République Islamique de Mauritanie
Honneur - Fraternité - Justice
Ministère de l’Education Nationale
Direction de l’Enseignement Secondaire
Projet d’Autonomisation des Femmes et
Dividende Démographique au Sahel(SWEDD)

الجمهورية الإسلامية الموريتانية
شرف - إخاء - عدل
وزارة التهذيب الوطني
إدارة التعليم الثانوي
مشروع تمكين المرأة والعائد الديموغرافي
في الساحل (م.ت.م.ع.د.س)

Enneviss en Mathématiques 4ème AS

Réalisépar:

- **Cheikh Oumar Samba Tall, Professeur de Mathématiques**
- **Med O/ Ahmed Mahmoud Ebety, Professeur de Mathématiques**

Sous la supervision de:

- **Mohamed El Bechir O/ Sidaty, Inspecteur de Mathématiques**
- **Mohameden O/ Bah, Inspecteur de Mathématiques**

AVANT - PROPOS

Le Ministère de l'Education Nationale en collaboration avec le projet SWEDD a le plaisir de mettre à la disposition des filles des classes de 4éme AS des Wilayas ciblées par le projet SWEDD un Recueil d'Exercices avec Rappel de Cours de Mathématiques.

Ce recueil est conforme aux nouveaux programmes de la réforme de 1999 ;

La méthodologie adoptée pour l'élaboration du recueil est la suivante :

- ✓ **Rappel de cours**
- ✓ **Exercices corrigés**
- ✓ **Sujets de synthèse**

Nous espérons que ce recueil permettra aux filles en classe d'examen dans les wilayas ciblées de bien préparer le Brévet.

Nous remercions le projet SWEDD et en particulier le coordinateur du projet Mr Med Melainine O Eyih et l'ensemble du personnel de l'UGP pur leur entière collaboration dans la réalisation de ce recueil.

Nos remerciements vont également à Madame Ba Fatimata, membre du comité du pilotage et de Mr Mohamed O Bréye point focal du projet de leur étroite collaboration au cours de la réalisation du présent recueil.

Nous remercions également tous les inspecteurs et auteurs qui ont participé à son élaboration.

Issa OULD BEIBATT

REMERCIEMENTS

Afin d'améliorer les conditions socioéconomiques de la femme, la Mauritanie, à l'instar des cinq autres pays du Sahel (Burkina-Faso, Côte d'Ivoire, Mali, Niger et Tchad), a entamé en 2013, en collaboration avec la Banque Mondiale et l'UNFPA, le processus de mise en place du projet « Autonomisation des Femmes et du Dividende Démographique » (SWEDD) sur la base d'indicateurs démographique, d'éducation et de santé. La Mauritanie a décidé d'orienter l'intervention de ce projet sur 4 wilayas (le Hodh El Chargui, le Hodh El Gharbi, l'Assaba et le Guidimagha).

Dans ce cadre et en collaboration avec le Ministère de l'Education Nationale, la composante du projet SWEDD dénommée : « Amélioration de l'Accès et de la Rétention des Filles au Secondaire » a prévu une activité dénommée « Supports Pédagogiques » relative à l'élaboration, la reprographie et la distribution de 7 brochures dans les disciplines suivantes : Mathématiques, Physique - Chimie , Sciences Naturelles , Arabe et Français (4 pour la 4ème AS et 3 pour la 7ème D).
La présente brochure concerne la discipline de mathématiques en 4ème AS.
Elle comprend un rappel de cours, des exercices d'application, de perfectionnement et des sujets d'entraînement au BREVET suivis de leurs corrigés.

Au terme de ce travail, et bien qu'il soit difficile d'apprécier, à leur juste valeur, les contributions que les uns et les autres ont apportées à la production de l'ouvrage, nous tenons à remercier la Direction de l'Enseignement Secondaire, en particulier Messieurs :
Issa OULD BEIBATT et Med OULD LEVDAL.
Nos remerciements vont également à Messieurs : Sidina OULD HENOUNE (IGEN), Cheikh Ahmedou (D.I.P.N.) et Tandia Dahaba (IGES) pour leurs conseils et leur participation active. Nos remerciements vont aussi aux inspecteurs qui ont veillé au suivi et à la validation de ce document.

Enfin, que les producteurs trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude pour les efforts louables qu'ils ont déployés pour l'élaboration de ce fascicule.
Qu'il nous soit permis ici d'adresser nos vifs remerciements à la Banque Mondiale, l'UNFPA et les autres partenaires du SWEDD pour leurs appréciables appuis Techniques et Financiers.

Med OULD BREYE
Point focal du SWEDD-MEN

Sommaire

Partie numérique

Rappel de cours & Exercices

1. **Nombres réels**
2. **Racines carrées**
3. **Calcul littéral**
4. **Fonctions affines**
5. **Statistiques**

Exercices de synthèse

Chapitre 1 :

NOMBRES REELS

1. Définitions et notations

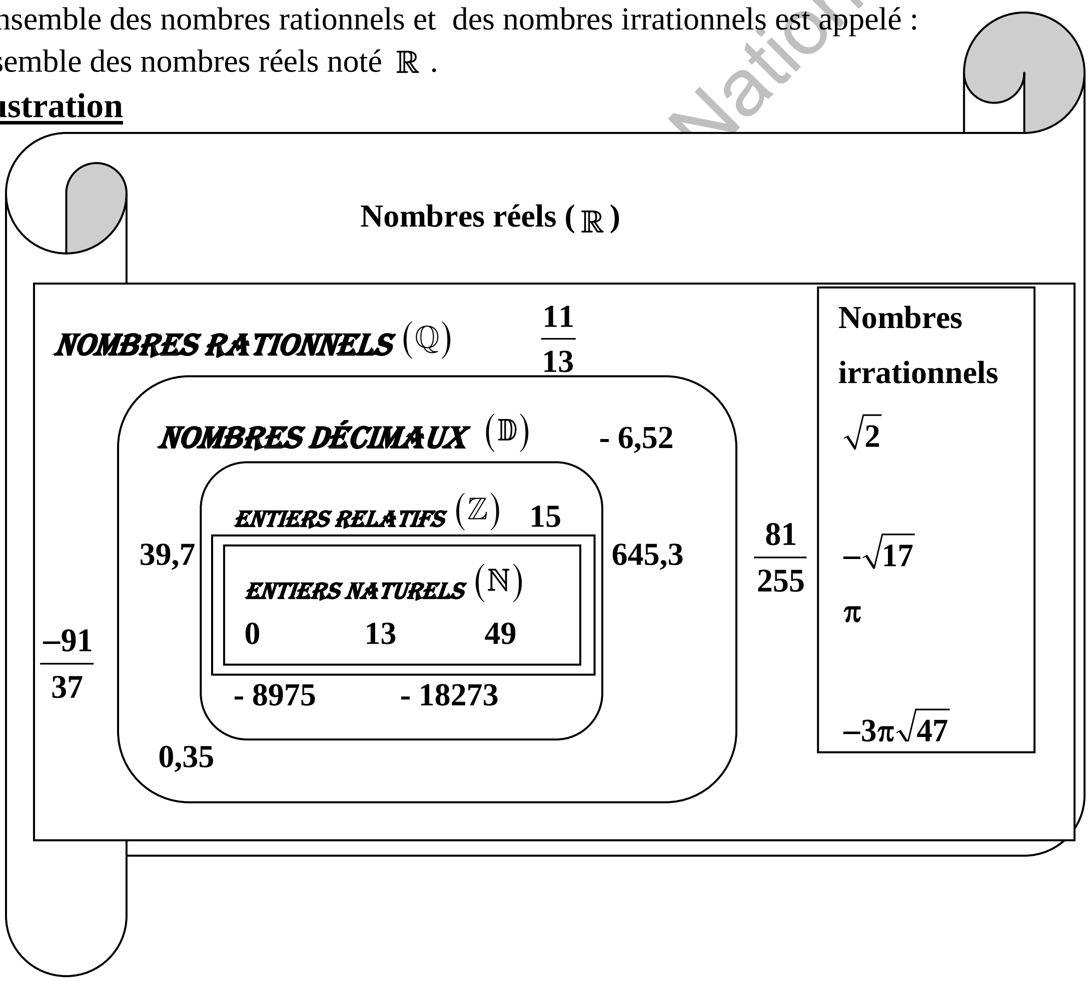
Les entiers naturels, les entiers relatifs, les décimaux et les fractions non décimales constituent l'ensemble des nombres rationnels.

Certaines nombres comme $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, π, ... ne sont pas rationnels : ils sont appelés nombres irrationnels.

L'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels est appelé :

Ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$.

Illustration



2. Ordre dans $\mathbb{R}$

Etant donnés a, b, c et d des nombres réels,	
• Si $a = b$, alors $a + c = b + c$ • et $a - c = b - c$	• Si $a = b$, alors $ac = bc$ • Si $a = b$ et $a\ c \neq 0$, alors, $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$
• Si $a \leq b$, alors $a - b \leq 0$ • Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ • Si $a \leq b$ (et $c > 0$), alors $ac \leq bc$. • Si $a \leq b$, (et $c < 0$), alors $ac \geq bc$.	• Si $0 \leq a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$ • Si $a \leq b \leq 0$ alors $a^2 \geq b^2$ • Si $0 \leq a \leq b$ alors, $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$. • a et b non nuls de même signe Si $a \leq b$ alors, $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$
• $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a + c \leq b + d$	• $\begin{cases} 0 < a \leq b \\ 0 < c \leq d \end{cases} \Rightarrow 0 < ac \leq bd$

3. Encadrement d'un nombre réel

Etant donnés a, b et x des nombres réels tels que : $a \leq b$

a et b encadrent x signifie : $a \leq x \leq b$

Exemple : **Soit $x = 7{,}3729$. On peut écrire les encadrements de x :**

- **Par des entiers** $7 < x < 8$ **(encadrement à l'unité)**

- **Par des décimaux** $\begin{cases} 7{,}3 < x < 7{,}4 & \text{(encadrement au dixième ou d'ordre 1)} \\ 7{,}37 < x < 7{,}38 & \text{(encadrement au centième ou d'ordre 2)} \end{cases}$

4. Arrondi et troncature

On obtient la troncature à l'ordre n (précision10^{-n}) d'un nombre en supprimant tous les chiffres situés après le n-ième chiffre décimal de ce nombre.

On obtient l'arrondi d'un nombre à l'ordre n en appliquant la règle suivante :

- **Si le chiffre qui suit le n-ième chiffre décimal est strictement inférieur à 5, l'arrondi est égal à la troncature ;**
- **Si le chiffre qui suit le n-ième chiffre décimal est supérieur ou égal à 5, on augmente d'une unité le chiffre de droite de la troncature.**

5. Puissances d'un nombre réel

Soit *a* un réel non nul et n un entier, n≥ 1.

$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n facteurs}}$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \underbrace{\dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{a} \times \ldots\ldots \times \dfrac{1}{a}}_{\text{n facteurs égaux}}$	$a^0 = 1;\quad \dfrac{1}{a} = a^{-1};\quad a^1 = a$ $1^n = 1;\quad 0^n = 0$; 0^0 n'a pas de sens.

Propriétés

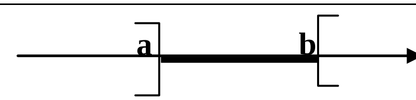
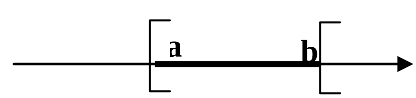
Soient a et b deux réels non nuls, m et n deux entiers relatifs

$a^n \times a^m = a^{n+m}$	$(a^n)^m = a^{n \times m}$	$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$(a \times b)^n = a^n \times b^n$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

6. Intervalles

Soient a et b des réels tels que $a \leq b$

a) Intervalles bornés

Notation	Intervalle	Ensemble des réels x tels que	Représentation graphique
$x \in [a, b]$	fermé de bornes a et b	$a \leq x \leq b$	
$x \in]a, b[$	ouvert de bornes a et b	$a < x < b$	
$x \in]a, b]$	de bornes a et b ouvert en a, fermé en b	$a < x \leq b$	
$x \in [a, b[$	de bornes a et b fermé en a, ouvert en b	$a \leq x < b$	

b) <u>Intervalles non bornés</u>

Notation	Intervalle	Ensemble des réels x tels que	Représentation graphique
$x \in \left]-\infty, a\right]$	**Semi- fermé non limité à gauche**	$x \leq a$	
$x \in \left]-\infty, a\right[$	**Semi- ouvert non limité à gauche**	$x < a$	
$x \in \left[a, +\infty\right[$	**Semi- fermé non limité à droite**	$x \geq a$	
$x \in \left]a, +\infty\right[$	**Semi- ouvert non limité à droite**	$x > a$	

Pour les intervalles bornés; le nombre positif b - a s'appelle l'amplitude.

7. <u>Valeur absolue</u>

Soit *x* un réel, l'un des nombres x et (-x) est positif, c'est la valeur absolue de x, on la note $|x|$.

On écrit $|x| = \begin{cases} x \ ; & \text{si } x \geq 0 \\ -x \ ; & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

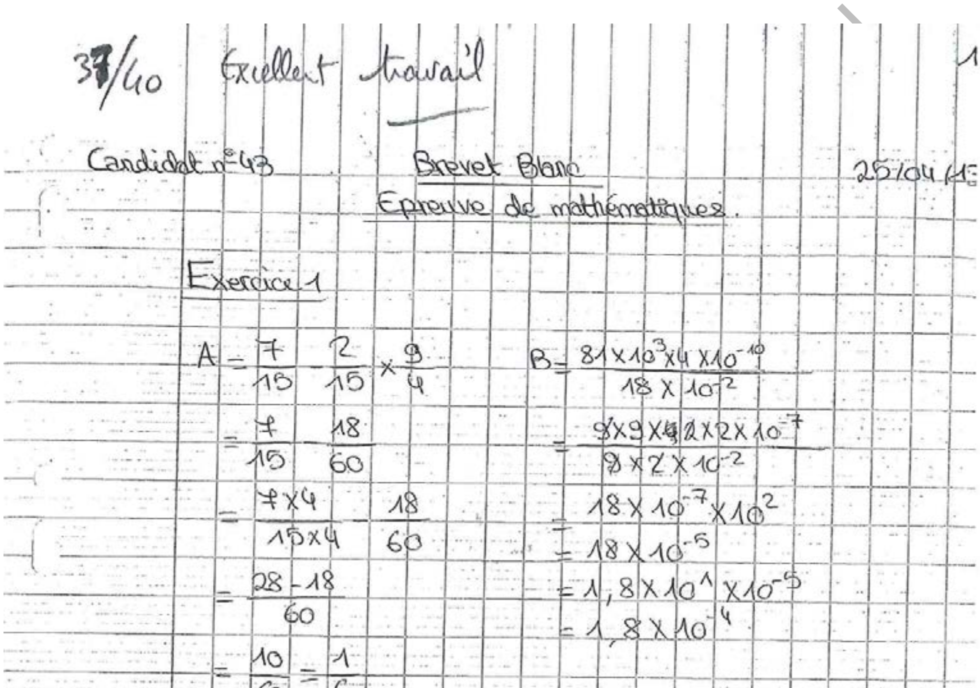
Soient a et b deux réels :

$\lvert a \rvert = 0 \Leftrightarrow a = 0$	$\lvert a \rvert \geq 0$	$\lvert -a \rvert = \lvert a \rvert$	$\lvert a \rvert \times \lvert b \rvert = \lvert ab \rvert$
$\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$; $b \neq 0$	**Si** $\lvert a \rvert = m, (m \geq 0)$, **alors** $a = m$ **ou** $a = -m$	**Si** $\lvert a \rvert = \lvert b \rvert$, **alors** $a = b$ **ou** $a = -b$	**Si** $\lvert a \rvert \leq m, (m \geq 0)$, **alors** $-m \leq a \leq m$

- $|ax+b| = \begin{cases} ax+b\ ; & \text{si}\ \ ax+b \geq 0 \\ -ax-b\ ; & \text{si}\ \ ax+b \leq 0 \end{cases}$

<u>Exemple</u>

$$|2x-6| = \begin{cases} 2x-6\ \ ; & \text{si}\ \ 2x-6 \geq 0 \\ -2x+6\ \ ; & \text{si}\ \ 2x-6 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow |2x-6| = \begin{cases} 2x-6\ \ ; & \text{si}\ \ x \geq 3 \\ -2x+6\ \ ; & \text{si}\ \ x \leq 3 \end{cases}$$


37/40 Excellent travail

Candidat n°43 Brevet Blanc 25/04/1

Epreuve de mathématiques.

Exercice 1

$A = \frac{7}{15} - \frac{2}{15} \times \frac{9}{4}$

$= \frac{7}{15} - \frac{18}{60}$

$= \frac{7\times 4}{15\times 4} - \frac{18}{60}$

$= \frac{28-18}{60}$

$= \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

$B = \frac{81\times 10^{3}\times 4\times 10^{-10}}{18\times 10^{-2}}$

$= \frac{9\times 9\times 4\times 2\times 2\times 10^{-7}}{9\times 2\times 10^{-2}}$

$= 18\times 10^{-7}\times 10^{2}$

$= 18\times 10^{-5}$

$= 1,8\times 10^{1}\times 10^{-5}$

$= 1,8\times 10^{-4}$

Exercices

Exercice 1

Choisir la bonne réponse, en justifiant le choix.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	1 ,83 est l'arrondi d'ordre 2 de :	$\frac{95}{52}$	$\frac{57}{31}$	$\frac{105}{58}$
2	$\left(\frac{1}{4}a^4\left(b^{-3}\right)^4\right)^2 =$	$\frac{1}{8}a^8b^2$	$\frac{1}{16}a^{16}b^9$	$\frac{1}{16}a^8b^{-24}$
3	Si $x > 1$ et $x \leq 7$, alors :	$x \in]3; +\infty[$	$x \in]1; 7]$	$x \in]-\infty ; 6 [$
4	Si $x = -\frac{9}{2} + 17^{2017}$ et $y = -\frac{12}{5} + 17^{2017}$ alors :	$x = y$	$x > y$	$x < y$
5	Si $-8 \leq \frac{2x-20}{-3} \leq 30$ alors:	$-35 \leq x \leq 22$	$-22 \leq x \leq 35$	$22 \leq x \leq 35$
6	Si $\left\vert\frac{3x+18}{-5}\right\vert = 6$, alors:	$x = 4$ ou $x = 16$	$x = -4$ ou $x = 16$	$x = 4$ ou $x = -16$
7	Si $a > b > 0$, alors : $\frac{-a+6}{-5} > \frac{-b+6}{-5}$	Parfois	Toujours	Jamais
8	Si $\vert 2x - 6\vert \leq 30$, alors :	$-18 \leq x \leq 12$	$-24 \leq x \leq 12$	$-12 \leq x \leq 18$

Solution de l'exercice 1

N° Question	1	2	3	4	5	6	7	8
Réponse	**A**	**C**	**B**	**C**	**A**	**C**	**B**	**C**

Justifications

1. A l'aide d'une calculatrice $\frac{95}{52} \simeq 1{,}827$, donc 1 ,83 est l'arrondi d'ordre 2 de $\frac{95}{52}$

car dans l'écriture décimale de $\frac{95}{52}$, le troisième chiffre après la virgule est supérieur à 5 :

$(7 > 5)$ **« Réponse A ».**

2. $\left(\frac{1}{4}\mathbf{a}^4\left(\mathbf{b}^{-3}\right)^4\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\mathbf{a}^4\mathbf{b}^{-12}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\mathbf{a}^4\right)^2\left(\mathbf{b}^{-12}\right)^2 = \frac{1}{16}\mathbf{a}^8\mathbf{b}^{-24}$ **«Réponse C».**

3. $\begin{cases} x > 1 \\ x \leq 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < x \\ x \leq 7 \end{cases} \Rightarrow 1 < x \leq 7 \Rightarrow x \in \left]1;\ 7\right]$ « **Réponse B** ».

4. $x = -\frac{9}{2} + 17^{2017}$ **et** $y = -\frac{12}{5} + 17^{2017}$ **or** $-\frac{9}{2} = -\frac{45}{10}; -\frac{12}{5} = -\frac{24}{10}$ **et que** $-\frac{45}{10} \leq -\frac{24}{10}$,

donc $x \leq y$ **" Réponse C ".**

5.On a : $-8 \leq \frac{2x-20}{-3} \leq 30 \Leftrightarrow -90 \leq 2x-20 \leq 24 \Leftrightarrow -70 \leq 2x \leq 44 \Leftrightarrow -35 \leq x \leq 22;$ **"Reponse A"**

6. $\left|\frac{3x+18}{-5}\right| = 6 \Leftrightarrow \frac{3x+18}{-5} = 6$ **ou** $\frac{3x+18}{-5} = -6 \Leftrightarrow 3x+18 = -30$ **ou** $3x+18 = 30$

Soit x = -16 ou x = 4 « Réponse C »

7. Si a ≥ b > 0, alors a > b > 0 ⇒ -a < -b ⇒ -a + 6 < -b+6 ⇒ $\frac{-a+6}{-5} > \frac{-b+6}{-5}$ «Réponse C ».

8. $|2x-6| \leq 30$ ⇔ -30 ≤ 2x-6 ≤ 30 ⇔ $-24 \leq 2x \leq 36 \Leftrightarrow -12 \leq x \leq 18$ «Réponse C»

Exercice 2

1. Compléter le tableau suivant « utiliser la calculatrice » :

Nombre	Valeur approchée par défaut à 10^{-1} prés	Valeur approchée par excès à 10^{-2} prés	Troncature à l'unité	Valeur arrondie à 10^{-3} prés	Encadrement d'ordre 2
-2 + 5π					
$2\sqrt{50}$					

2. ABC est un triangle tel que BC = 4,5 cm ; la troncature au millième de AB est 4,159 cm . La troncature au dixième de AC est 7,1 cm.
Traduis ces informations par un encadrement de AB et un encadrement de AC, puis donne un encadrement du périmètre P de ce triangle.

Solution de l'exercice 2

1. A l'aide d' une calculatrice :

$-2+5\pi = 13,7079632.....$ **et** $2\sqrt{50} = 14,1421356.....$

Nombre	Valeur approchée par défaut à 10^{-1} prés	Valeur approchée par excès à 10^{-2} prés	Troncature à l'unité	Valeur arrondie à 10^{-3} prés	Encadrement d'ordre 2
-2 + 5π	13,7	13,71	13	13,708	13,7< -2 +5π <13,71
$2\sqrt{50}$	14,1	14,15	14	14,142	$14,14 < 2\sqrt{50} < 14,15$

2. Encadrement de AB :

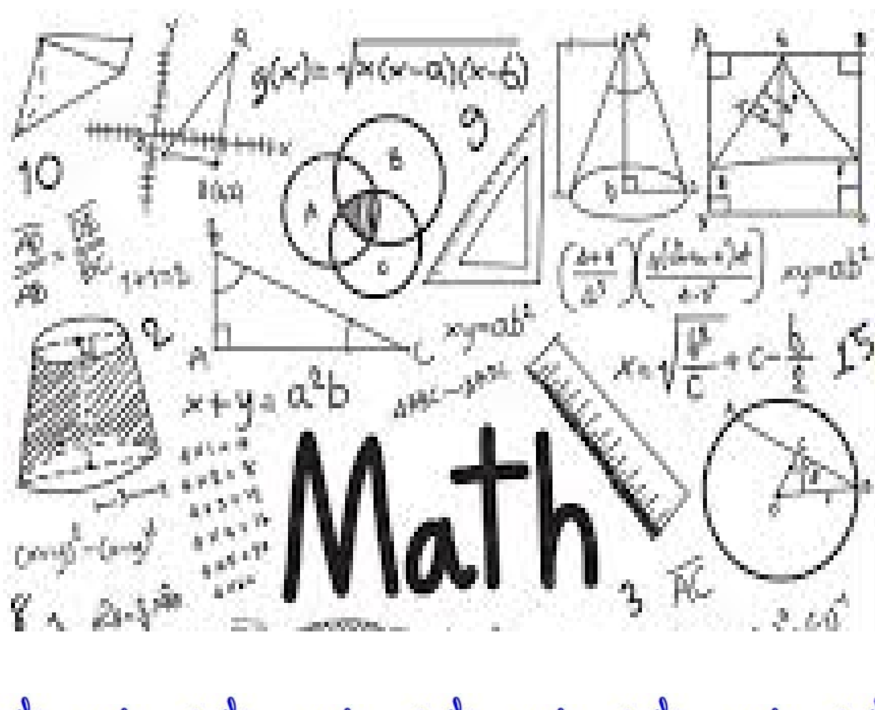
On a la troncature au millième de AB est 4,159 cm, donc 4,159 ≤ AB ≤ 4,160.

- **Encadrement de AC :**
  On a la troncature au dixième de AC est 7,1 cm, donc $7{,}1 \leq AC \leq 7{,}2$.
- **Encadrement du périmètre P de ce triangle : $P = AB + AC + BC$**

$$\text{On a} \begin{cases} 4{,}159 \leq AB \leq 4{,}160 \\ 7{,}1 \leq AC \leq 7{,}2 \\ 4{,}5 \leq BC \leq 4{,}5 \end{cases}$$

Donc on a : $4{,}159 + 7{,}1 + 4{,}5 \leq AB + BC + AC \leq 4{,}160 + 7{,}2 + 4{,}5$.

D'où $15{,}759 \leq AB + AC + BC \leq 15{,}860$, d'où $15{,}759 \leq P \leq 15{,}860$.



Chapitre 2

RACINES CARREES

1. Définition et notation

Soit a un réel positif, la racine carrée de *a* est le réel positif dont le carré est a, ce réel est noté, $\sqrt{a}$ et se lit : «racine carrée de a ou radical de a».

2. Propriétés et conséquences

Soient a et b deux réels positifs

$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ b\neq 0$	$\sqrt{a^n}=(\sqrt{a})^n\ /\ n\in\mathbb{N}$	$\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2=a;$ $\sqrt{a}\geq 0$	$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$
$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$	En général $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq\sqrt{a-b}$			$\sqrt{a^3}=a\sqrt{a}$

Exemples

$\sqrt{2}\times\sqrt{50}=\sqrt{2\times 50}=\sqrt{100}=10;$ $\quad\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{200}{2}}=\sqrt{100}=10;$

$\sqrt{75}=\sqrt{25\times 3}=5\sqrt{3}$

3. Racine carrée et valeur absolue

Soit a un réel quelconque $\sqrt{a^2}=|a|$.

Exemple : $\sqrt{(2-\pi)^2}=|2-\pi|=-(2-\pi)=-2+\pi=\pi-2$

4. Equation $x^2 = a$

$$x^2 = a \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } a<0, \text{ l'équation n'a pas de solution.} \\ \text{Si } a=0, \text{ l'équation a une seule solution } x=0. \\ \text{Si } a>0, \text{ l'équation a deux solutions : } \sqrt{a} \text{ et } -\sqrt{a} \end{cases}$$

5. Ecriture d'un quotient sans radical au dénominateur

Pour écrire un quotient sans radical au dénominateur on utilise l'expression conjuguée

Expression	Expression conjuguée	Produit
$a+\sqrt{b}$	$a-\sqrt{b}$	$\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$
$a\sqrt{b}-c$	$a\sqrt{b}+c$	$\left(a\sqrt{b}-c\right)\left(a\sqrt{b}+c\right)=a^2b-c^2$

Exemples

$$A=\frac{7}{4\sqrt{3}}=\frac{7\times\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{4\times3}=\frac{7\sqrt{3}}{12}$$

$$B=\frac{1}{3-\sqrt{5}}=\frac{1\times\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}=\frac{3+\sqrt{5}}{3^2-\sqrt{5}^2}=\frac{3+\sqrt{5}}{9-5}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

6. Ordre et radicaux

Soient a et b des nombres réels positifs,

$a \le b \Leftrightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{b}$	$a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

Exemple

Comparer les réels $6\sqrt{11}$ et $9\sqrt{5}$.

Pour comparer ces nombres, il suffit de comparer leurs carrés

$\left(6\sqrt{11}\right)^2 = 36\times11=396$ **et** $\left(9\sqrt{5}\right)^2=81\times5=405$

On remarque que $\left(6\sqrt{11}\right)^2<\left(9\sqrt{5}\right)^2$**, donc** $6\sqrt{11}<9\sqrt{5}$.

Exercices

Exercice 1

Choisir la bonne réponse, en justifiant le choix.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$	$2\sqrt{2}-2\sqrt{6}$	$\frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$	0
2	Le triangle ABC dont les côtes mesurent $AB=4\sqrt{5}cm$ $BC=\sqrt{35}cm; AC=\sqrt{45}cm$ est un triangle :	Rectangle en A	Rectangle en C	Rectangle en B
3	La solution de l'équation : $x\sqrt{2}-1=\sqrt{2}$ est:	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	1
4	Un carrée de côte 5cm est inscrit dans un cercle de rayon :	$5\sqrt{2}cm$	$\frac{5\sqrt{2}}{2}cm$	$2\sqrt{5}cm$
5	$\sqrt{242}+3\sqrt{288}-2\sqrt{162}=$	$29\sqrt{2}$	$-29\sqrt{2}$	Autre valeur
6	$\sqrt{\left(3\sqrt{3}-2\pi\right)^2}=$	$-2\pi+3\sqrt{3}$	$2\pi+3\sqrt{3}$	$2\pi-3\sqrt{3}$
7	$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=$	$\frac{6+2\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$6+2\sqrt{5}$
8	Les solutions de l'inéquation $2\left(x\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)<x\sqrt{11}$ sont les nombres x tels que :	$x<2\sqrt{3}-\sqrt{11}$	$x<2\sqrt{3}+\sqrt{11}$	Autre réponse
9	Pour $x=5\sqrt{2}$, le nombre $3+2x^2$ est égal à	50	103	250
10	Les solutions de l'équation : $\frac{4x^2-20}{5}=\frac{6x^2+36}{15}$ sont	4 et -4	2 et -2	16 et -16

Solution de l'exercice 1

N° de la question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse	A	B	A	B	A	C	B	B	B	A

Justifications

1. $$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{6}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{3-2}=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{1}=2\sqrt{2}-2\sqrt{6}$$ **«Réponse A »**

2. Le triangle ABC dont les côtés mesurent $AB=4\sqrt{5}$cm $BC=\sqrt{35}$cm ; on a $AB^2=80$; $BC^2+AC^2=35+45=80$, donc, d'après la réciproque de Pythagore le triangle est rectangle en C. « Réponse B »

3. La solution de l'équation : $x\sqrt{2}-1=\sqrt{2}$ est $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ car :

$$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\sqrt{2}-1=1\times\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}-1=\sqrt{2}+1-1=\sqrt{2}$$ **«Réponse A ».**

4. Un carrée de côté 5cm est inscrit dans un cercle dont le diamètre est la diagonale du carré ; le théorème de Pythagore donne :

Diamètre $=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{25\times 2}=5\sqrt{2}$ **cm.**

Donc le rayon est $\frac{5\sqrt{2}}{2}$cm «Réponse B ».

5. $$\sqrt{242}+3\sqrt{288}-2\sqrt{162}=\sqrt{121\times 2}+3\sqrt{144\times 2}-2\sqrt{81\times 2}=11\sqrt{2}+3\times 12\sqrt{2}-2\times 9\sqrt{2}$$

$$\sqrt{242}+3\sqrt{288}-2\sqrt{162}=11\sqrt{2}+36\sqrt{2}-18\sqrt{2}=29\sqrt{2}$$ **«Réponse A ».**

6. A l'aide d'une calculatrice $2\pi\approx 6,28...$ et $3\sqrt{3}\approx 5,19...$, donc:

$3\sqrt{3}=5,19...$, **d'où** $3\sqrt{3}-2\pi<0$

$$\sqrt{\left(3\sqrt{3}-2\pi\right)^2}=\left|3\sqrt{3}-2\pi\right|=-\left(3\sqrt{3}-2\pi\right)=2\pi-3\sqrt{3}$$ **«Réponse C ».**

7. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{2^2}=\frac{1^2+2\times1\times\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2}{4}=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}$

$$=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{2\times\left(3+\sqrt{5}\right)}{2\times2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$ " Réponse B "

8. Les solutions de l'inéquation $2\left(x\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)<x\sqrt{11}$ sont les nombres x tels que :

$x<2\sqrt{3}+\sqrt{11}$ car $2\left(x\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)<x\sqrt{11}\Leftrightarrow 2x\sqrt{3}-1<x\sqrt{11}\Leftrightarrow 2x\sqrt{3}-x\sqrt{11}<1\Leftrightarrow\left(2\sqrt{3}-\sqrt{11}\right)x<1$

Comme $2\sqrt{3}-\sqrt{11}>0$ donc $x<\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{11}}\Leftrightarrow x<\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{11}}\times\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2\sqrt{3}+\sqrt{11}}\Leftrightarrow$

$x<\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{11}\right)^2}\Leftrightarrow x<\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{11}}{12-11}\Leftrightarrow x<2\sqrt{3}+\sqrt{11}$ «Réponse B »

9. Pour $x=5\sqrt{2}$ le nombre $3+2x^2$ est égal à $3+2\times50=103$ «Réponse B »

10. Les solutions de l'équation sont -4 ou 4 car :

$$\frac{4x^2-20}{5}=\frac{6x^2+36}{15}\Leftrightarrow\frac{12x^2-60}{15}=\frac{6x^2+36}{15}$$

$$\Leftrightarrow 12x^2-60=6x^2+36\Leftrightarrow 6x^2=96\Leftrightarrow x^2=16$$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{16}$ ou $x=-\sqrt{16}\Leftrightarrow x=4$ ou $x=-4$ «Réponse A »

Exercice 2

1. Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des nombres entiers (b est l'entier le plus petit possible) :

$A=2\sqrt{500}-\sqrt{320}+4\sqrt{2000}$; $B=2\sqrt{77}\times3\sqrt{88}\times4\sqrt{525}$

2. Parmi les nombres ci-dessous ; Trouver les nombres égaux à zéro ? justifier.

$N=\sqrt{405}-\sqrt{720}+\sqrt{45}$; $U=(7-\sqrt{7})(7+\sqrt{7})-42$;

$L=16-(3+\sqrt{7})^2$; $S=4\sqrt{135}-2\sqrt{240}-2\sqrt{60}$.

3. Ranger par ordre croissant les réels suivants : $6\sqrt{3}$; $4\sqrt{6}$; $2\sqrt{50}$ et $3\sqrt{11}$.

4. Ecrire plus simplement les expressions suivantes :

$D=\sqrt{\left(\pi-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(-2\pi-5\sqrt{5}\right)^2}-2\sqrt{\left(\sqrt{5}-\pi\right)^2}$ et $E=\sqrt{2017\times2016-2016}$

Solution de l'exercice 2

1. Ecrivons les réels A et B sous forme $a\sqrt{b}$

$A = 2\sqrt{500} - \sqrt{320}+\sqrt{2000} = 2 \times 10\sqrt{5} - 8\sqrt{5}+20\sqrt{5} = (20-8+20)\sqrt{5} = 32\sqrt{5}.$

$B = 2\sqrt{77}\times 3\sqrt{88}\times 2\sqrt{525} = 2\sqrt{7}\times\sqrt{11}\times 6\sqrt{2}\times\sqrt{11}\times 10\sqrt{3}\times\sqrt{7} = 2\times 7\times 11\times 6\times 10\sqrt{6} = 9240\sqrt{6}$

2. Les nombres égaux à zéro sont N, U et S car :

- $N = \sqrt{405} - \sqrt{720} + \sqrt{45} = \sqrt{81\times 5} - \sqrt{144\times 5} + \sqrt{9\times 5} = 9\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 0$;
- $U = (7-\sqrt{7})(7+\sqrt{7}) - 42 = 7^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2 - 42 = 49 - 7 - 42 = 0$
- $S = 4\sqrt{135} - 2\sqrt{240} - 2\sqrt{60} = 4\sqrt{9\times 15} - 2\sqrt{16\times 15} - 2\sqrt{4\times 15} = 4\times 3\sqrt{15} - 2\times 4\sqrt{15} - 2\times 2\sqrt{15}$

  $S = 12\sqrt{15} - 8\sqrt{15} - 4\sqrt{15} = 0$
- $L = 16 - (3+\sqrt{7})^2 = 16 - \left(3^2 - 2\times 3\times\sqrt{7} + \left(\sqrt{7}\right)^2\right) = 16 - \left(9 - 6\sqrt{7} + 7\right) = 16 - 16 + 6\sqrt{7} = 6\sqrt{7}$

3. Rangeons par ordre croissant les nombres suivants : $6\sqrt{3}$; $4\sqrt{6}$; $2\sqrt{50}$ et $3\sqrt{11}$.

Pour cela, élevons ces nombres au carré : $\left(6\sqrt{3}\right)^2 = 108$; $\left(4\sqrt{6}\right)^2 = 96$; $\left(2\sqrt{50}\right)^2 = 200$ et $\left(3\sqrt{11}\right)^2 = 99$.

Donc l'ordre est le suivant $4\sqrt{6} < 3\sqrt{11} < 6\sqrt{3} < 2\sqrt{50}$.

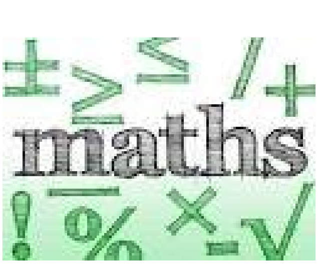
4. Ecrivons plus simple les expressions suivantes

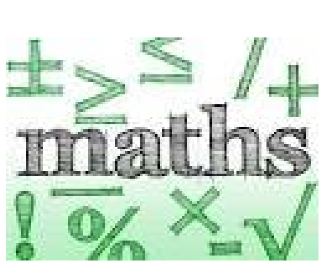
$D = \sqrt{\left(\pi - \sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(-2\pi - 5\sqrt{5}\right)^2} - 2\sqrt{\left(\sqrt{5} - \pi\right)^2} = \left|\pi - \sqrt{5}\right| + \left|-2\pi - 5\sqrt{5}\right| - 2\left|\sqrt{5} - \pi\right|$

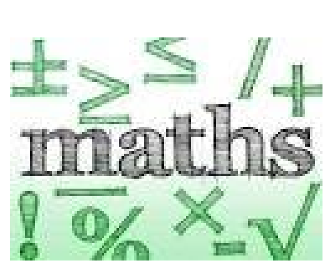
$D = \pi - \sqrt{5} + \left(-\left(-2\pi - 5\sqrt{5}\right)\right) - 2\left(-\left(\sqrt{5} - \pi\right)\right) = \pi - \sqrt{5} + 2\pi + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 2\pi = \pi + 6\sqrt{5}$

$E = \sqrt{2017\times 2016 - 2016} = \sqrt{2017\times 2016 - 2016\times 1}$

$\quad = \sqrt{2016\times(2017-1)} = \sqrt{2016^2} = 2016$







Chapitre 3

CALCUL LITTERAL

A. Calcul littéral

1. Ecritures d'expressions littérales

Factoriser une somme algébrique, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.
Développer un produit signifie l'écrire sous la forme d'une somme. ou d'une différence de plusieurs termes.
Réduire une expression consiste à simplifier les termes d'une même puissance de la variable (termes semblables).
Ordonner une expression, c'est l'écrire par ordre de puissance décroissante (ou croissante) de la variable.

2. Développement et factorisation

Soient a, b, c, d et k des réels

On développe → $\boxed{k(a + b) = ka + kb}$

On factorise ← $\boxed{k(a + b) = ka + kb}$

$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$; $(a+b)(c-d) = ac-ad+bc-bd$

$(a-b)(c-d) = ac-ad-bc+bd$; $(a-b)(c+d) = ac+ad-bc-bd$

3. Identités remarquables

Soient a et b des réels.

Identités	Remarques	Attention
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(a + b)^2 = (-a -b)^2$ $(a -b)^2 = (b - a)^2$	$a^2 + b^2 \neq (a + b)^2$ $a^2 + b^2 = (a - b)^2$ $a^2 - b^2 \neq b^2 - a^2$

B. Système de deux équations du 1^er^ degré à deux inconnues

1. Définition

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues *x* et *y* est de la forme

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$ **où a, b , c , a', b' et c' sont des nombres réels.**

2. Méthodes de résolution

a) Méthode de substitution

- **On exprime, dans l'une des deux équations, une inconnue en fonction de l'autre.**
- **On remplace l'expression obtenue dans l'autre équation. On obtient une équation à une inconnue. On calcule cette inconnue.**
- **On remplace cette inconnue dans l'une des deux équations pour calculer l'autre inconnue**

Exemple : Résoudre par substitution le système : $\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ 3x - 5y = 1 & (2) \end{cases}$

On écrit y en fonction de x dans l'équation (1): y= 5- 2x ;
On remplace y par 5- 2x dans l'équation (2):

$$3x - 5(5 - 2x) = 1 \Rightarrow 3x - 25 + 10x = 1 \Rightarrow 13x = 26 \Rightarrow x = \frac{26}{13} \Rightarrow x = 2.$$

Dans l'équation (1) on remplace x par 2 d'où :

$$2 \times 2 + y = 5 \Rightarrow 4 + y = 5 \Rightarrow y = 1 \text{ donc } S = \{(2;\ 1)\}$$

b) Méthode d'addition (ou de combinaison linéaire):

- **On multiplie chacune des équations par un coefficient convenablement choisi, de façon que les coefficients d'une même inconnue soient opposés, pour éliminer cette inconnue.**
- **On ajoute, membre à membre, on obtient une équation à une inconnue puis on calcule cette inconnue.**
- **On reporte la valeur de l'inconnue calculée dans l'une des deux équations pour calculer l'autre inconnue**

Exemple

Résoudre par combinaison le système : $\begin{cases} 4x + y = -1 & (1) \\ 5x - 3y = -14 & (2) \end{cases}$

En multipliant les deux membres de la première équation par 3, on obtient : $\begin{cases} 12x + 3y = -3 \\ 5x - 3y = -14 \end{cases}$. **On ajoute ces équations, membre à membre, on obtient :** $17x = -17 \Rightarrow x = \frac{-17}{17} \Rightarrow x = -1$.

Reportons la valeur de x dans (1) : $4 \times (-1) + y = -1 \Rightarrow -4 + y = -1 \Rightarrow y = 3$, **donc** $S = \{(-1;\ 3)\}$.

Exercices

Exercice 1

Les expressions A et B sont données par :

$$A = (7x+9)^2 - 16x^2 \text{ et } B = (2x-5)(3+x) - x^2 - 9 + 6x$$

1) Développer, réduire et ordonner A et B

2) Factoriser chacune des expressions A, B et A + B.

3) Simplifier $\frac{A}{B}$ **pour** $x \neq -3$ **et** $x \neq \frac{2}{3}$**. et calculer la valeur de** $\frac{A}{B}$ **pour x = -1**

4) Résoudre l'équation A = 0.

Solution de l'exercice 1

$$A = (7x+9)^2 - 16x^2 \quad , \quad B = (2x-5)(3+x) - x^2 - 9 + 6x$$

1. Développement :

$$A = (7x+9)^2 - 16x^2 = \left(7x\right)^2 + 2\times 7x \times 9 + 9^2 - 16x^2$$

$$= 49x^2 + 126x + 81 - 16x^2 = 33x^2 + 126x + 81 ;$$

$$B = (2x-5)(3+x) - x^2 - 9 + 6x = 6x + 2x^2 - 15 - 5x - x^2 - 9 + 6x = x^2 + 7x - 24$$

2. Factorisation

$$A = (7x+9)^2 - 16x^2 = (7x+9)^2 - \left(4x\right)^2 = \left[7x+9-4x\right]\left[7x+9+4x\right]$$

$$= (3x+9)(11x+9) = (3x+3\times 3)(11x+9) = 3(x+3)(11x+9)$$

$$B = \left(2x-5\right)\left(3x-2\right) - 9x^2 - 4 + 12x = \left(2x-5\right)\left(3x-2\right) - (9x^2 + 4 - 12x)$$

$$= \left(2x-5\right)\left(3x-2\right) - \left(\left(3x\right)^2 + 2^2 - 2\times 3x \times 2\right) = \left(2x-5\right)\left(3x-2\right) - \left(3x-2\right)^2$$

$$= \left(2x-5\right)\left(3x-2\right) - \left(3x-2\right)\left(3x-2\right) = \left(3x-2\right)\left[\left(2x-5\right) - \left(3x-2\right)\right]$$

$$= \left(3x-2\right)\left(2x-5-3x+2\right) = \left(3x-2\right)(-x-3) = -\left(3x-2\right)\left(x+3\right)$$

$$A + B = 3(x+3)(11x+9) + \left[-(3x-2)(x+3)\right]$$
$$= 3(x+3)(11x+9) - (3x-2)(x+3)$$
$$= (x+3)\left[3(11x+9) - (3x-2)\right]$$
$$= (x+3)\left[33x+27-3x+2\right] = (x+3)(30x+29)$$

3. Simplification de $\frac{A}{B}$ pour $x \neq -3$ et $x \neq \frac{2}{3}$

$$\frac{A}{B} = \frac{3(x+3)(11x+9)}{-(x+3)(3x-2)} \Leftrightarrow \frac{A}{B} = -\frac{3(11x+9)}{(3x-2)} \Leftrightarrow \frac{A}{B} = -\frac{33x+27}{3x-2}$$

Nous savons que $\frac{A}{B} = -\frac{33x+27}{3x-2}$, donc pour $x = -1$,

$$\frac{A}{B} = \frac{33\times(-1)+27}{3\times(-1)-2} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{-33+27}{-3-2} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5}$$

4. Equation A = 0

Sachant que : A = 3(x + 3) (11 x +9). Nous devons donc résoudre:

3(x + 3) (11 x +9) = 0 ;

Un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs au moins est nul.

Donc x + 3= 0 ou 11 x +9 = 0 (car $3 \neq 0$) $\Rightarrow$ x = -3 $\Rightarrow$ 11x = -9 $\Rightarrow$ $x = \frac{-9}{11}$

<u>Exercice 2</u>

x et y sont deux entiers naturels à trois chiffres chacun .

x est un nombre impair divisible par 5 ; la somme de ses chiffres est 15 .

En permutant le chiffre des centaines et celui des dizaines de *x* on obtient y et y – x = 360.

1. Ecrire les deux équations correspondantes à ces données.

2. Trouver x et y.

Solution de l'exercice 2

1. Ecriture des équations correspondantes aux données

x et y sont deux entiers naturels à trois chiffres

x un nombre impair et divisible par 5 en notant a le chiffre des centaines,

b le chiffre des dizaines et c le nombre des unités, on en déduit que c = 5, donc :

$x = 100a + 10b + 5$.

On a la somme des chiffres de x est 15, donc : $a + b + 5 = 15$, d'où $a + b = 10$

et en permutant le chiffre des centaines et celui des dizaines on obtient :

$y = 100b + 10a + 5$ et de plus $y - x = 360$, on en déduit que $b \geq a$.

$$y - x = 360 \Rightarrow 100b + 10a + 5 - \left(100a + 10b + 5\right) = 360 \Rightarrow 100b + 10a + 5 - 100a - 10b - 5 = 360,$$
$$\text{donc} : -90a + 90b = 360 \Rightarrow -a + b = 4$$

- **Trouvons x et y**

Résolvons le système suivant : $\begin{cases} a + b = 10 & (1) \\ -a + b = 4 & (2) \end{cases}$

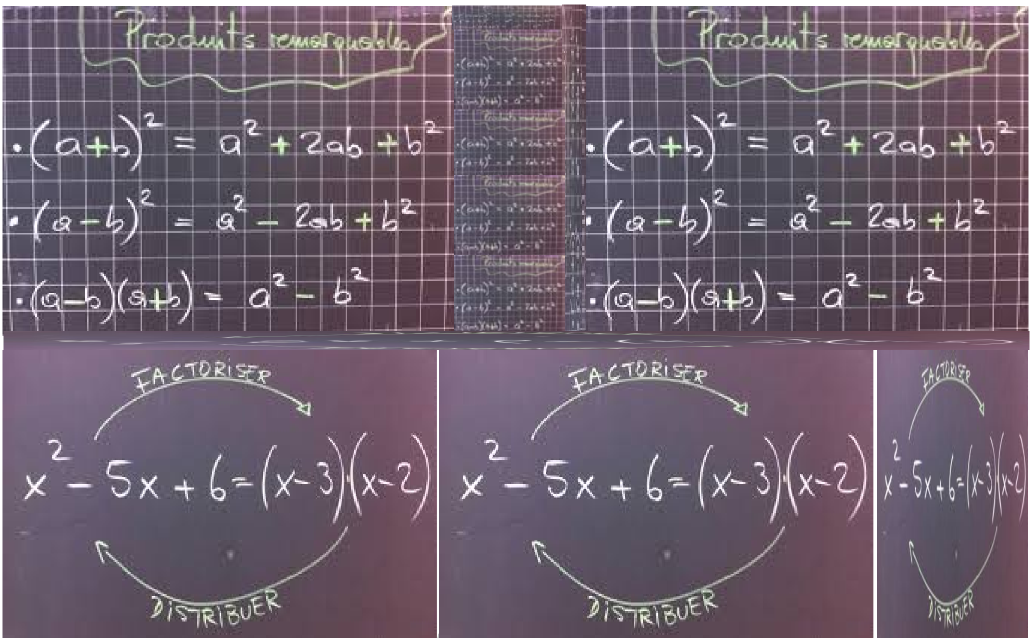
On ajoute ces équations, membre à membre, on obtient :

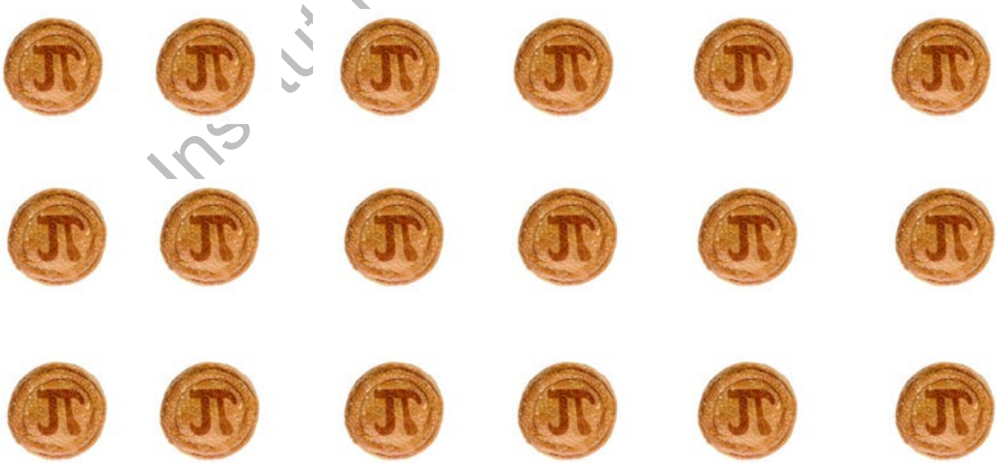
$$2b = 14 \Rightarrow b = \frac{14}{2} \Rightarrow b = 7$$

Reportons la valeur de b dans $\left(1\right)$: $a + 7 = 10 \Rightarrow a = 10 - 7 \Rightarrow a = 3$. Soit a = 3 et b = 7

Donc l'entier x = 375 et y = 735

Vérification : y - x = 735 - 375 = 360.





Chapitre 4

FONCTIONS AFFINES

1. Définition

a et b étant deux nombres donnés, on appelle fonction affine le procédé qui a tout nombre réel x fait correspondre le nombre réel ax + b.

2. Notations et vocabulaire

- ✓ **Une fonction affine est désignée par f(ou g ou h …)**

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax + b \end{aligned}$$

- ✓ **Le nombre ax + b est l'image de x par la fonction f on le note f(x) = ax + b**

  On écrit aussi soit : « f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ »

Cas particuliers

- **Si a = 0, alors f(x) = b. On dit que f est une fonction constante.**
- **Si b = 0, alors f(x) = ax. On dit que f est une fonction linéaire**

3. Représentation graphique d'une fonction affine

Définition

Une représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto ax + b$ dans un repère est constituée des points de coordonnées (x ; ax + b)

Propriété

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto ax + b$ est la droite qui passe par le point $B(0\,;b)$ et parallèle à la droite (d') représentant la fonction linéaire associée $x \mapsto ax$.

La fonction affine a pour représentation graphique la droite d'équation y = ax + b.

a : est le coefficient directeur de la droite et b est l'ordonnée à l'origine de cette droite.

Remarques

Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées représente une fonction affine :

- **La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère**
- **La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des abscisses.**

4. Sens de variation

Soit une fonction affine définie par f(x) = ax + b

Il y a proportionnalité entre les accroissements de f(x) et les accroissements de x.

On a :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad x_2 \neq x_1$$

- **si a est positif, alors la fonction est croissante : si $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \leq f(x_2)$**
- **si a est négatif, alors la fonction est décroissante: si $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \geq f(x_2)$**

Exercice

La société de transport public STP a fixé un prix proportionnel au nombre de km parcourus.
Le prix demandé pour 1km est de 6 UM.
La STP propose aux jeunes de 15-25 ans un tarif réduit selon deux possibilités :

- Tarif 1 : Réduction de 25% sur tous les trajets
- Tarif 2 : Achat d'une carte 15-25ans au prix de 2000 UM valable une année permettant d'obtenir 50% de réduction sur tous les trajets.

1. Calculer la dépense annuelle selon chaque tarif pour 500km et pour 2000km.
2. Soit y_1 et y_2 les dépenses annuelles en UM pour x km au tarif 1 et tarif2

Montrer que $y_1 = 4,5\,x$ et $y_2 = 2000 + 3\,x$

Résoudre l'inéquation $2000 + 3x \leq 4,5x$

A partir de combien de kilomètre les tarifs sont avantageux ?

Solution l'exercice

1 . La dépense annuelle selon chaque tarif

Tarif 1

- Pour une réduction de 25% le prix d'un kilomètre est de $6 \times \left(1 - \frac{25}{100}\right)$
- Pour 500km est de $500 \times 6 \times \left(1 - \frac{25}{100}\right) = 2250\text{UM}$
- Pour 2000km est de $2000 \times 6 \times \left(1 - \frac{25}{100}\right) = 9000\text{UM}$

Tarif 2

- Pour une réduction de 50%, le prix d'un kilomètre est de $6 \times \left(1 - \frac{50}{100}\right)$
- Pour 500km est de $2000 + 500 \times 6 \times \left(1 - \frac{50}{100}\right) = 3500\text{UM}$

- **Pour 2000km est de** $2000 + 2000 \times 6 \times \left(1 - \frac{50}{100}\right) = 8000\text{UM}$

2. Montrons que $y_1 = 4,5\,x$ et $y_2 = 2000 + 3\,x$

<u>Tarif 1</u>

- **Pour tout x la dépense est** $6 \times \left(1 - \frac{25}{100}\right)x = 4,5x$

<u>Tarif 2</u>

- **Pour tout x la dépense est** $2000 + 6 \times \left(1 - \frac{50}{100}\right)x = 2000 + 3x$

Résolution de l'inéquation $2000 + 3x \leq 4,5x$

$2000 \leq 4,5x - 3x \Leftrightarrow 2000 \leq 1,5x \Leftrightarrow 1333.3 \leq x \Leftrightarrow x \geq 1333,3.$

Donc le plus avantageux à partir du 1333km est le tarif 2.

Chapitre 5

STATISTIQUES [1]

1. Médiane

La médiane est la valeur qui partage une série ordonnée de valeurs statistiques en deux parties possédant le même nombre d'éléments.

Deux cas se présentent.

- **Cas d'un nombre impair de valeurs dans la série :**

Exemple

Dans la série 1; 5; 7; 10; 11; 50; 55, la médiane est 10 car il y a autant de valeurs inférieures ou égales à 10 que de valeurs supérieures ou égales à 10.

- **Cas d'un nombre pair de valeurs dans la série :**

Exemple

Dans la série 10; 20; 30; 35; 37; 40; 50; 60, la médiane se trouve entre 35 et 37.

Il y a donc une infinité de solutions. Dans la pratique, on prend la moyenne arithmétique (la demi - somme) de ces deux valeurs. La médiane vaut donc 36.

2. Moyenne

- **La moyenne d'une série statistique est le quotient de la somme de toutes les valeurs de la série par l'effectif total (séries discrètes)**

[1] - ***N.B : Dans ce chapitre, les séries statistiques sont à caractères quantitatifs.***

- **Pour calculer la moyenne pondérée on multiplie chaque valeur par l'effectif correspondant, on additionne les produits ainsi obtenus puis on divise le résultat par l'effectif total (séries discrètes).**
- **Dans les cas de séries continues on utilise les centres de classes comme valeurs**

3. Etendue

L'étendue d'une série de valeurs statistiques est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la série.

4. Effectifs cumulés

Dans une série statistique à valeurs ordonnées, l'effectif cumulé croissant de la valeur x est la somme des effectifs de toutes les valeurs inférieures ou égales à x.
On pourra aussi définir un effectif cumulé décroissant en prenant la somme des effectifs de toutes les valeurs supérieures ou égales à x.

Remarque

L'effectif cumulé croissant (respectivement décroissant) d'une modalité x du caractère représente le nombre d'individus de la population étudiée, dont la valeur du caractère est au plus égale (respectivement au moins égale) à x.

5. Fréquences cumulées

La fréquence cumulée croissante (respectivement décroissante) est égale à la somme des fréquences de toutes les valeurs du caractère inférieures ou égales (respectivement supérieures ou égales) dans l'ordre de classement.

Remarques

On a aussi fréquence cumulée = $\dfrac{\text{effectif cumulé}}{\text{effectif total}}$

- **La fréquence cumulée est un nombre compris entre 0 et 1**
- **La fréquence cumulée croissante (respectivement décroissante) pour la plus grande valeur (respectivement la plus petite valeur) du caractère est égale à 1.**
- **La fréquence est souvent exprimée en pourcentage**

6. Courbe des fréquences cumulées et polygone des fréquences

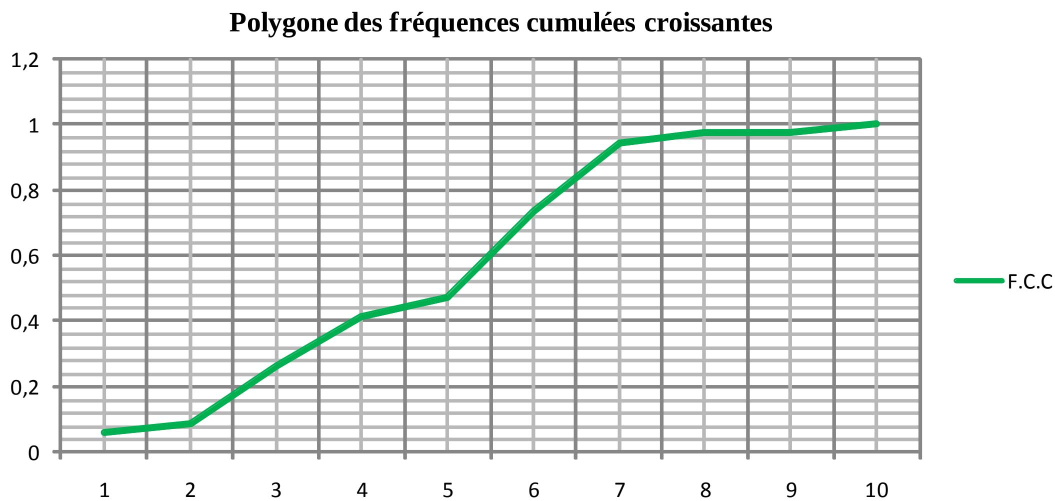
Le polygone des effectifs (ou des fréquences) est obtenu en reliant les extrémités des bâtons du diagramme ou les milieux des extrémités des classes s'il s'agit d'un histogramme.

Exemple

Dans le tableau suivant on a regroupé les résultats d'un devoir noté sur 10 d'une classe de 4AS, on a calculé les fréquences et les fréquences cumulées croissantes (voir tableau ci-dessous).

Note	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	2	1	6	5	2	9	7	1	0	1
Fréquence	0,059	0,029	0,176	0,147	0,059	0,264	0,206	0,029	0	0,029
Fréquence cumulée croissante	0,059	0,088	0,264	0,411	0,47	0,734	0,941	0,971	0,971	1

On obtient donc le graphique suivant :



<u>Exercice</u>

Les tailles des élèves d'une classe de 4ème AS ont été recensées dans le tableau ci-dessous :

Tailles (cm)	**[150 ; 155[**	**[155 ; 160[**	**[160 ; 165[**	**[165 ; 170[**	**[170 ; 175[**	**[175 ; 180[**	**[180 ; 185[**
Effectifs	**3**	**4**	**6**	**7**	**5**	**3**	**2**

1. Donner l'étendue et la classe modale de cette série statistique.

2. Combien d'élèves mesurent entre 1,55m et 1,70m.

3. Construire le tableau des fréquences et des fréquences cumulées croissantes (en % et arrondies à 1% près).

4. Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes.

5. Déterminer la médiane de cette série statistique.

Solution de l'exercice

1. L'étendue est 185-150 soit 35cm

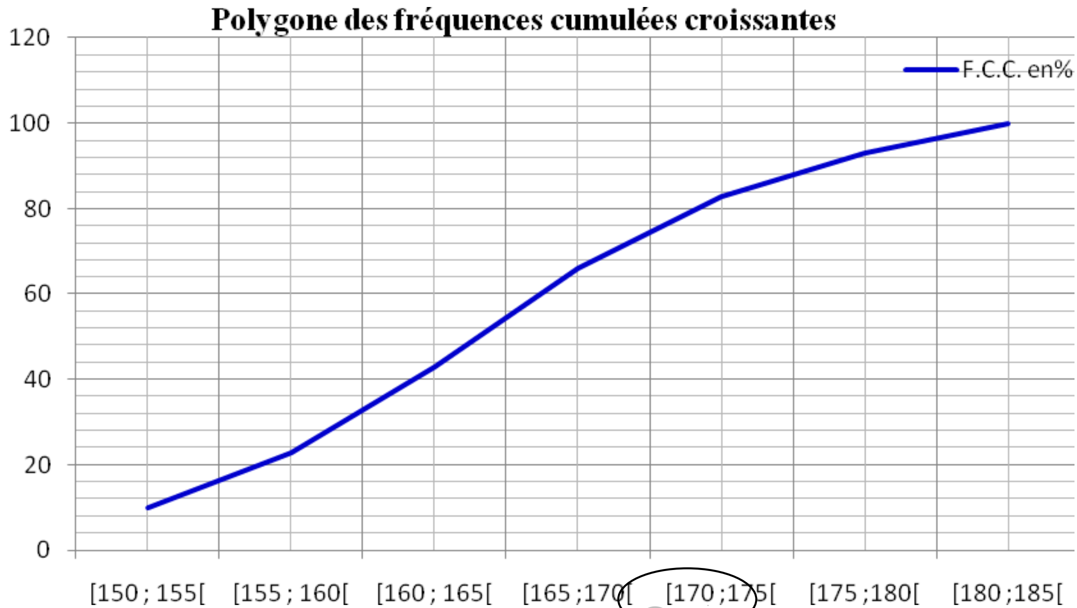
La classe modale est [165 ; 170[

2. Le nombre d'élèves mesurant entre 1,55m et 1,70m est 17

Tailles (cm)	**[150 ; 155[**	**[155 ; 160[**	**[160 ; 165[**	**[165 ; 170[**	**[170 ; 175[**	**[175 ; 180[**	**[180 ; 185[**
Effectif	**3**	**4**	**6**	**7**	**5**	**3**	**2**
Fréquence en%	**10**	**13**	**20**	**23**	**17**	**10**	**7**
F.C.C. en%	**10**	**23**	**43**	**66**	**83**	**93**	**100**

3. Le tableau des fréquences et des fréquences cumulées croissantes

4. Construction du polygone des fréquences cumulées croissantes



La médiane appartient à

Exercices de synthèse

Exercice 1

Un établissement de transfusion sanguine a dressé le bilan de sa collecte de sang pendant un an.

Âge du donneur	Effectifs	E.C.C.	E.C.D.	Fréquences	F.C.C.	F.D.D.
Moins de 20 ans	200					
Entre 20 et 29 ans	700					
Entre 30 et 39 ans	1 200					
Entre 40 et 49 ans	1 600					
Plus de 50 ans	1 300					
Total						

1. Compléter le tableau ci-dessus en donnant les fréquences (arrondies au centième près)

2. Déterminer l'âge médian du donneur.

3. Combien y-a-t-il de donneurs qui ont moins de 50 ans ?

4. Combien y-a-t-il de donneurs qui ont plus de 30 ans ?

Solution de l'exercice 1

1. Complétons le tableau

Âge du donneur	Effectifs	E.C.C.	E.C.D.	Fréquences	F.C.C.	F.D.D.
Moins de 20 ans	200	200	5 000	0,04	0,04	1
Entre 20 et 29 ans	700	900	4 800	0,14	0,18	0,96
Entre 30 et 39 ans	1 200	2 100	4 100	0,24	0,42	0,82
Entre 40 et 49 ans	1 600	3 700	2 900	0,32	0,74	0,58
Plus de 50 ans	1 300	5 000	1 300	0,26	1	0,26
Total	5 000	******	******	1	******	******

2. L'âge médian est entre 30 et 39 ans

3. Le nombre de donneurs qui ont moins de 50 ans est 3700.

4. Le nombre de donneurs qui ont plus de 30 ans est 2900

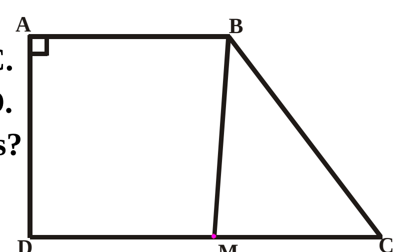
Exercice 2

A) 1) On considère les applications affines définies par: $f(x) = -2x + 14$; $g(x)= 2x + 8$.

a) Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, représenter ces deux applications affines par deux droites D et Δ.

b) Calculer les coordonnées de leur point d'intersection et vérifier graphiquement.

2) Soit ABCD un trapèze rectangle tel que AD = AB = 4 cm et CD= 7cm ; M est un point de [CD] tel que DM = x



a) Calculer en fonction de x l'aire du triangle MBC. Calculer en fonction de x l'aire du trapèze ABMD.

b) Pour quelle valeur de x les deux aires sont égales? Quelle est alors la valeur commune ?

(On pourra utiliser le graphique).

c) Calculer $f(x) + g(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat .

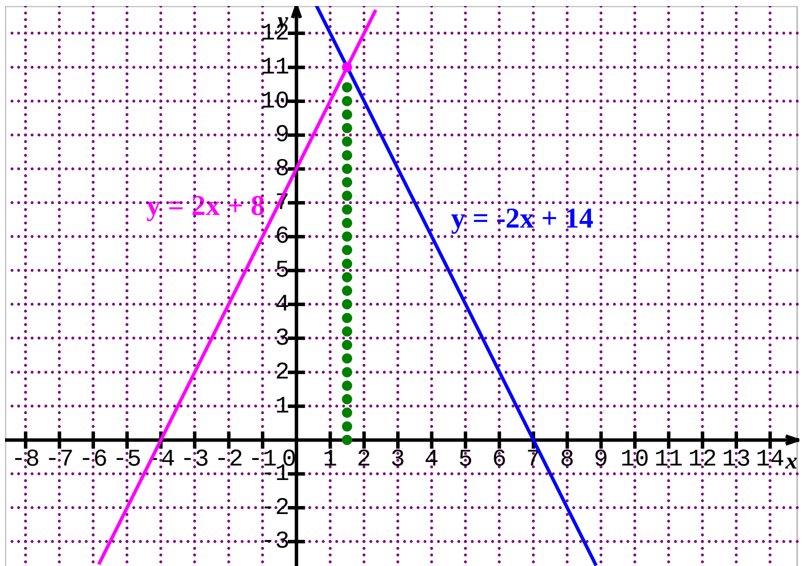
B) Soit h la fonction définie par : $h(x) = - |2x -4| + |3 -x| +3x + 5$

a) Exprimer, sans le symbole valeur absolue h(x) en fonction x.

b) Tracer la représentation graphique de h.

Solution de l’exercice 2

1.a) Construction f(x) = -2x + 14 et g(x) = 2x + 8.



b) Les coordonnées (x ; y) du point cherché s’obtiennent en résolvant l’équation :

$$f(x) = g(x)\ ;\ \text{donc} - 2x + 14 = 2x + 8 \Leftrightarrow -2x - 2x = 8 - 14 \Leftrightarrow -4x = -6 \Leftrightarrow x = \frac{-6}{-4} \Leftrightarrow x = 1,5\cdot$$

Donc f(1,5) = -2 ×(1,5) + 14 = -3 + 14 = 11 d’où le point cherché a pour coordonnées (1,5 ; 11).

$$\text{2. a) } A_{MBC} = \frac{MC \times AD}{2} = \frac{(CD - DM) \times AD}{2} = \frac{(7 - x) \times 4}{2} = 2(7 - x) = 14 - 2x$$

$$A_{ABMD} = \frac{(AB + DM) \times AD}{2} = \frac{(4 + x) \times 4}{2} = 2(4 + x) = 8 + 2x$$

b) La valeur de x pour que les deux aires soient égales est la solution de l’équation :

$$A_{ABMD} = A_{MBC} \Rightarrow 8 + 2x = 14 - 2x \Rightarrow 2x + 2x = 14 - 8 \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{4} = 1,5$$

Donc l'aire commune est : f(1,5) = -2× 1,5 + 14 = -3 + 14 = 11 ;

D'où (1, 5 ; 11) sont les coordonnées du point d'intersection des deux droites représentant les deux fonctions en question.

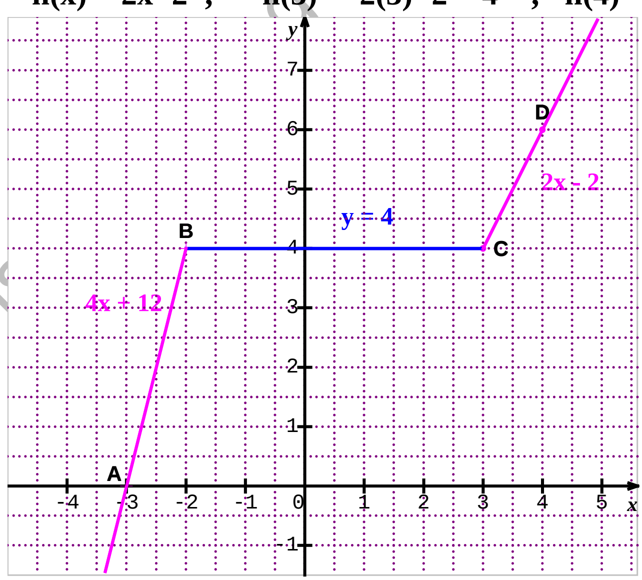
c) $f(x)+g(x) = -2x+14+8+2x = 22\cdot$ c'est l'aire du trapèze ABCD.

B) Expression de h(x) sans la valeur absolue : h(x) = - |2x - 4| + |3 -x | + 3x + 5

On détermine les valeurs qui annulent chacune des expressions 2x+4=0 et 3 – x = 0 soit x = -2 et x = 3 puis dressons le tableau suivant :

x	-∞	-2	3 +∞
|2x -4|	-2x-4	2x+4	2x+4
|3 -x|	3-x	3-x	x-3
h(x)	4x+12	4	2x-2

- **Sur] -∞ ; -2] ; h(x) = 4x +12 ; h(-3) = 4(-3) + 12 = 0 ;**
  h(-2) = 4(-2) +12 = -4 ; soit A(-3 ;0) et B(-2 ;4).
- **Sur [-2 ; 3] ; h(x) = 4 ; h(-2) = 4 , h(3) = 4 soit C(3 ;4)**
- **Sur [3 ; +∞] ; h(x) = 2x- 2 ; h(3) = 2(3) -2 = 4 ; h(4) = 2(4) -2 = 6**



Exercice 3

On considère les nombres A ; B ; C et D tels que :

$$A=\left(\frac{5}{3}\div 7-\frac{2}{7}\times\frac{1}{5}\right)^{-2}\quad ;\quad B=\frac{4}{15}+\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{4}\right)$$

$$C=\frac{\sqrt{3}-1}{2\times\sqrt{2}+1}\quad ;\quad D=\frac{0{,}64\times 10^{2}\times 4\times 10^{-5}}{8\times 10^{3}\times 5\times 10^{-6}}.$$

1) a) Calculer A et B et donner chaque résultat sous forme de fraction irréductible.

b) Exprimer C simplement sans radical au dénominateur.

c) Donner l'écriture décimale puis la notation scientifique de D.

2) Soit l'expression $E = (2x - 6)(1 - x) + (x^2 - 9)$.

a) Factoriser l'expression E .

b) Développer, réduire et ordonner E.

En déduire les solutions des équations E = -15 et E = 1.

3) a) Calculer la valeur numérique de E pour $x=\sqrt{5}$ · Notons par M le nombre obtenu.

b) Comparer les réels 20 et $8\sqrt{5}$; Justifier votre réponse.

c) En déduire le signe de M et donner sa valeur absolue.

d) Sachant que : $2{,}236<\sqrt{5}<2{,}237$, donner un encadrement de $20-8\sqrt{5}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.

Solution de l'exercice 3

1. a. Calculons A et B en donnant les résultats sous forme de fractions irréductibles.

- $$A=\left(\frac{5}{3}\div 7-\frac{2}{7}\times\frac{1}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{3}\times\frac{1}{7}-\frac{2}{7}\times\frac{1}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{3}\times\frac{1}{7}\times\frac{5}{5}-\frac{2}{7}\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{3}\right)^{-2}$$

$$=\left(\frac{25}{105}-\frac{6}{105}\right)^{-2}=\left(\frac{19}{105}\right)^{-2}=\left(\frac{105}{19}\right)^{2}=\frac{11025}{361}$$

- $$B=\frac{4}{15}+\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{4}\right)=\frac{4}{15}+\left(\frac{12}{20}-\frac{15}{20}\right)=\frac{4}{15}-\frac{3}{20}=\frac{16}{60}-\frac{9}{60}=\frac{7}{60}$$

b) Exprimons C sans radical au dénominateur

$$C = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}+1} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(2\sqrt{2}-1\right)}{\left(2\sqrt{2}+1\right)\left(2\sqrt{2}-1\right)} = \frac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-1^2} = \frac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1}{8-1} = \frac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1}{7}$$

c) Ecrivons D sous forme décimale puis donnons sa notation scientifique

$$D = \frac{0,64\times10^2\times4\times10^{-5}}{8\times10^3\times5\times10^{-6}} = \frac{0,64\times4\times10^2\times10^{-5}}{8\times5\times10^3\times10^{-6}} = \frac{2,56\times\cancel{10^{-3}}}{40\times\cancel{10^{-3}}} = 0,064;\ \text{ d'où } D = 6,4\times10^{-2}.$$

2.a) Factorisons E

$$E = (2x-6)(1-x)+\left(x^2-9\right) = (2x-2\times3)(1-x)+\left(x^2-3^2\right) = 2(x-3)(1-x)+(x-3)(x+3)$$

$$= (x-3)\left[2(1-x)+(x+3)\right] = (x-3)(2-2x+x+3) = (x-3)(-x+5).$$

b. Développons, réduisons puis ordonnons l'expression de E

$$E = (2x-6)(1-x)+\left(x^2-9\right) = 2x-2x^2-6+6x+x^2-9 = -x^2+8x-15$$

Les solutions de l'équation E= -15

$$E = -15 \Leftrightarrow -x^2+8x-15 = -15 \Leftrightarrow -x^2+8x = 0 \Leftrightarrow x(-x+8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 8,$$

donc les solutions sont 0 et 8.

Les solutions de l'équation : E = 1

$$-x^2+8x-15 = 1 \Leftrightarrow -x^2+8x-15-1 = 0 \Leftrightarrow -x^2+8x-16 = 0 \Leftrightarrow x^2-8x+16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2\times4\times x+4^2 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$ **Donc la solution est 4.**

3) a) Calculons la valeur numérique de E pour $x = \sqrt{5}$.
Notons par M le nombre obtenu.

$$M = -\left(\sqrt{5}\right)^2+8\sqrt{5}-15 = -5+8\sqrt{5}-15 = -20+8\sqrt{5}$$

b) Comparons les réels 20 et $8\sqrt{5}$;
Pour comparer deux réels positifs il suffit de comparer leurs carrés

$$20^2 = 400;\quad \left(8\sqrt{5}\right)^2 = 320 \text{ or } 400 > 320, \text{ donc } 20 > 8\sqrt{5}$$

c) Déduisons le signe de M
On a $20 > 8\sqrt{5}$ **donc** $-20+8\sqrt{5} < 0$ **d'où M est négatif** et $|M| = -M = 20-8\sqrt{5}$.

d) Encadrons $20-8\sqrt{5}$

Sachant que : $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$, **multiplions chaque membre de cette double inégalité par** -8, **on**

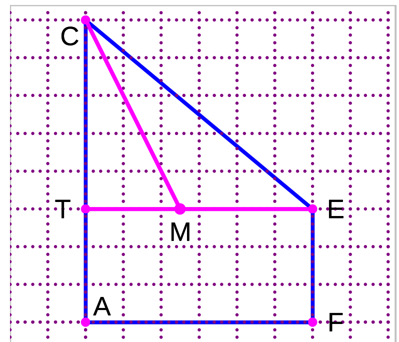
obtient $-8\times 2{,}236 > -8\sqrt{5} > -8\times 2{,}237 \Leftrightarrow -17{,}888 > -8\sqrt{5} > -17{,}896 \Leftrightarrow -17{,}896 < -8\sqrt{5} < -17{,}888$

Ajoutons à chaque membre 20, on obtient :

$$20 - 17{,}896 < 20 - 8\sqrt{5} < 20 - 17{,}888 \Leftrightarrow 2{,}104 < 20 - 8\sqrt{5} < 2{,}112 \Leftrightarrow 2{,}1 < 20 - 8\sqrt{5} < 2{,}2$$

Exercice 4

Sur la figure ci-contre AFET est un rectangle et ETC un triangle rectangle. On donne TC = 5cm; ET = 6cm et EF = 3cm. Le point M est un point du segment [TE] et la longueur TM est désignée par x.



Partie A

Dans cette partie, on choisit x = 2.

1. Calculer la valeur exacte de CM, puis sa valeur arrondie au dixième.

2. Calculer la valeur exacte de la tangente de $\widehat{TCM}$ et en déduire la mesure de l'angle $\widehat{TCM}$ arrondie au degré.

3. Calculer l'aire du triangle TCM et celle du triangle MEF.

Partie B

Dans cette partie, le point peut se déplacer librement sur le segment [TE].

1. Quelles sont les valeurs possibles de x ?

2. Exprimer en fonction de x l'aire du triangle TCM.

3.a) Exprimer ME en fonction de x.

b) Ecrire en fonction de x l'aire du triangle MEF et l'écrire sous forme ax + b (a et b à déterminer).

Partie C

1.Tracer les droites représentant les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{5}{2}x \text{ et } g(x) = -\frac{3}{2}x + 9.$$

2. Lire sur le graphique la valeur de x pour laquelle les triangles TCM et MEF ont la même aire.

3. Vérifier ce résultat par le calcul.

Solution de l'exercice 4

Partie A

1. On applique le théorème de Pythagore au triangle rectangle TCM :

$CM^2 = TC^2 + TM^2$; $CM^2 = 5^2 + 2^2 = 29$; $CM = \sqrt{29}$; $CM \approx 5,4cm$.

2. $\text{Calcul de } \tan(\widehat{TCM}) = \frac{TM}{TC} = \frac{2}{3} = 0,4, \text{ d'où } \widehat{TCM} \approx 22^o$

3. Calcul l'aire du triangle TCM : $A_{TCM} = \frac{1}{2} \times TC \times TM = 5cm^2$

Calcul de l'aire du triangle MEF : $A_{MEF} = \frac{1}{2} \times ME \times EF = 6cm^2$.

Partie B

1. Puisque le point M appartient au segment [TE] , alors 0 $0 \leq x \leq 6$.

2. Expression de l'aire du triangle TCM en fonction de x est :

$A_{TCM} = \frac{1}{2} \times TC \times TM = \frac{1}{2} \times 5 \times x \text{ donc } A_{TCM} = \frac{5}{2}x.$

3 a. Expression de ME en fonction de x :

ME = 6 - x

b. $A_{MEF} = \frac{1}{2} \times (6 - x) \times 3 \text{ soit } A_{MEF} = -\frac{3}{2}x + 9.$

Partie C

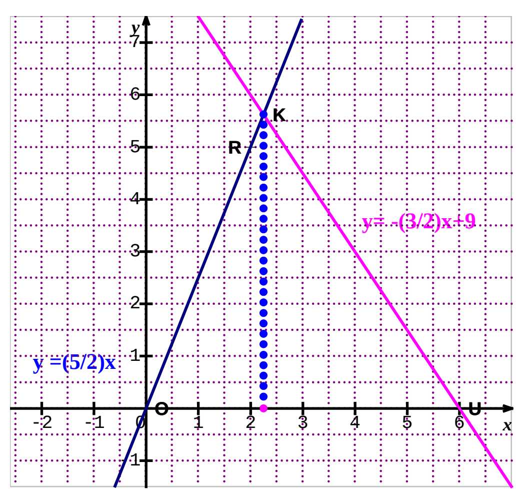
1. La courbe représentative de f est la droite qui passe par l'origine du repère et par R(2 ; 5).

La courbe de la fonction g est construite à partir de x = 0, y = 9 et x = 6, y = 0 ; donc la droite passe par les points S(0 ; 9) et U (6 ; 0).

2. Les deux triangles ont même aire si

$\frac{5}{2}x = -\frac{3}{2}x + 9 \text{ soit } 4x = 9 \text{ d'où } x = \frac{9}{4} = 2,25.$

Graphiquement : cette solution est l'abscisse du point de l'intersection des deux droites représentant les deux fonctions f et g (voir figure).



Partie géométrique

Rappel de cours & Exercices

1. Angles et cercles
2. Vecteurs et droites
3. Théorème de Pythagore
4. Théorème de Thalès
5. Trigonométrie
6. Transformations
7. Pyramide et cône

Exercices de synthèse

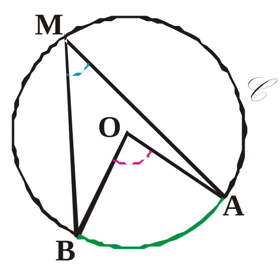
Chapitre 6

ANGLES ET CERCLES

1. Unités et formules de conversion

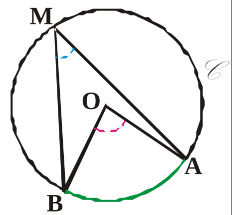
<table>
<tr><td>Le degré, le radian et le grade sont des unités de mesures d'angles.</td><td rowspan="2">Etant donné un angle de mesure a en degrés , b en radians et c en grades, alors
$$\frac{a}{180} = \frac{b}{\pi} = \frac{c}{200}$$</td></tr>
<tr><td>L'angle plat a pour mesure :
• 180 degrés (notation180°)
• π radians (notationπ rd).
• 200 grades (notation 200 gr)</td></tr>
</table>

2. Vocabulaire et propriétés

<table>
<tr><td>Un angle inscrit dans un cercle est un angle dont le sommet est un point du cercle et dont les côtés coupent le cercle en deux points distincts du sommet.</td><td rowspan="3">
Angle inscrit : $\widehat{AMB}$
Angle au centre : $\widehat{AOB}$
Arc intercepté : $\overset{\frown}{BA}$</td></tr>
<tr><td>Un angle au centre dans un cercle est un angle dont le sommet est le centre du cercle et dont les côtés coupent le cercle en deux points.</td></tr>
<tr><td>La portion de cercle comprise entre les deux côtés de l'angle s'appelle l'arc de cercle intercepté.</td></tr>
</table>

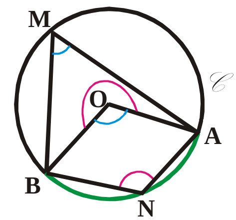
Si un angle inscrit dans un cercle et un angle au centre interceptent le même arc de cercle, alors l'angle au centre mesure le double de l'angle inscrit.

La mesure de l'angle inscrit est la moitié de celle de l'angle au centre qui intercepte le même arc.



$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$ **ou**

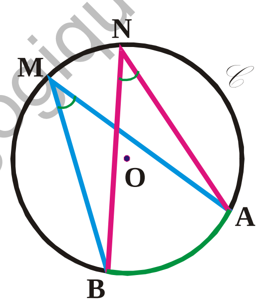
$\widehat{AMB} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$.



Les points M et N sont de part et d'autre de la corde [AB] :

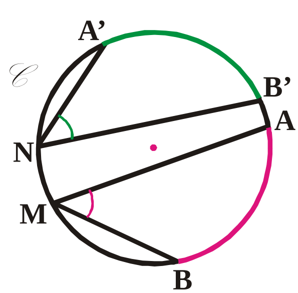
$\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = 180°$

Si deux angles inscrits dans un même cercle interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.



$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$

Si deux angles inscrits dans un même cercle interceptent deux arcs de même longueur, alors ils ont la même mesure.



Arcs interceptés

$\widehat{AB}$ **et** $\widehat{A'B'}$

de même longueur.

$\widehat{AMB} = \widehat{A'NB'}$

Exercices

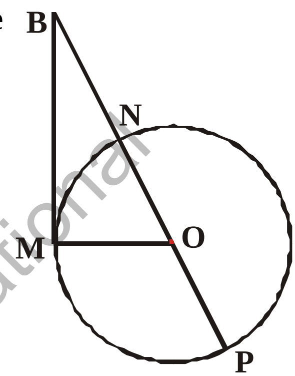
Exercice 1

AMB est un triangle rectangle en M. Le cercle de centre A passant par M coupe (AB) en N et P, tel $N \in [AB]$.

1) Montrer que : $\widehat{NAM} = \pi - 2 \times \widehat{AMN}$

2) Montrer que : $\widehat{AMN} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BMN}$

3) En déduire que : $\widehat{BMN} = \widehat{NPM}$



Solution de l'exercice 1

1. Montrons que $\widehat{NAM} = \pi - 2 \times \widehat{AMN}$.

Comme le triangle AMN est isocèle en A, alors $\widehat{NAM} = 180^\circ - 2 \times \widehat{AMN}$
ou encore : $\widehat{NAM} = \pi - 2 \times \widehat{AMN}$

2. Montrons que : $\widehat{AMN} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BMN}$

Comme AMB est un triangle rectangle en M et un point N tel que $N \in [AB]$, alors $\widehat{AMN}$ et $\widehat{BMN}$ sont complémentaires, donc $\widehat{AMN} = 90^\circ - \widehat{BMN}$; D'où :

$$\widehat{AMN} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BMN}$$

3. Montrons que $\widehat{BMN} = \widehat{NPM}$

Dans le cercle de diamètre $[PN]$, on a : $\widehat{NPM}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{MN}$.

$\widehat{NAM}$ est un angle au centre qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{NM}$, donc $\widehat{NPM} = \dfrac{\widehat{NAM}}{2}$.

On remplace $\widehat{NAM}$ par sa valeur calculée à la question 1.

$$\widehat{NPM} = \frac{\pi - 2\times\widehat{AMN}}{2} \quad \Rightarrow \widehat{NPM} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\times\widehat{AMN}}{2} \quad \Rightarrow \widehat{NPM} = \frac{\pi}{2} - \widehat{AMN}$$

On remplace $\widehat{AMN}$ par sa valeur calculée à question 2.

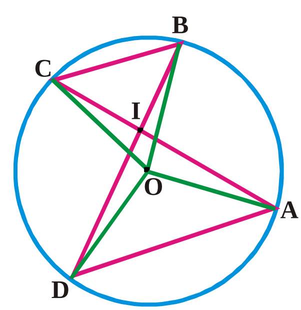
$$\widehat{NPM} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{BMN}\right) \quad \Rightarrow \widehat{NPM} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \widehat{BMN}, \text{ donc } \widehat{NPM} = \widehat{BMN}.$$

<u>Exercice 2</u>

Sur la figure ci – contre $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre O.

A,B,C et D sont quatre points de $(\mathscr{C})$ tels que

les angles au centre $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont des angles droits aux centre



1. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

2. Montrer que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

3. Montrer que AC = BD.

Solution de l'exercice 2

1. Montrons que les droites (AD) et (BC) sont parallèles :

On sait que $\widehat{AOB} = \widehat{COD} = 90^\circ$ · Dans le cercle $(\mathscr{C})$ on a :

$\widehat{CBD}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{CD}$ ·

$\widehat{COD}$ est un angle au centre qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{CD}$

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre associé, donc : $\widehat{CBD} = \dfrac{\widehat{COD}}{2} = \dfrac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ · .

Pour la même raison on a $\widehat{ADB} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2} = \dfrac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

On a montré que $\widehat{CBD} = \widehat{ADB}$ et les angles $\widehat{CBD}$ et $\widehat{ADB}$ sont alternes internes (voir figure), donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

2. Montrons que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

Il suffit de montrer que $\widehat{BIC} = 90^\circ$

Les deux angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ sont inscrits dans le cercle et interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$;

Alors ils ont la même mesure, donc $\widehat{ACB} = 45^\circ$

Dans le triangle BCI : On a $\widehat{CBI} = \widehat{CBD} = 45^\circ$ et $\widehat{BCI} = \widehat{BCA} = 45^\circ$, donc :

$\widehat{BIC} = 180^\circ - \left(45^\circ + 45^\circ\right) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ·

3. Montrons que AC = BD.

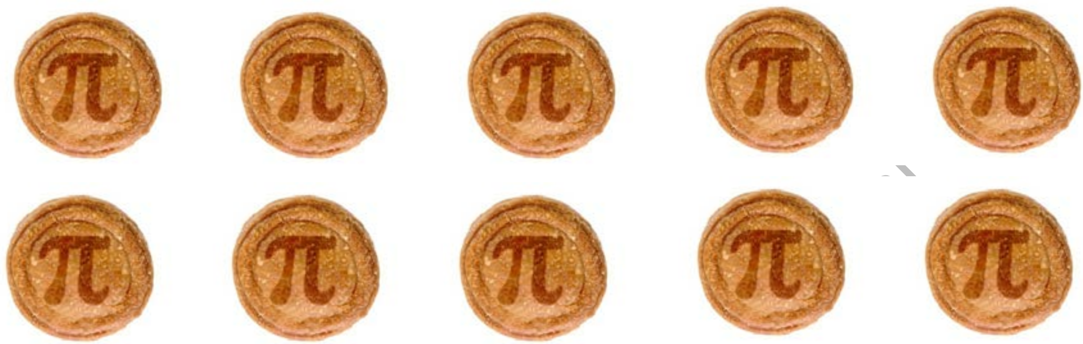
Il suffit de montrer qu'on a deux angles au centre égaux qui interceptent les arcs $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{BD}$ ·

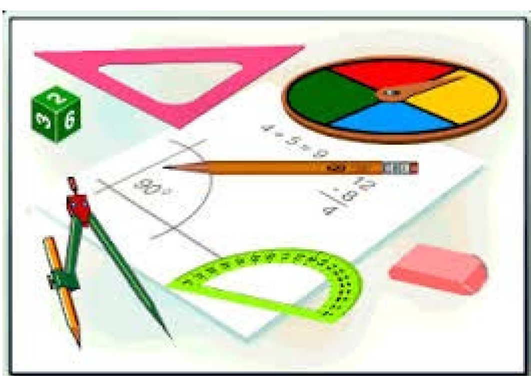
Dans le cercle $(\mathscr{C})$, l' angle $\widehat{AOC}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AC}$ et $\widehat{BOD}$ est un angle au centre qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{CD}$ ·

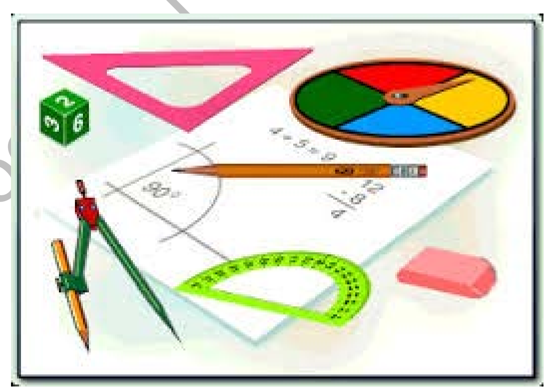
D’une part on a : $\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 90^\circ + \widehat{BOC}$

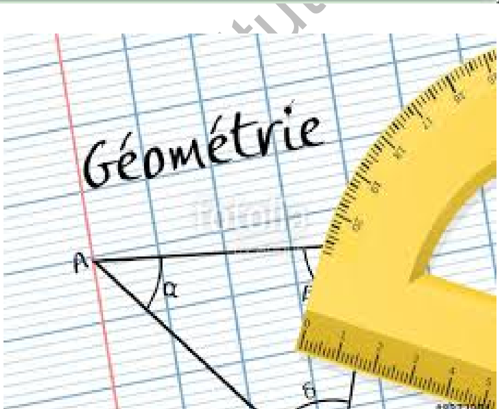
D’autre part : $\widehat{BOD} = \widehat{BOC} + \widehat{DOC} = \widehat{BOC} + 90^\circ$

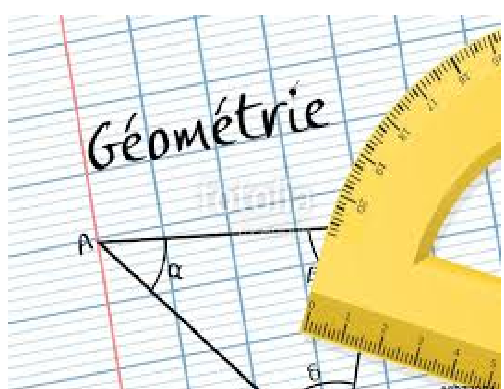
Donc $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ D’où, AC = BD.











Chapitre 7

VECTEURS ET DROITES

1. Egalités vectorielles et interprétation

Soient A ; B ; C ; D ; I ; M ; N ; E et F des points du plan, k un réel, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Egalité vectorielle	Interprétation
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$	ABCD est un parallélogramme.
$\overrightarrow{ME} = \vec{u}$	E est l'image du point M par la translation de vecteur $\vec{u}$
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EF}$	E et F sont les images respectives des points M et N par la même translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{NF}$.
$\vec{u} = k\vec{v}$	Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$	Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$	Les points A, B et C sont alignés.
$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$	Le point M appartient à la droite (AB).
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$	M est le milieu du segment [AB]. A et B sont symétriques par rapport à M.

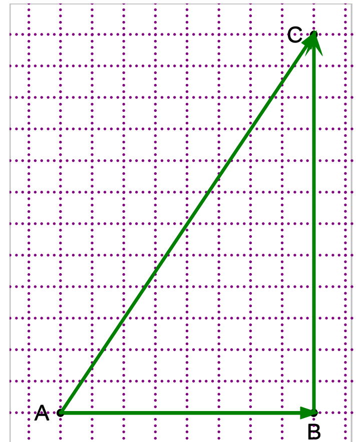
2. Somme de deux vecteurs

a) Relation de Chasles :

Quelque soient les points

A , B et C du plan :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

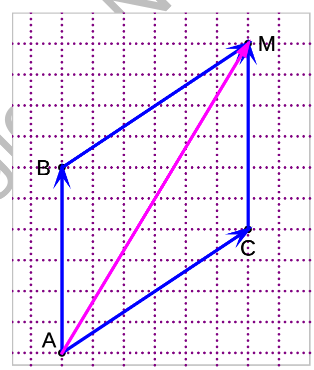


b) Règle de parallélogramme

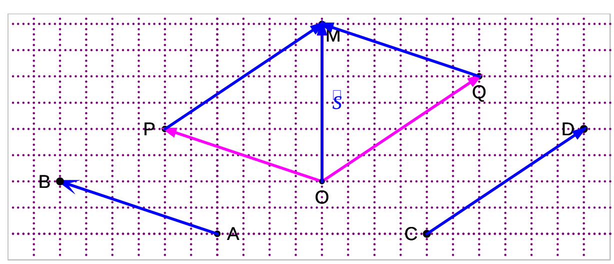
La somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AM}$ tel que BACM

est un parallélogramme

(voir figure ci-contre).

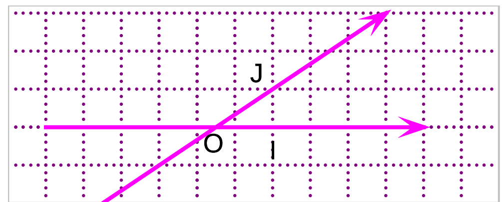


c) La somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est égale à la somme des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ c'est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que POQM est un parallélogramme.



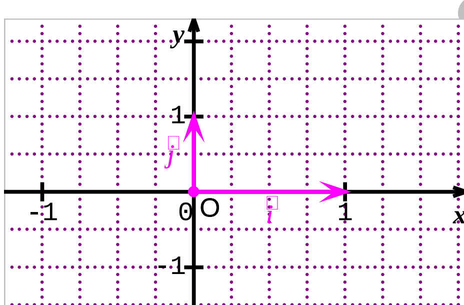
3. Types de repères

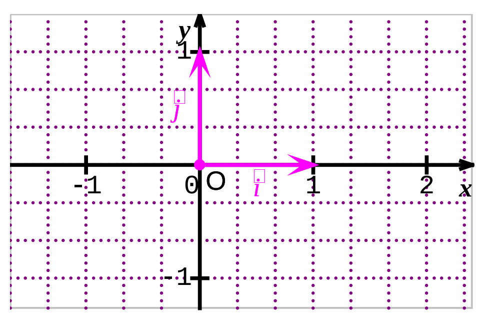
Définition

Un repère du plan est défini par trois points non alignés O , I et J, noté (O,I, J). Le point O est l'origine du repère, la droite (OI) est appelée axe des abscisses, la droite (OJ) est appelée axe des ordonnées. On peut aussi définir un repère à l'aide des vecteurs : **Si on pose $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ le repère**	

Cas particuliers :

- **Si les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, le repère est dit orthogonal.**
- **Si les points O, I et J forment un triangle rectangle isocèle en O (c'est-à-dire Si OI = OJ et (OI) $\perp$ (OJ)), alors le repère est dit orthonormé si OI = OJ = 1**





Repère orthogonal

$\|\vec{i}\| \neq \|\vec{j}\|$

Repère orthonormé

$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

4. Calcul dans le repère

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J).

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ et les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.

	Si …	alors : …
Somme de deux vecteurs	$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$	$\vec{w}\begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}$
Multiplication par un réel	$\vec{w} = k\vec{u}$	$\vec{w}\begin{pmatrix} k \times a \\ k \times b \end{pmatrix}$
Egalité de deux vecteurs	$\vec{u} = \vec{v}$	a = a' et b = b'
Colinéarité de deux vecteurs (1)	$\vec{u} = k\vec{v}$	a = ka' et b = kb'
Colinéarité de deux vecteurs (2)	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	ab'- ba' = 0 ou ab' = ba'
Orthogonalité de deux vecteurs	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux	aa' + bb' = 0
Coordonnées d'un vecteur	$A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
Distance entre deux points A et B	$A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Coordonnées du milieu d'un segment [AB]	M milieu du segment [AB]	$M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

5. Equation d'une droite

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J).

1) Définition

Une équation d'une droite est une égalité qui traduit l'appartenance d'un point de coordonnées (x ; y) à cette droite.

Remarque :

Un vecteur directeur d'une droite d est un vecteur non nul dont la direction est celle de d.

2) Conséquences :

- **Si $A(x_A ; y_B)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points quelconques et distincts d'une droite d,** alors le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d, et si $x_B \neq x_A$ le réel $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ est appelé coefficient directeur de la droite d.

- **Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.**

3) Caractérisation d'une droite

	Equation cartésienne (Droite quelconque)	Equation réduite (Droite non parallèle à l'axe des ordonnées)	Equation $x = c$ Droite parallèle à l'axe des ordonnées
Equation (de la forme)	$ax + by + c = 0$	$y = mx + p$	$x = c$
Vecteur directeur	$\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$	$\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$	$\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Coefficient directeur	$\dfrac{-a}{b}$ tel que $b \neq 0$	m	
Droite passant par l'origine	$ax + by = 0$	$y = mx$	$x = 0$

Remarque

Une droite a une infinité d'équations cartésiennes, elles sont équivalentes.

4) Parallélisme et orthogonalité

Equations de deux droites	$ax + by + c = 0$ $a'x + b'y + c' = 0$	$y = mx + p$ $y = m'x + p'$
Parallélisme	$ab' - a'b = 0$	$m = m'$
Orthogonalité	$aa' + bb' = 0$	$mm' = -1$

5) <u>Equation de droite et système linéaire</u>

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y est de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Résoudre graphiquement ce système revient à déterminer les coordonnées du point d'intersection (s'il existe) des droites Δ et Δ' d'équations respectives :

$ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.

Condition	$ab' - a'b \neq 0$	$ab' - a'b = 0$	
Position relative de droites	Les droites sont sécantes.	Les droites sont parallèles (ou confondues)	
Points communs	Un seul point commun.	Si $bc' - b'c \neq 0$, alors les droites sont strictement parallèles. Pas de points communs.	Si $bc' - b'c = 0$, alors les droites sont confondues. Une infinité de points communs.
Nombre de solutions du système	Le système a une unique solution.	Le système n'a pas de solution.	Le système a une infinité de solutions.

6. <u>Régionnement du plan</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

La droite Δ d'équation $ax + by + c = 0$ partage le plan en deux demi-plans ouverts de frontière Δ.

- **Le réel $ax + by + c$ associé à tout point $M(x\,;\,y)$ du plan est : nul pour tout point $M(x\,;\,y)$ de Δ ;**
- **Strictement positif pour tout point $M(x\,;\,y)$ de l'un de ces demi-plans ;**
- **Strictement négatif pour tout point $M(x\,;\,y)$ de l'autre demi-plan.**

Exercices

Exercice 1

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J).

Placer les points : A(3 ; 0) ; B(-1 ; 4) ; C (-3 ; 2) ; D(1 ; 6) .

2. Démontrer que les points B, C et D sont alignés.

3. Démontrer que les droites (AB) et (DC) sont perpendiculaires.

4. Calculer l'aire du triangle ABD.

5. Déterminer une équation de la droite Δ, médiatrice du segment [AB].

6. Déterminer les coordonnées du point M, tel que O est le milieu du segment [CM].

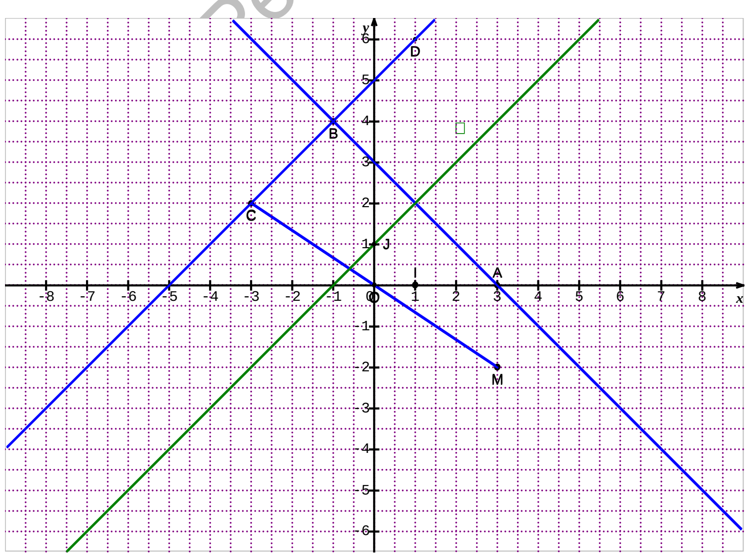
7. Lequel des points O et J appartient à Δ ?

Solution de l'exercice 1

1. Construction (Voir figure ci-dessous complétée au fur et à mesure)

A(3 ; 0); B(-1 ; 4) ; C (-3 ; 2) ; D(1 ; 6). (Δ) : la médiatrice du segment [AB].

M = S_O(C).



2. Pour démontrer que les points B ; C et D sont alignés, il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.

On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On remarque que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} = -1 \cdot \overrightarrow{BD}$, **donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.**
Alors les points B , C et D sont alignés.

3. Pour démontrer que les droites (AB) et (DC) sont perpendiculaires, il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

On a: $-4 \times (-4) + 4(-4) = 16 - 16 = 0$ **donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux.**

Alors les droites (AB) et (DC) sont perpendiculaires.

4. Calculons l'aire du triangle ABD :

On a montré que $(AB) \perp (DC)$; $B \in (DC)$, donc le triangle ABD est rectangle en B ;

- **L'aire du triangle ABD** $= \dfrac{AB \times BD}{2}$.
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
- $BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (6-4)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Donc l'aire du triangle ABD = $\dfrac{AB \times BD}{2} = \dfrac{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2} = 4 \times 2 = 8.$

5. Déterminons une équation de la droite Δ, médiatrice du segment [AB] :

La droite Δ est la médiatrice du segment [AB] , donc Δ passe par le milieu de [AB] et perpendiculaire sur (AB).

Soit E(x_E ; y_E) le milieu de [AB]

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad ; \qquad y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+4}{2} = \frac{4}{2} = 2, \text{ donc } E(1\,;2).$$

Pour tout point $N(x\,;y)$ de Δ, les vecteurs $\overrightarrow{EN}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux, alors

$-4(x-1) + 4(y-2) = 0 \Rightarrow -4x + 4 + 4y - 8 = 0 \Rightarrow -4x + 4y - 4 = 0$. Donc ($\Delta$): $x - y + 1 = 0$.

6. Déterminons les coordonnées du point M , pour que O soit le milieu du segment [CM].

Soit M(x_M ; y_M) ; le point O est le milieu du segment [CM], donc

$$\begin{cases} \dfrac{x_M + x_C}{2} = x_O \\ \dfrac{y_M + y_C}{2} = y_O \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_M + (-3)}{2} = 0 \\ \dfrac{y_M + 2}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 3 \\ y_M = -2 \end{cases} \Rightarrow \quad M(3;-2)$$

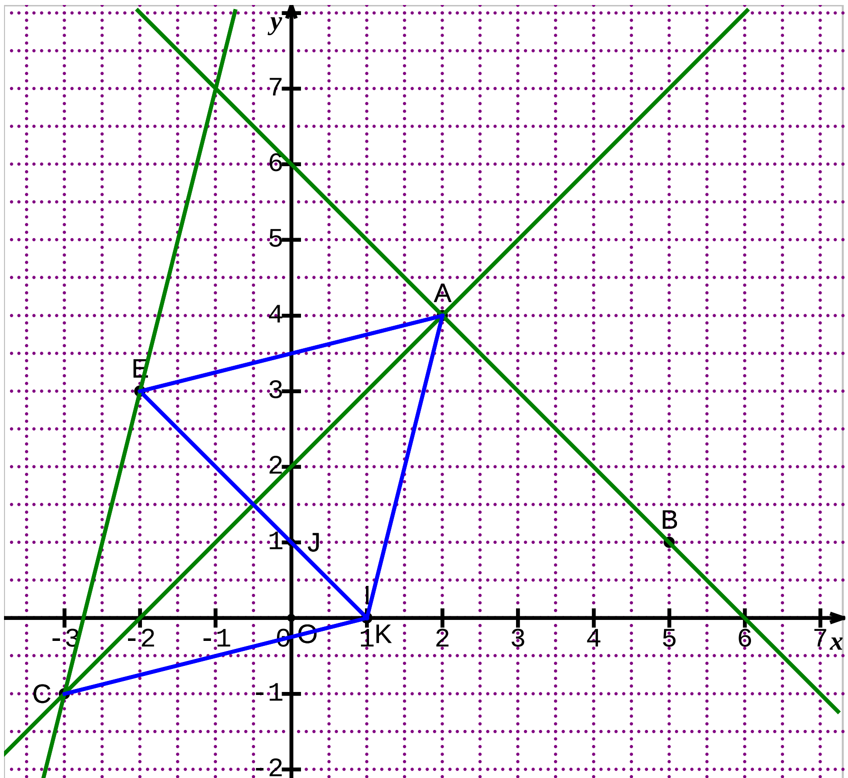
7. La droite Δ a une équation cartésienne sous la forme $ax + by + c = 0$, avec $c = 1$ ($c \neq 0$), donc la droite Δ ne passe pas par l'origine du repère O ; alors $J \in \Delta$.

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) tel que OI = OJ = 1 cm.
La figure sera complétée au fur et à mesure des questions.
l) Placer les points A(2 ; 4), B(5 ; 1) et C(- 3 ; - 1).
2) Calculer AB^2, AC^2 et BC^2. En déduire la nature du triangle ABC.
3) Calculer les coordonnées du milieu K de [BC] et vérifier que ces coordonnées sont celles de I.
4) Soit E le symétrique de I par rapport à la droite (AC).
Construire E et montrer que le quadrilatère AICE est un losange.
5) Vérifier que : « y = 4x + 11 » est une équation de la droite (CE).
Donner une équation de la droite (AB).
6) Les droites (CE) et (AB) se coupent en F. Calculer les coordonnées de F.

Solution de l'exercice 2

1. Construction



2.Calcul des longueurs

- $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (5-2)^2 + (1-4)^2 = 3^2 + (-3)^2 = 9 + 9 = 18$
- $AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (-3-2)^2 + (-1-4)^2 = (-5)^2 + (-5)^2 = 25 + 25 = 50$
- $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (-3-5)^2 + (-1-1)^2 = (-8)^2 + (-2)^2 = 64 + 4 = 68$

On a $AB^2 + AC^2 = BC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en A.

3) Calculons les coordonnées du pont K milieu de [BC] et vérifions que ces coordonnées sont celles de I : Soit K(x_k ; y_k) le milieu du segment [BC], donc :

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{x_C + x_B}{2} \\ y_K = \dfrac{y_C + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_K = \dfrac{-3+5}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_K = \dfrac{-1+1}{2} = \dfrac{0}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow K(1;0)$$

4. Montrons que le quadrilatère AICE est un losange, il suffit de montrer que ses côtés sont égaux.

- $AI = \sqrt{(x_I - x_A)^2 + (y_I - y_A)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$
- $IC = \sqrt{(x_C - x_I)^2 + (y_C - y_I)^2} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

Donc AI = IC.

Considérons la symétrie axiale par rapport à la droite (AC)

$$\begin{array}{ccc} & S_{(AC)} & \\ A & \mapsto & A \\ C & \mapsto & C \\ I & \mapsto & E \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & S_{(AC)} & \\ [AI] & \mapsto & [AE] \\ [IC] & \mapsto & [EC] \end{array}$$

La symétrie par rapport à une droite conserve les distances donc :

AI = AE et CE =CI. On a donc $\begin{cases} \begin{cases} AI=AE \\ IC=EC \end{cases} \\ AI=IC \end{cases} \Rightarrow AE=AI = IC = EC$

Alors le quadrilatère AICE est un losange.

5. Montrons que « y = 4x + 11 » est une équation de la droite (CE).

Il suffit de prouver que les coordonnées de C et E vérifient cette équation.

- **Pour** $C(-3;-1)$**, on a :** $4x_C + 11 = 4 \times (-3) + 11 = -12 + 11 = -1 = y_C$

- **Calcul des coordonnées de E :**

Soit $E(x_E ; y_E)$; le quadrilatère AICE est un losange, donc :

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IC} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C - x_I \\ y_C - y_I \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x_E \text{ - } 2 \\ y_E \text{ - } 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{-3 - 1} \\ \text{-1 - 0} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_E \text{ - } 2 = -4 \\ y_E \text{ - } 4 = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_E \text{ - } 2 = -4 \\ y_E \text{ - } 4 = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_E = -4 + 2 = -2 \\ y_E = -1 + 4 = 3 \end{cases}$ **D'où : E(-2;3)**

- **Pour E(– 2 ; 3), on a : $4x_E + 11 = 4 \times (-2) + 11 = -8 + 11 = 3 = y_E$**

- **Déterminons une équation de la droite (AB) :**

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-2 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB). Pour tout point M(x ;y)

de (AB), les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires, donc :

-3(x - 2) - 3(y - 4) = 0 =>-3x + 6 -3y +12 = 0 =>-3x -3y + 18 = 0.

D'où l'équation de la droite (AB) est : x + y – 6 = 0

6. Calculons les coordonnées du point F , intersection de (CE) et (AB) : Il suffit de résoudre le système formé par les équations de ces droites :

$\begin{cases} y = 4x + 11 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x + 11 \\ x + 4x + 11 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x + 11 \\ 5x + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x + 11 \\ 5x = -5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 4x + 11 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \times (-1) + 11 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -4 + 11 \\ x = -1 \end{cases}$

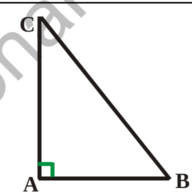
$\Rightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = -1 \end{cases}$ **D'où E(-1 ; 7).**

Chapitre 8

THEOREME DE PYTHAGORE

1. Théorème de Pythagore

Enoncé du théorème de Pythagore (Propriété directe)

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.	Si un triangle ABC est rectangle en A, alors: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ 

Remarques

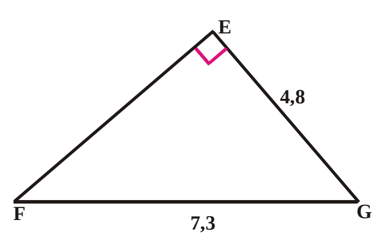
Dans un triangle rectangle :

- L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit, c'est le plus grand côté du triangle.
- Connaissant les longueurs de deux côtés, ce théorème permet de calculer le troisième.

Exemple

EFG est un triangle rectangle en E tel que EG = 4,8 cm et FG = 7,3 cm.
Calculer la longueur du segment [EF].

Corrigé

Le triangle EFG est rectangle en E. D'après le théorème de Pythagore, on a: $FG^2 = EF^2 + EG^2$; $7{,}3^2 = EF^2 + 4{,}8^2$ $EF^2 = 7{,}3^2 - 4{,}8^2$; $EF^2 = 53{,}29 - 23{,}04$ $EF^2 = 30{,}25$, donc : $EF = \sqrt{30{,}25}$ on obtient : EF = 5,5 cm.	

2. Réciproque du théorème de Pythagore (Propriété indirecte)

Dans un triangle si le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres, alors ce triangle est rectangle.

Dans un triangle si le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres, alors ce triangle est rectangle.	**Si un triangle ABC est tel que : $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors, il est rectangle en A. ([BC] est le plus grand côté de ABC).**

Remarque

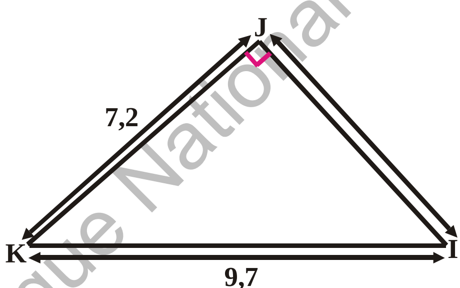
La réciproque du théorème de Pythagore permet de démontrer qu'un triangle est rectangle

Exemple

IJK est un triangle tel que :

IJ = 6,5 cm ; JK = 7,2 cm et IK = 9,7 cm.

Montrer que IJK est un triangle rectangle en J.



Corrigé

Calculons les carrés des longueurs des côtés du triangle IJK. le plus long est [IK]

$IK^2 = 9{,}7^2 = 94{,}09$; $IJ^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25$; $JK^2 = 7{,}2^2 = 51{,}84$

$IJ^2 + JK^2 = 42{,}25 + 51{,}84 = 94{,}09$, donc $IK^2 = IJ^2 + JK^2$ d'où, d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle IJK est rectangle en J.

3. Conséquence : Contraposé du théorème de Pythagore

Si le carré du plus grand coté d'un triangle rectangle n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres cotés, alors le triangle n'est pas rectangle.

Exemple

EFG est un triangle tel que : EF = 5 cm ; EG = 11 cm et FG = 12 cm.

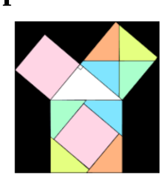
Le triangle EFG est il rectangle ?

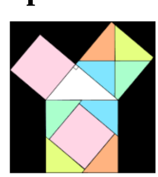
Corrigé

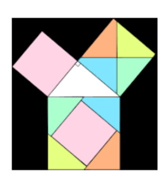
Dans le triangle EFG le côté le plus long est [FG],

d'une part, $FG^2 = 12^2 = 144$ et d'autre part, $EF^2 + EG^2 = 5^2 + 11^2 = 25+121 = 146$.

On remarque que $FG^2 \neq EF^2 + EG^2$, Donc d'après la contraposé du théorème de Pythagore le triangle EFG n'est pas rectangle.







Chapitre 9

THEOREME DE THALES

1. Produits en croix

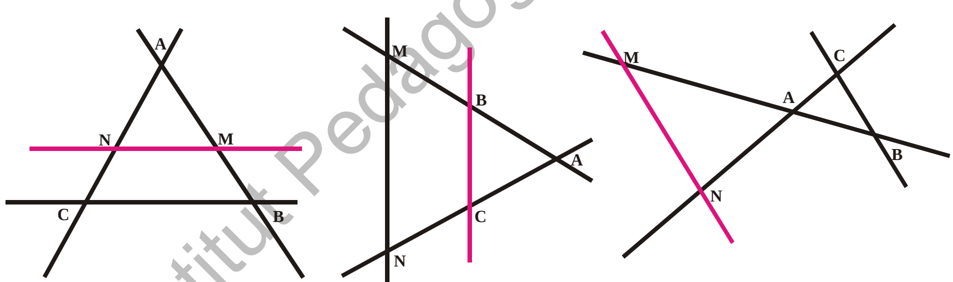
Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$ avec a, b, c et d des réels tels que: $b \neq 0$ et $d \neq 0$

D'où $a = \frac{c \times b}{d}$; $b = \frac{a \times d}{c} (c \neq 0)$; $c = \frac{a \times d}{b}$; $d = \frac{c \times b}{a} (a \neq 0)$

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ on a aussi $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, avec : $a \times b \times c \times d \neq 0$

2. Configuration de Thalès

Etant donnés un triangle ABC et deux points M , N tels que M ∈ (AB) ; N ∈ (AC) et (BC) // (MN) ; Trois cas de figure peuvent ainsi se présenter :



3. Théorème de Thalès

a) Enoncé du théorème de Thalès avec distances (propriété directe)

Si les triangles ABC et AMN forment une configuration de Thalès et si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors ces triangles ont leurs côtés proportionnels et on a :

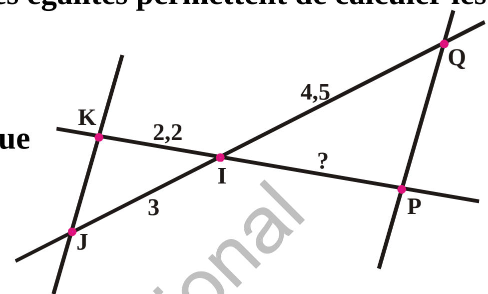
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Remarques

- **Cette formulation particulière est l'énoncé de la propriété directe du théorème de thalès appliqué à un triangle.**
- **Lorsque certaines longueurs sont connues, ces égalités permettent de calculer les autres longueurs.**

Exemple

Calculer la longueur du segment [IP] sachant que KI = 2,2 cm, JI = 3 cm, IQ = 4,5 cm et que les droites (JK) et (PQ) sont parallèles.



Corrigé

Les droites (KP) et (JQ) sont sécantes en I et les droites (JK) et (PQ) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a: $\frac{IK}{IP} = \frac{IJ}{IQ} = \frac{KJ}{PQ} \Rightarrow \frac{2.2}{IP} = \frac{3}{4.5}$

donc $IP = \frac{2,2 \times 4,5}{3} = 3,3\text{cm}.$

b) Théorème de Thalès avec énoncé vectoriel

Dans un triangle ABC, une parallèle à (BC) coupe (AB) et (AC) respectivement en M et N.

Si $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ **alors** $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$.

4. Reciproque du théorème de Thalès (Propriété indirecte)

a) Enoncé de la Réciproque de Thalès avec distance

Si les points A ; M ; B d'une part et les points A ; N ; C d'autre part sont alignés dans le même ordre et $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ **alors (MN) // (NC)**

b) Réciproque de Thalès avec énoncé vectoriel

Etant donnés un triangle ABC, deux points B' et C' et un réel k.

Si $\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AC}$ **, alors** $(B'C') // (BC)$.

5.Contraposée du théorème de Thalès

a) Contraposée

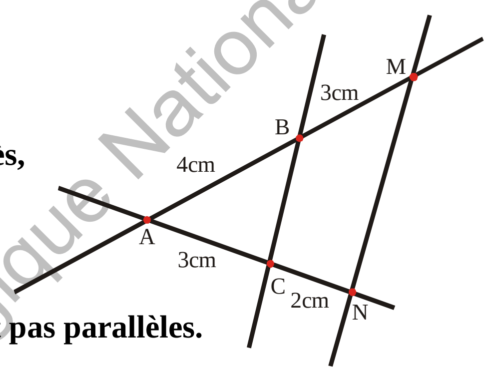
« Si…condition, alors… conclusion ».

La contraposée est la proposition logique :

« Si la conclusion est fausse, alors la condition est (forcément) fausse »

b) Contraposée du théorème de Thalès :

Si les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A, si les points B, A et M sont alignés dans cet ordre et si les points C, A et N sont alignés dans le même ordre ; si de plus deux des trois rapports $\frac{AM}{AB};\frac{AN}{AC};\frac{MN}{BC}$ ne sont pas égaux, alors les deux droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.



Remarque

D'après la contraposée du théorème de Thalès, on peut affirmer que les droites (AB) et (EF) ne sont pas parallèles.

Exemple

Montrer que les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

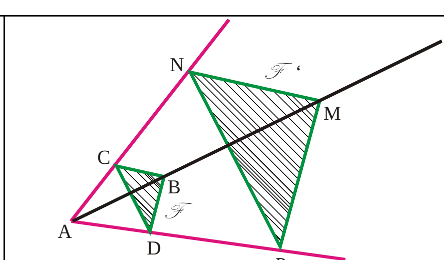
Corrigé

D'une part : $\frac{AC}{AN}=\frac{3}{5}=0,6$ **. d'autre part :** $\frac{AB}{AM}=\frac{4}{7}=0,57$

donc $\frac{AB}{AM}\neq\frac{AC}{AN}$ **; d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles**

6. Agrandissement – Réduction

Définition

Si deux figures ont la même forme et des longueurs proportionnelles, on dit que l'une est un agrandissement ou une réduction de l'autre.	

Remarques

1°) Dans un agrandissement ou une réduction, les mesures des angles, la perpendicularité et le parallélisme sont conservés.

2°) Naturellement, si on peut multiplier toutes les dimensions par k dans un sens, on peut les diviser toutes par k pour revenir dans l'autre sens !

3°) Si k est le coefficient de proportionnalité des longueurs de la figure F à la figure F', alors :

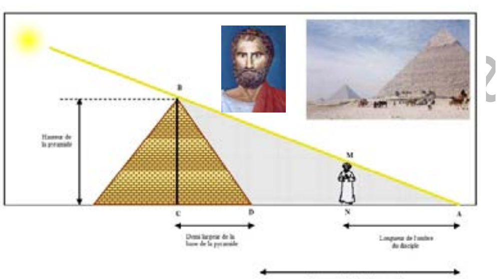
- **Si $k > 1$, la figure F' est un agrandissement de la figure F ;**
- **Si $0 < k < 1$, la figure F' est une réduction de la figure F.**

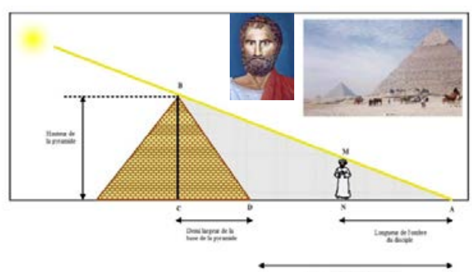
Propriété

Lorsqu'on agrandit ou on réduit une figure, toutes les dimensions sont multipliées par un même nombre $k > 0$, en conservant la même forme, alors le périmètre P est multiplié par k et l'aire A est multipliée par k^2.

$P' = k \times P$ et $\mathcal{A}' = k^2 \times \mathcal{A}$

Un peu de l'histoire
Comment Thlès a mesuré la longueur de la pyramide de Kiops ?





Dans le triangle ABC on a; $\begin{cases} M \in [AB] \\ N \in [AC] \\ (MN) \parallel (BC) \end{cases}$

On considère que le disciple se tient bien droit et que (MN) || (BC)

Le théorème de Thalès permet d'écrire : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

donc $\frac{3,5}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{1,8}{BC}$ or, $AC = AM + MD + CD = 3,5 + 163,4 + 115 = 281,9m.$

$\frac{3,5}{281,9} = \frac{1,8}{BC} \Rightarrow \frac{1,8 \times 281,9}{3,5} = 145m$ à 0,1près.

Chapitre 10

TRIGONOMETRIE

1. Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle

- **Le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.**
- **Le sinus d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.**
- **La tangente d'un angle aigu est égale au quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent à cet angle.**

Si ABC est un triangle rectangle en C, on a:

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \hat{A}}{\text{Hypoténuse}}$$

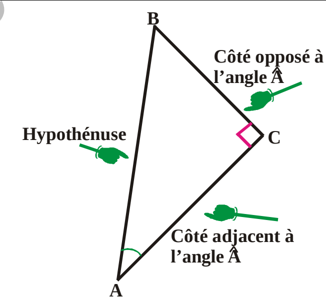
$$\sin \hat{A} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \hat{A}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \hat{A}}{\text{côté adjacent à l'angle } \hat{A}}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{AC}{AB}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AC}$$



2. Angles particuliers

Angles en radian	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angles en degré	**0 °**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sinus	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**
cosinus	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**
tangente	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	**pas de tangente**

3. Relations trigonométriques

Pour tout angle aigu x : $0 < \sin x < 1$; $0 < \cos x < 1$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Remarque

Si deux angles sont complémentaires, alors le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

Exemple

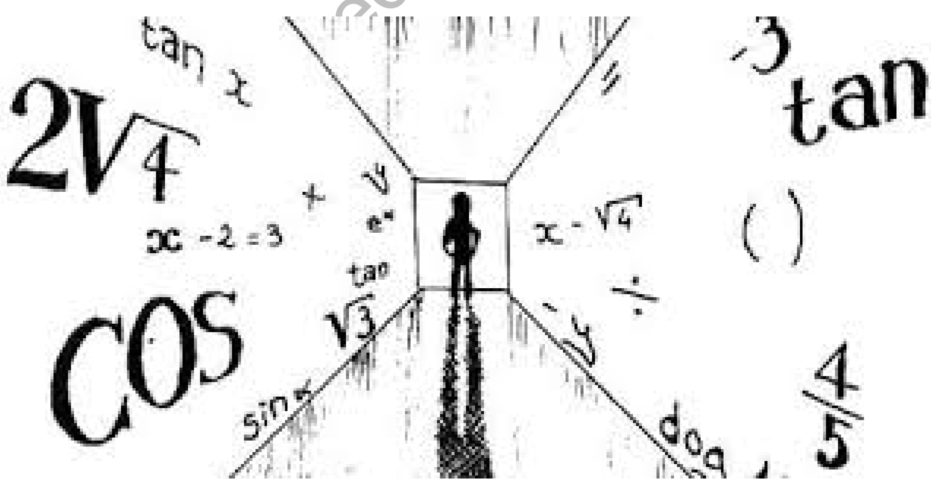
EFG est un triangle rectangle en F tel que $\widehat{E} = 50°$ et FG = 4cm.

Calculer la valeur approchée au centième près de la longueur du segment [EG].

Corrigé

EFG est un triangle rectangle en F ;

$$\text{donc } \sin\widehat{E} = \frac{FG}{EG} \Rightarrow \sin 50^\circ = \frac{4}{EG} \Rightarrow EG = \frac{4}{\sin 50^\circ} = \frac{4}{0{,}667} \Rightarrow EG \approx 5{,}99$$



Exercices

Exercice 1

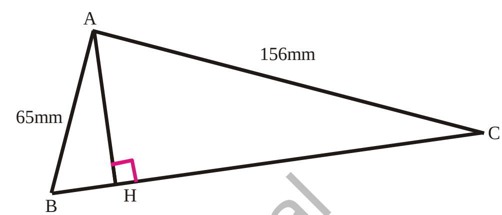
En utilisant le codage de la figure ci-contre

1) Calcule BC.

2) Exprime l'aire du triangle ABC en fonction de AC et AB. Calcule-la.

3) Exprime son aire en fonction de BC et AH. Déduis-en que AH = 60mm.

4) Calcule alors CH puis HB.



Solution de l'exercice 1

1. Calcul BC

ABC est un triangle rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, on a:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 65^2 + 156^2$ donc $BC^2 = 4225 + 24336 = 28561$ d'où : $BC = \sqrt{28561}$ On obtient : $BC = 169$ mm.

2. ABC est un triangle rectangle en A, donc son aire $= \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{65 \times 156}{2} = \dfrac{10140}{2} = 5070\text{mm}^2$.

3. Aire de ABC$= \dfrac{BC \times AH}{2} = \dfrac{169 \times AH}{2}$ mm², d'après la question 2 :

$\dfrac{169 \times AH}{2} = 5070 \Rightarrow 169 \times AH = 2 \times 5070 \Rightarrow 169 \times AH = 10140,$

d'où $AH = \dfrac{10140}{169} \Rightarrow AH = 60$ mm.

4. Calcul de CH

Le triangle ACH est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a:

$CH^2 + AH^2 = AC^2$; on tire:

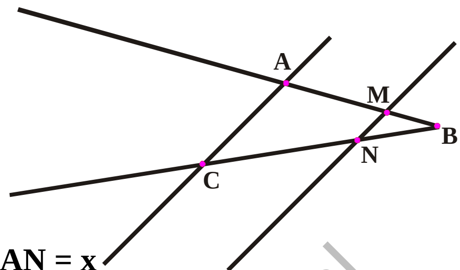
$CH^2 = AC^2 - AH^2 \Rightarrow CH^2 = 156^2 - 60^2 \Rightarrow CH^2 = 24336 - 3600 = 20736 \Rightarrow CH = \sqrt{20736}$.

D'où: CH = 144 mm

- **Calcul de HB :** HB = BC-CH = 169 -144 = 25 mm.

Exercice 2

ABC un triangle tel que AB = 6cm et BC = 9cm.
M un point du segment [AB] tel que AM = 2cm. La droite parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en N.



1.a) Calculer MN.

b) Donner une valeur de $\frac{AN}{AC}$

2. On suppose que NC = 4,5cm et on note AN = x

a) Exprimer AC en fonction de x.

b) Expliquer pourquoi: $\frac{x}{x+4.5}=\frac{1}{3}$.

c) Résoudre cette équation et donner la longueur de AN, puis de AC.

Solution de l'exercice 2

1. Les triangles ABC et AMN forment une configuration de Thalès, donc d'après le theorème de Thalès on a : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

a) Calcul de MN.

On a : $\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{2}{6}=\frac{MN}{9} \Rightarrow 6MN=18 \Rightarrow MN=3cm$.

b) On a : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{AN}{AC}=\frac{2}{6} \Rightarrow \frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}$

2. a) AC = AN + NC donc AC= x + 4,5

b) Dans la qustion 1.b) on a trouvé $\frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}$**, mais AN = x et AC= x + 4,5 ,**

donc : $\frac{x}{x+4,5}=\frac{1}{3}$.

c) $\frac{x}{x+4,5}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x = x + 4,5 \Leftrightarrow 2x = 4,5 \Leftrightarrow x = 2,25$

Donc $AN = 2,25cm$ et $AC = 2,25 + 4,5 = 6,75cm$.

Exercice 3

1. Construire un cercle de centre O de rayon 3cm .

Placer sur ce cercle trois points A, B et C tels que BC= 4cm, $\widehat{BCA} = 60°$.

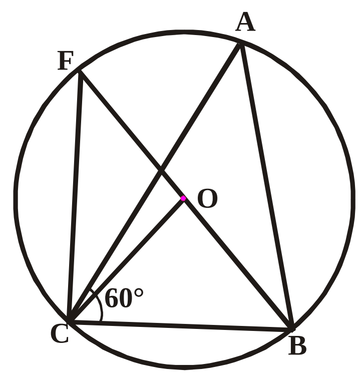
Construire, sur ce cercle, le point F diamétralement opposé au point B .

2. Démontrer que BFC est un triangle rectangle.

3. Calculer le sinus de $\widehat{BFC}$ en déduire la mesure de cet angle , arrondi à un degré près.

4. Déterminer au degré près les mesures des angles du triangle BOC.

Solution de l'exercice 3



1. Consruction (voir figure ci-contre)

2. Démontrons que BFC est un triangle rectangle.

On a [BF] est un diamètre du cercle circonscrit

au triangle BFC, alors BFC est triangle rectangle en C.

3. Calcul de sinus de $\widehat{BFC}$

$\sin\widehat{BFC} = \frac{BC}{BF} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. **A l'aide d' une calculatrice on a :**

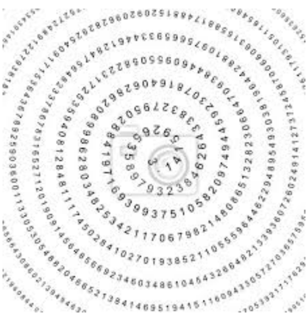
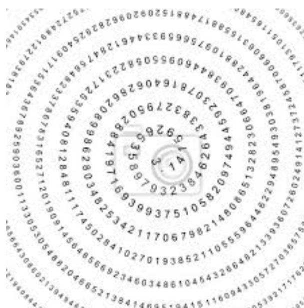
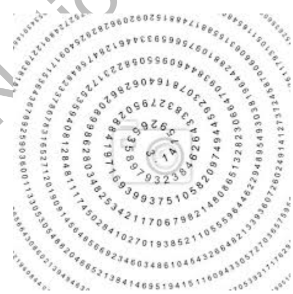
$\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 42^{\circ}$, **donc** $\widehat{BFC} = 42°$.

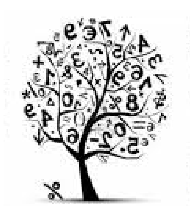
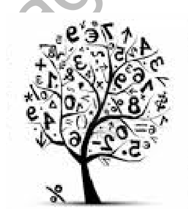
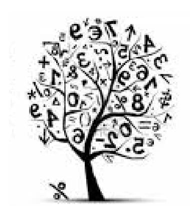
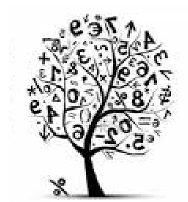
4. Determinons les mesures des angles du triangle BOC :

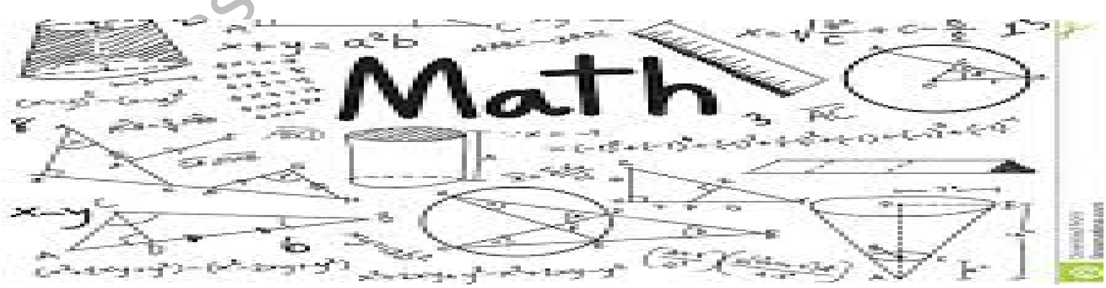
L'angle $\widehat{CBF} = 90° - \widehat{BFC} = 90° - 42° = 48°$ donc $\widehat{CBO} = 48°$

OBC est donc un triangle isocèle en O, d'où $\widehat{CBO} = \widehat{BCO} = 48°$.

L'angle $\widehat{COB} = 180° - 2 \times \widehat{BOC} = 180° - 2 \times 48° = \widehat{COB} = 180° - 96° = \widehat{COB} = 84°$.



Chapitre 11

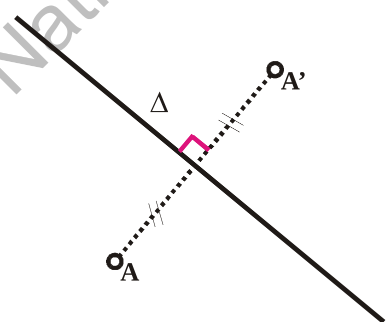
TRANSFORMATIONS

I. Symétrie axiale

Définition et notation

Soit Δ une droite et A un point:

- **Si $A \notin \Delta$, le symétrique du point A par rapport à la droite Δ est le point A' tel que Δ soit la médiatrice de [AA']. On dit alors que A et A' sont symétriques par rapport à Δ.**
- **Si $A \in \Delta$: le symétrique du point A par rapport à Δ est le point A lui-même. On dit que A est invariant par la symétrie d'axe Δ.**
- **$S_\Delta(A) = A' \Leftrightarrow \Delta$ est la médiatrice de $[AA']$.**



Propriétés de la symétrie axiale

La symétrie par rapport à une droite conserve l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, les distances, les angles, les périmètres et les aires.

II. Symétrie centrale

1. Définition et vocabulaire

Etant donné un point O, on dit que A' est le symétrique d'un point A par rapport au point O, si O est le milieu de [AA'].
$S_O(A) = A' \Leftrightarrow$ O est le milieu de [AA']. Dans ce cas, on peut aussi dire que A et A' sont symétriques par rapport au point O.

2. <u>Remarques</u>

On considère une symétrie centrale de centre O.

1) Un seul point a pour symétrique lui-même : le point O. On dit que le point O est invariant par la symétrie de centre O, Le point O est appelé le centre de symétrie.

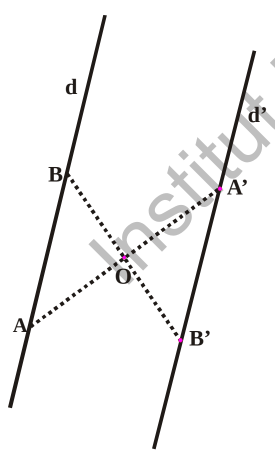
2) Si A' est le symétrique de A par rapport à O, alors A est le symétrique de A' par rapport à O.

3. <u>Symétrique d'une figure par rapport à un point</u>

Une symétrie de centre O correspond à un demi-tour autour de O.

Deux figures symétriques sont superposables.

On dit que: la figure $\mathscr{F}$' est le symétrique de la figure $\mathscr{F}$ par rapport au point O; ou encore que : les figures $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}$' sont symétriques par rapport au point O.

Cas où O $\notin$ d	**Cas où O $\in$ d**
	

Conséquence

Si trois points sont alignés, alors leurs symétriques sont alignés.

3. Centre de symétrie d'une figure

On dit qu'une figure admet un point O comme centre de symétrie si chaque point de la figure a son symétrique par rapport à O sur la figure elle-même.

Propriétés de la symétrie centrale

- La symétrie par rapport à un point conserve l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, les distances, les angles, les périmètres et les aires.
- Quand une figure est son propre symétrique par rapport à un point, ce point est appelé « centre de symétrie » de la figure.

III - Translation

1. Définition et propriétés

- **La translation de vecteur $\vec{u}$ qui transforme le point A en un point B est notée $t_{\vec{u}}(A) = B$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.**
- **La translation conserve l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, les distances, les angles, les périmètres et les aires.**

2. Composée de deux translations

La composée de la translation de vecteur $\vec{u}$, suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$. Si $\overrightarrow{AA_1} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{v}$ alors $\overrightarrow{AA_2} = \vec{u}+\vec{v}$

3. Composée de deux symétries centrales

La composée de la symétrie de centre O, suivie de la symétrie de centre O' est la translation de vecteur $2\times\overrightarrow{oo'}$ Si $S_O(A) = A'$ et $S_{O'}(A') = A''$, alors $\overrightarrow{AA''} = 2\times\overrightarrow{oo'}$

4. Composée de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires

La composée de deux symétries orthogonales par rapport à deux droites perpendiculaires en un point est la symétrie centrale de centre ce point.

Si $S_{\Delta}(A) = A'$ et $S_{\Delta'}(A') = A''$ alors $S_O(A) = A''$, avec $\{O\} = \Delta \cap \Delta'$.

Exercice 1

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ unité un centimètre.

1. Placer les points : A(4 ; 5), B(0 ;-3) et C(-6 ;0).

2.a) Montrer que $AB = \sqrt{80}$ cm $AC = \sqrt{125}$ et $BC = \sqrt{45}$cm.

b) En déduire que le triangle ABC est rectangle en un point que l'on précisera.

3.a) Construire le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

b) Démontrer que ABCD est un rectangle.

c) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

d) Vérifier à l'aide du calcul que le point D a pour coordonnées (-2 ;8).

4.a) Calculer les coordonnées de K milieu de [AC].

b) Que représente K pour ABCD ?

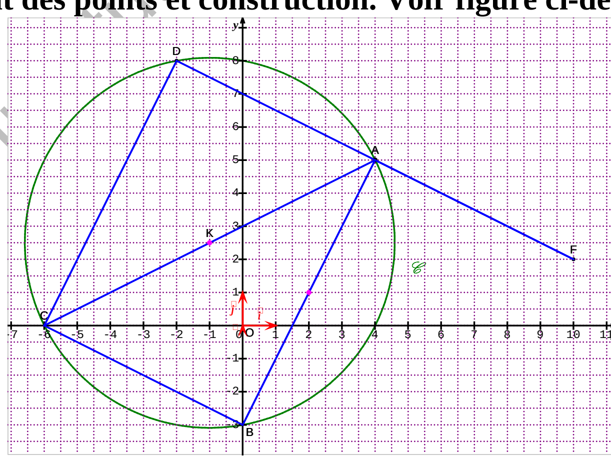
5.a) Quel est le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC ? Justifier.

b) Montrer que le point D est sur le cercle $\mathscr{C}$.

6. Soit F l'image du point A dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, montrer que (CF) coupe le segment [AB] en son milieu.

Solution de l'exercice

1. Emplacement des points et construction. Voir figure ci-dessous



2 . a. Montrons que $AB = \sqrt{80}$

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-4)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{80}$
- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-6-4)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{125}$
- $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-6-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{45}$

b. On a : $AC^2 = 125$; $BA^2 + BC^2 = 125$, donc $AC^2 = BA^2 + BC^2$; D'après la réciproque du théorème de Thales « si dans un triangle le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés , alors ce triangle est rectangle; donc ABC est un triangle rectangle en B.

3. a. Construisons le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Il s'agit du quatrième sommet du parallélogramme ABCD (voir figure).

b. On sait que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ traduit que ABDC est un parallélogramme et de plus ABC est un triangle rectangle en B donc ABDC est un rectangle.

c. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ -3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

d. Vérifions par le calcul les coordonnées de D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = x_C - x_B + x_A \\ y_D = y_C - y_B + y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -6 - 0 + 4 = -2 \\ y_D = 0 - (-3) + 5 = 8 \end{cases}$$ **donc D(-2 ;8)**

4. a. Calculons les coordonnées du point K milieu du segment [AC]

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{5}{2} = 2,5, \text{ donc } A(-1\ ;\ 2,5),$$

donc A(-1 ; 2,5)

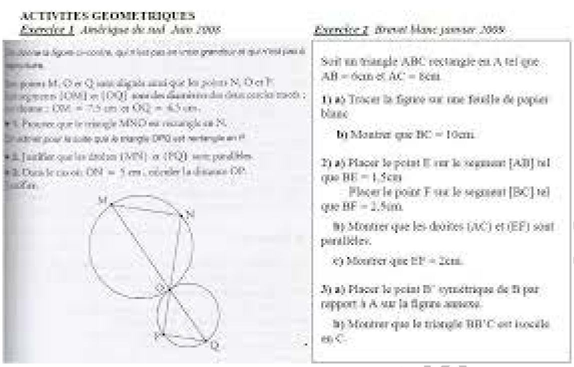
b. Le point K est le centre de symétrie de rectangle ABC .

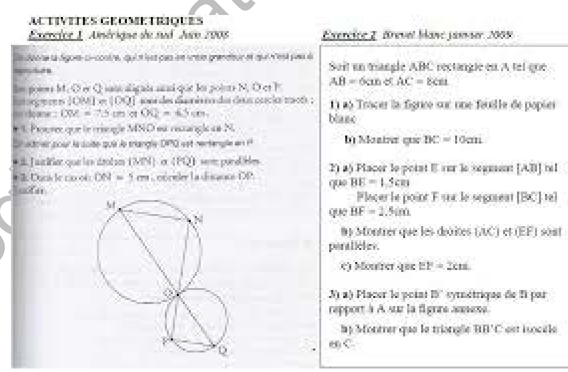
5. a. Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point K milieu de hypoténuse et de rayon KA.

b. K est le milieu de [DB] car ABCD est un rectangle.

6. F est l'image de A par la translation de $\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB}$, donc le quadrilatère AFBC est un parallélogramme ce qui se traduit par: les segments [AB] et [CF] se coupent en leur milieu, donc (CF) coupe le segment [AB] en son milieu.





Chapitre 12

PYRAMIDE ET CONE

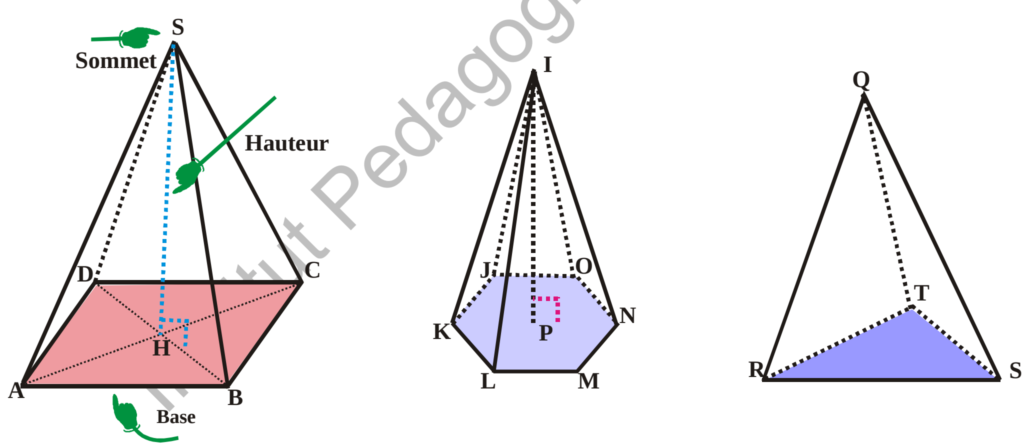
I. Pyramide

Définitions

Une pyramide est un solide qui possède :

- **Une base sous forme d'un polygone.**
- **Des faces latérales triangulaires qui ont un sommet commun : le sommet de la pyramide.**
- **La hauteur d'une pyramide est la distance entre le sommet et la base de la pyramide.**

Exemples

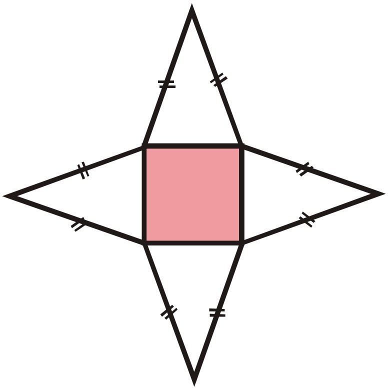


Cas particulier : **Une pyramide dont la base est un triangle est un tétraèdre.**

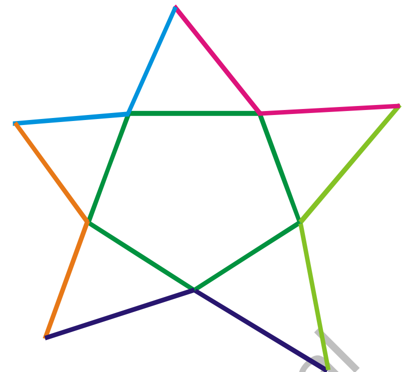
Patron d'une pyramide

Le patron d'une pyramide est formé de sa base et des faces latérales triangulaires.

Exemples



Patron d'une pyramide à base carrée



Patron d'une pyramide à base pentagonale

Pyramide régulière	**Conséquence**
Une pyramide est dite régulière si : • **Sa base est un polygone régulier** • **Le pied de sa hauteur est le centre de ce polygone.**	**Dans une pyramide régulière :** • **les faces latérales sont des triangles isocèles.** • **Les arêtes latérales sont égales entre elles mais ne sont pas nécessairement égales aux cotés de la base.**

Eléments métriques d'une pyramide

- **Le volume : $V=\frac{1}{3}\times$Aire de la base × hauteur**
- **L'aire latérale d'une pyramide est la somme des aires des faces latérales.**
- **L'aire latérale d'une pyramide régulière est $A_L=\frac{1}{2}$ p.a où: p est le périmètre du polygone de base ;**

a : apothème (hauteur d'un triangle issue du sommet)

- **L'aire totale d'une pyramide est la somme des aires latérales et de l'aire de base.**

II. Cône de révolution

Définitions

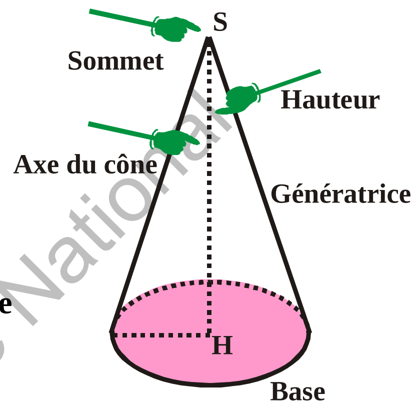
Un cône de révolution est le solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour de l'un des côtés de l'angle droit.

Un cône de révolution possède :

- **Un sommet**
- **Une surface latérale.**
- **Une base qui est un disque**

L'axe du cône est la droite qui passe par le centre de la base et le sommet du cône.

La hauteur du cône est la distance séparant le centre de la base et le sommet du cône.



Patron d'un cône de révolution :

- **Le patron d'un cône de révolution est formé d'un disque (la base) et d'une portion de disque.**
- **Le rayon de la portion de disque est égal à la longueur d'une génératrice.**
- **La longueur de l'arc de cercle est égale au périmètre du disque de la base.**

Exemple

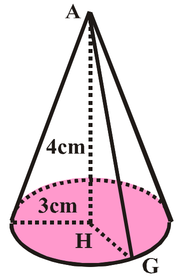
Tracer le patron d'un cône de révolution de rayon 3 cm et de hauteur 4 cm.

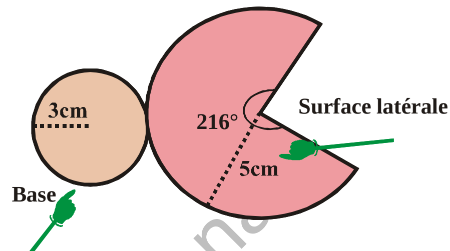
Corrigé

Pour déterminer la longueur de l' apothème AG : comme le triangle AGH est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$AG^2 = AH^2 + HG^2$; $AG^2 = 4^2 + 3^2$; $AG^2 = 16 + 9$; $AG^2 = 25$. Donc $AG = 5$ cm.

Le rayon de la portion de disque représentant la surface latérale est égal à 5cm.
Pour déterminer l'angle de la portion de disque, on utilise un tableau de proportionnalité pour que le périmètre de l'arc de cercle soit égal au périmètre du disque de la base.

Angle (en°)	360	x
Périmètre de l'arc de cercle	10π	6π
D'où $x = \dfrac{360 \times 6\pi}{10\pi} = 216°$		





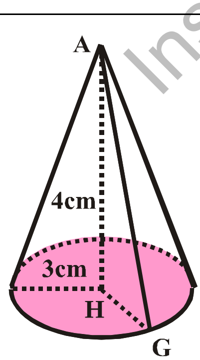
Patron d'un cône de révolution de rayon 3 cm et de hauteur 4 cm.

Eléments métriques

Formules : Soit un cône de révolution de hauteur h et de base r

- **Longueur de la génératrice** : $g = \sqrt{r^2 + h^2}$
- **Relations entre g, h et r** : $g = \sqrt{r^2 + h^2}$, $h = \sqrt{g^2 - r^2}$, $r = \sqrt{g^2 - h^2}$.
- **Aire latérale** : $A_\ell = \pi r g$;
- **Aire totale = aire latérale+ aire de disque de base** $S_t = \pi r g + \pi r^2 = \pi r (g + r)$.
- **Volume** : $V = \dfrac{1}{3}\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

Exemple



La base est un disque de rayon 3 cm. Calculons l'aire d'un disque de rayon 3 cm : $A = \pi \times R^2 = \pi \times 3^2 = 9 \times \pi \approx 28{,}3$ cm².
La hauteur du cône est égale à 4 cm.

Soit V le volume du cône : $V \approx \dfrac{1}{3} \times 28{,}3 \times 4$ soit $V \approx 37{,}7$ cm³

Exercices

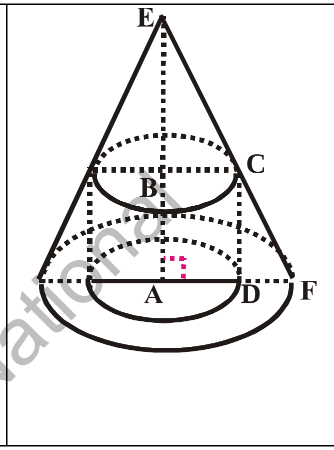
Exercice 1

Un cylindre est inscrit dans un cône, les deux axes sont confondus. On donne : rayon du cylindre : r = 2 cm; rayon de la base du cône : R = 6 cm; hauteur du cylindre : h = 4cm.

1) Quelle est la hauteur H du cône.

2) Montrer que $\frac{\text{volume du cône}}{\text{volume du cylindre}} = 4,5$.

3) Calculer l'aire latérale du cône.



Solution de l'exercice 1

1. Déterminons la hauteur du cône

Les points E,B et A sont alignés dans cet ordre et les points E,C et F sont alignés dans le même ordre et de plus (BC) est parallèle à (AF), d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{EB}{EA} = \frac{BC}{AF} \Leftrightarrow \frac{H-h}{H} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(H-h) = H \Leftrightarrow 2H = 3h$,

donc $H = \frac{3}{2}h$, d'où H= 6cm.

2. Montrons que $\frac{\text{volume du cône}}{\text{volume du cylindre}} = 4,5$

Soit V_{co} le volume du cône et V_{cy} celui du cylindre.

On a: $V_{co} = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$ et $V_{cy} = \pi \times r^2 \times h$, donc:

$$\frac{\text{Volume du cône}}{\text{Volue du cylindre}} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h}{\pi \times r^2 \times h} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 6}{\pi \times 2^2 \times 4} = 4,5 \text{ , d'où le résultat}$$

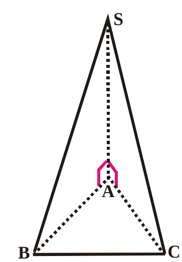
3. Détermination de l'aire latérale du cône :

$A_L = \pi.r.g$; $A_L = \pi \times r \times \sqrt{r^2 + h^2} = \pi \times 6 \times \sqrt{6^2 + 6^2} = 36\pi\sqrt{2}\text{cm}^2$.

Exercice 2

La figure ci-contre représente une pyramide de sommet S et de hauteur [SA], dont la base est un triangle ABC isocèle en A on appelle I le milieu du côté [BC].

On donne SA = 5 cm, AB = 5 cm et BC= 4 cm.



1. a) Représenter le triangle ABC en vraie grandeur.

b) Calculer la valeur exacte de AI et l'aire du triangle ABC.

c) Calculer le volume de la pyramide SABC.

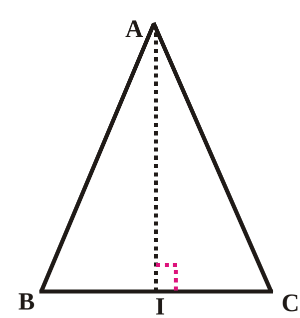
2. a) Dessiner un patron de la pyramide SABC.

b) Calculer les valeurs exactes de SB et de SC.

3. Soient A', B' et C' trois points appartenant respectivement aux segments [SA], [SB] et [SC] tels que: SA' = 3cm, (A'B') // (AB) et , (B'C') // (BC).

Calculer les longueurs A'B' et B'C'.

Solution de l'exercice 2



1.a) Représentation du triangle en vraie grandeur (voir figure ci-contre).

b) La valeur exacte de IA :

On sait que AIC est un triangle rectangle en I ;

D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = IC^2 + AI^2$ donc $AI^2 = AC^2 - IC^2$

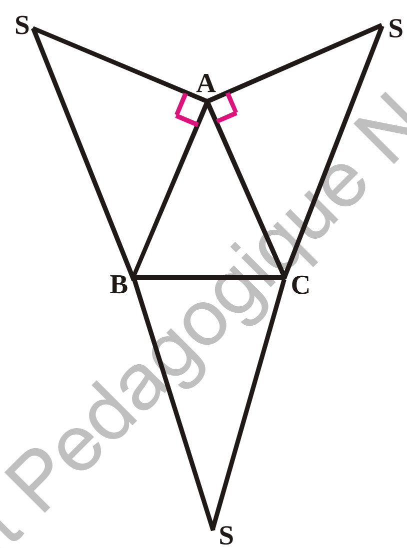
soit: $AI^2 = 5^2 + 2^2 = 21$, d'où : $AI = 2\sqrt{21}cm$.

L'aire de ABC est : $A_{ABC} = \dfrac{BC \times AI}{2} = \dfrac{2 \times 2\sqrt{21}}{2} = 2\sqrt{21}cm^2$.

c) Volume de la pyramide :

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{21} \times 5 = \frac{10}{3}\sqrt{21}cm^3$$

2. a. Patron de SABC



b. Calcul des valeurs exactes de SB et SC

Etant donné que le triangle SAB est rectangle en A, donc d'après Pythagore :

$BS^2 = AB^2 + AS^2$, d'où $BS^2 = 25 + 25 = 50$, donc $BS = 5\sqrt{2}cm$.

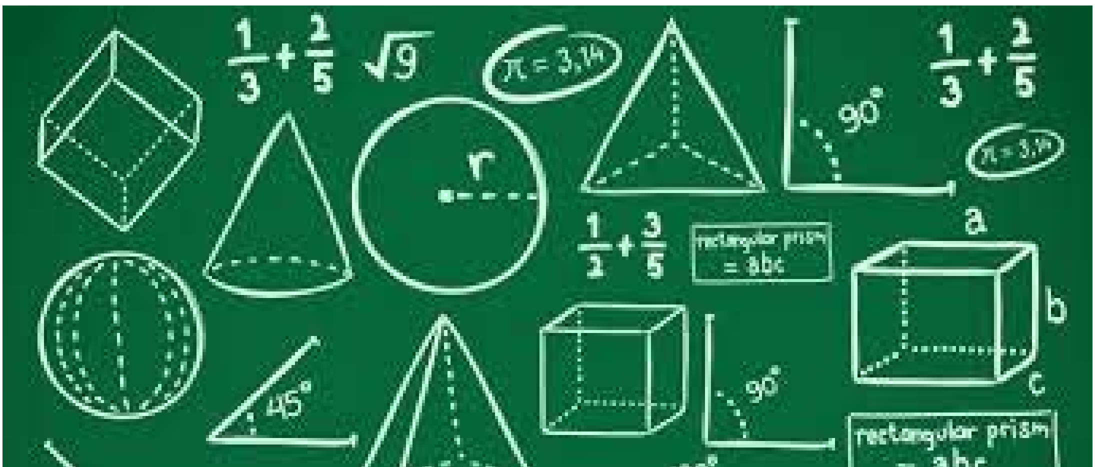
De même SAC est un triangle rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore :

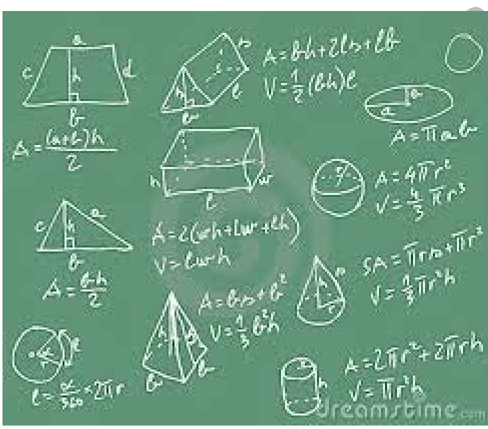
$$CS^2 = AC^2 + AS^2 \text{ d'où } CS = \sqrt{AC^2 + AS^2} = 5\sqrt{2} \text{ cm.}$$

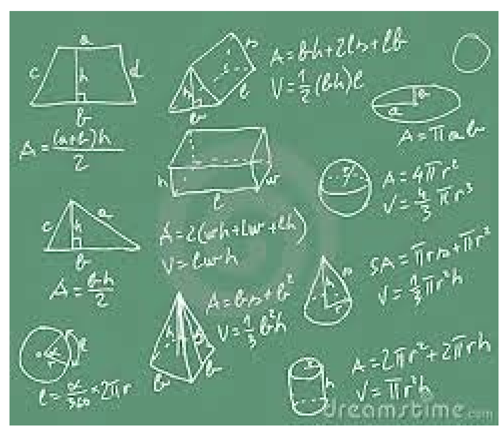
3) A', B' et C' appartenant respectivement aux segments [SA], [SB] et [SC] tels que (A 'B') // (AB) et (B'C') // (BC) nous obtenons une configuration de Thalès ;

D'après son théorème on a : $\frac{B'A'}{BA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SA'}{SA}=\frac{3}{5}$. **Donc, nous déduisons que:**

$A'B'=\frac{3}{5}AB=\frac{3}{5}\times 5=3cm$ **et** $B'C'=\frac{3}{5}BC=\frac{3}{5}\times 4=2,4cm.$











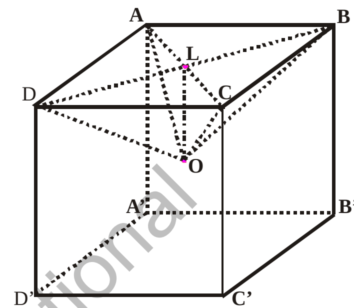

Exercices de synthèse

Exercices

Exercice 1

ABCDA'B'C'D' est un cube de centre O.

Première partie :

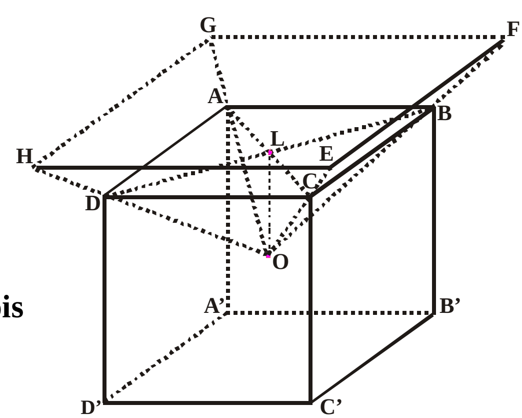


Dans cette partie, on a OL = 4 cm.

1. Construire en vraie grandeur, la face ABCD et placer le point L.
2. a. Calculer BD (on donnera une valeur arrondie au dixième).
   b. En déduire DL (on donnera une valeur arrondie au dixième).
3. a. Calculer le volume du cube ABCDA'B'C'D'.
   b. Calculer le volume de la pyramide OABCD.
   c. En déduire le volume du cube creusé.

Deuxième partie :

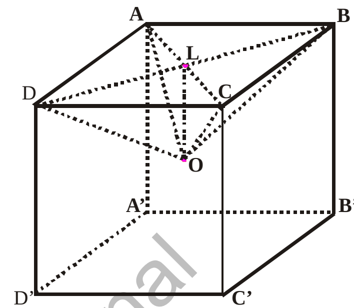
Dans cette partie on pose :
OL = x, où x est un nombre Compris entre 0 et 4 .
Le cube creusé que l'on obtient est le socle en bois d'un trophée.
Sur ce socle, on pose une pyramide en verre OEFGH qui est un agrandissement de la pyramide OABCD de rapport 3.



1. a. Calculer le volume de la pyramide OABCD en fonction de x.
   b. Montrer que le volume du socle en bois est $512-\frac{64x}{3}\text{cm}^3$.
2. Montrer que le volume de la pyramide en verre OEFGH est $576x\ \text{cm}^3$.
3. Calculer la valeur de x pour laquelle le volume de verre est égal à deux fois le volume de bois.

Solution de l'exercice 1

Première partie :



1. AB = 2 × OL =2 × 4 = 8cm

Construction de ABCD

2. a) Calcul de BD

ABD est un triangle rectangle et isocèle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2AB^2 = 2\times 4^2 = 32$$

$$BD = \sqrt{32} = \sqrt{16\times 2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow BD \approx 5,7$$

b) Calcul de BL

$$BL = \frac{DB}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \approx 2,8$$

3.a) Le volume du cube

$$V = AB^3 = 8^3 = 512cm^3$$

b) Le volume de la pyramide OABCD

$$V = \frac{B\times h}{3} = \frac{AB^2\times OL}{3} = \frac{8^2\times 4}{3} = \frac{128}{3}cm^2.$$

c) Le volume du cube creusé

Volume du cube creusé = Volume du cube - volume de la pyramide OABCD

$$\text{Volume du cube creusé} = 512 - \frac{128}{3} = \frac{512\times 3 - 128}{3} = \frac{1408}{3}cm^2$$

Deuxième partie

1. a. Le volume de la pyramide OABCD

$$V = \frac{B\times h}{3} = \frac{AB^2\times OL}{3} = \frac{8^2\times x}{3} = \frac{64x}{3}cm^2$$

b. Le volume du socle

$$\text{Volume du socle} = \text{Volume du cube} - \text{volume de la pyramide OABCD} = 512 - \frac{64x}{3}\ cm^3.$$

2. Volume de la pyramide en verre OEFGH.

La pyramide en verre OEFGH est un agrandissement de la pyramide OABCD

donc $V_{OEFGH} = 3^3 \times V_{OABCD} \Rightarrow V_{OEFGH} = 27 \times \frac{64x}{3} = 576x\ cm^3.$

3. Calculons la valeur de x pour laquelle le volume de verre est égal à deux fois le volume de bois

$$V_{OEFGH} = 2 \times V_{socle} \Leftrightarrow 576x = 2 \times \left(512 - \frac{64x}{3}\right)$$

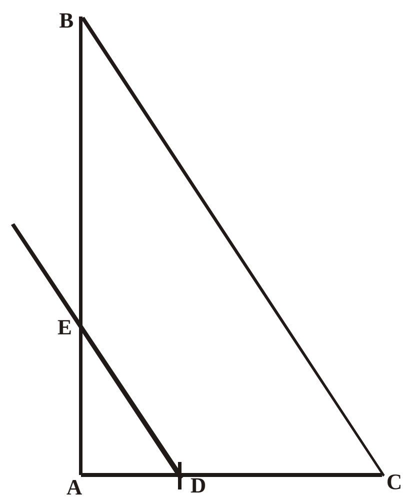
$$\Leftrightarrow 576x = 1024 - \frac{128x}{3} \Leftrightarrow 576x + \frac{128x}{3} = 1024$$

$$\Leftrightarrow \frac{1728x + 128x}{3} = 1024 \Leftrightarrow 1856x = 3072 \Leftrightarrow x = \frac{3072}{1856} \Leftrightarrow x \approx 1,67$$

<u>Exercice 2</u>

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 9 cm et AC = 6 cm.

D est le point du segment [AC] tel que AD = $\frac{1}{3}$ **AC.**



E est le point du segment [AB] tel que la droite (DE) soit parallèle à la droite (BC).

1. Reproduire la figure en grandeur réelle.

2. Calculer BC, puis donner sa valeur arrondie au centième.

3. Montrer par le calcul que AE = 3 cm.

4. Placer le point F sur le segment [AC] tel que AF = 4 cm.

Placer le point G sur le segment [AB] tel que AG = 6 cm. Tracer [FG].

5. Démontrer que la droite (FG) est parallèle à la droite (BC).

6. Donner la valeur arrondie au degré de l'angle $\widehat{ABC}$

7. En tournant autour de la droite (AB) le triangle ABC engendre un cône C_1**. Calculer le volume** V_1 **du cône** C_1 **en fonction de** π**, puis**

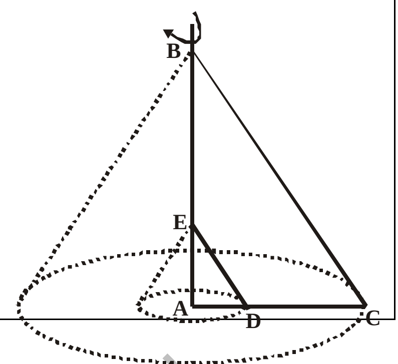
donner la valeur du résultat arrondie au millième.

8. En tournant autour de la droite (AB) le triangle AED engendre un cône C_2 de volume V_2.

Le cône C_2 est une réduction de C_1.

a) Quel est le coefficient de réduction ?

b) Exprimer le volume V_2 en fonction de V_1.



Solution de l'exercice 2

1. Voir la figure de l'énoncé.

2. Calculons BC :

Le triangle ABC est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9^2 + 6^2 = 81 + 36 = 117 \Rightarrow BC = \sqrt{117} \Rightarrow BC = 3\sqrt{13} \Rightarrow BC \approx 10,82\text{cm}.$$

3. Montrons que AE = 3 cm

Les triangles AED et ABC forment une configuration de Thalès, donc on a :

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3}AC}{AC} = \frac{AE}{9} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{AE}{9} \Leftrightarrow 3AE = 9 \Rightarrow AE = 3\text{cm}$$

4. Voir figure

5. Démontrons que la droite (FG) est parallèle à la droite (BC).

Les points A, Fet C alignés dans le même ordre que les points A,G et B et de plus

$\frac{AG}{AB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ et $\frac{AF}{AC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ **, d'après la réciproque de Thalès les droites (FG) et (BC) sont paralléles .**

6. Donnons la valeur arrondie au degré de l'angle $\widehat{ABC}$:

$\tan\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ **à l'aide' d'une calculatrice on obtient** $\widehat{ABC} \approx 34°$..

7. Calculons le volume V_1 du cône C_1 en fonction de π, puis donnons le résultat arrondie d'ordre 3

$$V_1 = \frac{1}{3}B \times h = \frac{1}{3}AC^2 \times \pi AB = \frac{1}{3} \times 6^2 \times \pi \times 9 = 108\pi \text{ cm}^3 \text{ , soit } V_1 = 339,292\text{cm}^3.$$

8. a. Le coefficient de réduction

Le cône C_2 est une réduction du cône C_1 de coefficient réduction $\frac{1}{3}$ car:

$AD = \frac{1}{3}AC.$

b. Comme C_2 est une réduction du cône C_1 de coefficient de réduction, donc:

$$V_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times V_1 = \frac{1}{27} \times V_1 \Leftrightarrow V_2 = \frac{V_1}{27}.$$

Exercice 3

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

les points A(6 ; 4), B(-6 ; -4) et C(4 ; -6) . Prendre comme unité 1cm.

1. Placer ces points, on complétera la figure au fur et à mesure.

2. a) Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.

b) En déduire que le triangle est rectangle, isocèle. Justifier.

3. Soit Δ la droite passant par O et parallèle à (BC) ; elle coupe (AC) en I.

a) Tracer Δ.

b) Montrer que O est le milieu de [AB].

c) Déterminer les rapports $\frac{OI}{AC}$ et $\frac{OI}{BC}$.

d) En déduire les coordonnées du point I.

e) Donner une équation de la droite Δ.

4. Construire le cercle ($\mathscr{C}$) circonscrit au triangle ABC. Préciser son centre.

5. La droite (OC) recoupe le cercle (C) en un point D.

a) Calculer les coordonnées de D.

b) Démontrer que les angles $\widehat{DBA}$ et $\widehat{ACD}$ sont égaux

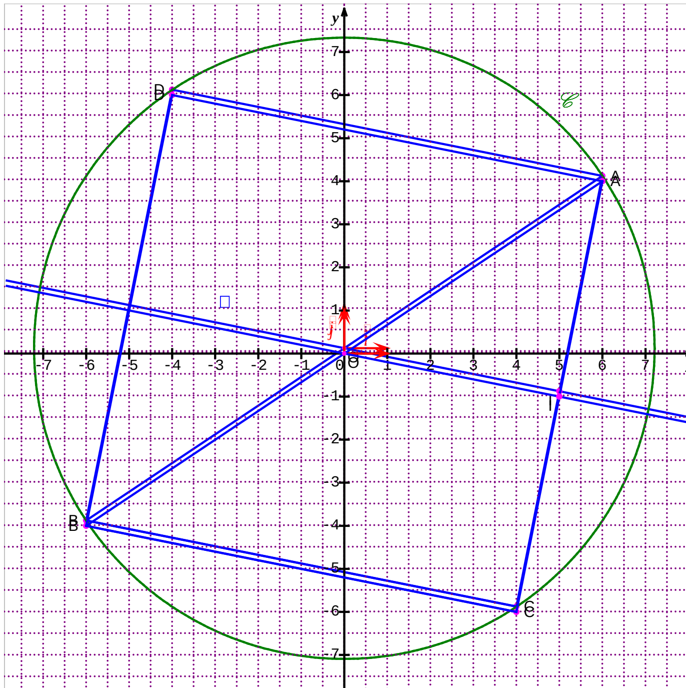
c) Montrer que le quadrilatère ADBC est un carré.

d) Quelle est la valeur de $\sin\widehat{DBA}$?

e) Quelle est la valeur de $\cos\widehat{DBA}$?

<u>Solution de l'exercice</u> 3

1) Emplacement des points et construction :



2. a) Calcul des longueurs :

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-6-6)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{(-12)^2 + (-8)^2} = \sqrt{144+64} = \sqrt{208}.$
- $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(4-(-6))^2 + (-6-(-4))^2} = \sqrt{10^2 + (-2)^2} = \sqrt{100+4} = \sqrt{104}.$
- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4-6)^2 + (-4-6)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-10)^2} = \sqrt{4+100} = \sqrt{104}.$

b) On a BC=AC et de plus $AB^2 = 208$ et $BC^2 + AC^2 = 104 + 104 = 208$ donc: $BC^2 + AC^2 = AB^2$, d'après la réciproque de Pythagore le triangle ABC est rectangle en C, d'où ABC est un triangle rectangle isocèle en C.

3. a) Traçons Δ : la parallèle à (BC) passant par O :

b) Montrons que O est le milieu de [AB].

Les coordonnées de O(0 ;0), $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{6+(-6)}{2} = \frac{0}{2} = 0 = x_O$; $\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4+(-4)}{2} = \frac{0}{2} = 0 = y_O$;

donc O est le milieu de [AB].

c) Déterminons les rapports $\frac{AI}{AC}$ et $\frac{OI}{BC}$.

Les points A, O et B sont alignés dans cet ordre et les points A, I et C sont alignés dans le même ordre et de plus (BC) est parallèle à (OI) donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AO}{AB}=\frac{AI}{AC}=\frac{OI}{BC} \quad \text{or} \quad \frac{AI}{AC}=\frac{OI}{BC}=\frac{AO}{2AO}=\frac{1}{2}.$$

d) Les coordonnées du point I.

Dans le triangle ABC la droite Δ passe par O milieu de [AB] et parallèle à (BC) ; donc d'après le théorème des milieux, Δ coupe (AC) en I, par conséquent I est le milieu de [AC].

$$x_I=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{6+4}{2}=\frac{10}{2}=5 \text{ et } \quad y_I=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{4+(-6)}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \quad \text{donc } I(5;-1)$$

e) L'équation de la droite Δ :

La droite Δ n'est pas parallèle à (Oy), donc elle admet une équation sous la forme :

$y=mx+p$, $\quad m=\frac{y_I+y_O}{x_I-x_O}=\frac{-1-0}{5-0}=\frac{-1}{5}$ et $O\in\Delta$ donc $p=0$ d'où la droite Δ à pour équation : $y=\frac{-1}{5}x$.

4. Construction du cercle ($\mathscr{C}$) circonscrit au triangle ABC.

Le cercle circonscrit à un triangle rectangle à pour diamètre son hypoténuse et pour centre le milieu de l'hypoténuse ;

Le centre du cercle ($\mathscr{C}$) circonscrit au triangle ABC est le point O, milieu de l'hypoténuse [AB]

5. La droite (OC) recoupe le cercle ($\mathscr{C}$) en un point D.

a) Calculons les coordonnées de D :

D est le symétrique de C par rapport à O, donc $x_D=-x_C=-4$ et $y_D=-y_C=6$

D'où D(-4 ; 6), ou bien le point O milieu de [DC],

donc $\dfrac{x_D + x_C}{2} = x_O = 0 \Rightarrow x_D + x_C = 0 \Rightarrow x_D = -x_C = -4$

$\dfrac{y_D + y_C}{2} = y_O = 0 \Rightarrow y_D + y_C = 0 \Rightarrow y_D = -y_C = 6$ **d'ou** $D\left(-4;6\right)$

b) Démontrons que les angles $\widehat{DBA}$ **et** $\widehat{ACD}$ **sont égaux :**

$\widehat{DBA}$ **et** $\widehat{ACD}$ **sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc** $\overset{\frown}{DA}$**, donc ils sont égaux.**

c) Montrons que le quadrilatère ADBC est un carré .

Pour montrer que ADBC est un carré il suffit de montrer qu'il est un parallélogramme qui a un angle droit et deux côtés consécutifs égaux.

Les diagonales [AB] et [DC] se coupent en leur milieu O, donc ADBC est un parallélogramme.

On a montré aussi que ABC est un triangle rectangle, isocèle en C ; alors le quadrilatère ADBC est un carré.

d) La valeur de $\sin\widehat{BAD}$

$$\sin\widehat{DBA} = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{104}}{\sqrt{208}} = \sqrt{\frac{104}{208}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e) La valeur de $\cos\widehat{BAD}$

$$\cos\widehat{BAD} = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{104}}{\sqrt{208}} = \sqrt{\frac{104}{208}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sujets type Brevet
05 sujets d'entraînements proposés

Sujet 1

Exercice 1

1. On donne $A = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{21}{15}$

a .Ecrire A sous forme d'une fraction irréductible en indiquant les étapes intermédiaires du calcul.

b. En utilisant la calculatrice ou non ; écrire $B = \frac{2\times10^{-5}\times5\times\left(10^{2}\right)^{3}}{4\times10^{-22}}$ sous la forme d'un nombre en écriture scientifique

c. Montrer que $C = \left(2+\sqrt{3}\right)^{2} + \left(1-2\sqrt{3}\right)^{2}$ est un nombre entier.

2. On donne $D = (4x+1)(x-3) - x^2 + 9$

a. Développer puis factoriser D

b. Résoudre l'équation D = 0

Exercice 2

Une coopérative agricole féminine possède un terrain sous forme de trapèze ABCD de bases [AB] et [DC] tel que AB = 40m ; DC=120m .
Les diagonales se coupent en I. La perpendiculaire à (AB) passant par I coupe (AB) en H et (AC) En K. On pose IH =x et IK= y.
1. Faire une figure que vous complétez au fur et à mesure.
2. a- Sachant que la hauteur du trapèze est de 80m, trouver une relation entre x et y.

b. Calculer $\frac{IA}{IC}$ puis $\frac{x}{y}$.

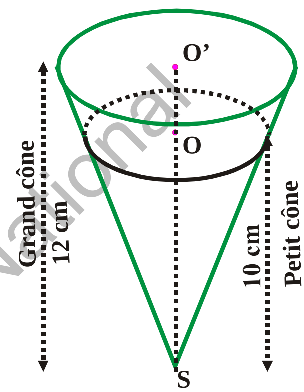
c. Calculer x et y

3. La coopérative veut connaitre le morcellement de son terrain pour y cultiver des variétés de légumes (aubergines, carottes, choux, oignons, gombo)

Aide la coopérative à déterminer les superficies suivantes : AIB ; DAB ; IDC ; AID et BIC correspondantes respectivement aux aubergines, carottes, choux, oignons et gombo.

Exercice 3

Un cornet de glace appelé « petit cône» a la forme d'un cône de hauteur SO = l0 cm, de rayon de disque de base 3 cm. La représentation en perspective est donnée ci-contre.



1) Calculer, en fonction de π, le volume exact de glace contenu dans le « petit cône» (celui-ci étant rempli)

2) Pour l'été, l'entreprise décide de fabriquer des « grands cônes », la hauteur du « grand cône» étant de 12 cm.

a) Le «grand cône» étant un agrandissement du« petit cône »,
Déterminer l'échelle d'agrandissement.

b) En déduire le volume du « grand cône » en fonction de π.

c) Quelle quantité de glace supplémentaire aura-t-on lorsqu'on achètera un « grand cône» plutôt qu'un « petit cône » ? On donnera la valeur exacte du résultat puis une valeur approchée à 1 centilitre prés.

Corrigé du sujet 1

Solution de l'exercice 1

a) Ecrivons A sous forme de fraction irréductible :

$$A=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}\times\frac{21}{15}=\frac{2}{3}-\frac{7}{3}=\frac{-5}{3}$$

b) Ecriture scientifique :

$$B=\frac{2\times10^{-3}\times5\times\left(10^{2}\right)^{3}}{4\times10^{-22}}=\frac{10\times10^{-3}\times10^{6}}{4\times10^{-22}}=\frac{10^{4}}{4\times10^{-22}}=\frac{10^{4+22}}{4}=\frac{10^{26}}{4}=0,25\times10^{26}=2,5\times10^{25}.$$

c) Montrons que : $C=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2}+\left(1-2\sqrt{3}\right)^{2}$ est entier naturel.

$C = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 + \left(1-2\sqrt{3}\right)^2 = 2^2 + 2\times 2\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 3 + 1^2 - 2\times 1\times 2\sqrt{3} + \left(2\sqrt{3}\right)^2$

$= 4 + 4\sqrt{3} + 1 - 4\sqrt{3} + 12 = 20.$

2) $D = (4x + 1)(x-3) - x^2 + 9$;

- **Développement : $D = 4x^2 - 12x + x - 3 - x^2 + 9 = 3x^2 - 11x + 6$;**
- **Factorisation :**

$D = (4x + 1)(x-3) - x^2 + 9 = (4x + 1)(x-3) - (x^2 - 9) = (4x + 1)(x-3) - (x-3)(x+3)$, d'où

$D = (x-3)[\,4x + 1 - (x+3)] = (x - 3)(3x - 2)$.

- **Résolution de : $D = 0$; $D = (x - 3)(3x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $\frac{2}{3}$.**

Solution de l'exercice 2 :

1. Relation entre x et y: sachant que la hauteur HK est de 80m et que :
$HK = HI + IK$, donc $x + y = 80$.

2. Calcul de $\frac{IA}{IC}$

Les points A,I et C et les points H,I et K sont alignés dans le même ordre et (AH) parallèles à (KC) d'après le théorème de Thalès on a $\frac{IA}{IC} = \frac{IH}{IK}$, or $AB = 40$ et $DC = 120$, donc : $\frac{IA}{IC} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$.

Calcul de $\frac{x}{y}$. Les points A, I et C et les points B,I et D sont alignés dans le même ordre et (AB) parallèles à (DC) d'après le théorème de Thalès on a $\frac{IA}{IC} = \frac{IH}{IK}$,

or $IH = x$ et $IK = y$, donc : $\frac{IH}{IK} = \frac{IA}{IC} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{3}$.

3. Calcul de x et y

En utilisant les questions précédentes on obtient le système suivant :

$x + y = 8$ et $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$ soit $x + y = 80$ et $y = 3x$ en utilisant la méthode par substitution on a : $x + 3x = 80$ d'où $4x = 80$ donc $x = 20$ et $y = 60$.

4. ABI est un triangle de base [AB] et de Hauteur [IH] ; l'aire AIB est :

$A = \frac{1}{2} AB \times IH$ **soit** • $A = \frac{1}{2} \times 40 \times 20 = 400m^2$.

DAB est un triangle de base [AB] et de Hauteur [KH] ; L'aire DAB est :

• $A_{DAB} = \frac{1}{2} AB \times HK = \frac{1}{2} \times 40 \times 80 = 1600m^2$. **DIC est un triangle de base [DC] et de Hauteur [KI] ;**

• **L'aire DIC est :** $A_{DIC} = \frac{1}{2} DC \times IK = \frac{1}{2} \times 120 \times 60 = 3600m^2$.

✓ **AID est un triangle son aire est** $A_{AID} = A_{ADB} - A_{BAI}$
soit $A_{AID} = 1600 - 400 = 1200m^2$

✓ **BIC est un triangle son aire est** $A_{BIC} = A_{ABC} - A_{BAI}$
soit $A_{BIC} = 1600 - 400 = 1200m^2$

Solution de l'exercice 3

1) Calculons le volume exact de glace contenu dans le «petit cône» en fonction de π:
Soit V le volume du "petit cône"

$V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 10 = 30\pi \ cm^3$

2) a) Déterminons l'échelle d'agrandissement :

L'échelle d'agrandissement est de $\frac{SO'}{SO} = \frac{12}{10} = 1,2$

b) Déduisons en que le volume du « grand cône » en fonction de π.
Le "grand cône" est agrandissement du "petit cône"
Soit V' le volume du "grand cône".
$V' = 1,2^3 \times V = 1,728 \times 30\pi = 51,84\pi \ cm^3$

c) La quantité de glace supplémentaire lorsqu'on achète un grand cône plutôt qu'un petit cône :
V'- V= 51,84π - 30π = 21,84π, d'où V' - V≈ 68,6 cm³ ; soit 7cl.
Lorsqu'on achète un « grand cône» plutôt qu'un « petit cône », on achète 7cl de glace supplémentaire.

Sujet 2

Exercice 1

Choisis la bonne réponse, en justifiant ton choix. « Toute réponse doit obligatoirement être justifiée »

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	$(\cos 2° + \sin 2°)^2 + (\cos 2° - \sin 2°)^2 =$	2cos4°+ 2sin4°	4cos4°+ sin4°	2
2	Dans un repère ; (CB) est la représentation graphique d'une fonction affine *f*. C (–3 ; 7) et B (– 6 ; 9), donc *f*(*x*) =	$\frac{-2}{3}x+5$	-2x+1	–x+3
3	La solution de l'équation : $x\sqrt{2}-1=\sqrt{2}$ est:	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	1
4	Si $\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, alors $\cos 15° =$	n'existe pas	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
5	Si on augmente de 7% les longueurs des côtés d'un pentagone régulière, son périmètre augmente de :	7%	35%	5%
6	Un verre conique est rempli à mi-hauteur. La partie vide représente :	Autant que la partie remplie	7 fois la partie remplie	8 fois la partie remplie

Exercice 2

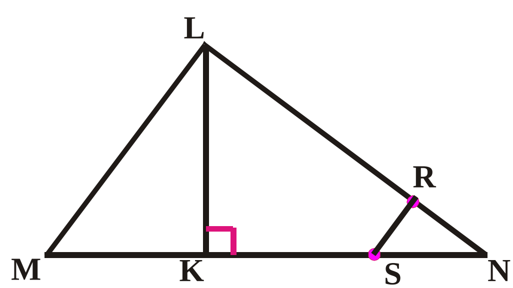
On considère la figure ci-contre :
On donne MN=8cm; ML= 4,8cm; LN= 6,4cm.

1. Démontrer que le triangle LMN est rectangle.

2. Calculer la valeur arrondie au degré de la mesure de l'angle $\widehat{LMN}$.

3. Soit K le pied de la hauteur issue de L. Calculer LK.

4. Soit S le point de [MN] tel que NS = 2 cm. La perpendiculaire à (LN) passant par S coupe [LN] en R. Calculer la valeur exacte de RS.



5. a. Reproduire la figure précédente puis tracer le cercle qui passe par les points L, K , S et R.

5. b. Calculer la valeur arrondie au degré de la mesure de l'angle $\widehat{KLR}$.

5.c. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{KSR}$.

Exercice 3

1. Construire un triangle isocèle SAB avec SB = SA=6 ,5cm et AB= 5cm. La hauteur issue de S coupe [AB] en I. Placer le point D sur (SI) à l'extérieur du triangle tel que : ID = 3cm. La parallèle à (AB) passant par D coupe (SA) en A' et (SB) en B'.

2. Calculer SI

3. Calculer $\frac{DA'}{IA}$.

4. En tournant autour de (IS), les triangles SAB et SA'B' créent deux cônes C et C', de volumes respectifs V et V'.

a. Calculer V en fonction de π

b. Exprimer V' en fonction de V.

Exercice 4

On donne une série statistique ordonnée :

Valeur	6	8	9	10	11	a
Effectif	3	4	1	2	3	b

a) Déterminer la valeur de b sachant que la médiane de cette série est 9.

b) Déterminer alors la valeur de a sachant que la moyenne de cette série est 10.

c) Quelle est l'étendue de cette série ?

d) Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.

Corrigé du sujet 2

Solution de l'exercice 1

N°	Réponses	Justification
1	C	$(\cos 2° + \sin 2°)^2 = \cos^2(2°) + 2\cos(2°)\sin(2°) + \sin^2(2°);$ $(\cos 2° - \sin 2°)^2 = \cos^2(2°) - 2\cos(2°)\sin(2°) + \sin^2(2°);$ **En additionant membre à membre on trouve :** $(\cos 2° + \sin 2°)^2 + (\cos 2° - \sin 2°)^2 = \cos^2(2°) + \sin^2(2°) + \cos^2(2°) + \sin^2(2°);$ $(\cos 2° + \sin 2°)^2 + (\cos 2° - \sin 2°)^2 = \cos^2(2°) + \sin^2(2°) + \cos^2(2°) + \sin^2(2°);$ $(\cos 2° + \sin 2°)^2 + (\cos 2° - \sin 2°)^2 = 1 + 1 = 2$
2	A	**car :** $-\frac{2}{3}(-3) + 5 = 7$ **et** $-\frac{2}{3}(-6) + 5 = 9.$
3	A	$x\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} \Rightarrow x\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$
4	C	$\cos^2 15° = 1 - \sin^2 15° = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$ $\cos^2 15° = 1 - \left(\frac{(\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{6}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{16}\right) = \frac{16}{16} - \frac{6 - 2\sqrt{6}\,x\sqrt{2} + 2}{16}$ $\frac{8 + 2\sqrt{6}\,x\sqrt{2}}{16} = \frac{6 + 2\sqrt{6}\,x\sqrt{2} + 2}{16} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4^2}$ **, d'où :** $\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **(car $\cos 15°$ est positif).**
5	A	**Soit a la mesure d'un côté du pentagone, p son périmètre initial et p' son nouveau périmètre, alors:** $p' = 5(a + \frac{7}{100}a) = 5a + \frac{7}{100}(5a) = p + \frac{7}{100}p \cdot$
6	B	**Le rayon de la base du nouveau cône obtenu est** $r' = \frac{r}{2}$**, ainsi le volume est donné** $V' = \frac{1}{3}\pi(\frac{r}{2})^2\frac{h}{2} = \frac{1}{3}\pi\frac{r^2}{4}\frac{h}{2} = \frac{1}{3}\pi\frac{r^2h}{8} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right) \Rightarrow V' = \frac{1}{8}V.$ **D'où** $V - V' = \frac{7}{8}V = 7V'$

Solution de l'exercice 2

1. Démontrons que le triangle LMN est rectangle :
D'une part $MN^2 = 8^2 = 64$ et d'autre part :
$LM^2 + LN^2 = (4,8)^2 + (6,4)^2 = 23,04 + 40,96 = 64$.
Donc $MN^2 = LM^2 + LN^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle LMN est rectangle en L.

2. Calculons la valeur arrondie au degré de la mesure de l'angle $\widehat{LMN}$

LMN est triangle rectangle en L, donc $\sin\widehat{LMN} = \dfrac{LN}{MN} = \dfrac{6,4}{8} = 0,8$

A l'aide de la calculatrice $\widehat{LMN} \approx 53^\circ$
3. LMK est triangle rectangle en K, donc

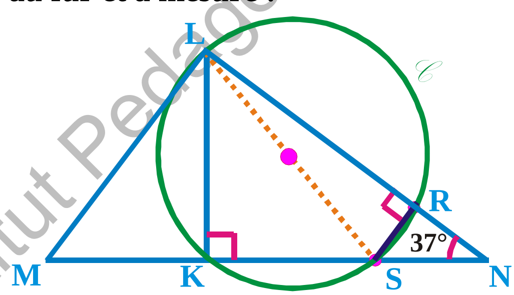
$$\sin\widehat{LMK} = \frac{LK}{LM} \Leftrightarrow 0,8 = \frac{LK}{4,8} \Leftrightarrow LK = 0,8\times 4,8 = 3,84\text{cm}$$

4. Calculons la valeur exacte de RS.

LMN est triangle rectangle en L et $\widehat{LMN} \approx 53^\circ$ donc, $\widehat{LNM} = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$, or $\widehat{RNS} = \widehat{LNM} = 37^\circ$

donc $\cos\widehat{RNS} = \dfrac{RN}{SN} \Leftrightarrow RN = SN \times \cos\widehat{RNS} = 2\cos 37^\circ$.

5.a) Construction faite au fur et à mesure :



b) Calculons la valeur arrondie au degré de la mesure de l'angle$\widehat{KLR}$

LKN est triangle rectangle en K et $\widehat{LNK} \approx 37^\circ$, donc:

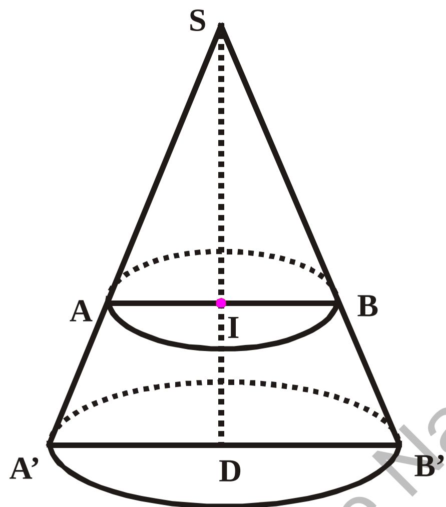
$\widehat{KLN} \approx 90^\circ - 37^\circ \approx 53^\circ$ or $\widehat{KLN} = \widehat{KLR}$, d'où $\widehat{KLR} \approx 53^\circ$.

c) Déduisons en la mesure de l'angle $\widehat{KSR}$

Les points S et L sont de part et d'autre de la corde [KR], donc les angles $\widehat{KSR}$ et $\widehat{KLR}$ sont supplémentaires, donc $\widehat{KSR} = 180^\circ - \widehat{KSR} = 180^\circ - 53^\circ = 137^\circ$.

Solution de l'exercice 3

1. Construction faite au fur et à mesure



2. Calcul de SI

$AI = \frac{AB}{2}$ car SAB est un triangle isocèle. ISA est un triangle rectangle

d'après le théorème de Pythagore on a:

$SA^2 = SI^2 + SI^2$; $SI^2 = SA^2 - AI^2$; $SI^2 = (6,5)^2 - (2,5)^2$ soit $SI^2 = 36$, d'où $SI = 6$ cm.

3. Le point I appartient au segment [SD] donc $SD = SI + ID = 6 + 3 = 9$cm.

Dans le triangle DSA', la droite (IA) est parallèle à (DA') et de plus S, A et A' sont alignés dans cet ordre et S, I et D sont alignés dans le même ordre, d'après le théorème de Thalès : $\frac{IA}{DA'} = \frac{IS}{SD}$, soit par inversion $\frac{DA'}{IA} = \frac{SD}{IS} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

4. a) Le volume d'un cône de révolution est : $\frac{1}{3} \times B \times h$

$V = \frac{1}{3}\pi \times AI^2 \times SI = \frac{1}{3}\pi \times 2,5^2 \times 9 = 18,75\pi cm^3$; De la question 3, on en déduit que le cône

C'est un agrandissement de coefficient $\frac{3}{2}$ du cône C, donc $V' = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \times V = \frac{27}{8}V$.

Solution de l'exercice 4

a) La valeur de b sachant que la médiane de cette série est 9 donne 2 + 3 + b =7. Soit b =2.

b) la valeur de a sachant que la moyenne de cette série est 10 se traduit

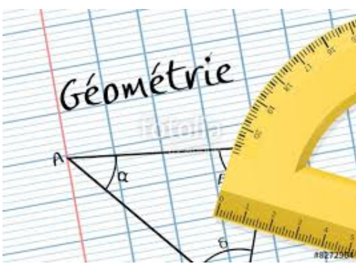
par : $\dfrac{3\times 6+4\times 8+1\times 9+2\times 10+3\times 11+2\times a}{15}=10$

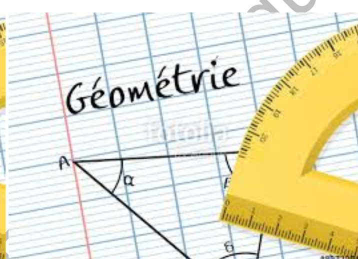
$\Leftrightarrow \dfrac{112+2\times a}{15}=10 \Leftrightarrow 112+2\times a=150 \Leftrightarrow 2a=38,$ **d'où a =19.**

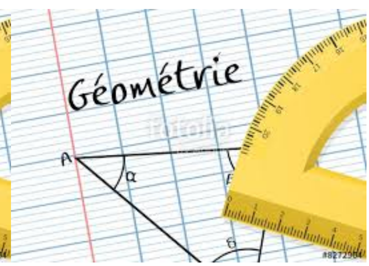
c) L'étendue de cette série = 19-6=13.

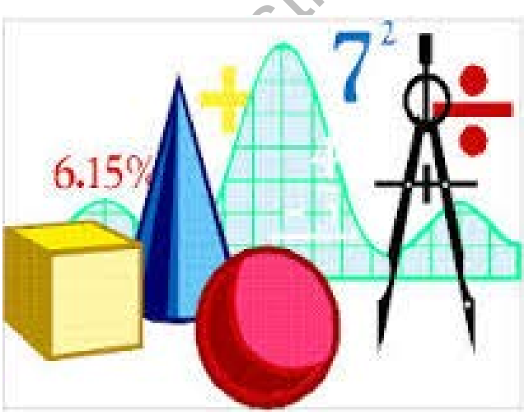
d) Le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.

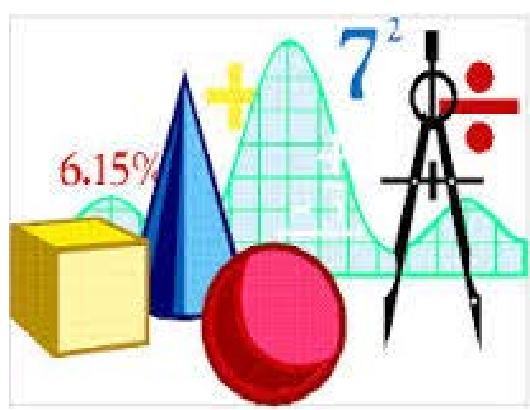
Valeur	**6**	**8**	**9**	**10**	**11**	**19**
Effectif	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**2**
Effectif cumulé décroissant	**15**	**12**	**8**	**7**	**5**	**2**
Effectif cumulé croissant	**3**	**7**	**8**	**10**	**13**	**15**









Sujet 3

Exercice 1

Choisis la bonne réponse, en justifiant ton choix. « Toute réponse doit obligatoirement être justifiée »

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	$\frac{1}{a+1}+\frac{2}{a^2-1}=$	$\frac{3}{a^2-1}$	$\frac{1}{a^2-1}$	$\frac{1}{a-1}$
2	Si : A + B = 55; A + C = 29 et B + C = 58 ; alors :	A = 16	B = 16	C = 16
3	$(-2a-ab)^2$ est égal à	$4a^2 + 4a^2b + ab^2$	$4a^2 + 4a^2b + a^2b^2$	$4a^2 - 4a^2b + ab^2$
4	$\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}=$	$\sqrt{14}$	$\sqrt{10}$	$2\sqrt{5}$
5	Dans un triangle équilatéral de coté a, une médiane mesure	$\frac{a}{2}$	$\frac{2a}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
6	$3x^2-12-(8+4x)(x-2)=$	(3x -4)(-3x - 5)	(x +4)(-3x + 4)	(x - 2)(-x - 2)
7	f est une fonction affine telle que: $f(1)=\frac{3}{2}$ et $f(2)=2$, alors $f(x)=$	$x-0,5$	$0,5x+1$	$x+0,5$
8	La médiane de la série 9; 5; 9; 5; 11; 11 ; 5; 6; 11; 7 est :	7	11	8

Exercice 2

Un triangle ABD rectangle en B est tel que AB = 4 cm et $\widehat{BAD}=40°$

1) Tracer ce triangle.

2) Calculer les longueurs BD et AD en justifiant la démarche utilisée; on en donnera les valeurs arrondies au centième. (On donne cos 40°= 0,766; tg 40°= 1.192)

3) Construire le cercle (C) circonscrit au triangle ABD (aucune justification n'est attendue pour cette construction) ; on précisera la position du centre I de ce cercle.

4) Tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$. Elle coupe le cercle ($\mathscr{C}$) en S ; placer le point S sur la figure.

5) Déterminer les mesures exactes des angles $\widehat{SIB}$; $\widehat{SBI}$ et $\widehat{DSB}$ en justifiant la démarche utilisée.

Exercice 3

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A(9 ; 4), B(-3 ; -5), C(-6 ; -1) et D(-2 ; 2). Les droites (AC) et (BD) se coupent en K

1) Placer les points A, B, C, D et K.

2) Calculer les longueurs CD; CB; BD; AB et AC.

3) Démontrer que les triangles ABC et CDB sont rectangles. En déduire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

4) Démontrer que : $\frac{KC}{KA} = \frac{KD}{KB} = \frac{1}{3}$

5) Calculer $\cos\widehat{BAC}$; $\sin\widehat{CBD}$ **et** $\tan\widehat{BCA}$.

6) Donner une équation de la droite (AB)

Corrigé du sujet 3

Solution de l'exercice 1

1. $\frac{1}{a+1} + \frac{2}{a^2-1} = \frac{a-1+2}{a^2-1} = \frac{a+1}{(a+1)(a-1)} = \frac{1}{a-1}$ **"Réponse C"**

2. Si : A + B = 55; A + C = 29 et B + C = 58 on a : A = 55 - B en remplaçant A dans la deuxième équation on obtient 55-B + C = 29 soit -B + C =-26 soit C= B- 26 en le remplaçant dans la troisième équation on obtient B + C = 58, donc B + B - 26 = 58 soit B = 42 d'où C= 16 d'où la ‘’ Réponse C’’.

3. $(-2a - ab)^2 = (2a + ab)^2 = (2a)^2 + 2\times 2ab\times ab + (ab)^2 = 4a^2 + 4a^2b + a^2b^2$ **‘’Response B’’.**

4. Elevons l'expression au carré :

$$\left(\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2 = 5+\sqrt{21}+2\times\left(\sqrt{5+\sqrt{21}}\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)+5-\sqrt{21} = 10+2\sqrt{25-21} = 14$$

d'ou $\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}} = \sqrt{14}$ **"Réponse A".**

5. Dans un triangle équilatéral de coté a, une médiane divise le triangle en deux triangles rectangles, en choisissant l'un des triangles et en utilisant le théorème de

Pythagore on a : $b^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 3\frac{a^2}{4}$ d'où $b = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ "Réponse C".

6. $3x^2-12-(8+4x)(x-2)=3(x-2)(x+2)-(8+4x)(x-2)=(x-2)(3x+6-8-4x)$

$= (x-2)(-x-2)$. '' Réponse C ''.

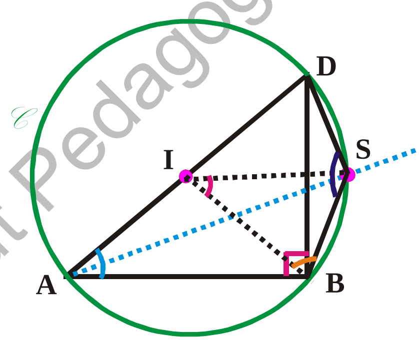
7. f est une fonction affine telle que $f(1)=\frac{3}{2}$ et $f(2)=2$ se traduit par:

f(x) est de la forme ax + b, avec $a = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 2-\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ "Réponse B". ,

8 . La médiane de la série 9; 5; 9; 5; 11; 11 ; 5; 6; 11; 7 est ordonnée comme suit : 5 ; 5 ; 5 ; 6 ; 7; 9; 9; 11; 11; 11 on constate qu'il y a autant de valeurs entre la 5ème et la 6ième valeur donc la médiane est : $\frac{7+9}{2} = 8$.

Solution de l'exercice 2

1) Construction faite au fur et à mesure



2) Calcul des distances BD et AD :

Le triangle ABD est rectangle en B, donc:
$$\begin{cases} \cos\widehat{A} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow AD = \dfrac{AB}{\cos\widehat{A}} \cong \dfrac{4}{0.766} \cong 5{,}22 \\ tg\widehat{A} = \dfrac{BD}{AB} \Rightarrow BD = ABxtg\widehat{A} \cong 4x1{,}192 \cong 4{,}77 \end{cases}$$

D’où: AD $\cong$ 5,22cm et BD $\cong$ 4,77cm

3) Le centre du cercle circonscrit au triangle BDA est le milieu de l’hypoténuse [AD].

4) Construction de la bissectrice (voir figure).

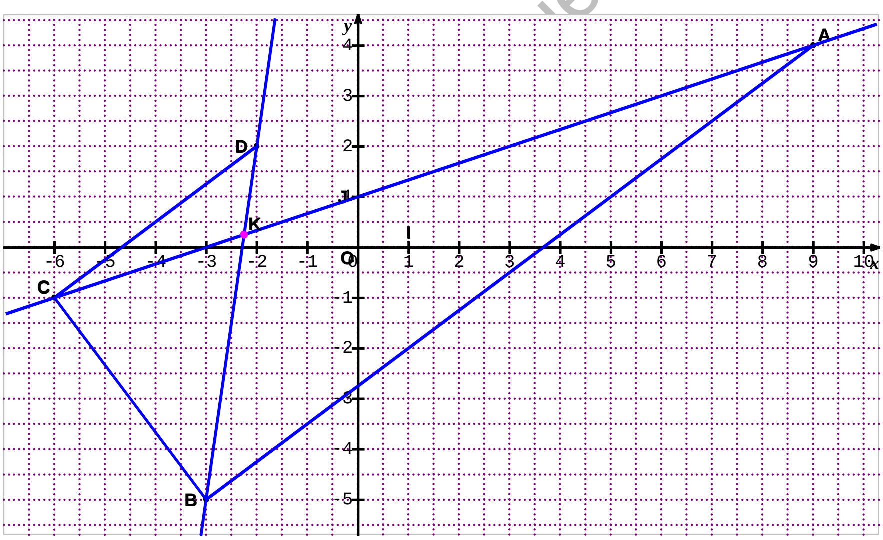
5) Détermination des angles :

- $\widehat{SIB} = 2\widehat{SAB} = 40°$, **car il s'agit de deux angles interceptant le même arc, le premier est un angle au centre et l'autre un angle inscrit.**
- $\widehat{SBI} = 70°$, **car le triangle ISB est isocèle de sommet principal I et d'angle 40° à ce sommet.**
- $\widehat{DSB}$ **est un angle inscrit qui intercepte l’arc** $\overset{\smile}{DB}$ **(grand arc), donc :**

$$\widehat{DSB} = \frac{1}{2}(360° - \widehat{DIB}) = \frac{1}{2}(360° - 80°) = \frac{1}{2}(280°) = 140°.$$

<u>Solution de l’exercice 3</u>

1.Construction demandée



2. Calculons :

- $CB = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$
- $BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15$

- $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{15^2+5^2}=\sqrt{250}=5\sqrt{10}$

3. Démontrons que ABC est un triangle rectangle.

On a : $AC^2=250; BC^2+AB^2=5^2+225=250$ **;**

D'après la réciproque de Pythagore ABC est un triangle rectangle.

Démontrons que DBC est un triangle rectangle

On a: $DB^2=50;\ DC^2+CB^2=5^2+25=50$, **donc :** $DB^2=DC^2+CB^2$, **d'après la réciproque du théorème de Pythagore le tringle DBC est rectangle en C.**

Comme (CB) ⊥(CD) et (BC) ⊥ (BA), donc (CD) // (BA).

4. Démontrons que $\dfrac{KC}{KA}=\dfrac{KD}{KB}=\dfrac{1}{3}$

Les points A,K,C et D,K B sont alignés dans le même ordre et (CD) // (BA).

D'après le théorème de Thalès on a : $\dfrac{KC}{KA}=\dfrac{KD}{KB}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{5}{\sqrt{225}}=\dfrac{1}{3}$ **ce qui est demandé .**

6. Calculons :

$$\cos\widehat{BAC}=\frac{AB}{CA}=\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{250}}=\frac{15}{\sqrt{25\times10}}=\frac{15}{5\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\sin\widehat{CBD}=\frac{CB}{BD}=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{5}{\sqrt{25\times2}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\tan\widehat{BCA}=\frac{BC}{BA}=\frac{5}{\sqrt{225}}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}.$$

7. Déterminations de l'équation de la droite (AB)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-9\\-5-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\-9\end{pmatrix}$ **est vecteur directeur de (AB), pour tous points M(x; y) les vecteurs** $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-2\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-12\\-9\end{pmatrix}$ **sont colinéaires :** $-12(y-4)-\left(-9(x-9)\right)=0\Rightarrow -12y+48+9x-81=0$

donc : $9x-12y-33=0$, **d'ou** $3x-4y-11=0$.

Sujet 4

Exercice 1

Choisis la bonne réponse, en justifiant ton choix. « Toute réponse doit obligatoirement être justifiée »

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	$\cos\frac{7\pi}{30}$	$\sin\frac{7\pi}{30}$	$\sin\frac{4\pi}{15}$	$\sin\frac{23\pi}{30}$
2	Le triangle MNP est tel que : $MP = 2\sqrt{11}$ cm , $MN = \sqrt{154}$ cm et $NP = 3\sqrt{22}$ cm. Son aire =	$11\sqrt{14}$	$33\sqrt{2}$	Autre valeur
3	$y = \frac{1}{3\sqrt{2}+4}$ et $z = \frac{-2}{4-3\sqrt{2}}$ Sont deux nombres :	Opposés	Inverses	Ni opposés, ni inverses
4	$-(x+2)^2-(2x+4)=$	$x(x+2)$	$(x+4)(x+2)$	$(-x-2)(x+4)$
5	Si $\left(\sqrt{7}x-\sqrt{2}\right)^2 = 7x^2+x\sqrt{14}$, alors x =	$\frac{\sqrt{14}}{42}$	$\frac{2}{3\sqrt{14}}$	$\frac{\sqrt{14}}{7}$

Exercice 2

1) Voici une suite de notes classées par ordre décroissant x ; 15 ; 14 ; 11 ; 8 ; 7 ; y. on sait que l'étendue de cette série est de 14 et que la moyenne des notes est de 11 ; Calculer x et y.

2) Simplifier $A = \left(\frac{2^{20}}{9^{10}}+\frac{16^5}{3^{20}}\right)\times\frac{3^{20}}{2^{21}}$

3) Ecrire en notation scientifique le nombre suivant : $y = 10^3 + 10 + 10^{-1} + 10^{-2}$

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) tel que OI = OJ = 1 cm.

l) Placer les points A(-1 ; 6), B(5 ; 9), C(5 ; - 6) et D(1 ;2).

2) Calculer AB^2, AC^2 et BC^2. En déduire la nature du triangle ABC.

3) Démontrer que les points A, C et D sont alignés .

4) La parallèle à (AB) passant par D coupe (BC) en E,

a) Construire E et montrer que $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.

b) Calculer les coordonnées de E.

5) F est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). Démontrer que A, E, F, D sont situés sur un même cercle. Préciser son centre et calculer son rayon.

6) Donner une équation de la droite (AF).

Corrigé du sujet 4

Solution de l'exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5
Réponse	B	A	B	C	B

Justifications

1) Si deux angles sont complémentaires; le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

Donc $\cos\frac{7\pi}{30} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{30}\right) = \sin\left(\frac{15\pi}{30} - \frac{7\pi}{30}\right) = \sin\left(\frac{8\pi}{30}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{15}\right)$ **"Réponse B".**

2) Le triangle MNP est tel que : $MP = 2\sqrt{11}$ cm , $MN = \sqrt{154}$ cm et $NP = 3\sqrt{22}$ cm.

$$MP^2 = \left(2\sqrt{11}\right)^2 = 4 \times 11 = 44 \;;\; MN^2 = \left(\sqrt{154}\right)^2 = 154 \text{ et } NP\left(3\sqrt{22}\right)^2 = 9 \times 22 = 198.$$

Donc $NP^2 = MP^2 + MN^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle MNP est rectangle en M.

D'où son aire $= \dfrac{MP \times MN}{2} = \dfrac{2\sqrt{11} \times \sqrt{154}}{2} = \sqrt{11} \times \sqrt{154} = \sqrt{11} \times \sqrt{11 \times 14} = 11\sqrt{14}\text{cm}^2$ "Réponse A"

3) $y \times z = \dfrac{1}{3\sqrt{2}+4} \times \dfrac{-2}{4-3\sqrt{2}} == \dfrac{-2}{\left(4+3\sqrt{2}\right)\left(4-3\sqrt{2}\right)} = \dfrac{-2}{4^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{-2}{16-18} = \dfrac{-2}{-2} = 1$

Donc y et z sont inverses. **"Réponse B"**

4) $-\left(x+2\right)^2 - \left(2x+4\right) = -\left(x+2\right)^2 - 2\left(x+2\right) = \left(x+2\right)\left[-\left(x+2\right)-2\right]$

$= \left(x+2\right)\left(-x-2-2\right) = \left(-x-2\right)\left(x+4\right)$ **"Réponse C".**

5) Si $\left(\sqrt{7}x+\sqrt{2}\right)^2 = 7x^2 + x\sqrt{14}$ alors $\left(\sqrt{7}x\right)^2 - 2\sqrt{7}x\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 7x^2 + x\sqrt{14}$

$\Leftrightarrow 7x^2 - 2x\sqrt{14} + 2 = 7x^2 + x\sqrt{14} \Leftrightarrow 7x^2 - 2x\sqrt{14} - 7x^2 - x\sqrt{14} = -2$

$\Leftrightarrow -3x\sqrt{14} = -2 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2}{-3\sqrt{14}} = \dfrac{2}{3\sqrt{14}}$ **"Réponse B".**

Solution de l'exercice 2

1. Une suite de notes classées par ordre décroissant x ; 15 ; 14 ; 11 ; 8 ; 7 ; y .

On sait que l'étendue est 14 et que la moyenne est 11, donc :

$$\begin{cases} x - y = 14 \\ \dfrac{x+15+14+11+8+7+y}{7} = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 14 \\ \dfrac{x+y+55}{7} = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 14 \\ x + y + 55 = 77 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 14 \\ x + y = 22 \end{cases}$$

On additionne les deux équations membre à membre on obtient *2x=36* donc *x = 18.*

Reportons la valeur de x dans l'équation x + y = 22 $\Rightarrow$ 18 + y = 22 $\Rightarrow$ y = 22-18 $\Rightarrow$ y = 4

Donc x =18 et y = 4

2) Simplifions A

$$A=\left(\frac{2^{20}}{9^{10}}+\frac{16^{5}}{3^{20}}\right)\times\frac{3^{20}}{2^{21}}\Leftrightarrow A=\left(\frac{2^{20}}{\left(3^{2}\right)^{10}}+\frac{\left(2^{4}\right)^{5}}{3^{20}}\right)\times\frac{3^{20}}{2^{21}}$$

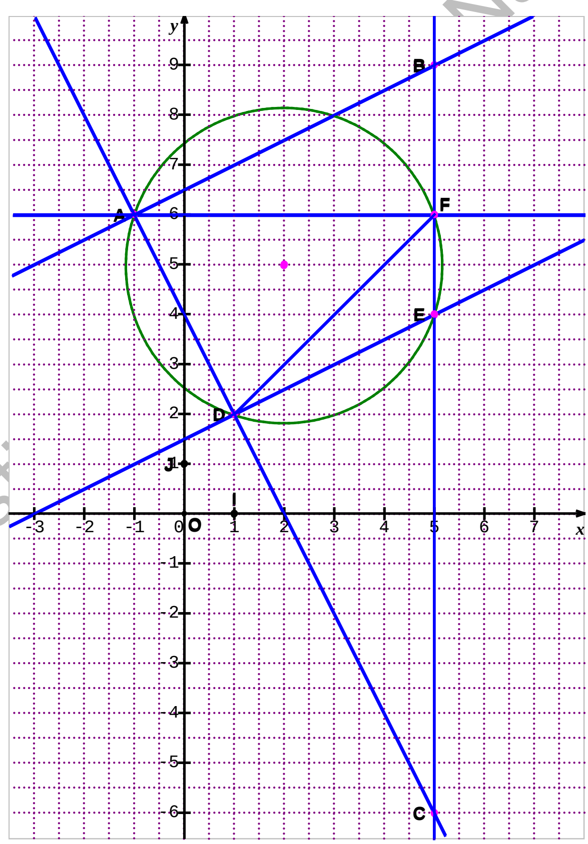
$$\Leftrightarrow A=\left(\frac{2^{20}}{3^{20}}+\frac{2^{20}}{3^{20}}\right)\times\frac{3^{20}}{2^{21}}\Leftrightarrow A=\frac{\cancel{2^{21}}}{\cancel{3^{20}}}\times\frac{\cancel{3^{20}}}{\cancel{2^{21}}}=1$$

3) L'écriture scientifique de : $Y=10^{3}+10+10^{-1}+10^{-2}$

$$Y=10^{3}+10+10^{-1}+10^{-2}\Leftrightarrow y=1000+10+0,1+0,01\Leftrightarrow y=1010,11=1,01011\times10^{3}$$

<u>Solution de l'exercice 3</u>

1. Emplacement des points et construction faite au fur et à mesure



2. Calcul des longueurs

- $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (5-(-1))^2 + (9-6)^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$
- $AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (5-(-1))^2 + (-6-6)^2 = 6^2 + (-12)^2 = 36 + 144 = 180$
- $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (5-5)^2 + (-6-9)^2 = 0^2 + (-15)^2 = 0 + 225 = 225$

On a $AB^2 + AC^2 = BC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en A .

3. Pour démontrer que les points A ; C et D sont alignés, il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.

On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-(-1) \\ -6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$6\times(-4) - (-12)\times 2 = -24 + 24 = 0$, **donc les points A , C et D sont alignés.**

4. a) Les droites (AD) et (BE) sont sécantes en C et les droites (AB) et (DE) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on a :

Si $\overrightarrow{CD} = k.\overrightarrow{CA}$, **alors** $\overrightarrow{CE} = k.\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ 2-(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix}$;

Comme $\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\times(-6) \\ \frac{2}{3}\times 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ **donc** $\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}.\overrightarrow{CA}$, **alors** $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.

b) Calculons les coordonnées de E :

Soit $E(x_E, y_E)$ on a : $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} x_E - x_C \\ y_E - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E - 5 \\ y_E - (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E - 5 \\ y_E + 6 \end{pmatrix}$;

$$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} x_B - x_C \\ y_B - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-5 \\ 9-(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\times 0 \\ \frac{2}{3}\times 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Comme $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, donc $\begin{cases} x_E - 5 = 0 \\ y_E + 6 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_E = 5 \\ y_E = 4 \end{cases}$ d'où $E(5;4)$.

5. Démontrons que A, E, F, D sont situés sur un même cercle :

F est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) et $E \in (BC)$, donc AEF est un triangle rectangle **en F, alors le point F est situé sur le cercle de diamètre [EA].**

ABC est un triangle rectangle en A, donc $(AC) \perp (AB)$ et comme $D \in (AC)$ et $(AB)//(DE)$ **alors $(AD) \perp (DE)$ d'où le point D est situé sur le cercle de diamètre [EA].**

Conclusion:

Les points D et F appartiennent au cercle de diamètre [EA]; donc les points A, E, F, D sont situés sur le cercle de centre G milieu de [EA] et de rayon la moitié de GA.

Calcul de coordonnées de $G(x_G ; y_G)$

G est le milieu du segment [AE], donc :

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_E}{2} \\ y_G = \frac{y_A + y_E}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ y_G = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow G(2;5)$$

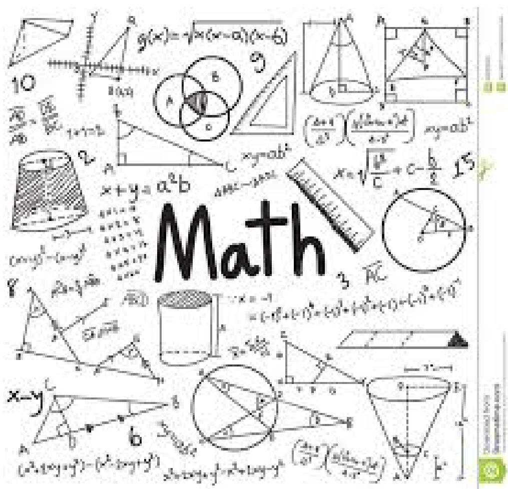
Calcul de rayon

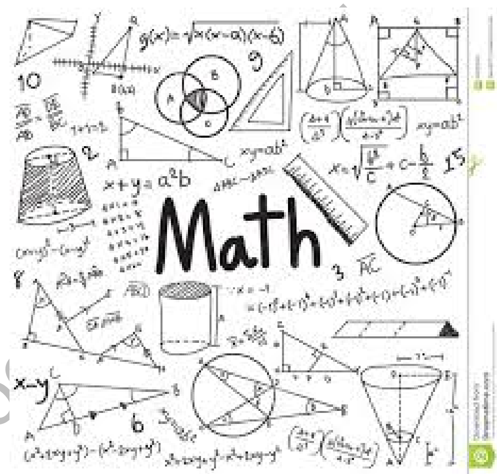
$$GA = \sqrt{(x_A - x_G)^2 + (y_A - y_G)^2} = \sqrt{(-1-2)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

6) Déterminons une équation de la droite (AF) :

Les droite (AF) et (BC) sont perpendiculaires, donc pour tout point M(x ; y) de (AF), les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-(-1) \\ y-6 \end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix}$ **sont orthogonaux, alors :** $0(x+1)+15(y-6)=0$

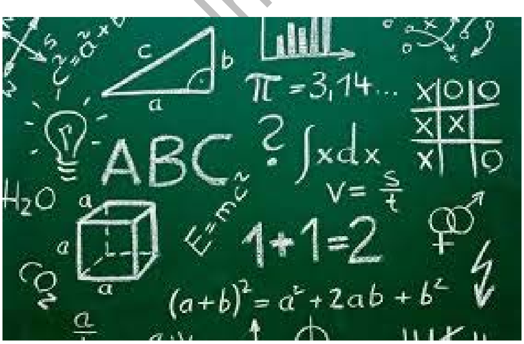
$\Rightarrow$ **y - 6 = 0** $\Rightarrow$ **y = 6 ; donc (AF) : y = 6.**

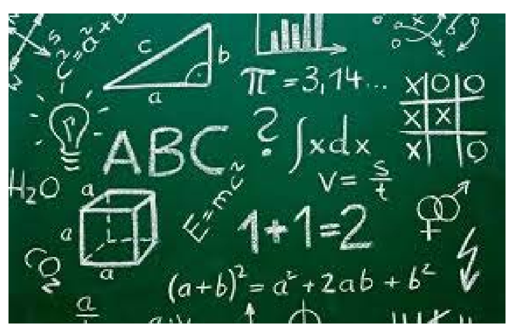










Sujet 5

Exercice 1

Choisis la bonne réponse, en justifiant ton choix. « Toute réponse doit obligatoirement être justifiée »

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	$\sqrt{181+52\sqrt{3}} =$	$13+4\sqrt{3}$	$13+2\sqrt{3}$	$13+\sqrt{3}$
2	$\sin^2(x)-\cos^2(x)=$	$2\cos^2(x)+1$	-1	$2\sin^2(x)-1$
3	Une augmentation de prix de 40% suivie d'une réduction de 10%, est équivalent à :	Une augmentation de 30%	Une augmentation de 1,26%	Une augmentation de 26%
4	$\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{12}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$	0	$-\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$
5	$\dfrac{7\pi}{45}$ rad=	28 grades	28 degrés	$\dfrac{280}{9}$ grades
6	Si on augmente par 3 toutes les valeurs d'une série contenant 5 valeurs la moyenne	Augmente de 3	Augmente de 15	Augmente de 5
7	$5-\left(x-2\sqrt{5}\right)^2 =$	$-x^2+25$	$\left(-x+3\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)$	$\left(x+3\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$
8	SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de hauteur 4cm ; AB= $3\sqrt{2}$ cm. La longueur SA=	$\sqrt{34}$ cm	$\sqrt{2}$ cm	5 cm

Exercice 2

Ghaya dit a Habsatou « si tu me donnes six barrettes j'aurais autant que toi ». Habsatou réplique « si je t'en donne dix tu en aura deux fois plus que moi ». Calculer le nombre de barrettes que possède Ghaya et de Habsatou.

Exercice 3

1) Tracer un repère orthonormé (O ;I ;J) tel que OI = OJ = 1 cm et placer les points L(–3 ;3) ; U(3 ;5) et N(5 ;–1).

2) Calculer les coordonnées de B , milieu de [LN] et celles de E ,symétrique de U par rapport à B.

3) Démontrer que le quadrilatère LUNE est un carré.

4) On appelle ($\mathscr{C}$) le cercle circonscrit à ce carré. Préciser son centre et son rayon r.

5) Montrer que la droite qui passe par T(11 ;1) et par U est tangente à ($\mathscr{C}$).

6) Montrer que les points T , E et N sont alignés .

Corrigé du Sujet 5

Solution de l'exercice 1

1. On sait que $181+52\sqrt{3} = 169 + 2\times 13\times 2\sqrt{3} + 12 = 13^2 + 2\times 13\times 2\sqrt{3} + \left(2\sqrt{3}\right)^2$
$= \left(13+2\sqrt{3}\right)^2$

Donc $\sqrt{181+52\sqrt{3}} = \sqrt{\left(13+2\sqrt{3}\right)^2} = \left|13+2\sqrt{3}\right| = 13+2\sqrt{3}$**. ''Réponse B''.**

2. $\sin^2(x) - \cos^2(x) = \sin^2(x) - \left(1-\sin^2(x)\right) = \sin^2(x) - 1 + \sin^2(x) = 2\sin^2(x) - 1$**. ''Réponse C''.**

3. Une augmentation de prix de 40% suivie d'une réduction de 10%, est équivalent à : Une augmentation de 26% car: $\left(1+\frac{40}{100}\right)\left(1-\frac{10}{100}\right)=(1+0,4)(1-0,1)$

$$\left(1+\frac{40}{100}\right)\left(1-\frac{10}{100}\right)=1,4\times 0,9=1,26=1+0,26=1+\frac{26}{100}$$ **''Réponse C''.**

4. $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{12}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\left(3\sqrt{2}+\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{4}+\sqrt{36}-\sqrt{24}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$

$\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{12}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{6}-6+6-2\sqrt{6}}{3-2}=\sqrt{6}$ **''Réponse C''.**

5. $\frac{7\pi}{45}\text{ rad}=\frac{\frac{7\pi}{45}\times 180}{\pi}=\frac{7\times 180}{45}=28^{\circ}$ **''Réponse B''.**

6. Si on augmente de 3 toutes les valeurs d'une série contenant 5 valeurs, la moyenne augmente de 3 car : si a, b, c, d et e sont les valeurs d'une série, en augmentant 3 à toutes ces valeurs la moyenne

devient $\frac{a+3+b+3+c+3+d+3+e+3}{5}=\frac{a+b+c+d+e+15}{5}=\frac{a+b+c+d+e}{5}+3,$

or la moyenne de la série initiale est: $\frac{a+b+c+d+e}{5}$ **''Réponse A''.**

7. $5-\left(x-2\sqrt{5}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(x-2\sqrt{5}\right)^2=\left[\sqrt{5}-\left(x-2\sqrt{5}\right)\right]\left[\sqrt{5}+\left(x-2\sqrt{5}\right)\right]$

$=\left[\sqrt{5}-x+2\sqrt{5}\right]\left[\sqrt{5}+x-2\sqrt{5}\right]=\left(-x+3\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)$ **''Réponse B''.**

8. SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de hauteur 4cm ; AB = $3\sqrt{2}$cm.

Calcul de la longueur SA :

ABC est un triangle rectangle isocèle en B, donc d'après le théorème de Pythagore on a : $AC^2=AB^2+BC^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2=18+18=36$ **donc AC=$\sqrt{36}$ = 6cm**

Soit O le centre de ABCD on a : $AO = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3\,cm$.

Comme O est le centre de ABCD , le segment [SO] est la hauteur de la pyramide SABCD, donc le triangle SAO est rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore on a :

$SA^2 = OA^2 + OS^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ donc $SA=\sqrt{25} = 5cm$ ''Réponse C''.

Solution de l'exercice 2

- **1ère étape : Choix des inconnues**

  Soit x le nombre de barrettes que possède Ghaya et y le nombre que possède Habsatou.

- **2ème étape : Mise en équation**

  Si Habsatou donne 6 barrettes à Ghaya celle-ci aura autant de barrettes que son amie : $x + 6 = y - 6$

  Si Ghaya donne 10 barrettes à Habsatou celle-ci aura le double : $x + 10 = 2(y - 10)$

  D'où le système :

$\begin{cases} x + 6 = y - 6 \\ x + 10 = 2y - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 12 & \rightarrow \times(1) \\ x - 2y = -30 & \rightarrow \times(-1) \end{cases}$ le système devient :

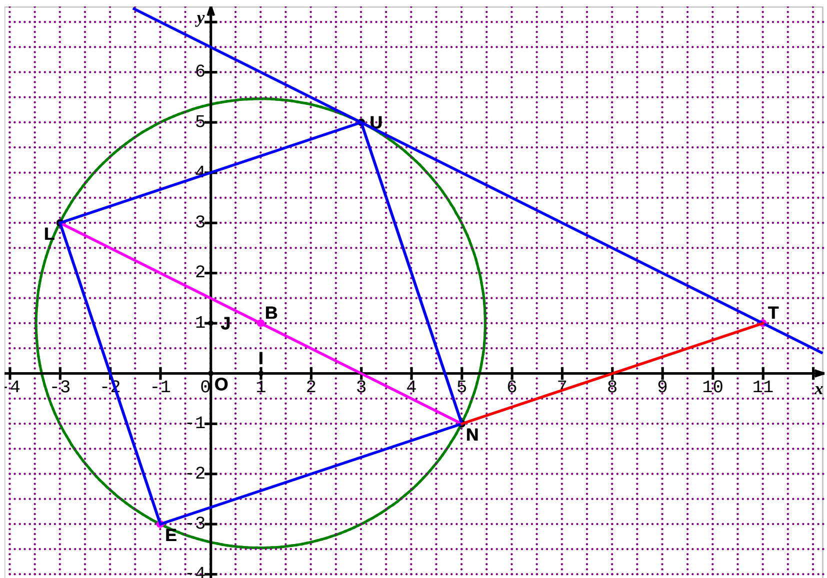
$\begin{cases} x - y = -12 \\ -x + 2y = 30 \end{cases}$ en additionnant on a: $y = 18$. En remplaçant dans l'une des deux équations:

$x = 18 - 12 = 6$.

En conclusion : Ghaya a 6 barrettes tandis que Habsatou 18.

Solution de l'exercice 3

1. Emplacement des points et construction faite au fur et à mesure



2. Calculons les coordonnées de B , milieu de [LN] : $x_B = \dfrac{x_L + x_N}{2} = \dfrac{-3+5}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

$y_B = \dfrac{y_L + y_N}{2} = \dfrac{3+(-1)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$**, donc** $B(1;1)$**.**

Calculons les coordonnées de E symétrique de U par rapport à B ;

E symétrique de U par rapport à B signifie que B est le milieu du segment [EU]

$x_B = \dfrac{x_E + x_U}{2} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{x_E + 3}{2} \Leftrightarrow x_E + 3 = 2 \Leftrightarrow x_E = -1$

$y_B = \dfrac{y_E + y_U}{2} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{y_E + 5}{2} \Leftrightarrow y_E + 5 = 2 \Leftrightarrow y_E = -3$ **donc** $E(-1;-3)$**.**

3. Démontrons que le quadrilatère LUNE est un carré :

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un carré, il suffit de montrer que c'est un parallélogramme qui a un angle droit et dont deux côtés consécutifs sont égaux.

Comme [LN] et [UE] ont le même milieu, donc que le quadrilatère LUNE est un parallélogramme

de plus $LU^2 = (x_U - x_L)^2 + (y_U - y_L)^2 = (3-(-3))^2 + (5-3)^2 = 6^2 + 2^2 = 40;$

$LE^2 = (x_E - x_L)^2 + (y_E - y_L)^2 = (-1-(-3))^2 + (-3-3)^2 = 2^2 + (-6)^2 = 40;$

$UE^2 = (x_E - x_U)^2 + (y_E - y_U)^2 = (-1-3)^2 + (-5-3)^2 = (-4)^2 + (-8)^2 = 80$

On remarque que $LU^2 + LE^2 = UE^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle LUE est rectangle isocèle en L, alors le quadrilatère LUNE est un carré.

4. Précisons le centre et le rayon du cercle ($\mathscr{C}$) circonscrit au carré LUNE

Comme LUNE est un carré de centre B, donc le cercle ($\mathscr{C}$) circonscrit à ce carré a pour centre B et pour rayon $r = \frac{UE}{2} = \frac{\sqrt{80}}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$**cm.**

5. Montrons que la droite qui passe par T(11 ; 1) et par U est tangente à (C).

Pour cela il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BU}$ et $\overrightarrow{TU}$ sont orthogonaux .

$\overrightarrow{BU}\begin{pmatrix} x_U - x_B \\ y_U - y_B \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BU}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BU}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{TU}\begin{pmatrix} x_U - x_T \\ y_U - y_T \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{TU}\begin{pmatrix} 3-11 \\ 5-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{TU}\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

on a: $2\times(-8) + 4\times 4 = -16 + 16 = 0$ **d'où le résultat.**

6. Montrons que les points T , E et N sont alignés :

Pour montrer que les points T , E et N sont alignés, il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{TN}$ et $\overrightarrow{TE}$ sont colinéaires $\overrightarrow{TE}\begin{pmatrix} x_E - x_T \\ y_E - y_T \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{TE}\begin{pmatrix} -1-11 \\ -3-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{TE}\begin{pmatrix} -12 \\ -4 \end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{TN}\begin{pmatrix} x_N - x_T \\ y_N - y_T \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{TN}\begin{pmatrix} 5-11 \\ -1-1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{TN}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ **On remarque que $\overrightarrow{TE} = 2\times\overrightarrow{TN}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{TN}$ et $\overrightarrow{TE}$ sont colinéaires;**

d'où l'alignement des points T , E et N .

Bibliographie:

1) **Sésamaths / Edition 2016**

2) **Trapèze 3ème / Edition Bréal / Spécimen / 2003**

3) **Collection triangle / Edition Spéciale pour le Professeur/ Hatier / 2003.**

4) **Maths 3/ Magnard / avril 2003**

5) **Maths 3/ Nouveau Décimal/ Belin / 2003**

6) **Maths 3/ Collection cinq sur cinq/ Edition Spéciale pour Enseignant / Collection Hachette 4 / 2003**

7) **Maths 3/ les Petits Manuels / Hâtier / avril / 2003**

8) **Maths / Edition Spéciale pour le Professeur / Nathan / 2003**

9) **Dmathème 3 / Edition Spéciale pour le Professeur/ Didier/ avril / 2003**

10) **Maths 3/ Collection cinq sur cinq/ Edition Spéciale pour Enseignant / Collection Hachette / 1999**

11) **Maths 3/ Spécimen Enseignant / Bordas / avril 1999**

12) **Maths 3/ Décimal/ Belin / 1999**

Sites :

1) **Îles des Maths**

2) **Sujets de BEPC / France**

3) **Mathématiques / Tunisie**