $z_2$  de l'équation  $P(z) = 0$  avec  $\operatorname{Re}(z_0) < \operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(z_2)$ .

2) On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_0; z_1$  et  $z_2$ .

a) Déterminer la nature du triangle  $ABC$ .

b) Soit  $G$  le barycentre du système  $\{(A, 13); (B, -3); (C, 2)\}$ . Déterminer l'affixe du point  $G$ .

c) Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  du plan tels que  $13 MA^2 - 3 MB^2 + 2 MC^2 = 12$

3) On considère l'hyperbole  $H$  de centre  $G$  qui passe par  $C$  et dont  $A$  est un sommet.

a) Déterminer le 2<sup>ème</sup> sommet de  $H$ .

b) Vérifier que l'équation de  $H$  peut s'écrire sous la forme  $x^2 - 3(y - 2)^2 = -3$ .

c) Donner l'équation réduite de  $H$  puis déterminer ses foyers, ses asymptotes et son excentricité et la construire.

Exercice 14 (Bac - traduit)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :

$$P(z) = z^3 - (9-i)z^2 + (28-5i)z - 32 + 4i .$$

1.a) Calculer  $P(4)$ .

b) Déterminer deux nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre complexe  $z$  on a :

$P(z) = (z-4)(z^2 + az + b)$ . En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ .

2) On considère les points  $A, B$  et  $C$  images des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  tels que  $z_A = 4, \text{Im} z_B > 0$  et  $\text{Im} z_C < 0$ .

a) Donner l'expression complexe de la similitude directe  $s$  de centre  $C$  qui transforme  $A$  en  $B$ . Déterminer le rapport et un angle de  $s$ .

b) Soit  $g = s \circ s$ . Pour tout point  $M(x, y)$  on note  $g(M) = M'$  ; et  $M'(x', y')$ . Ecrire  $x' y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

3) Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :

$$Q(z) = z^2 - (5-i)z + 8 - i .$$

On note  $\Gamma$  l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que soit imaginaire pur (ou nul).

a) En posant  $z = x + iy$ , donner une équation cartésienne de  $\Gamma$  et montrer que

$\Gamma$  est une hyperbole de centre  $\Omega(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ .

b) Préciser les sommets et les asymptotes de  $\Gamma$  puis la construire.

نعتبر المستوي العقدي منسوباً إلى مرجع قائم ومنتظم  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

(1) لكل عدد عقدي  $z$  نضع :

$$P(z) = z^3 - (9-i)z^2 + (28-5i)z - 32 + 4i$$

(a.1) احسب  $P(4)$  ثم حدد العددين  $a$  و

$b$  بحيث يكون لكل  $z \in \mathbb{C}$  :

$$P(z) = (z-4)(z^2 + az + b)$$

(b) حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة  $P(z) = 0$ .

(2) نعتبر النقط  $A, B$  و  $C$  صور حلول

المعادلة  $P(z) = 0$  مع  $z_A = 4$  ؛

$\text{Im} z_B > 0$  و  $\text{Im} z_C < 0$ .

(a) أعط العبارة العقدية للتشابه المباشر  $s$  الذي مركزه  $C$  وينقل  $A$  إلى  $B$ .

(b) حدد نسبة وزاوية  $s$ .

(3) لكل عدد عقدي نضع :

$$Q(z) = z^2 - (5-i)z + 8 - i .$$

مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحق  $z$  بحيث يكون  $Q(z)$  تخلياً بحتاً (أو معدوماً).

(a) بوضع  $z = x + iy$ ، أعط معادلة كرتيزية للمجموعة  $\Gamma$  وبين أن  $\Gamma$  قطع زائد مركزه

النقطة  $\Omega(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ .

(b) حدد القمتين والمقاربتين للقطع  $\Gamma$  ثم مثله.

## IV. CORRIGES DES EXERCICES

### Corrigé 1

$$\begin{aligned}z_1 &= (3+2i)(2-3i) \\ &= 6-9i+4i+6i^2 \\ &= 6-9i+4i-6 \\ &= 12-5i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_2 &= \frac{1+5i}{5-i} \\ &= \frac{(1+5i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}\end{aligned}$$

$$z_2 = \frac{5+i+25i-5}{25+1} = \frac{26i}{26} = i.$$

$$\begin{aligned}z_3 &= 2-3i + \frac{2i+4}{2+3i} = \frac{(2-3i)(2+3i)+2i+4}{2+3i} \\ &= \frac{4+9+2i+4}{2+3i} = \frac{17+2i}{2+3i}\end{aligned}$$

$$= \frac{(17+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{34-51i+4i+6}{4+9}$$

$$z_3 = \frac{40}{13} - \frac{47}{13}i.$$

$$\begin{aligned}z_4 &= (1+2i)(3-5i)(1-2i) = (1+2i)(1-2i)(3-5i) \\ &= 5(3-5i) \\ z_4 &= 15-25i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_5 &= \frac{3-5i}{5+i} + \frac{4-3i}{3+i} = \frac{(3-5i)(3+i) + (5+i)(4-3i)}{(5+i)(3+i)} \\ &= \frac{9+3i-15i+5+20-15i+4i+3}{15+5i+3i-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_5 &= \frac{37-23i}{14+8i} = \frac{(37-23i)(14-8i)}{(14+8i)(14-8i)} \\ &= \frac{334-618i}{196+64}\end{aligned}$$

$$z_5 = \frac{334}{260} - \frac{618}{260}i.$$

$$z_6 = \frac{2+5i}{4-i} + \frac{4+i}{2-5i} = \frac{(2+5i)(2-5i) + (4-i)(4+i)}{(4-i)(2-5i)}$$

$$= \frac{4+25+16+1}{8-20i-2i-5} = \frac{46}{3-22i} \times \frac{3+22i}{3+22i}$$

$$z_6 = \frac{138+1012i}{9+484} = \frac{138}{493} + \frac{1012}{493}i.$$

$$z_7 = (1-2i)^3 = (1-2i)(1-2i)^2 = (1-2i)(1-4i-4)$$

$$= (1-2i)(-3-4i) = -3-4i+6i-8$$

$$z_7 = -11+2i.$$

$$z_8 = \frac{2+3i}{3i} + \frac{5i}{3-2i} = \frac{(2+3i)(3-2i) + (3i)(5i)}{3i(3-2i)}$$

$$= \frac{6-4i+9i+6-15}{9i+6} = \frac{-3+5i}{6+9i} \times \frac{6-9i}{6-9i}$$

$$= \frac{-18+27i+30i+45}{36+81}$$

$$= \frac{27+57i}{117}$$

$$z_8 = \frac{27}{117} + \frac{57}{117}i.$$

**Enfin**  $z_8 = \frac{3}{13} + \frac{19}{39}i$

## Corrigé 2

**On a :**  $f(z) = (3-2i)z^2 + (5-i)z + 2 + 5i$

$$f(i) = (3-2i)(i)^2 + (5-i)i + 2 + 5i$$

$$= -3+2i+5i+1+2+5i$$

$$= 12i.$$

$$f(3+2i) = (3-2i)(3+2i)^2 + (5-i)(3+2i) + 2 + 5i$$

$$= (9+4)(3+2i) + 15+10i-3i+2+2+5i$$

$$= 13(3+2i) + 19 + 12i$$

$$= 39+26i+19+12i$$

$$= 58+38i.$$

$$\begin{aligned}
 f(1+i) &= (3-2i)(1+i)^2 + (5-i)(1+i) + 2 + 5i \\
 &= (3-2i)(2i) + 5 + 5i - i + 1 + 2 + 5i \\
 &= 6i + 4 + 8 + 9i \\
 &= 12 + 15i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(5-i) &= (3-2i)(5-i)^2 + (5-i)^2 + 2 + 5i \\
 &= (3-2i)(25-10i-1) + (25-10i-1) + 2 + 5i \\
 &= (3-2i)(24-10i) + 26 - 5i \\
 &= 72 - 30i - 48i - 20 + 26 - 5i \\
 &= 78 - 83i.
 \end{aligned}$$

### Corrigé 3

**On a**  $f(z) = (5+i)z + (1+2i)\overline{z} + 4 - 3i$

**On remplace z par sa valeur dans chaque cas :**

$$\begin{aligned}
 f(5-i) &= (5+i)(5-i) + (1+2i)\overline{(5-i)} + 4 - 3i \\
 &= 25 + 1 + (1+2i)(5+i) + 4 - 3i \\
 &= 30 + 5 + i + 10i - 2 - 3i \\
 &= 33 + 8i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(1+2i) &= (5+i)(1+2i) + (1+2i)\overline{(1+2i)} + 4 - 3i \\
 &= 5 + 10i + i - 2 + 1 + 4 + 4 - 3i \\
 &= 12 + 8i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(3+4i) &= (5+i)(3+4i) + (1+2i)\overline{(3+4i)} + 4 - 3i \\
 &= 15 + 20i + 3i - 4 + (1+2i)(3-4i) + 4 - 3i \\
 &= 15 + 20i + 3 - 4i + 6i + 8 \\
 &= 26 + 22i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(5+3i) &= (5+i)(5+3i) + (1+2i)\overline{(5+3i)} + 4 - 3i \\
 &= 25 + 15i + 5i - 3 + (1+2i)(5-3i) + 4 - 3i \\
 &= 26 + 17i + 5 - 3i + 10i + 6 \\
 &= 37 + 24i.
 \end{aligned}$$

### Corrigé 4

**On a**

$$\begin{aligned}
 f(5+i) &= \frac{(1-2i)(5+i) + 2 + 3i}{(3-2i)(5+i) - 2 - 5i} \\
 &= \frac{5+i-10i+2+2+3i}{15+3i-10i+2-2-5i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{9-6i}{15-12i} = \frac{9-6i}{15-12i} \times \frac{15+12i}{15+12i} \\
&= \frac{135+108i-90i+72}{225+144}
\end{aligned}$$

$$= \frac{207+18i}{369} = \frac{207}{369} + \frac{18}{369}i$$

$$f(5+i) = \frac{23}{41} + \frac{2}{41}i$$

$$f(2i) = \frac{(1-2i)(2i)+2+3i}{(3-2i)(2i)-2-5i} = \frac{2i+4+2+3i}{6i+4-2-5i}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6+5i}{2+i} = \frac{6+5i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} \\
&= \frac{12-6i+10i+5}{4+1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{17+4i}{5} = \frac{17}{5} + \frac{4}{5}i.$$

$$f(3+2i) = \frac{(1-2i)(3+2i)+2+3i}{(3-2i)(3+2i)-2-5i}$$

$$= \frac{3+2i-6i+4+2+3i}{9+4-2-5i}$$

$$= \frac{9-i}{11-5i} \times \frac{11+5i}{11+5i} = \frac{99+45i-11i+5}{121+25}$$

$$= \frac{104+34i}{146} = \frac{104}{146} + \frac{34}{146}i$$

$$= \frac{52}{73} + \frac{17}{73}i.$$

$$f(1-i) = \frac{(1-2i)(1-i)+2+3i}{(3-2i)(1-i)-2-5i}$$

$$= \frac{1-i-2i-2+2+3i}{3-3i-2i-2-2-5i}$$

$$= \frac{1}{-1-10i} \times \frac{-1+10i}{-1+10i} = \frac{-1+10i}{1+100}$$

$$= \frac{-1+10i}{101}$$

$$= \frac{-1}{101} + \frac{10}{101}i.$$

$$\begin{aligned}
f(z) = 1 &\Rightarrow \frac{(1-2i)z + 2 + 3i}{(3-2i)z - 2 - 5i} = 1 \\
&\Rightarrow (1-2i)z + 2 + 3i = (3-2i)z - 2 - 5i \\
&\Rightarrow [(1-2i) - (3-2i)]z = -2 - 5i - 2 - 3i \\
&\Rightarrow -2z = -4 - 8i \\
&\Rightarrow z = 2 + 4i.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{3}{2} &\Rightarrow \frac{(1-2i)z + 2 + 3i}{(3-2i)z - 2 - 5i} = \frac{3}{2} \\
\Rightarrow 2((1-2i)z + 2 + 3i) &= 3((3-2i)z - 2 - 5i) \\
&\Rightarrow (2-4i)z + 4 + 6i = (9-6i)z - 6 - 15i \\
&\Rightarrow [(2-4i) - (9-6i)]z = -6 - 15i - 4 - 6i \\
&\Rightarrow (-7+2i)z = -10 - 21i \\
&\Rightarrow z = \frac{-10 - 21i}{-7 + 2i} \\
&\Rightarrow z = \frac{-10 - 21i}{-7 + 2i} \times \frac{-7 - 2i}{-7 - 2i} \\
&\Rightarrow z = \frac{70 + 20i + 147i - 42}{49 + 4} \\
&\Rightarrow z = \frac{28 + 167i}{53} \\
&\Rightarrow z = \frac{28}{53} + \frac{167i}{53}.
\end{aligned}$$

### Corrigé 5

Pour montrer que  $Z_1$  est réel, il suffit de montrer que  $\overline{Z_1} = Z_1$ .

On a

$$\begin{aligned}
\overline{Z_1} &= \overline{(1+5i)^{2020} + (1-5i)^{2020}} \\
&= \overline{(1+5i)^{2020}} + \overline{(1-5i)^{2020}} \\
&= (\overline{1+5i})^{2020} + (\overline{1-5i})^{2020} \\
&= (1-5i)^{2020} + (1+5i)^{2020} \\
&= (1+5i)^{2020} + (1-5i)^{2020} \\
&= Z_1
\end{aligned}$$

Alors  $Z_1$  est réel.

Pour montrer que  $Z_2$  est imaginaire pur, il suffit de montrer que  $\overline{Z_2} = -Z_2$ .

$$\begin{aligned}
\overline{Z_2} &= \overline{(1+5i)^{2020} - (1-5i)^{2020}} \\
&= \overline{(1+5i)^{2020}} - \overline{(1-5i)^{2020}} \\
&= \overline{(1+5i)^{2020}} - \overline{(1-5i)^{2020}} \\
&= (1-5i)^{2020} - (1+5i)^{2020} \\
&= -\left((1+5i)^{2020} - (1-5i)^{2020}\right) \\
&= -Z_2
\end{aligned}$$

Alors  $Z_2$  est imaginaire pur.

### Corrigé 6

On utilise les propriétés des modules :

$$\begin{aligned}
|z_1| &= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5, \\
|z_2| &= |3+i||2+5i| = \sqrt{9+1} \times \sqrt{4+25} = \sqrt{290}, \\
|z_3| &= \left| \frac{2+4i}{2+3i} \right| = \frac{|2+4i|}{|2+3i|} = \frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{4+9}} = \sqrt{\frac{20}{13}}, \\
|z_4| &= |(1+2i)(3-5i)(1-2i)| = |1+2i||3-5i||1-2i| \\
&= \sqrt{1+4} \times \sqrt{9+25} \times \sqrt{1+4} = 5\sqrt{34}, \\
|z_5| &= \left| \frac{(3-5i)(5+2i)^3}{(2+5i)^4} \right| = \frac{|(3-5i)||5+2i|^3}{|(2+5i)^4|} \\
&= \frac{\sqrt{9+25} \times (\sqrt{25+4})^3}{(\sqrt{4+25})^4} = \sqrt{\frac{34}{29}}.
\end{aligned}$$

### Corrigé 7

1) On a

$$z_1 = 4+4i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

On note  $\arg z_1 = \theta_1$ . Alors :

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta_1 = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

2) On a  $z_2 = 3+i\sqrt{3} \Rightarrow |z_2| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

On note  $\arg z_2 = \theta_2$ . Alors :

$$\begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

**3) On constate que**  $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ .

**Alors**  $|z_3| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

**et**  $\arg z_3 = \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$

**4) On constate que**  $z_4 = z_1 z_2$ .

**Alors**  $|z_4| = |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{6}$ ,

$\arg z_4 = \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$

**5) On constate que**  $z_5 = \frac{\overline{z_2} z_1^3}{z_2^4}$ . **Alors**

$$|z_5| = \left| \frac{\overline{z_2} z_1^3}{z_2^4} \right| = \frac{|\overline{z_2}| |z_1|^3}{|z_2|^4} = \frac{|z_2| |z_1|^3}{|z_2|^4} = \frac{2\sqrt{3}(4\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{3})^4} |z_5| = \frac{16}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned} \arg z_5 &= \arg \frac{\overline{z_2} z_1^3}{z_2^4} = \arg \overline{z_2} z_1^3 - \arg z_2^4 \\ &= \arg \overline{z_2} + \arg z_1^3 - \arg z_2^4 \\ &= -\arg z_2 + 3\arg z_1 - 4\arg z_2 \end{aligned}$$

$\arg z_5 = 3\arg z_1 - 5\arg z_2 = \frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}$ . **Alors**  $\arg z_5 = \frac{-\pi}{12}$ .

## Corrigé 8

**D'après l'exercice précédent :**

1)  $|z_1| = 4\sqrt{2}$  **et**  $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$

**Forme trigonométrique :**  $z_1 = 4\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

**ou**  $z_1 = 4\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

**Forme exponentielle :**  $z_1 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

2)  $|z_2| = 2\sqrt{3}$  et  $\arg z_2 = \frac{\pi}{6}$  ;

**Forme trigonométrique :**  $z_2 = 2\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$

**Ou**  $z_2 = 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$ .

**Forme exponentielle :**  $z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

3)  $|z_3| = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$  et  $\arg z_3 = \frac{\pi}{12}$  ;

**Forme trigonométrique :**  $z_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$ .

**Forme exponentielle :**  $z_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}$ .

4)  $|z_4| = 8\sqrt{6}$  et  $\arg z_4 = \frac{5\pi}{12}$  ;

**Forme trigonométrique :**  $z_4 = 8\sqrt{6}(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12})$ .

**Forme exponentielle :**  $z_4 = 8\sqrt{6}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ .

5)  $|z_5| = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$  et  $\arg z_5 = \frac{-\pi}{12}$  ;

**Forme trigonométrique :**  $z_5 = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(\cos \frac{-\pi}{12} + i \sin \frac{-\pi}{12})$ .

**Forme exponentielle :**  $z_5 = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ .

## Corrigé 9

1) **Forme trigonométrique de  $z_1$  et  $z_2$  :**

**D'après l'exercice précédent on a :**

$$z_1 = 4\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}), \text{ et } z_2 = 2\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$$

2.a) **Forme trigonométrique de  $z_3$  :**

D'après l'exercice précédent on a :  $z_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$  (\*)

Pour écrire  $z_3$  sous la forme algébrique, on multiplie par le conjugué du

dénominateur :  $z_3 = \frac{4+4i}{3+i\sqrt{3}} \times \frac{3-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$

On obtient :  $z_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{3} + \frac{3-\sqrt{3}}{3}i$  (\*\*)

b) Par comparaison des écritures (\*) et (\*\*) du nombre  $z_3$  on obtient :

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{3+\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}+3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{3-\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}-3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3.a) D'après l'exercice précédent on a :

$$z_4 = 8\sqrt{6}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$
 (\*)

Pour la forme algébrique de  $z_4$ , on développe :

$$z_4 = (4+4i)(3+i\sqrt{3})$$

$$z_4 = 12-4\sqrt{3} + (12+4\sqrt{3})i$$
 (\*\*)

b) Par comparaison des écritures (\*) et (\*\*) du nombre  $z_4$  on obtient :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{12-4\sqrt{3}}{8\sqrt{6}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{12+4\sqrt{3}}{8\sqrt{6}} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

## Corrigé 10

1) Résolutions d'équations:

a)  $E_1 \quad z^2 + 2z + 10 = 0$

Le discriminant :  $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 10 = -36 = (6i)^2$

Les solutions  $z_1$  et  $z_2$  avec  $\text{Im}z_2 \leq 0$ :

$$z_1 = \frac{-2+6i}{2} = -1+3i \text{ et } z_2 = \frac{-2-6i}{2} = -1-3i$$

**Ensemble de solution :**  $S_1 = \{-1+3i, -1-3i\}$

b)  $E_2 : z^2 - 4z + 20 = 0$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 20 = 16 - 80 = -64 = (8i)^2$$

**Les solutions  $z_3$  et  $z_4$  avec  $\text{Im} z_4 \leq 0$ :**

$$z_3 = \frac{4+8i}{2} = 2+4i \text{ et } z_4 = \frac{4-8i}{2} = 2-4i$$

**Ensemble de solution :**  $S_2 = \{2+4i, 2-4i\}$

**2.a) Représentation des points :**

$$z_A = z_1 = -1+3i \Rightarrow A(-1, 3), z_B = z_2 = -1-3i \Rightarrow B(-1, -3)$$

$$z_K = z_3 = 2+4i \Rightarrow K(2, 4), z_L = z_4 = 2-4i \Rightarrow L(2, -4)$$

$$z_E = z_3 - 2i = 2+4i - 2i = 2+2i \Rightarrow E(2, 2)$$

b) **Forme algébrique de  $z_E$  :**

$$z_E = z_3 - 2i = 2+4i - 2i \Rightarrow z_E = 2+2i$$

**Forme trigonométrique :**

$$z_E = 2+2i \Rightarrow |z_E| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$z_E = 2\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow z_E = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

c) **Nature du quadrilatère ABLE :**

**D'après la figure, il semble que ABLE est un parallélogramme. Pour la démonstration on a :**

$$z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = -1-3i - (-1+3i) = -6i$$

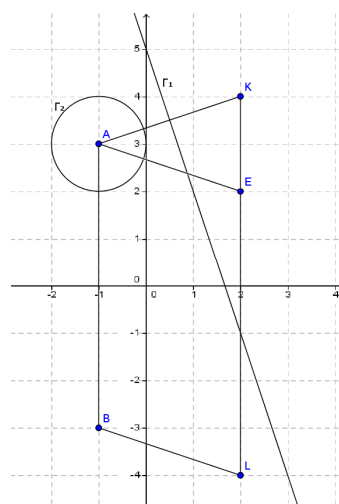
$$z_{\overline{EL}} = z_L - z_E = 2-4i - (2+2i) = -6i$$

$$z_{\overline{AB}} = z_{\overline{EL}} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{EL}$$

**Alors ABLE est un parallélogramme.**

**Nature du triangle AKE :**

**D'après la figure, il semble que AKE est isocèle en A. Pour la démonstration on a :**



$$AK = |z_K - z_A| = |2 + 4i + 1 - 3i| = |3 + i| = \sqrt{10}$$

$$AE = |z_E - z_A| = |2 + 2i + 1 - 3i| = |3 - i| = \sqrt{10}$$

**AK=AE. Alors le triangle AKE est isocèle en A.**

**3.a) L'ensemble  $\Gamma_1$  des points M du plan d'affixe z tels que  $|f(z)|=1$  :**

**On a  $f(z) = \frac{z-2-4i}{z+1-3i}$ . On constate que  $f(z) = \frac{z-z_K}{z-z_A}$ .**

$$\text{Alors : } |f(z)|=1 \Leftrightarrow \left| \frac{z-z_K}{z-z_A} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-z_K| = |z-z_A| \Leftrightarrow MK = MA$$

**D'où l'ensemble  $\Gamma_1$  est la médiatrice du segment [AK].**

**Pour la construction, voir la figure.**

**b) L'ensemble  $\Gamma_2$  des points M du plan d'affixe z tels que  $|f(z)-1|=\sqrt{10}$  :**

$$\text{On a } |f(z)-1|=\sqrt{10} \Leftrightarrow \left| \frac{z-2-4i}{z+1-3i} - 1 \right| = \sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{z-2-4i-z-1+3i}{z+1-3i} \right| = \sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-3-i}{z+1-3i} \right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{|-3-i|}{|z+1-3i|} = \sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{|z-z_A|} = \sqrt{10} \quad \Leftrightarrow |z-z_A|=1 \quad \Leftrightarrow AM=1$$

**Alors  $\Gamma_2$  est le cercle de centre A et de rayon 1.**

**Pour la construction, voir la figure.**

### Corrigé 11

**On a pour tout nombre complexe z :  $P(z) = z^3 - 5z^2 + 12z - 8$**

**1. a) En remplaçant z par 1 on obtient :**

$$P(1) = (1)^3 - 5(1) + 12(1) - 8 = -4 + 4 = 0$$

**b) 1<sup>ère</sup> méthode : identification**

**Pour déterminer a et b tels que :  $P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$ , on utilise une identification (Développer, réduire, ordonner le second membre et identifier) :**

$$(z-1)(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz - z^2 - az - b$$

$$= z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b$$

**Par identification :**

$z^3 - 5z^2 + 12z - 8 = z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b$ , pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ; on obtient le

$$\text{ystème : } \begin{cases} a-1 = -5 \\ b-a = 12 \\ -b = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 8 \end{cases}$$

Alors, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ;  $P(z) = (z-1)(z^2 - 4z + 8)$

**2<sup>ème</sup> méthode : Division euclidienne**

$$\begin{array}{r|l}
 z^3 - 5z^2 + 12z - 8 & z - 1 \\
 \hline
 z^3 - z^2 & z^2 - 4z + 8 \\
 -4z^2 + 12z - 8 & \\
 -4z^2 + 4z & \\
 8z - 8 & \\
 8z - 8 & \\
 0 &
 \end{array}$$

On en déduit que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ;  $P(z) = (z-1)(z^2 - 4z + 8)$

soit  $a = -4$  et  $b = 8$ .

**3<sup>ème</sup> méthode : Tableau d'Horner**

L'utilisation du tableau d'Horner permet à la fois de calculer  $P(1)$  et factoriser  $P(z)$ , (si  $P(1) = 0$ ) :

	1	-5	12	-8
1		1	-4	8
	1	-4	8	0

D'où :  $a = -4$ ,  $b = 8$ ,  $P(1) = 0$  et  $P(z) = (z-1)(z^2 - 4z + 8)$

c) L'équation  $P(z) = 0$  équivaut  $z-1=0$  ou  $z^2 - 4z + 8 = 0$ .

\* Si  $z-1=0$  on obtient la solution  $z_1 = 1$

\*Si  $z^2 - 4z + 8 = 0$ , on a  $\Delta = 16 - 32 = -16 = (4i)^2$

Les solutions de cette équation sont :  $z_2 = \frac{4+4i}{2} = 2+2i$  ;  $z_3 = \frac{4-4i}{2} = 2-2i$

(Ces solutions sont conjuguées car les coefficients sont réels et le discriminant est négatif).

L'ensemble de solutions de l'équation  $P(z) = 0$  est :  $S = \{1; 2+2i; 2-2i\}$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Les points A, B et C sont d'affixes :  $z_A = 1$ ,  $z_B = 2+2i$  et  $z_C = 2-2i$ .

a) Calcul de modules arguments :

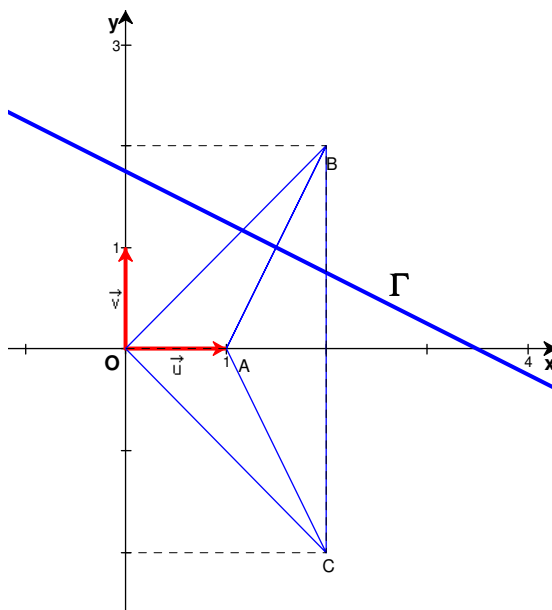
$$|z_1| = |1| = 1, \arg z_1 = 0 [2\pi]$$

$$|z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}, \arg z_2 = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$|z_3| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}, \arg z_3 = \frac{-\pi}{4} [2\pi]$$

b) Représentation des points :

Les points A, B et C ont pour affixes Les points  $z_A = 1$ ,  $z_B = 2+2i$  et  $z_C = 2-2i$ . Alors A(1;0), B(2;2) et C(2;-2).



3.a) On a :

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_3} &= \frac{2+2i}{2-2i} \\ &= \frac{1+i}{1-i} \\ &= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{2i}{2} \\ &= i \end{aligned}$$

On remarque que  $\frac{z_2}{z_3} = \frac{z_B - z_O}{z_C - z_O}$ . Alors  $\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = i$ , d'où le triangle OBC est rectangle isocèle en O.

b) Pour déterminer l'ensemble  $\Gamma$  des points M d'affixe  $z$  telle que  $\left| \frac{z-1}{z-2-2i} \right| = 1$ , on constate que cette égalité peut s'écrire :  $\left| \frac{z-z_A}{z-z_B} \right| = 1$

Alors  $M \in \Gamma \Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow AM = BM$

D'où l'ensemble  $\Gamma$  est la médiatrice du segment  $[AB]$ .

Méthode 2 : Equation de  $\Gamma$

On pose  $z = x + iy$  ;

$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\Leftrightarrow \left| \frac{z-1}{z-2-2i} \right| = 1 \\ &\Leftrightarrow |z-1| = |z-2-2i| \\ &\Leftrightarrow |x-1+iy| = |x-2+(y-2)i| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 \\ &\Leftrightarrow 2x + 4y - 7 = 0 \end{aligned}$$

D'où l'ensemble  $\Gamma$  est la droite d'équation  $2x + 4y - 7 = 0$ .

Remarque :

L'équation  $2x + 4y - 7 = 0$  représente la médiatrice du segment  $[AB]$ .

### Corrigé 12

1) Ensembles de points

a) Soit  $E_1$  l'ensemble des points M du plan tels que  $|z'| = 3$ .

$$\text{On a : } |z'| = 3 \Rightarrow \left| \frac{3iz + 6 + 4i}{z - 3i} \right| = 3. \text{ Alors } \left| \frac{3i \left( z + \frac{6+4i}{3i} \right)}{z - 3i} \right| = 3.$$

$$\text{d'où } |3i| \left| \frac{z + \frac{6+4i}{3i}}{z-3i} \right| = 3$$

$$\left| \frac{z + \frac{4}{3} - 2i}{z-3i} \right| = 1. E_1 \text{ donc, est la médiatrice du segment } [DC] \text{ où } D(-\frac{4}{3}, 2).$$

b) Soit  $E_2$  l'ensemble des points M du plan tels que  $|z'-3i|=3$ . On a :

$$|z'-3i|=3 \Rightarrow \left| \frac{3iz+6+4i}{z-3i} - 3i \right| = 3 \Leftrightarrow \left| \frac{3iz+6+4i-3iz-9}{z-3i} \right| = 3$$

$$\left| \frac{-3+4i}{z-3i} \right| = 3 \Leftrightarrow \frac{5}{|z-3i|} = 3 \Leftrightarrow |z-3i| = \frac{5}{3} \text{ soit } |z_M - z_C| = \frac{5}{3}$$

$E_2$  donc, est le cercle de centre C et de rayon  $\frac{5}{3}$ .

c) Soit  $E_3$  l'ensemble des points M du plan tels que  $z' \in \mathbb{R}$ . On a :

$$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left( z' = 0 \text{ ou } \arg \frac{3iz+6+4i}{z-3i} = 0 [\pi] \right)$$

$$\text{Soit } z' = 0 \Leftrightarrow 3iz+6+4i = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{4}{3} + 2i \Leftrightarrow M = D$$

$$\text{Soit } \arg \frac{3iz+6+4i}{z-3i} = 0 [\pi] \Leftrightarrow \arg 3i + \arg \frac{z + \frac{6+4i}{3i}}{z-3i} = 0 [\pi] \Leftrightarrow$$

$$\arg \frac{z + \frac{4}{3} - 2i}{z-3i} = \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow$$

$$\arg \frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{2} [\pi].$$

M appartient au cercle de diamètre [CD] privé de C et D. En particulier si M est en D,  $z' = 0$ .

Enfin,  $E_3$  est le cercle de diamètre [CD] privé de C.

d) Soit  $E_4$  l'ensemble des points M du plan tels que  $\arg z' = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ . On a :

$$\arg z' = \frac{\pi}{3} [2\pi] \Leftrightarrow \arg 3i + \arg \frac{z + \frac{6+4i}{3i}}{z-3i} = \frac{\pi}{3} [2\pi] \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \arg \frac{z + \frac{4}{3} - 2i}{z-3i} = \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg \frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow \arg \frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = -\frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = -\frac{\pi}{6} [2\pi]$$

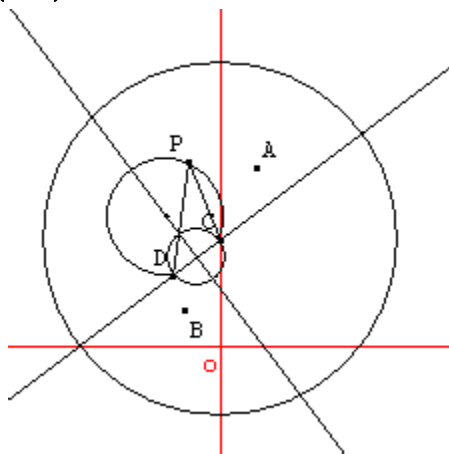
$E_4$  donc, est un arc (de sens indirect) d'un cercle d'extrémités C et D exclues.

e) Soit  $E_5$  l'ensemble des points M du plan tels que  $\arg z' = \frac{\pi}{2} [\pi]$ . On a :

$$\arg z' = \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \arg \frac{z + \frac{4}{3} - 2i}{z - 3i} = \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \arg \frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = 0 [\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = 0 [\pi]$$

$E_5$  donc, est la droite (CD) privée de C et D.



2) Pour montrer que les points A ; B ; M et M' sont cocycliques ou alignés, il suffit de montrer que le nombre Z tel que :  $Z = \frac{z' - z_A}{z' - z_B} \times \frac{z - z_B}{z - z_A}$  soit réel.

$$\text{On a : } Z = \frac{\frac{3iz + 6 + 4i}{z - 3i} - 1 - 5i}{\frac{3iz + 6 + 4i}{z - 3i} + 1 - i} \times \frac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i} \Leftrightarrow$$

$$Z = \frac{\frac{3iz + 6 + 4i - z + 3i - 5iz - 15}{z - 3i}}{\frac{3iz + 6 + 4i + z - 3i - iz - 3}{z - 3i}} \times \frac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i}$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{-2iz - z + 7i - 9}{2iz + z + i + 3} \times \frac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i} \Leftrightarrow Z = \frac{(-2i - 1)z + 7i - 9}{(2i + 1)z + i + 3} \times \frac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i}$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{(-2i-1)\left(z + \frac{7i-9}{-2i-1}\right)}{(2i+1)\left(z + \frac{i+3}{2i+1}\right)} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i} \Leftrightarrow Z = \frac{-\left(z + \frac{7i-9}{-2i-1}\right)}{z + \frac{i+3}{2i+1}} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i}$$

$$Z = \frac{-(z-1-5i)}{z+1-i} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i}$$

$Z = -1$  d'où  $Z \in \mathbb{R}^*$

Alors les points A, B, M et M' sont cocycliques ou alignés.

### Corrigé 13

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

1) On pose :  $P(z) = z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i)z - 12 - 60i$  où  $z$  est un nombre complexe.

a) Pour calculer  $P(3)$  et déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$  :

$P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$ , on peut utiliser la division euclidienne, une identification ou le tableau d'Horner :

	1	-11-6i	28+38i	-12-60i
3	⊗	3	-24-18i	12+60i
	1	-8-6i	4+20i	0

Alors,  $P(3) = 0$  et pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$  :  $P(z) = (z-3)(z^2 + (-8-6i)z + 4+20i)$ .

Donc  $a = -8-6i$  et  $b = 4+20i$ .

b) L'équation  $P(z) = 0$  équivaut à  $z-3=0$  ou  $z^2 + (-8-6i)z + 4+20i = 0$

On a  $z-3=0 \Leftrightarrow z=3$ .

Le discriminant de l'équation du second degré est

$$\Delta = (-8-6i)^2 - 4(4+20i) = 64 - 36 + 96i - 16 - 80i$$

$$\Delta = 12 + 16i = (4+2i)^2. \quad \text{Donc } \delta = 4+2i.$$

Les solutions sont

$$z_1 = \frac{8+6i+4+2i}{2} = 6+4i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{8+6i-4-2i}{2} = 2+2i.$$

**Conclusion :** L'ensemble de solutions de l'équation  $P(z) = 0$  est  $S = \{3, 6+4i, 2+2i\}$ .

c) Les points A, B et C sont les images des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  avec  $\text{Im}(z_A) < \text{Im}(z_B) < \text{Im}(z_C)$ . Donc  $z_A = 3$ ,  $z_B = 2+2i$  et  $z_C = 6+4i$ .

G barycentre du système  $\{(A;2), (B;-2), (C;2)\}$ . G est alors le quatrième sommet du parallélogramme ABCG.

L'affixe de G est :  $z_G = \frac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2 - 2 + 2}$

$$z_G = \frac{2(3) - 2(2 + 2i) + 2(6 + 4i)}{2} = \frac{14 + 4i}{2} = 7 + 2i$$

2) L'application  $f_k$  du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3 - k)\overrightarrow{MC}.$$

Cette question sera traitée par deux méthodes : Calcul vectoriel ou nombres complexes

### Méthode1 : Calcul vectoriel

a) L'application  $f_k$  est une translation si et seulement si le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  est constant.

La fonction vectorielle de Leibniz ( $M \mapsto 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3 - k)\overrightarrow{MC}$ ) est constante si et seulement si le poids du système  $\{(A; 2), (B; -2), (C; 3 - k)\}$  est nul. Ce qui équivaut à  $3 - k = 0$ . Soit  $k = 3$ .

Alors,  $f_k$  est une translation si et seulement si  $k = 3$ . On obtient son vecteur en remplaçant M dans l'expression vectorielle  $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3 - k)\overrightarrow{MC}$  par n'importe quel point. Pour M en C on obtient  $\vec{v} = 2\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BA}$ .

b) Si  $k \neq 3$ , le poids du système  $\{(A; 2), (B; -2), (C; 3 - k)\}$  est non nul. Donc ce système admet un barycentre  $G_k$  et on a pour tout point M du plan  $2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3 - k)\overrightarrow{MC} = (3 - k)\overrightarrow{MG_k}$ . D'où :

$$f_k(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = (3 - k)\overrightarrow{MG_k}.$$

$$\begin{aligned} f_k(M) = M' &\Leftrightarrow \overrightarrow{MG_k} + \overrightarrow{G_kM'} = (3 - k)\overrightarrow{MG_k} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{G_kM'} = (2 - k)\overrightarrow{MG_k} \end{aligned}$$

Enfin,  $f_k(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{G_kM'} = (k - 2)\overrightarrow{G_kM}$

Particulièrement, pour  $k = 2$  on a :  $f_2(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{G_2M'} = \vec{0} \Leftrightarrow M' = G_2$  donc l'application  $f_2$  est constante.

$G_2$  est le barycentre du système  $\{(A; 2), (B; -2), (C; 1)\}$ . Alors  $\overrightarrow{CG_2} = 2\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BA}$ . Donc  $\overrightarrow{CG_2} = 2\overrightarrow{CG}$ . Alors  $G_2$  est le symétrique de C par rapport à G.

Maintenant, si  $k \in \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$  et M un point invariant par  $f_k$ , alors  $f_k(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{G_kM} = (k - 2)\overrightarrow{G_kM} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_kM} = \vec{0} \Leftrightarrow M = G_k$ . D'où  $f_k$  admet un unique point invariant  $\Omega_k = G_k = \text{bar}\{(A; 2), (B; -2), (C; 3 - k)\}$ .

$f_k$  est l'homothétie de centre  $\Omega_k$  et de rapport  $k - 2$ .

c) On a  $\Omega_k = G_k = \text{bar}\{(A; 2), (B; -2), (C; 3 - k)\}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } 2\overrightarrow{\Omega_k A} - 2\overrightarrow{\Omega_k B} + (3 - k)\overrightarrow{\Omega_k C} &= \vec{0} \\ 2\overrightarrow{BA} + (3 - k)\overrightarrow{\Omega_k C} &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\Omega_k C} = \frac{2}{3-k} \overrightarrow{AB}$$

Alors  $\Omega_k$  est situé sur la droite passant par C et parallèle à (AB).

Comme  $\frac{2}{3-k} \neq 0$  et  $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ , on a  $\overrightarrow{\Omega_k C} \neq \vec{0}$  donc  $\Omega_k \neq C$ .

Comme  $k \neq 2$ , on a  $\overrightarrow{\Omega_k C} \neq 2\overrightarrow{AB}$  donc  $\Omega_k \neq G_2$  où  $G_2$  est le point tel que  $\overrightarrow{G_2 C} = 2\overrightarrow{AB}$ .  $G_2$  est le symétrique de C par rapport à G. C'est aussi le quatrième sommet du parallélogramme ABGG<sub>2</sub>.

Conclusion : Le lieu géométrique des points  $\Omega_k$  lorsque  $k$  décrit  $\mathbb{R} \setminus \{2;3\}$  est la droite passant par C et parallèle à (AB) privée de C et  $G_2$ .

d) Le centre de gravité R du triangle AMM' est le barycentre du système  $\{(A;1), (M;1), (M';1)\}$ . Alors pour tout point M du plan on a, pour  $k=1$  :

$$3\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + (2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{BC}$$

D'où  $3\overrightarrow{MR} - 3\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{BC}$ .

Enfin  $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ . D'où le centre de gravité R du triangle AMM' est un point fixe indépendant de la position de M. Le lieu géométrique de R est un point fixe.

On peut aussi remarquer que, pour  $k=1$ , la transformation  $f_k$  est l'homothétie de centre  $\Omega_1 = \text{bar}\{(A;2), (B;-2), (C;2)\} = G$  et de rapport  $k-2 = -1$ .

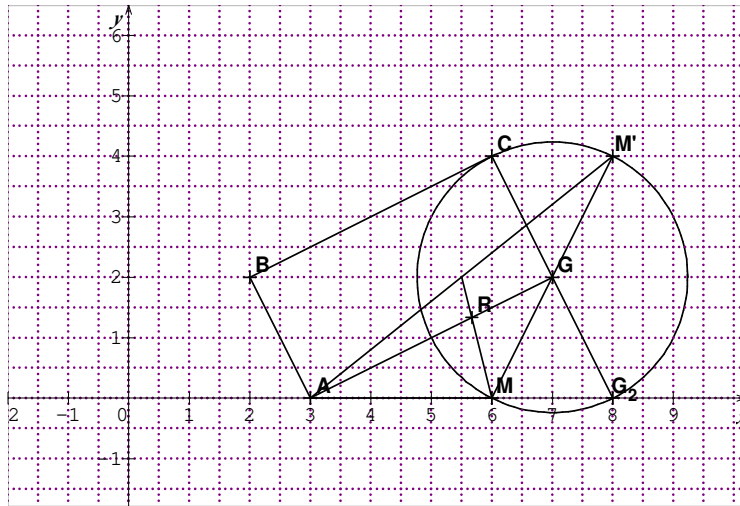
Alors c'est une symétrie centrale de centre G. Donc G est le milieu du segment  $[MM']$ .

D'où le barycentre R du système  $\{(A;1), (M;1), (M';1)\}$  est celui de  $\{(A;1), (G;2)\}$ .

Donc  $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$ . Comme  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC}$  on retrouve le résultat précédent

$$\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Le centre de gravité R du triangle AMM' est fixe car le milieu G des points variables M et M' est un point fixe.



**Méthode2 : Nombres complexes**

a) On désigne par  $z$  et  $z'$  les affixes respectives de  $M$  et  $M'$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} &= 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow z' - z = 2(z_A - z) - 2(z_B - z) + (3-k)(z_C - z) \\ \Leftrightarrow z' - z &= 2(3 - z) - 2(2 + 2i - z) + (3-k)(6 + 4i - z) \\ \Leftrightarrow z' &= z + 6 - 2z - 4 - 4i + 2z + 18 - 6k + 12i - 4ki - (3-k)z \\ \Leftrightarrow z' &= (k-2)z + 20 - 6k + (8-4k)i \end{aligned}$$

Une expression de type  $z' = az + b$  avec  $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$ .

Si  $k = 3$ , on a  $z' = z + 2 - 4i$  donc  $f_3$  est une translation dont le vecteur a pour affixe  $2 - 4i$ . Soit  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

Si  $k \in \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$ , alors  $k - 2 \neq 0$  et  $k - 2 \neq 1$ . Les points invariants sont d'affixes  $z$  vérifiant  $z' = z$ .

$$z' = z \Leftrightarrow z = (k-2)z + 20 - 6k + (8-4k)i \Leftrightarrow z = \frac{20 - 6k + (8-4k)i}{3-k}$$

D'où  $f_k$  admet un unique point invariant  $\Omega_k$  d'affixe  $z_k = \frac{20 - 6k + (8-4k)i}{3-k}$ .

D'après la forme complexe  $z' = (k-2)z + 20 - 6k + (8-4k)i$ ,  $f_k$  est l'homothétie de centre  $\Omega_k$  et de rapport  $k-2$ .

c) L'affixe de  $\Omega_k$  est  $z_k = \frac{20 - 6k + (8-4k)i}{3-k} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_k = \frac{20 - 6k}{3 - k} = \frac{6k - 20}{k - 3} \\ y_k = \frac{8 - 4k}{3 - k} = \frac{4k - 8}{k - 3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_k = 6 - \frac{2}{k-3} \\ y_k = 4 + \frac{4}{k-3} \end{cases} \Rightarrow 2x + y - 16 = 0. \text{ C'est l'équation d'une droite } \Delta.$$

Comme  $(x_k, y_k) = \left(6 - \frac{2}{k-3}, 4 + \frac{4}{k-3}\right)$  avec  $\frac{2}{k-3} \neq 0$  et  $\frac{4}{k-3} \neq 0$ . On a alors  $(x_k, y_k) \neq (6, 4)$ . D'où  $\Omega_k \neq C(6, 4)$ .

Comme  $k \neq 2$ , on a  $(x_k, y_k) \neq (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_k, y_k) \neq \left(6 - \frac{2}{2-3}, 4 + \frac{4}{2-3}\right) \Rightarrow (x_k, y_k) \neq (8, 0)$ , donc  $\Omega_k \neq G_2(8, 0)$ .

**Conclusion :** Le lieu géométrique des points  $\Omega_k$  lorsque  $k$  décrit  $\mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$  est la droite  $\Delta$  d'équation  $2x + y - 16 = 0$  privée de  $C(6, 4)$  et  $G_2(8, 0)$ .

\* Pour  $k = 1$ ,  $\Omega_1 = G_1 = \text{bar}\{(A; 2), (B; -2), (C; 2)\}$ . C'est le quatrième sommet du

parallélogramme  $ABCG_1$ , avec  $\begin{cases} x_1 = \frac{14}{2} = 7 \\ y_1 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$ . D'où  $\Omega_1(7, 2)$ .

d) L'affixe de  $M'$  est  $z' = (k-2)z + 20 - 6k + (8-4k)i$ . Pour  $k = 1$ , on a  $z' = -z + 14 + 4i$ . Alors l'affixe du point  $R$  centre de gravité du triangle  $\Delta MM'$  est

$$z_R = \frac{z_A + z + z'}{3}$$

$$z_R = \frac{z + (-z + 14 + 4i) + 3}{3}$$

$z_R = \frac{17 + 4i}{3} = \frac{17}{3} + \frac{4}{3}i$ . Alors lorsque  $M$  décrit le cercle  $\Gamma$  de centre  $G$  passant par  $C$ , le point  $R$  reste fixe.

3) Pour tout point  $M$  du plan on a  $\varphi(M) = 2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2$  et  $\Gamma_m$  l'ensemble des points  $M$  tels que  $\varphi(M) = m$ , où  $m$  est un réel.

La somme des coefficients est égale à 2 (non nulle). Le barycentre  $G$  de ce système est le point  $\Omega_1(7, 2)$ .

Alors, par transformation d'écriture on obtient l'écriture réduite  $\varphi(M) = 2MG^2 + \varphi(G)$ .

Donc  $M \in \Gamma_m \Leftrightarrow 2MG^2 + \varphi(G) = m$

$$\text{soit } MG^2 = \frac{m - \varphi(G)}{2}.$$

Calculons  $\varphi(G)$  :

On a  $\varphi(G) = 2GA^2 - 2GB^2 + 2GC^2$ . On remarque que  $G$  est le point  $\Omega_1(7, 2)$ .

$$\text{Donc : } GA^2 = |z_A - z_G|^2 = |3 - 7 - 2i|^2 = |-4 - 2i|^2 = 20$$

$$GB^2 = |z_B - z_G|^2 = |2 + 2i - 7 - 2i|^2 = |-5|^2 = 25$$

$$GC^2 = |z_C - z_G|^2 = |6 + 4i - 7 - 2i|^2 = |-1 + 2i|^2 = 5.$$

$$\text{Alors } \varphi(G) = 2GA^2 - 2GB^2 + 2GC^2$$

$$\varphi(G) = 2 \times 20 - 2 \times 25 + 2 \times 5$$

Enfin  $\varphi(G) = 0$ . D'où  $M \in \Gamma_m \Leftrightarrow MG^2 = \frac{m}{2}$ .

**Discussion suivant les valeurs de m:**

$m < 0$  :  $\Gamma_m$  est l'ensemble vide.

$m = 0$  :  $\Gamma_m$  est le point G

$m > 0$  :  $\Gamma_m$  est le cercle de centre G et de rayon  $r = \sqrt{\frac{m}{2}}$ .

b) D'après les résultats précédents, pour  $m = 10$ , l'ensemble est un cercle de centre G et de rayon  $r = \sqrt{\frac{m}{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}$ . Comme  $GC^2 = 5$ , ce cercle passe par C. Donc  $\Gamma_{10}$  est le cercle de centre G passant par C.

### Corrigé 14

• Soit  $z_0 = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  la solution réelle de l'équation

$$E : z^3 - (6 + 3i)z^2 + (21 + 19i)z - 26(1 + i) = 0$$

$$\text{Alors : } \alpha^3 - (6 + 3i)\alpha^2 + (21 + 19i)\alpha - 26(1 + i) = 0$$

$$\alpha^3 - 6\alpha^2 - 3i\alpha^2 + 21\alpha + 19i\alpha - 26 - 26i = 0$$

$$\alpha^3 - 6\alpha^2 + 21\alpha - 26 + (-3\alpha^2 + 19\alpha - 26)i = 0$$

• On résout le système :

$$\begin{cases} \alpha^3 - 6\alpha^2 + 21\alpha - 26 = 0 & (1) \\ -3\alpha^2 + 19\alpha - 26 = 0 & (2) \end{cases}$$

D'après (2) On trouve :  $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \frac{13}{3}$ .

En remplaçant dans (1) on trouve que  $\alpha_1 = 2$  vérifie (1) et  $\alpha_2 = \frac{13}{3}$  ne vérifie pas (1) Alors  $z_0 = 2$

• On pose  $P(z) = z^3 - (6 + 3i)z^2 + (21 + 19i)z - 26(1 + i)$

On factorise par  $(z - 2)$  :

On utilise le tableau d'Horner ;

	1	-6-3i	21+19i	-26-26i
2	$\otimes$	2	-8-6i	26+26i
	1	-4-3i	13+13i	0

Alors :  $P(z) = (z-2)(z^2 + (-4-3i)z + 13+13i)$

- Résolvons l'équation :  $z^2 - (4+3i)z + 13+13i = 0$

$$\Delta = (4+3i)^2 - 52 - 52i = -45 - 28i.$$

Par le calcul on obtient une racine carrée  $\delta = 2 - 7i$ .

Les racines de l'équation du second degré :

$$z_1 = \frac{4+3i+2-7i}{2} = 3-2i; \quad z_2 = \frac{4+3i-2+7i}{2} = 1+5i$$

- Ensemble de solution :  $S = \{2, 3-2i, 1+5i\}$

### Corrigé 15

1) On a :  $a^2 = \left( \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \right)^2$

$$a^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} + 2i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2}} - \frac{2+\sqrt{3}}{2} \quad a^2 = \frac{-2\sqrt{3}}{2} + 2i\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow a^2 = -\sqrt{3} + i$$

- Module :  $|a^2| = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} \Rightarrow |a^2| = 2$
- Argument : Soit  $\theta$  un réel tel que  $\arg a^2 = \theta$

$$\text{Alors : } \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \arg a^2 = \frac{5\pi}{6}.$$

2.a) Module et argument de a :

- Module :  $|a^2| = 2 \Rightarrow |a| = \sqrt{2}$
- Argument :  $\arg a^2 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow 2 \arg a = \frac{5\pi}{6}$

$$\arg a = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \{0, 1\}$$

Soit  $k = 0 \Rightarrow \arg a = \frac{5\pi}{12}$

Soit  $k = 1 \Rightarrow \arg a = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$ .

Comme  $\operatorname{Re}(a) > 0$  et  $\operatorname{Im}(a) > 0$ ,  $\arg a \neq \frac{17\pi}{12}$ . Enfin,  $\arg a = \frac{5\pi}{12}$ .

3) D'après ce qui précède, on déduit que :

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \cos \frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \sin \frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

4) Le nombre  $a^n$  est réel si et seulement si  $\arg a^n = k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$\arg a^n = k\pi \Leftrightarrow \frac{5n\pi}{12} = k\pi \Leftrightarrow 5n = 12k \Leftrightarrow n = \frac{12k}{5}$$

$n$  est un entier naturel et le nombre 12 n'est pas divisible par 5, donc  $k$  est divisible par 5. On prend  $k = 5k'$  avec  $k' \in \mathbb{Z}$ .

$$\arg a^n = k\pi \Leftrightarrow n = 12 \times \frac{k}{5} \Leftrightarrow n = 12k'$$

Alors, l'ensemble des valeurs de  $n$  tels que  $a^n$  soit réel c'est les multiples de 12.

**Corrigé 16**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

1) On pose :  $P(z) = z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i)z - 12 - 60i$  où  $z$  est un nombre complexe.

a) Pour calculer  $P(3)$  et déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que :

$P(z) = (z-3)(z^2+az+b)$ , on peut utiliser la division euclidienne, une identification ou le tableau d'Horner :

	1	-11-6i	28+38i	-12-60i
3	$\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}$	3	-24-18i	12+60i
	1	-8-6i	4+20i	0

Alors,  $P(3) = 0$  et pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$  :  $P(z) = (z-3)(z^2 + (-8-6i)z + 4+20i)$ .

Donc  $a = -8-6i$  et  $b = 4+20i$ .

b) L'équation  $P(z) = 0$  équivaut à  $z-3=0$  ou  $z^2 + (-8-6i)z + 4+20i = 0$

On a  $z-3=0 \Leftrightarrow z=3$ .

Le discriminant de l'équation du second degré est

$$\Delta = (-8-6i)^2 - 4(4+20i) = 64 - 36 + 96i - 16 - 80i$$

$$\Delta = 12 + 16i = (4+2i)^2. \quad \text{Donc } \delta = 4+2i.$$

Les solutions sont :  $z_1 = \frac{8+6i+4+2i}{2} = 6+4i$  et  $z_2 = \frac{8+6i-4-2i}{2} = 2+2i$ .

**Conclusion :** L'ensemble de solutions de l'équation  $P(z) = 0$  est  $S = \{3, 6+4i, 2+2i\}$ .

### Corrigé 17

Pour tout nombre complexe  $z$  on a :  $P(z) = z^3 - (1+2\cos\theta)z^2 + (1+2\cos\theta)z - 1$   
où  $\theta \in [0; 2\pi[$ .

1.a) Calcul de  $P(1)$  :

$$P(1) = 1 - (1+2\cos\theta) \times 1^2 + (1+2\cos\theta) \times 1 - 1 = 0$$

• Pour résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $P(z) = 0$ , on factorise  $P(z)$  et pour cela on peut utiliser la division euclidienne, une identification, ou bien le tableau d'Horner : 1 est une racine du polynôme  $P$

	1	$-1-2\cos\theta$	$1+2\cos\theta$	-1
1		1	$-2\cos\theta$	1
	1	$-2\cos\theta$	1	0

Alors Pour tout nombre complexe  $z$  on a :  $P(z) = (z-1)(z^2 - 2\cos\theta z + 1)$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 - 2\cos\theta z + 1) = 0$$

$$\text{soit } z-1=0 \Rightarrow z_0=1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{ou } z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$$

Résolvons l'équation :  $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$

$$\begin{aligned}\Delta' &= (-\cos)^2 - 1 \times 1 \\ &= \cos^2 \theta - 1 \\ &= -(1 - \cos^2 \theta) \\ &= (i \sin \theta)^2\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}z' &= \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{1} = \cos \theta + i \sin \theta \\ z'' &= \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{1} = \cos \theta - i \sin \theta\end{aligned}$$

Si  $\sin \theta \geq 0$ ,  $\text{Im}(z_1) \geq 0 \Rightarrow z_1 = z' = \cos \theta + i \sin \theta$  et  $z_2 = \cos \theta - i \sin \theta$ .

Donc l'ensemble de solutions de l'équation  $P(z) = 0$  dans  $\mathbb{C}$  est :

$$S = \{1; \cos \theta + i \sin \theta; \cos \theta - i \sin \theta\}.$$

### Corrigé 18

1) ABC est équilatéral direct :

$$\Rightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (c-a) = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

DEF est équilatéral direct :

$$\Rightarrow \frac{f-d}{e-d} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (f-d) = e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$$

2) EDBG est un Parallélogramme

$$\Rightarrow \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DE} \Rightarrow g-b = e-d \Rightarrow g = b+e-d$$

DCHF est un parallélogramme  $\Rightarrow h-c = f-d$

$$\Rightarrow h = c+f-d$$

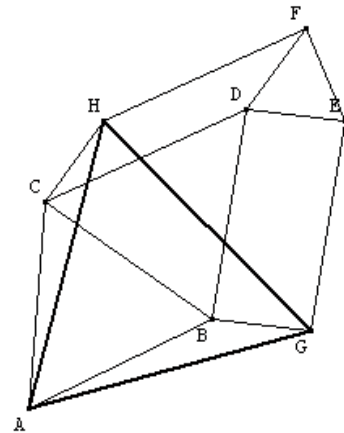
3) On calcule  $\frac{h-a}{g-a}$

$$g-a = b-a+e-d, \quad h-a = c-a+f-d$$

$$h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) + e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$$

$$h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a+e-d) \Rightarrow h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$$

$$\frac{h-a}{g-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \text{AGH est équilatéral direct.}$$



## Corrigé 19

1.a) Pour calculer  $P(3i)$  on remplace  $z$  par  $3i$  :

$$\begin{aligned}P(3i) &= (3i)^3 - (1+4i)(3i)^2 - (9-i)(3i) - 6 + 18i \\ &= -27i + 9 + 36i - 27i - 3 - 6 + 18i \\ &= 0\end{aligned}$$

Alors le nombre  $3i$  est une racine de  $P$ .

Donc ils existent deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  
 $P(z) = (z - 3i)(z^2 + az + b)$ .

Utilisons le tableau d'Horner pour les déterminer :

	1	-1-4i	-9+i	-6+18i
3i		3i	-3i+3	-18i+6
	1	-1-i	-6-2i	0

D'où  $a = -1 - i$  et  $b = -6 - 2i$

Alors pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z) = (z - 3i)(z^2 - (1+i)z - 6 - 2i)$

b) On a  $P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 3i = 0$  ou  $z^2 - (1+i)z - 6 - 2i = 0$ .

D'une part  $z - 3i = 0 \Leftrightarrow z = 3i$

D'autre part, le discriminant de l'équation  $z^2 - (1+i)z - 6 - 2i = 0$  est

$$\Delta = (1+i)^2 + 4(6+2i) = 24 + 10i = 25 - 1 + 2 \times 5 \times i = (5+i)^2$$

D'où  $\delta = 5 + i$  est une racine carrée de  $\Delta$ .

Alors les solutions de cette équation sont

$$z' = \frac{1+i+(5+i)}{2} = 3+i \text{ et } z'' = \frac{1+i-(5+i)}{2} = -2.$$

**Conclusion :** L'ensemble de solutions de l'équation  $P(z) = 0$  est

$$S = \{-2, 3i, 3+i\}$$

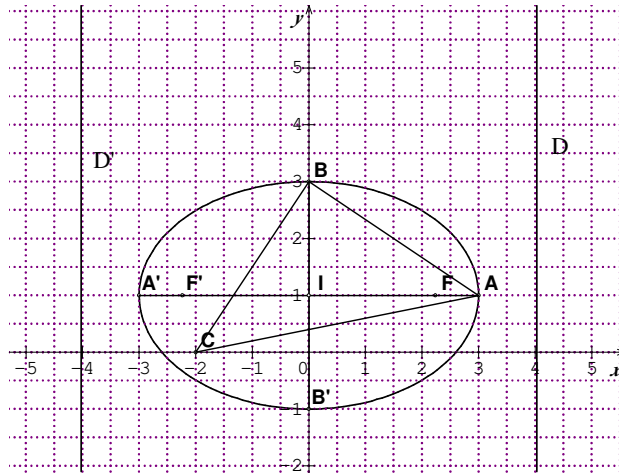
c) En remarquant que  $|-2| < |3i| < |3+i|$  ; on a alors  $z_A = 3+i$ ;  $z_B = 3i$  et  $z_C = -2$ .

**Construction :**

$$z_A = 3+i \Rightarrow A(3;1)$$

$$z_B = 3i \Rightarrow B(0;3)$$

$$z_C = -2 \Rightarrow C(-2;0)$$



On a  $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \frac{3i - (3+i)}{3i - (-2)} = \frac{-3+2i}{2+3i} = \frac{i(3i+2)}{2+3i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$  donc  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$  et

$\frac{BA}{BC} = 1$  . D'où le triangle ABC est rectangle isocèle direct en B.

d) Le point  $A'$  est le barycentre du système  $\{(A;-5), (B;6), (C;12)\}$  . Alors

$$\text{L'affixe de } A' \text{ est } z_{A'} = \frac{-5z_A + 6z_B + 12z_C}{-5+6+12}$$

$$z_{A'} = \frac{-5(3+i) + 6(3i) + 12(-2)}{-5+6+12}$$

$$z_{A'} = \frac{-39+13i}{13}$$

Donc :  $z_{A'} = -3+i$  et  $A'(-3;1)$

2.a) Puisque les points  $A$ ,  $A'$  et  $B$  sont des sommets de l'ellipse  $\Gamma$  , et  $B$  appartient à la médiatrice du segment  $[AA']$ , donc la droite  $(AA')$  est un axe de  $\Gamma$  et par suite le centre de  $\Gamma$  est le milieu  $I$  de  $[AA']$ .

Son affixe est  $z_I = \frac{z_A + z_{A'}}{2}$ .

$$z_I = \frac{3+i+(-3+i)}{2}$$

$$z_I = i$$

Alors le centre de  $\Gamma$  est le point  $I(0,1)$ .

Les demi-longueurs des axes sont  $a = IA = |z_A - z_I| = |3+i-i| = |3| = 3$  et  $b = IB = |z_B - z_I| = |3i-i| = |2i| = 2$  donc  $a > b$ , d'où  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$  et par conséquent l'excentricité de  $\Gamma$  est  $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

b) Le centre de  $\Gamma$  est le point  $I(0,1)$ . Ses demi-longueurs des axes sont  $a=3$  et  $b=2$ . Alors, une équation cartésienne de  $\Gamma$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  est

$$\frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$$

C'est-à-dire : 
$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

c) Pour déterminer les coordonnées  $(x,y)$  des points d'intersection de  $\Gamma$  avec  $(Ox)$ , on résout le système :

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \end{cases}$$

Ceci équivaut à 
$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{1}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{9} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = \frac{27}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{27}{4}} \end{cases}$$

Donc  $\Gamma$  coupe  $(Ox)$  en deux points  $M\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$  et  $N\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ .

d) Dans le repère  $(I; \vec{i}, \vec{j})$ , l'équation réduite de  $\Gamma$  est  $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$  ; avec

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases}$$

Les foyers de  $\Gamma$  sont  $F(c; 0)$  et  $F'(-c; 0)$  avec  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$

Donc  $F(\sqrt{5}; 0)$  et  $F'(-\sqrt{5}; 0)$ .

Les directrices de  $\Gamma$  sont les droites  $D$  et  $D'$  d'équations respectives

$$X = \frac{a^2}{c} \text{ et } X = -\frac{a^2}{c}.$$

Donc  $X = \frac{9}{\sqrt{5}}$  et  $X = -\frac{9}{\sqrt{5}}$ .

Alors dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Les foyers :  $F(\sqrt{5}; 1)$  et  $F'(-\sqrt{5}; 1)$  car  $Y = y - 1 \Rightarrow y = Y + 1$ .

Les directrices ont pour équations:  $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$  et  $x = -\frac{9}{\sqrt{5}}$  car  $X = x$ .

Pour la construction voir la figure précédente.

### Corrigé 20

1.a)  $P(z) = z^3 - (7 + 3i)z^2 + (12 + 15i)z - 4 - 18i$

$P(2) = 2^3 - (7 + 3i)2^2 + (12 + 15i)2 - 4 - 18i = 8 - 28 - 12i + 24 + 30i - 4 - 18i = 0$ .

Alors le nombre 2 est une racine de  $P$ . Donc ils existent deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z) = (z - 2)(z^2 + az + b)$ . Utilisons le tableau d'Horner pour les déterminer :

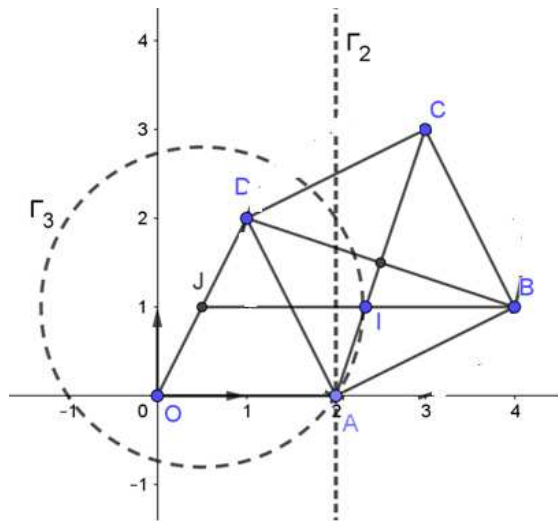
	1	-7-3i	12+15i	-4-18i
2		2	-10-6i	4+18i
	1	-5-3i	2+9i	0

D'où  $a = -5 - 3i$  et  $b = 2 + 9i$

Alors pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z) = (z-2)(z^2 - (5+3i)z + 2+9i)$

b)  $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2$  ou  $z^2 - (5+3i)z + 2+9i = 0$ . Pour cette dernière équation on a  $\Delta = (5+3i)^2 - 4(2+9i) = 8-6i = (3-i)^2$ , donc ses solutions sont  $z_1 = \frac{(5+3i)+(3-i)}{2} = 4+i$  et  $z_2 = \frac{(5+3i)-(3-i)}{2} = 1+2i$ . D'où les solutions de l'équation  $P(z) = 0$  sont  $z_0 = 2$ ;  $z_1 = 4+i$  et  $z_2 = 1+2i$ .

c) Comme  $\text{Im}(z_0) \leq \text{Im}(z_1) \leq \text{Im}(z_2)$  alors  $z_A = 2$ ;  $z_B = 4+i$  et  $z_D = 1+2i$ .



On a  $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1+2i-2}{4+i-2} = \frac{-1+2i}{2+i} = \frac{i(i+2)}{2+i} = i$ , d'où le triangle ABD est rectangle isocèle et direct en A.

2° a) Le point C est donc un sommet du carré ABCD alors son affixe est  $z_C = -z_A + z_B + z_D = 3+3i$ , donc l'affixe du barycentre du système

$\{(A;9),(B;-6),(C;2)\}$  est  $\frac{9z_A - 6z_B + 2z_C}{9 - 6 + 2} = \frac{18 - 24 - 6i + 6 + 6i}{5} = 0$ . D'où O est le barycentre du système  $\{(A;9),(B;-6),(C;2)\}$ .

b) Soit  $\varphi(M) = 9MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2$ . Pour tout point M du plan, on a  $\varphi(M) = 5MO^2 + 9OA^2 - 6OB^2 + 2OC^2$  donc  $\varphi(M) = 5MO^2 + 36 - 102 + 36 = 5MO^2 - 30$ .

Alors  $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \varphi(M) = -10 \Leftrightarrow 5MO^2 = 20 \Leftrightarrow MO^2 = 4$ .

Donc  $\Gamma_1$  est le cercle de centre O et de rayon 2, il passe par A.

c) Soit  $\psi(M) = 4MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2$ .

On remarque que  $\psi(A) = 4AA^2 - 6AB^2 + 2AC^2 = -10$ , donc  $A \in \Gamma_2$

Pour tout point M du plan, on a  $\psi(M) = 2\overline{MA} \cdot \bar{u} + \psi(A) = 2\overline{MA} \cdot \bar{u} - 10$  avec  $\bar{u} = 4\overline{MA} - 6\overline{MB} + 2\overline{MC} = 6\overline{IB}$  où I est le barycentre du système  $\{(A;2),(C;1)\}$ ,

donc  $z_I = \frac{2z_A + z_C}{3} = \frac{7}{3} + i$ . Alors  $\psi(M) = 12\overline{MA} \cdot \overline{IB} - 10$

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \psi(M) = -10 \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{IB} = 0$ . Donc  $\Gamma_2$  est la droite perpendiculaire à (IB) passant par A.

d) Soit  $\sigma(M) = (9\overline{MA} - 6\overline{MB} + 2\overline{MC})(\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC}) = 5\overline{MO} \cdot \overline{MD}$

Soit J le milieu de [OD], L'affixe de J est donc  $z_J = \frac{1}{2}z_D = \frac{1}{2} + i$  alors

$$\overline{MO} \cdot \overline{MD} = MJ^2 - \frac{1}{4}OD^2 = MJ^2 - \frac{5}{4}.$$

Pour tout point M du plan on a donc  $\sigma(M) = 5MJ^2 - \frac{25}{4}$  et alors

$$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow 5MJ^2 - \frac{25}{4} = 10 \Leftrightarrow MJ^2 = \frac{13}{4}$$

Alors  $\Gamma_3$  est le cercle de centre J et de rayon  $\frac{1}{2}\sqrt{13}$ . Or  $AJ^2 = \frac{13}{4}$  donc le cercle

$\Gamma_3$  passe par A.

3°a) L'écriture complexe de S est de la forme  $z' = az + b$  avec

$$\begin{cases} S(A) = B \\ S(B) = D \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_B + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 + i = 2a + b \\ 1 + 2i = a(4 + i) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 + i \\ b = 6 - i \end{cases}$$

Donc l'écriture complexe de S est  $z' = (-1 + i)z + 6 - i$ .

Donc le rapport de S est  $|-1 + i| = \sqrt{2}$ ,

son angle est une mesure de  $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$

et son centre est le point  $\Omega$  d'affixe  $\omega = \frac{6 - i}{1 - (-1 + i)} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$ .

b) On a  $S = s\left(\Omega; \sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$

donc par composition des similitudes :  $S^{2018} = s\left(\Omega; (\sqrt{2})^{2018}; \frac{3\pi}{4} \times 2018\right)$

Alors :  $S^{2018} = s\left(\Omega; 2^{1009}; -\frac{\pi}{2}\right)$

c) On a  $S^4 = s\left(\Omega; (\sqrt{2})^4; \frac{3\pi}{4} \times 4\right) \Rightarrow S^4 = s(\Omega; 4; \pi)$  c'est donc l'homothétie h de centre  $\Omega$  et de rapport  $-4$  et on a  $S^8 = h^2$  est l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport 16.

En plus on a  $2020 \equiv 4[8]$  ce qui montre que  $2020^{2020} \equiv 4^{2020}[8]$ . Or  $4^{2020} = 2^{4040} = 2^{3 \times 1346 + 2} = 2^{4037} \times 2^2 = 2^{4037} \times 4$ , un multiple de 8, donc  $4^{2020} \equiv 0[8]$ . Ce qui montre l'existence d'un entier k tel que  $2020^{2020} = 8k$  et par conséquent que  $S^{2020^{2020}} = S^{8k}$  qui est l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $(-4)^{8k} = 4^{8k}$ . D'où  $S^{2020^{2020}}$  est une homothétie de rapport positif.

**I. RESUME DE COURS**

**Divisibilité dans  $\mathbb{Z}$**

**1) Définition**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs, on dit que  $b$  divise  $a$  s'il existe un entier relatif  $k$  tel que  $a = kb$ . On note:  $b|a$

**Remarques**

- On dit aussi que  $a$  est un multiple de  $b$  ou  $b$  est un diviseur de  $a$ .
- $1$  et  $-1$  divisent tous les nombres.
- Un nombre  $a$  admet au minimum 4 diviseurs :  $\{1; -1; a; -a\}$ .

**2) Propriétés**

Soient  $a, b, c$  trois entiers relatifs et  $n$  un entier naturel non nul.

1.  $(a|b \text{ et } b|a) \Leftrightarrow (a = b \text{ ou } a = -b)$
2.  $(a | b \text{ et } b|c) \Rightarrow a | c$  (transitivité)
3.  $(c|a \text{ et } c|b) \Rightarrow c |(ua + vb)$  ;  $u, v \in \mathbb{Z}$  (divisibilité par combinaison linéaire)
4.  $a | b \Rightarrow -a | b$
5.  $a | b \Rightarrow |a| \leq |b|$ ;  $b \neq 0$
6.  $a | b \Rightarrow a | bc$  pour tout entier  $c$
7.  $a | b \Rightarrow ac | bc$  pour tout entier  $c$  non nul.
8.  $(a - b) | (a^n - b^n)$ ;  $n \in \mathbb{N}^*$
9. Si  $n$  est impair alors  $(a + b) | (a^n + b^n)$ ;  $n \in \mathbb{N}^*$

**3) Critères de divisibilité**

Soit  $n$  un entier naturel

<b>n</b>	<b>Critères de divisibilité par n (en écriture décimale)</b>
<b>10</b>	<b>Le chiffre des unités est 0.</b>
<b>2</b>	<b>Le chiffre des unités est paire :0, 2, 4, 6, 8.</b>
<b>5</b>	<b>Le chiffre des unités est 0 ou 5.</b>
<b>4</b>	<b>Le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4</b>
<b>25</b>	<b>Le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 25.</b>
<b>8</b>	<b>Le nombre formé par les trois derniers chiffres est divisible par 8.</b>
<b>125</b>	<b>Le nombre formé par les trois derniers chiffres est divisible par 125.</b>

n	Critères de divisibilité par n (en écriture décimale)
3	La somme des chiffres qui le composent est divisible par 3.
9	La somme des chiffres qui le composent est divisible par 9.
11	La différence de la somme des chiffres de rang impair et de la somme des chiffres de rangs pair ( en partant de la droite ) est divisible par 11.
7	Le nombre de dizaines diminué du double du chiffre des unités est divisible par 7.  Soustraction alternée des tranches de trois chiffres divisible par 7.
13	Le nombre de dizaines augmenté de 4 fois le chiffre des unités est divisible par 13.  Soustraction alternée des tranches de trois chiffres divisible par 13.

## Division euclidienne

### 1) Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Soient a et b deux entiers naturels, avec  $b \neq 0$ . Il existe un unique couple  $(q; r)$  d'entiers naturels tels que  $a = bq + r$  avec  $0 \leq r < b$ .

### 2) Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Pour deux entiers relatifs a et b avec  $b \neq 0$ , il existe un unique couple  $(q; r)$  avec  $q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$  tel que :  $a = bq + r$  avec  $0 \leq r < |b|$ .

a	b	q	R
dividende	diviseur	quotient	reste, $r \in \mathbb{N}, (r = 0 \Rightarrow b   a)$

### 3) Congruence

Soient a et b deux entiers relatifs, et n un entier naturel non nul.

#### Définition et notation

On dit que a et b sont congrus modulo n si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

On note  $a \equiv b (n)$  ou  $a \equiv b \pmod{n}$

## Propriétés

Soient  $a, b, c, a'$  et  $b'$  des entiers relatifs, et  $n$  un entier naturel non nul.

1.	$a \equiv b (n) \Leftrightarrow b \equiv a (n)$
2.	$a \equiv b (n) \Leftrightarrow a - b \equiv 0 (n)$
3.	$a \equiv b (n) \Leftrightarrow n \mid (a - b)$
4.	$n \mid a \Leftrightarrow a \equiv 0 (n)$
5.	$n \equiv 0 (n)$
6.	$a \equiv a (n)$
7.	$\left. \begin{array}{l} a \equiv b (n) \\ b \equiv c (n) \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv c (n)$
8.	$\left. \begin{array}{l} a \equiv b (n) \\ a' \equiv b' (n) \end{array} \right\} \Rightarrow a + a' \equiv b + b' (n)$
9.	$\left. \begin{array}{l} a \equiv b (n) \\ a' \equiv b' (n) \end{array} \right\} \Rightarrow a - a' \equiv b - b' (n)$
10.	$\left. \begin{array}{l} a \equiv b (n) \\ a' \equiv b' (n) \end{array} \right\} \Rightarrow aa' \equiv bb' (n)$
11.	$a \equiv b (n) \Rightarrow a^p \equiv b^p (n)$ pour tout $p$ de $\mathbb{N}$ ,
12.	$a \equiv b (n) \Rightarrow ac \equiv bc (n)$

## 4) Nombres premiers

### 1) Définition

Un nombre entier naturel  $p$  est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs: 1 et  $p$  lui-même.

### 2) Théorème

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.  $n$  admet au moins un diviseur premier.

Si  $n$  n'est pas premier alors il admet au moins un diviseur premier  $p$  tel que  $p \leq \sqrt{n}$ .

### 3) Critère de primalité

Si un entier naturel  $n$  n'est divisible par aucun nombre premier dont le carré lui est inférieur ou égal, alors il est premier.

### 4) Théorèmes

**Théorème 1:** Il existe une infinité de nombres premiers (Théorème d'Euclide).

**Théorème 2:** Tout entier naturel  $n > 1$  s'écrit de façon unique sous la forme d'un produit de facteurs :  $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$  où  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$  sont des nombres premiers et  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_r$  des entiers naturels. On note

$$n = \prod_{k=1}^r p_k^{\alpha_k} .$$

### 5) Crible d'Eratosthène

Pour trouver les nombres premiers, on peut utiliser le « crible d'Eratosthène » :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49

## PGCD

### 1) Définition

$a$  et  $b$  sont deux entiers naturels non nuls. Le plus grand élément des diviseurs communs de  $a$  et  $b$  est appelé Plus Grand Commun Diviseur de  $a$  et de  $b$ , on le note  $\text{PGCD}(a ; b)$  ou  $a \wedge b$ .

Si  $a$  et  $b$  sont des entiers relatifs non nuls :  $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(|a|;|b|)$

## 2) Propriétés

$a, b$  et  $c$  étant trois entiers naturels non nuls.

1.	$c a$ et $c b \Leftrightarrow c \text{PGCD}(a;b)$
2.	$b a \Rightarrow b = \text{PGCD}(a;b)$
3.	$\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(b;a)$ soit $a \wedge b = b \wedge a$
4.	$\text{PGCD}(a; \text{PGCD}(b;c)) = \text{PGCD}(\text{PGCD}(a;b); c)$ soit $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
5.	$a\text{PGCD}(b;c) = \text{PGCD}(ab;ac)$ soit $a(b \wedge c) = ab \wedge ac$
6.	$a, b$ et $g$ sont trois entiers positifs.
$g = \text{PGCD}(a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet g a \text{ et } g b \\ \bullet \frac{a}{g} \wedge \frac{b}{g} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet g a \text{ et } g b \\ \bullet \text{il existe } u \text{ et } v \\ \text{tels que } ua+vb=g \end{cases}$	

## 3) Algorithme d'Euclide

### Théorème

$a$  et  $b$  étant deux entiers naturels non nuls tels que  $a \geq b$  et  $a = bq + r$  avec

$$0 \leq r < b$$

Si  $r=0$ , alors  $\text{PGCD}(a;b) = b$ , sinon ( $r \neq 0$ ),  $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(b;r)$ .

### En d'autres termes :

$$\left. \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{N}^*, \\ a \geq b, \\ a = bq + r, \\ 0 \leq r < b. \end{array} \right\} \begin{array}{l} r = 0 \Rightarrow \text{PGCD}(a;b) = b \\ r \neq 0 \Rightarrow \text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(b;r) \end{array}$$

### Propriété

Lorsque  $b$  ne divise pas  $a$ , le PGCD de  $a$  et  $b$  est le dernier reste non nul obtenu par l'algorithme d'Euclide.

## 4) Nombres premiers entre eux

### Définition

Deux entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux (ou étrangers) si  $\text{PGCD}(a;b) = 1$ .

### 5) Théorème de Gauss

Soit  $a, b$  et  $c$  trois entiers naturels non nuls.

Si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux et si  $a|bc$  alors  $a|c$ .

### Conséquences

Soit  $a, b, c$  et  $p$  des entiers naturels non nuls.

$$1) \left. \begin{array}{l} \bullet a | c, \\ \bullet b | c, \\ \bullet \text{PGCD}(a,b) = 1. \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{ab | c}$$

$$2) \left. \begin{array}{l} \bullet p \text{ est premier,} \\ \bullet p | ab. \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{p | a \text{ ou } p | b}$$

$$3) \left. \begin{array}{l} \bullet p \text{ est premier,} \\ \bullet \text{PGCD}(p,a) = 1, \\ \bullet \text{PGCD}(p,b) = 1. \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{PGCD}(p,ab) = 1}$$

Si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux et si  $a|bc$  alors  $a|c$ .

### 6) Petit théorème de Fermat

#### Théorème

Soit  $p$  un nombre premier et  $a$  un entier naturel premier avec  $p$  (non divisible par  $p$ ) alors  $a^{p-1} - 1$  est divisible par  $p$ .

#### Corollaire

Soit  $p$  un nombre premier et  $a$  un entier naturel. Alors  $a^p - a$  est divisible par  $p$ .

#### En d'autres termes :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet p \text{ est premier,} \\ \bullet a \text{ un entier naturel.} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a^p - a \text{ est divisible par } p}$$

## PPCM

### Définition

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls. L'ensemble des multiples positifs communs à  $a$  et  $b$  admet un plus petit élément.

On appelle Plus Petit Commun Multiple de  $a$  et de  $b$  le plus petit entier strictement positif commun à  $a$  et à  $b$ . On note  $\text{PPCM}(a ; b)$  ou  $a \vee b$

### Propriétés

1.  $a | b \Rightarrow \text{PPCM}(a;b) = b$
2.  $\text{PGCD}(a;b) = 1 \Rightarrow \text{PPCM}(a;b) = ab$
3.  $\text{PPCM}(a;b) = \text{PPCM}(b;a)$  soit  $a \vee b = b \vee a$
4.  $\text{PPCM}(a; \text{PPCM}(b;c)) = \text{PPCM}(\text{PPCM}(a;b) ; c)$  soit  $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
5.  $a \text{PPCM}(b;c) = \text{PPCM}(ab;ac)$  soit  $a(b \vee c) = ab \vee ac$
6.  $\text{PPCM}(a;b) \times \text{PGCD}(a;b) = ab$  soit  $(a \vee b)(a \wedge b) = ab$

## Equations diophantiennes

### 1)Théorème

$a$  et  $b$  sont deux entiers naturels non nuls et  $d = \text{PGCD}(a,b)$ . Il existe deux entiers relatifs  $x$  et  $y$  tels que  $ax + by = d$ .

### Autrement dit :

$$\left. \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{N}^*, \\ d = \text{PGCD}(a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{il existe deux entiers relatifs } x \text{ et } y \text{ tels que } ax + by = d}$$

### 2)Théorème de Bézout

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls.  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs  $x$  et  $y$  tels que  $xa + yb = 1$ .

### Autrement dit :

$$\left. \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{N}^*, \\ a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{\text{il existe deux entiers relatifs } x \text{ et } y \text{ tels que } xa + yb = 1}$$

### 3) Théorème

$a$ ,  $b$  et  $c$  étant trois entiers naturels. L'équation  $ax + by = c$  admet des solutions entières si et seulement si  $c$  est un multiple de  $\text{PGCD}(a,b)$ .

## **Systèmes de numération**

### **1) Système de numération décimale (ou « en base 10 ») :**

Dans notre système habituel de numération, on dispose de 10 symboles (chiffres) : 0,1,2,3,...9 pour écrire tous nos nombres.

Tout nombre peut donc se décomposer en une somme de puissances de 10.

### **2) Système binaire (ou « en base 2 ») :**

Ce système ne se compose que de deux symboles : 0 et 1 ; ce qui est très pratique pour toute l'électronique puisqu'il n'y a que deux possibilités : le courant passe ou ne passe pas. Tout nombre se décompose donc ici en «paquets de 2 » au lieu de « paquets de 10 », et donc en puissances de 2.

### **3) Système octal (ou « en base 8 ») :**

Le système octal utilise un système de numération ayant comme base 8 (octal => latin octo = huit).

Il faut noter que dans ce système nous avons 8 symboles seulement : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Cette base obéira aux mêmes règles que la base 10, vue précédemment,

### **4) Système hexadécimal (ou « en base 16 ») :**

On dispose ici de 16 symboles et on décompose selon les puissances de 16. Les chiffres s'écrivent ainsi : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; A ; B ; C ; D ; E ; F.

**5) Tableau de correspondance entre base 2, base 8, base 10 et base 16:**

Base 10	Base 2	Base 8	Base 16
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14
32	100000	40	20
48	110000	60	30
64	1000000	100	40
100	1100100	144	64
200	11001000	310	C8
400	110010000	620	190
500	111110100	764	1F4
800	1100100000	1440	320
1000	1111101000	1750	3E8
2000	11111010000	3720	7D0

## **II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE**

### **QCM 1**

Dans ce QCM, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

- 1) Quel est l'ensemble des entiers relatifs  $n$  tels que  $n-1$  divise  $n+17$  :
  - A.  $\{2 ; 3 ; 4 ; 7 ; 10 ; 19 ; 0 ; -1 ; -2 ; -5 ; -8 ; -17\}$
  - B.  $\{2 ; 3 ; 4 ; 7 ; 10 ; 19 ; -1 ; -2 ; -3 ; -5 ; -8 ; -17\}$
  - C.  $\{1 ; 2 ; 4 ; 6 ; 9 ; -6 ; -9 ; -18\}$
  - D.  $\{0 ; 1 ; 2 ; 4 ; -1 ; 9 ; -6 ; -9 ; -18\}$
  
- 2) On divise un entier naturel  $n$  par 139 et 142. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 74 et 32. Quelle est la valeur de  $n$  ?
  - A. 1452
  - B. 1464
  - C. 2020
  - D. 3271
  
- 3) On sait que  $a$  est un entier naturel, et que le reste de la division euclidienne de  $a$  par 90 est 75. Quelle est le reste de la division euclidienne de  $a$  par 45 ?
  - A. 40
  - B. 35
  - C. 30
  - D. 25
  
- 4) Le PGCD de 8534 et 6526 est :
  - A. 26
  - B. 104
  - C. 251
  - D. 502
  
- 5) Le PPCM de 72 et 180 est :
  - A. 270
  - B. 360
  - C. 720
  - D. 1800

## QCM 2

Dans ce QCM, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

1) Soit  $n$  un entier naturel. Quels sont les entiers toujours premiers entre eux ?

$7n+1$  et  $3n+2$ .

$n+5$  et  $n-2$ .

$2n+5$  et  $n+2$

$2n-1$  et  $11n+3$ .

2)  $x$  et  $y$  sont deux entiers naturels tels que  $\text{PGCD}(x, y) = 3$  et  $x + y = 27$ . Quelle valeur de  $x$  peut être un élément d'un couple solution ?

9

18

21

27

3) Soit  $n$  un entier naturel.  $n^7 - n$  est toujours divisible par :

11

14

20

21

4) Quelle affirmation est vraie ?

$2020^{22} \equiv 1 [22]$

$2020^{23} \equiv 1 [22]$

$2020^{22} \equiv 1 [23]$

$2020^{23} \equiv 1 [23]$

5) Quelle affirmation est fausse ?

$2019^{19} - 2019 \equiv 0 [19]$

$2020^{18} - 1 \equiv 0 [19]$

$2019^{18} - 2019 \equiv 0 [19]$

$2019^{2019} - 2019 \equiv 0 [2019]$

### **III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES**

#### **Exercice 1**

- 1) Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel  $n$ , le reste de la division euclidienne de  $5^n$  par 7.
- 2) Trouvez le reste de la division euclidienne de  $2021^{2020}$  par 7.
- 3) Soit  $X = 2011^{2n+1} + 2014^{2n+1}$ .
  - a) Montrez que pour tout entier naturel  $n$ ,  $X$  est divisible par 7.
  - b) Montrez que pour tout entier naturel  $n$ ,  $X$  est divisible par 25.
  - c)  $X$  est-il divisible par 175 ? Justifier.

#### **Exercice 2 (Bac)**

- 1) On considère l'équation (E) :  $2017x + 41y = 1$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs
  - a) Vérifier que 2017 est un nombre premier puis montrer que l'équation (E) admet des solutions entières.
  - b) Vérifier que le couple  $(-5; 246)$  est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E).
  - c) Dédurre qu'il existe un unique entier  $y$  inférieur ou égal à 2016 tel que :  $41y \equiv 1[2017]$   
Pour la suite de l'exercice on rappelle qu'un entier  $a$  est l'inverse de  $b$  modulo 2017 si  $ab \equiv 1[2017]$ .
- 2) Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs.
  - a) Montrer que : si  $ab \equiv 0[2017]$  alors  $(a \equiv 0[2017] \text{ ou } b \equiv 0[2017])$
  - b) Dédurre que : si  $a^2 \equiv 1[2017]$  alors  $(a \equiv 1[2017] \text{ ou } a \equiv -1[2017])$
  - c) Quels sont donc les entiers de l'intervalle  $[1; 4033]$  qui sont égaux à leurs inverses modulo 2017 ?

#### **Exercice 3**

En rangeant les  $n$  pièces de son puzzle, un enfant constate que :

S'il les range par groupe de 5, il lui reste 3 pièces.

S'il les range par groupe de 7, il lui reste 2 pièces.

S'il les range par groupe de 9, il lui reste 1 pièce.

S'il les range par groupe de 11, il ne lui reste plus de pièces.

Sa mère affirme qu'alors  $2n-11$  est divisible par 5, 7, 9 et 11.

1) A-t-elle raison ?

2) Combien ce puzzle contient de pièces sachant que ce nombre est inférieur à 2020 ?

#### Exercice 4 (Bac)

1) On considère l'équation (E) :  $25x - 49y = 5$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

a) Déterminer le pgcd de 49 et 25 à l'aide de l'algorithme d'Euclide et en déduire que l'équation (E) admet des solutions entières.

b) Vérifier que le couple (10 ; 5) est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E).

c) Montrer qu'il existe un unique entier  $p$  compris entre 1960 et 2018 tel que :  $25p \equiv 5[49]$ .

2.a) Justifier que si  $(x,y)$  est une solution de (E) alors  $5x \equiv 1[7]$  et  $y \equiv 0[5]$ .

b) Montrer que  $5x \equiv 1[7]$  si et seulement si  $x \equiv 3[7]$ .

3.a) Soit  $x$  un entier relatif. Quels sont les restes de  $x^2$  dans la division euclidienne par 7 ?

b) Existe-t-il un couple  $(x,y)$  d'entiers relatifs tels que  $(x^2, y^2)$  soit solution de (E) ?

#### Exercice 5

Quels sont les entiers  $n$  tels que  $n^6 - 1$  soit divisible par 9 ?

#### Exercice 6

On considère l'équation (E) :  $11x - 7y = 25$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

1.a) Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple (8,9) est une solution particulière de (E).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2) Soit  $(x,y)$  une solution de (E).

a) Montrer que si  $x$  est un diviseur de  $y$ , alors  $x$  est un diviseur de 25.

b) Soit  $m$  un entier relatif. Existe-t il des valeurs de  $m$  telles que le quotient  $\frac{20+11m}{15+7m}$  soit un entier relatif ?

### Exercice 7

On donne les nombres suivants en base 10 :  $A = 1268$  et  $B = 2098$ .

Convertir ces nombres :

- 1) En binaire
- 2) En base 3
- 3) En base 5
- 4) En base 7
- 5) En base 8.

### Exercice 8

On donne les nombres suivants en base 10 :  $X = 1216$  et  $Y = 8091$ .

Convertir ces nombres en hexadécimal .

### Exercice 9

Effectuer les opérations suivantes :

- 1) En base 2 :  $110010110 + 10001110 =$
- 2) En base 8 :  $5612 + 7572 =$
- 3) En base 16 :  $1D21 + F1BC =$

### Exercice 10

Convertir en décimal les nombres suivants qui sont donnés en représentation hexadécimale :

- a) 3DE18
- b) 8AFCE.

## V. EXERCICES DE SYNTHÈSE

### Exercice 1

- 1) Écrire l'ensemble des entiers relatifs diviseurs de 6.
- 2) Déterminer les entiers relatifs  $n$  tels que  $n - 4$  divise 6.
- 3) Déterminer les entiers relatifs  $n$  tels que  $n - 4$  divise  $n + 2$ .
- 4) Déterminer les entiers relatifs  $n$  tels que  $n + 1$  divise  $3n - 4$ .

### Exercice 2

Déterminer le reste de la division par 7 du nombre  $32^{2021}$ .

### Exercice 3

- 1) Déterminer les restes de la division de  $5^p$  par 13 pour  $p$  entier naturel.
- 2) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, le nombre  $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$  est divisible par 13.

### Exercice 4

$p$  et  $q$  sont des entiers naturels.

- 1) Démontrez que  $2^{pq} - 1$  est divisible par  $2^p - 1$  et par  $2^q - 1$ .
- 2) Déduisez en que pour que  $2^n - 1$  soit premier, il faut que  $n$  soit premier.
- 3) Prouvez à l'aide d'un contre-exemple que la condition «  $n$  est premier » n'est pas suffisante pour que  $2^n - 1$  soit premier.

### Exercice 5 (Bac)

- 1) On considère dans  $\mathbb{Z}^2$ , l'équation (E):  $7x - 5y = 1$ 
  - a) Justifier que le couple  $(3; 4)$  est solution de (E) puis résoudre (E).
  - b) Montrer que si  $(x; y)$  est une solution de (E) alors 
$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ y \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$$

2) Dans cette question on se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs A

tels que 
$$\begin{cases} A \equiv 4[5] \\ A \equiv 3[7] \end{cases}$$

a) Soit A un élément de S. Démontrer qu'il existe un couple d'entiers (x;y) tel que

$$A = 7x + 3 = 5y + 4 \text{ où } (x;y) \text{ est une solution de (E)}$$

b) En déduire que  $A \in S$  si et seulement si  $A \equiv 24[35]$ .

c) Soit n et a deux entiers naturels ( $0 < n < 9$ ) et B un entier qui s'écrit, en base n, sous la forme  $\overline{374a}$ . Déterminer n puis en déduire l'écriture décimale de l'entier B sachant qu'il appartient à S.

### Exercice 6 (Bac)

On considère l'équation (E) :  $5x - 3y = 17$ , où x et y sont des entiers relatifs.

1.a) Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple (4,1) est une solution particulière de (E).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2) Soit (x,y) une solution de (E).

a) Montrer que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 17.

b) Soit m un entier relatif. Trouver les valeurs de m telles que le quotient  $\frac{1+5m}{4+3m}$  soit un entier relatif.

### Exercice 7

1) On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $18a + 23b = 2001$ .

a) Montrer que pour tout couple (a, b) solution de (E) a est un multiple de 23 et b un multiple de 3.

b) Déterminer une solution de (E).

c) Résoudre (E).

2) Déterminer les couples (p, q) d'entiers tels que  $18d + 23m = 2001$ , où d désigne le pgcd de p et q, et m leur ppcm.

### Exercice 8

1. On considère l'équation (E) :  $8x + 5y = 1$ , où (x ; y) est un couple de nombres entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Soit  $N$  un nombre naturel tel qu'il existe un couple  $(a ; b)$  de nombres

entiers vérifiant : 
$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$

a. Montrer que le couple  $(a ; b)$  est solution de (E).

b. Quel est le reste, dans la division de  $N$  par 40 ?

3. a. Résoudre l'équation  $8x + 5y = 100$ , où  $(x ; y)$  est un couple de nombres entiers relatifs.

### Exercice 9

1) Vérifier les conversions suivantes du nombre X

Base	2	3	5	8	10	16
X	1000111101101	20021222	121324	10755	4589	11ED

2) Compléter le tableau de conversion

Base	2	3	5	8	10	16
X			4203			
Y				6724		
Z						1C2D

### Exercice 10

1. Résolution d'une équation

On considère l'équation (1) :  $11n - 24m = 1$  d'inconnue  $(n, m)$  élément de  $\mathbb{Z}^2$ .

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. Recherche du PGCD de  $10^{11} - 1$  et  $10^{24} - 1$

a. Justifier que 9 divise  $10^{11} - 1$  et  $10^{24} - 1$ .

b. Soit  $(n, m)$  un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1). Montrer que l'on peut écrire

$$(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9.$$

c. Montrer que  $10^{11} - 1$  divise  $10^{11n} - 1$

Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers  $N$  et  $M$  tels que :

$$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9.$$

d. Montrer que tout diviseur commun à  $10^{24} - 1$  et  $10^{11} - 1$  divise 9.

e. Déduire des questions précédentes le PGCD de  $10^{24} - 1$  et  $10^{11} - 1$ .

### Exercice 11

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD des nombres 28 et 31.

Trouver alors deux nombres  $x$  et  $y$  entiers relatifs tels que  $31x - 28y = 1$ .

2. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation  $31x - 28y = 414$ .

3. Le plan est rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On donne les points  $A(-30; -48)$  et  $B(82; 76)$ . On appelle  $(D)$  la droite  $(AB)$ .

a. Trouver l'ensemble des points  $M(x; y)$  de  $(D)$  dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

b. Le repère utilisé pour le graphique est gradué de  $-10$  à  $+10$  en abscisses et de  $-14$  à  $+14$  en ordonnées. Vérifiez et expliquez pourquoi il n'y a pas de point de  $(D)$  à coordonnées entières visible sur le graphique.

c. Pour remédier à l'inconvénient du 3.b. on décide d'agrandir la fenêtre à  $[-40; +40]$  en abscisses et à  $[-50; +10]$  en ordonnées. Combien y-a-t-il de points de  $(D)$  à coordonnées entières sur ce nouveau graphique ? Faire la figure.

### Exercice 12

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens.

Cet exercice propose d'en découvrir quelques-unes.

Pour  $k$  entier strictement positif, on note  $N_k$  le rep-unit qui s'écrit à l'aide de  $k$  chiffres 1.

Ainsi  $N_1 = 1, N_2 = 11, N_3 = 111, \dots$

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifier brièvement la réponse.

2. A quelle condition sur  $k$  le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit  $N_k$  ? Justifier brièvement la réponse.

3. Pour  $k > 1$ , le rep-unit  $N_k$  est défini par  $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1 + 10 + 100 + \dots + 10^{k-1}$ .

Justifier l'égalité :  $9N_k = 10^k - 1$  pour tout entier  $k > 1$ .

4. Soit  $k$  un entier strictement positif. Démontrer que : «  $10^k \equiv 1(7)$  » équivaut à «  $k$  est multiple de 6 ».

En déduire que 7 divise  $N_k$  si et seulement si  $k$  est multiple de 6.

### Exercice 13 (Bac- traduit)

On considère l'équation (E) :  $25x - 9y = 5$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

1.a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $25u + 9v = 1$ . En déduire une solution particulière  $(x_0, y_0)$  de (E).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2) On désigne par  $d$  le PGCD de  $x$  et  $y$  où  $(x, y)$  est une solution particulière de (E).

a) Quelles sont les valeurs possibles de  $d$  ?

b) Quelles sont les solutions  $(x, y)$  de (E)

telles que  $x$  et  $y$  soient premiers entre eux?

c) Peut-on trouver un couple  $(x, y)$

d'entiers relatifs tel que  $(x^2, y^2)$  soit

solution de (E) ? Justifier votre réponse.

نعتبر المعادلة (E) :  $25x - 9y = 5$  حيث  $x$  و  $y$  عددان صحيحان.

1.a) باستخدام خوارزمية إقليدس عين عددين صحيحين  $u$  و  $v$  بحيث يكون  $25u + 9v = 1$ . استنتج حلا خاصا للمعادلة (E)  $(x_0, y_0)$ .

b) عين مجموعة حلول (E).

2) نعني بالرمز  $d$  المضاعف المشترك الأعلى للعددين  $x$  و  $y$  حيث  $(x, y)$  حل للمعادلة (E).

a) ما هي القيم الممكنة للعدد  $d$ ؟

b) ما هي الحلول  $(x, y)$  للمعادلة (E) التي من أجلها يكون العدان  $x$  و  $y$  أوليين فيما بينهما؟

c) هل يمكن إيجاد زوج  $(x, y)$  من الأعداد الصحيحة بحيث يكون  $(x^2, y^2)$  حلا للمعادلة (E)؟ برر جوابك.

**Dépôt légal N° 2177/2020**

**Bibliothèque nationale**

**Nouakchott**

**ESSEBIL  
AU BAC**

## **COLLECTION**

Accompagnement au Bac

Dans les ouvrages de la collection **ESSEBIL AU BAC** vous trouverez chaque trimestre:

### **ESSEBIL AU BAC - Mathématiques**

- ✓ Des résumés de cours pour réviser rapidement et mémoriser les formules,
- ✓ Des QCM pour l'entraînement et la maîtrise des notions du programme,
- ✓ Des exercices corrigés variés et progressifs pour tester et approfondir vos connaissances,
- ✓ Des exercices de synthèse et des problèmes non corrigés pour préparer efficacement l'épreuve du Bac.
- ✓ Quelques traductions pour améliorer le niveau d'acquisition.

## IV. CORRIGES DES EXERCICES

### Corrigé 1

1) On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} 5^0 \equiv 1[7] \\ 5^1 \equiv 5[7] \\ 5^2 \equiv 4[7] \\ 5^3 \equiv 6[7] \\ 5^4 \equiv 2[7] \\ 5^5 \equiv 3[7] \\ 5^6 \equiv 1[7] \end{array} \right.$$

On en déduit que pour tout entier k :

$$\left\{ \begin{array}{l} 5^{6k} \equiv 1[7] \\ 5^{6k+1} \equiv 5[7] \\ 5^{6k+2} \equiv 4[7] \\ 5^{6k+3} \equiv 6[7] \\ 5^{6k+4} \equiv 2[7] \\ 5^{6k+5} \equiv 3[7] \end{array} \right.$$

2) On a  $2021 = 7 \times 288 + 5$ , donc  $2021 \equiv 5 [7]$  et  $2021^{2020} \equiv 5^{2020} [7]$ .

D'autre part,  $2020 = 6 \times 336 + 4$ , donc 2020 est du type  $6k + 4$ .

Alors  $5^{2020} \equiv 5^{6k+4} \equiv 2 [7]$ .

On en déduit que le reste de la division euclidienne de  $2021^{2020}$  par 7 est 2.

3) On a  $X = 2011^{2n+1} + 2014^{2n+1}$ .

a) On a  $2011 = 7 \times 287 + 2$ , donc  $2011 \equiv 2 [7]$  et  $2011 \equiv -5 [7]$

On a aussi  $2014 = 7 \times 287 + 5$ , donc  $2014 \equiv 5 [7]$ .

Donc  $2011^{2n+1} \equiv (-5)^{2n+1} = -5^{2n+1} [7]$  (car  $2n + 1$  est impair) ;

et  $2014^{2n+1} \equiv 5^{2n+1} \pmod{7}$ . Par addition  $2011^{2n+1} + 2014^{2n+1} \equiv 0 \pmod{7}$ . Alors, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X$  est divisible par 7.

b) On sait que  $2011 \equiv 11 \pmod{25}$  et  $2014 \equiv 14 \equiv -11 \pmod{25}$ .

En élevant à la puissance impaire  $2n + 1$  et par addition on trouve que  $2011^{2n+1} + 2014^{2n+1} \equiv 0 \pmod{25}$ . Alors, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X$  est divisible par 25.

**Remarque :**

Le nombre  $X = 2011^{2n+1} + 2014^{2n+1}$  est divisible par la somme  $2011 + 2014$  car la puissance  $2n + 1$  est impaire. Donc  $X$  est divisible par 2025 qui est un multiple de 25. Alors  $X$  est divisible par 25.

c) Le nombre  $X$  est divisible par deux entiers 7 et 25 qui sont premiers entre eux. Alors  $X$  est divisible par leur produit qui est 175.

<b>Corrigé 2</b>
------------------

1) a) Vérifions que 2017 est un nombre premier :

Comme  $\sqrt{2017} \approx 44.9$ , et les nombres premiers inférieurs à 45 sont :

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41 et 43 ; et comme 2017 n'est divisible par aucun de ces nombres, il est alors premier.

b- Vérifions que  $(-5, 246)$  est solution de l'équation (E) :  $2017x + 41y = 1$ ,

On a :  $2017(-5) + 41 \times 246 = -10085 + 10086 = 1$

Donc le couple  $(-5, 246)$  est solution de l'équation (E) .

Résolution de l'équation (E) :

Comme  $2017 \wedge 41 = 1$  alors l'équation (E) admet des solutions entières. Soit  $(x; y)$  un couple solution de l'équation (E) :

$$2017x + 41y = 2017(-5) + 41(246) \Leftrightarrow 2017(x + 5) = 41(246 - y)$$

Donc 41 divise  $2017(x + 5)$  or  $41 \wedge 2017 = 1$

Donc d'après le théorème de Gauss : 41 divise  $x + 5$ ,

D'où il existe  $k \in \mathbb{Z}$ , tel que  $x+5 = 41k$  soit  $x = -5 + 41k$ ,

En remplaçant  $x+5$  par  $41k$  dans l'égalité  $2017(x+5) = 41(246-y)$  on obtient  $y = 246 - 2017k$ .

Donc  $S = \{(-5 + 41k, 246 - 2017k); k \in \mathbb{Z}\}$

c) Montrons qu'il existe un unique entier naturel  $y$  inférieur ou égal à 2016 tel que :  $41y \equiv 1[2017]$

Soit  $y$  un entier naturel inférieur ou égal à 2016 vérifiant :  $41y \equiv 1[2017]$

Il existe donc un entier  $x$  tel que  $41y = 1 + 2017 \times (-x)$  soit  $2017x + 41y = 1$  par conséquent  $(x; y)$  est solution de l'équation (E) et  $y = 246 - 2017k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$   
 $0 \leq 246 - 2017k \leq 2016$  d'où  $-0,87 \leq k \leq 0,12$  donc  $k = 0$  et  $y = 246$

2) Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs

a) Montrons que si  $a \cdot b \equiv 0[2017]$  alors  $a \equiv 0[2017]$  ou  $b \equiv 0[2017]$

Si  $ab \equiv 0[2017]$  et  $a \not\equiv 0[2017]$  alors  $\begin{cases} 2017 | ab \\ 2017 \wedge a = 1 \end{cases}$ , car 2017 est premier

Donc d'après Gauss  $2017 | b$  et  $b \equiv 0[2017]$

Par conséquent soit  $a \equiv 0[2017]$  ou  $b \equiv 0[2017]$

b) Montrons que si  $a^2 \equiv 1[2017]$  alors  $a \equiv 1[2017]$  ou  $a \equiv -1[2017]$

Si  $a^2 \equiv 1[2017]$  alors  $a^2 - 1 \equiv 0[2017] \Rightarrow (a-1)(a+1) \equiv 0[2017]$

D'après 2) a) soit  $a-1 \equiv 0[2017]$  ou  $a+1 \equiv 0[2017]$

$a \equiv 1[2017]$  ou  $a \equiv -1[2017]$

c) Déterminons les entiers de l'intervalle  $[1, 4033]$  qui sont égaux à leur inverse modulo 2017 :

Supposons qu'un entier  $a$  est égal à son inverse, c-à-d que  $a^2 \equiv 1[2017]$  alors  $a \equiv \pm 1[2017]$

Soit  $a \equiv 1 \pmod{2017}$

$$a = 2017k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$1 \leq a \leq 4033$$

$$1 \leq 2017k + 1 \leq 4033$$

$$0 \leq k \leq \frac{4033}{2017}$$

$$0 \leq k \leq 1,99$$

$$\Rightarrow k = 0, \text{ ou } k = 1$$

$$a = 1 \text{ ou } a = 2018$$

ou bien  $a \equiv -1 \pmod{2017}$

$$a = 2017k - 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$- \quad 1 \leq a \leq 4033$$

$$1 \leq 2017k - 1 \leq 4033$$

$$2 \leq 2017k \leq 4034$$

$$0,0009 \leq k \leq 2$$

$$\Rightarrow k = 1 \text{ ou } k = 2$$

$$a = 2016 \text{ ou } a = 4033$$

Donc les entiers de l'intervalle  $[1, 4033]$  qui sont égaux à leurs inverses modulo 2017 sont  $\{1, 2018, 2016, 4033\}$ .

### Corrigé 3

1) Soit  $n$  le nombre de pièces du puzzle.

S'il les range par groupe de 5, il lui reste 3 pièces. Alors  $n \equiv 3 \pmod{5}$

S'il les range par groupe de 7, il lui reste 2 pièces. Alors  $n \equiv 2 \pmod{7}$

S'il les range par groupe de 9, il lui reste 1 pièce. Alors  $n \equiv 1 \pmod{9}$

S'il les range par groupe de 11, il ne lui reste plus de pièces. Alors  $n \equiv 0 \pmod{11}$

On en déduit que :

$$2n - 11 \equiv 6 - 11 = -5 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$2n - 11 \equiv 4 - 11 = -7 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$2n - 11 \equiv 2 - 11 = -9 \equiv 0 \pmod{9}$$

$$2n - 11 \equiv -11 \equiv 0 \pmod{11}$$

Alors  $2n - 11$  est divisible par 5, 7, 9 et 11. Sa mère a raison.

2) Le nombre  $2n - 11$  est divisible par quatre nombres premiers. Alors il est divisible par leur produit  $5 \times 7 \times 9 \times 11 = 3465$ .

Il existe un entier  $k$  tel que  $2n - 11 = 3465k$ .

D'autre part  $n < 2020 \Rightarrow 2n - 11 < 4029$

Alors la seule valeur possible de  $k$  est  $k = 1$ .

$k = 1 \Rightarrow 2n - 11 = 3465 \Rightarrow 2n = 3476 \Rightarrow n = 1738$

Conclusion : Le puzzle contient 1738 pièces.

#### Corrigé 4

1.a) Pour appliquer l'algorithme d'Euclide on effectue les divisions euclidiennes successives :

$$49 = 25 \times 1 + 24$$

$$25 = 24 \times 1 + 1$$

$$24 = 1 \times 24 + 0$$

Le dernier reste non nul de la division euclidienne de 49 par 25 est égal 1. Alors  $\text{pgcd}(49, 25) = 1$ .

L'équation (E) :  $25x - 49y = 5$  admet des solutions entières car le  $\text{pgcd}(25, 49)$  divise 5.

b) Pour vérifier que le couple (10 ; 5) est une solution particulière de (E), on remplace dans (E) :

On a  $25 \times 10 - 49 \times 5 = 250 - 245 = 5$ . Alors le couple (10 ; 5) est une solution particulière de (E).

Pour résoudre (E) :

On sait que pour tout couple  $(x, y)$  solution de (E) on a : 
$$\begin{cases} 25x - 49y = 5 \\ 25 \times 10 - 49 \times 5 = 5 \end{cases}$$

Ce qui implique, par soustraction, que :  $25(x - 10) - 49(y - 5) = 0$

Ce qui équivaut à :  $25(x - 10) = 49(y - 5)$

Cette dernière égalité montre que 
$$\begin{cases} 49 \mid 25(x - 10) \\ 25 \mid 49(y - 5) \end{cases}$$

Or  $\text{pgcd}(49, 25) = 1$ , d'après le théorème de Gauss : 
$$\begin{cases} 49 \mid (x - 10) \\ 25 \mid (y - 5) \end{cases}$$

Ce qui équivaut à : « il existe un entier  $k$  tel que  $\begin{cases} x - 10 = 49k \\ y - 5 = 25k \end{cases}$  » ; soit  $\begin{cases} x = 49k + 10 \\ y = 25k + 5 \end{cases}$

Réciproquement ; quel que soit l'entier  $k$  on montre en remplaçant dans (E) que le couple  $(49k + 10, 25k + 5)$  est solution de (E).

**Conclusion** : les solutions de (E) sont les couples de la forme  $(49k + 10, 25k + 5)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

c) Pour tout entier  $p$  on a :

$$\begin{aligned} 25p \equiv 5[49] &\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : 25p = 49q + 5 \\ &\Leftrightarrow 25p - 49q = 5 \\ &\Leftrightarrow (p, q) \text{ est solution de (E)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p = 49k + 10 \\ q = 25k + 5 \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Cherchons les valeurs de  $p$  comprises entre 1960 et 2018 :

$$\begin{aligned} 1960 \leq p \leq 2018 &\Leftrightarrow 1960 \leq 49k + 10 \leq 2018 \\ &\Leftrightarrow 1950 \leq 49k \leq 2008 \\ &\Leftrightarrow 49 \times 39 + 39 \leq 49k \leq 49 \times 41 + 9 \\ &\Leftrightarrow k = 40 \end{aligned}$$

car il existe un seul multiple de 49 (nombre du type  $49k$ ) compris entre  $49 \times 39 + 39$  et  $49 \times 41 + 9$ . C'est  $49 \times 40$  Enfin, la seule valeur possible de  $p$  est  $p = 49 \times 40 + 10 = 1970$ . Donc  $p = 1970$

**Conclusion** : Il existe un unique entier  $p$  compris entre 1960 et 2018 tel que :  $25p \equiv 5[49]$

2.a) Si le couple  $(x, y)$  est une solution de (E) alors  $25x - 49y = 5$  ce qui implique que  $25x - 5 = 49y$ . Donc  $5(5x - 1) = 7 \times 7y$  d'où 7 divise le nombre  $5(5x - 1)$ . Or 5 et 7 sont deux nombres premiers - donc premiers aussi entre eux, d'où d'après le théorème de Gauss, 7 divise  $5x - 1$ . Alors il existe un entier  $k$  tel que  $5x - 1 = 7k$ . Donc  $5x = 7k + 1$  ce qui prouve que  $5x \equiv 1[7]$

D'autre part si le couple  $(x, y)$  est une solution de (E) alors  $25x - 49y = 5$  ce qui montre que  $49y = 5(5x - 1)$ . Donc 5 divise le nombre  $49y$ . Or 5 et 49 sont premiers entre eux (5 est premier et ne divise pas 49), alors 5 divise  $y$ . C'est-à-dire que  $y \equiv 0[5]$

b) Si  $x \equiv 3[7]$ , alors  $5x \equiv 5 \times 3[7]$ . Donc  $5x \equiv 1[7]$ .

Réciproquement : les restes de divisions possibles d'un entier  $x$  par 7 sont les éléments de l'ensemble :  $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ .

Dressons le tableau de congruence modulo 7 pour  $x$  et  $5x$  :

$x \ [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$5x \ [7]$	0	5	3	1	6	4	2

On en déduit que  $5x \equiv 1[7]$  implique que  $x \equiv 3[7]$ .

**Conclusion** : Pour tout entier relatif  $x$  :  $5x \equiv 1[7]$  si et seulement si  $x \equiv 3[7]$ .

3.a) Dressons le tableau de congruence modulo 7 pour  $x$  et  $x^2$  :

$x \ [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \ [7]$	0	1	4	2	2	4	1

On en déduit que pour tout entier  $x$ , le reste de la division euclidienne de  $x^2$  par 7 est un élément de l'ensemble  $\{0;1;2;4\}$

b) D'après la question 2) pour que le couple  $(x^2; y^2)$  soit solution de (E) il faut que  $5x^2 \equiv 1[7]$ . Ce qui implique que  $x^2 \equiv 3[7]$  et ceci est impossible car le reste 3 n'appartient pas à l'ensemble précédent  $\{0;1;2;4\}$  des restes de la division euclidienne de  $x^2$  par 7.

**Conclusion** : il n'existe aucun couple  $(x,y)$  d'entiers relatifs tels que  $(x^2, y^2)$  soit solution de (E).

**Autre méthode** : Pour que le couple  $(x^2; y^2)$  soit solution de (E) il faut que

$$25x^2 - 49y^2 = 5$$

Donc  $(5x - 7y)(5x + 7y) = 5$ . Les décompositions possibles de 5 dans  $\mathbb{Z}$  sont  $5 \times 1, 1 \times 5, (-5) \times (-1), (-1) \times (-5)$ .

Alors l'équation  $25x^2 - 49y^2 = 5$  se ramène à l'un des quatre systèmes suivants, avec  $(x,y)$  entiers relatifs:

$$\begin{cases} 5x-7y=5 \\ 5x+7y=1 \end{cases}, \begin{cases} 5x-7y=1 \\ 5x+7y=5 \end{cases}, \begin{cases} 5x-7y=-5 \\ 5x+7y=-1 \end{cases}, \begin{cases} 5x-7y=-1 \\ 5x+7y=-5 \end{cases}.$$

L'addition (ou la soustraction) des équations de chaque système implique une contradiction (x ou y non relatif).

Par exemple l'addition des équations du premier système implique  $10x = 6$ , ce qui est impossible dans l'ensemble des entiers relatifs.

On conclut qu'il n'existe aucun couple  $(x,y)$  d'entiers relatifs tels que  $(x^2, y^2)$  soit solution de (E).

### Corrigé 5

Si  $n$  est un multiple de 3, alors  $n^2$  est un multiple de 9. Donc  $n^6$  est divisible par 9. C'est-à-dire que  $n^6 - 1$  n'est pas divisible par 9. C'est le cas où  $n$  congru 0 ; 3 ou 6 modulo 9.

Sinon :

$$n \equiv 1[9] \Rightarrow n^6 \equiv 1[9] \Rightarrow n^6 - 1 \equiv 0[9]$$

$$n \equiv 2[9] \Rightarrow n^3 \equiv 8 \equiv -1[9] \Rightarrow n^6 \equiv 1[9] \Rightarrow n^6 - 1 \equiv 0[9]$$

$$n \equiv 4[9] \Rightarrow n^3 \equiv 64 \equiv 1[9] \Rightarrow n^6 \equiv 1[9] \Rightarrow n^6 - 1 \equiv 0[9]$$

$$n \equiv 5[9] \Rightarrow n \equiv -4[9] \Rightarrow n^3 \equiv -1[9] \Rightarrow n^6 \equiv 1[9] \Rightarrow n^6 - 1 \equiv 0[9]$$

$$n \equiv 7[9] \Rightarrow n \equiv -2[9] \Rightarrow n^3 \equiv 1[9] \Rightarrow n^6 \equiv 1[9] \Rightarrow n^6 - 1 \equiv 0[9]$$

$$n \equiv 8[9] \Rightarrow n \equiv -1[9] \Rightarrow n^6 \equiv 1[9] \Rightarrow n^6 - 1 \equiv 0[9].$$

Conclusion : Les solutions sont donc tous les entiers non divisibles par 3.

### Corrigé 6

$$11x - 7y = 25 \quad (E)$$

1. a) Existence des solutions entières de (E) et solution particulière :

On sait que 7 et 11 sont des nombres premiers distincts, donc ils sont premiers entre eux, c'est-à-dire que  $\text{PGCD}(7, 11) = 1$ . Et comme 1 divise 25 alors (E) admet des solutions dans  $\mathbb{Z}$ .

D'autre part :  $11 \times 8 - 7 \times 9 = 88 - 63 = 25$ , ce qui signifie que le couple  $(8, 9)$  est une solution particulière de (E).

b) Résolution de (E) :

Si  $(x, y)$  est une solution générale de (E), alors :  $11x - 7y = 25$ .

Et comme :  $11 \times 8 - 7 \times 9 = 25$ . Alors par soustraction :

$$\begin{aligned} 11(x - 8) - 7(y - 9) &= 0 \\ \Rightarrow 11(x - 8) &= 7(y - 9) \quad (*) \end{aligned}$$

Donc 7 divise  $11(x - 8)$ .

Or  $\text{PGCD}(7, 11) = 1$ , alors d'après Gauss 7 divise  $(x - 8)$ .

Donc il existe un entier relatif  $k$  tel que :  $x - 8 = 7k$ , c'est-à-dire :

$$x = 7k + 8$$

En injectant cette valeur de  $x$  dans la relation (\*), on obtient :

$$11 \times 7k = 7(y - 9)$$

Ce qui implique que :

$$y = 11k + 9$$

Réciproquement :

Si  $x = 7k + 8$  et  $y = 11k + 9$  avec  $k$  un entier relatif, alors :

$$11x - 7y = 11 \times 7k + 11 \times 8 - 7 \times 11k - 7 \times 9 = 11 \times 8 - 7 \times 9 = 25$$

Et ainsi l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S = \{(7k + 8, 11k + 9); k \in \mathbb{Z}\}$$

2.  $(x, y)$  est une solution de (E).

a) Montrons que si  $x$  est un diviseur de  $y$ , alors  $x$  est un diviseur de 25 :

si  $x$  est un diviseur de  $y$ , alors il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :  $y = kx$ .

Mais comme  $(x, y)$  est une solution de (E), alors :

$$\begin{aligned} 11x - 7y &= 25 \\ \Rightarrow 11x - 7kx &= 25 \\ \Rightarrow x(11 - 7k) &= 25 \end{aligned}$$

Ce qui implique que  $x$  est un diviseur de 25.

Ainsi, si  $x$  est un diviseur de  $y$ , alors  $x$  est un diviseur de 25.

b)  $m$  est un entier relatif. Voyons s'il existe des valeurs de  $m$  pour lesquelles le quotient  $\frac{20+11m}{15+7m}$  est un entier relatif :

On sait que :

$$20 + 11m = 11(m + 1) + 9$$

Et :

$$15 + 7m = 7(m + 1) + 8$$

Donc le couple  $(15 + 7m, 20 + 11m)$  est une solution de (E) car  $(m + 1) \in \mathbb{Z}$ .

Si le quotient  $\frac{20+11m}{15+7m}$  est un entier relatif, alors  $(15 + 7m)$  divise  $(20 + 11m)$ , ce qui implique, d'après la question 2. a), que :  $15+7m$  divise  $25$ .

Or les diviseurs de 25 sont :  $-25, -5, -1, 1, 5$  et  $25$ , alors l'un des cas ci-dessous se pose :

$15 + 7m = -25 \Rightarrow 7m = -40$  : impossible car  $m$  est un entier relatif.

$15 + 7m = -5 \Rightarrow 7m = -20$  : impossible car  $m$  est un entier relatif.

$15 + 7m = -1 \Rightarrow 7m = -16$  : impossible car  $m$  est un entier relatif.

$15 + 7m = 5 \Rightarrow 7m = -10$  : impossible car  $m$  est un entier relatif.

$15 + 7m = 25 \Rightarrow 7m = 10$  : impossible car  $m$  est un entier relatif.

$15 + 7m = 1 \Rightarrow 7m = -14 \Rightarrow m = -2$  : pour cette valeur de  $m$ , le quotient  $\frac{20+11m}{15+7m}$  est égal à  $\frac{20-22}{15-14} = -2$  est bien un entier relatif.

Ainsi, la seule valeur de  $m$  pour laquelle le quotient  $\frac{20+11m}{15+7m}$  est un entier relatif est :  $\boxed{m = -2}$ .

### Corrigé 7

Pour convertir un nombre donné en système décimal (base 10) en une autre base :

1) On divise le nombre décimal par la base du nouveau système : on obtient un quotient entier et un reste qui sera utilisé pour former un chiffre de la nouvelle représentation dans le nouveau système ;

2) On continue en divisant le quotient entier de l'opération précédente par la base et on en tire un deuxième reste comme précédemment ;


3) On recommence cette opération jusqu'à ce que l'on obtienne un quotient égal à zéro.

4) Le résultat obtenu est constitué de tous les restes des divisions, écrits de gauche à droite, en partant du dernier vers le premier.

A) On commence par le nombre  $A = 1268$  :

En base 2 :

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
1268	2	634	0
634	2	317	0
317	2	158	1
158	2	79	0
79	2	39	1
39	2	19	1
19	2	9	1
9	2	4	1
4	2	2	0
2	2	1	0
1	2	0	1



Il faut lire les restes de bas en haut, ce qui donne :  $1268 = (10011110100)_2$

En base 3 :

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
1268	3	422	2
422	3	140	2
140	3	46	2

46	3	15	1
15	3	5	0
5	3	1	2
1	3	0	1

Il faut toujours lire les restes de bas en haut, ce qui donne :  $1268 = (1201222)_3$

**En base 5 :**

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
1268	5	253	3
253	5	50	3
50	5	10	0
10	5	2	0
2	5	0	2

Alors  $1268 = (20033)_5$

**En base 8 :**

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
1268	8	158	4
158	8	19	6
19	8	2	3
2	8	0	2

Alors  $1268 = (2364)_8$

B) Pour le nombre B = 2098 :

En base 2 :

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
2098	2	1049	0
1049	2	524	1
524	2	262	0
262	2	131	0
131	2	65	1
65	2	32	1
32	2	16	0
16	2	8	0
8	2	4	0
4	2	2	0
2	2	1	0
1	2	0	1

Alors  $2098 = (100000110010)_2$

En base 3 :

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
2098	3	699	1
699	3	233	0
233	3	77	2
77	3	25	2
25	3	8	1
8	3	2	2
2	3	0	2

Alors  $2098 = (2212201)_3$

**En base 5 :**

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
2098	5	419	3
419	5	83	4
83	5	16	3
16	5	3	1
3	5	0	3

Alors  $2098 = (31343)_5$

**En base 8 :**

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
2098	8	262	2
262	8	32	6
32	8	4	0
4	8	0	4

Alors  $2098 = (4062)_8$

**Corrigé 8**

1) Pour le nombre  $X = 1216$  :

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
1216	16	76	0
76	16	4	12=C
4	16	0	4

Alors  $1216 = (4C0)_{16}$

2) Pour le nombre  $Y = 8091$  :

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
8091	16	505	11=B
505	16	31	9
31	16	1	15=F
1	16	0	1

Alors  $8091 = (1F9B)_{16}$ .

**Corrigé 9**

1) En base 2 :  $110010110 + 10001110 = 1000100100$

2) En base 8 :  $5612 + 7572 = 15404$

3) En base 16 :  $1D21 + F1BC = 10EDD$

**Corrigé 10**

On décompose suivant les puissances de 16, et on remplace les symboles A,B,C,D,E, F par leurs équivalents en base 10 :

1) Pour le premier nombre :

$$\begin{aligned} 3DE18 &= 3 \times 16^4 + D \times 16^3 + E \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 8 \times 16^0 \\ &= 3 \times 16^4 + 13 \times 16^3 + 14 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 8 \times 16^0 \\ &= 253464 \end{aligned}$$

$$(3DE18)_{16} = (253464)_{10}$$

2) Pour le second nombre :

$$\begin{aligned} 8AFCE &= 8 \times 16^4 + A \times 16^3 + F \times 16^2 + C \times 16^1 + E \times 16^0 \\ &= 8 \times 16^4 + 10 \times 16^3 + 15 \times 16^2 + 12 \times 16^1 + 14 \times 16^0 \\ &= 569294 \end{aligned}$$

$$(8AFCE)_{16} = (569294)_{10}$$