PRÉPA SCIENTIFIQUE

MPSI - PCSI - PTSI

1re année

Thomas **Petit**

TOUS LES EXOS MATHÉMATIQUES

EXERCICES CORRIGÉS / CONSEILS

ellipses

Prépa scientifique
MPSI - PCSI - PTSI

1re année

Thomas **Petit**

TOUS LES EXOS MATHÉMATIQUES

EXERCICES CORRIGÉS / CONSEILS

ellipses

Avant-propos

Il est bien plus beau de savoir quelque chose de tout que
de savoir tout d'une chose ; cette universalité est la plus belle.
Blaise Pascal (1623-1662)

Pourquoi ce livre ?

Ce livre se veut radicalement différent des autres livres. Déjà par son format : 168 pages. Cela change des manuels de prépa encyclopédiques innombrables (qui avoisinent facilement les 1 000 pages), certes très bien faits mais qui peuvent se montrer plus que décourageants si on se sent en retard ou dépassé par les événements. Ici, on ne risque pas l'indigestion ou la volonté de fuir car ce sont près de 160 exercices classiques, incontournables, fondamentaux et complètement indépendants qui sont exposés.

Ensuite par sa présentation : un exo par page, pour éviter la saturation et pour s'y retrouver rapidement. C'est comme une vidéo sur YouTube : parfois trente secondes bien référencées sont plus efficaces que quarante-cinq minutes imprécises où on se demande où on veut en venir. Notre but est de vous faire gagner du temps, pas de vous en faire perdre car c'est quand on se sent découragé, qu'il faut des explications urgentes et si possibles courtes !

Enfin par le rappel de formules (d'ailleurs souvent les mêmes) qu'il faut absolument connaître : il n'est pas rare aujourd'hui de voir des étudiants ne pas avoir connaissance des deux ou trois formules clefs leur permettant de débloquer l'exercice posé en colles ou la 1re question d'une épreuve écrite (l'explication est simple : devant une grande masse de définitions, propositions et théorèmes, le cerveau s'embrouille très vite et n'arrive plus à retenir l'essentiel).

Comment est construit ce livre ?

Un exo par page avec pour chacun d'entre eux un titre.

De cette manière, vous allez pouvoir vous forger une véritable culture mathématique. « Tiens cet exo me rappelle les polynômes de Tchebychev ». « Tiens, celui-là me rappelle le déterminant de Vandermonde ». Quand un exercice est baptisé, il est plus facilement identifié dans votre esprit, tant au point de vue des méthodes utilisées pour le résoudre que par sa conclusion.

Comment utiliser ce livre ?

Vu l'urgence, ne cherchez pas trop longtemps à résoudre l'énoncé proposé. Là aussi, on risque de vous surprendre sur le parti pris de ce livre qui consiste à ne pas se fier au baratin habituel de ceux qui vous disent : « en cherchant, on finit par trouver ». Avec ce genre de phrase (destiné bien souvent à l'élite [qui en général n'achète pas de livres puisqu'ils n'en ont pas besoin] et formulé parfois par des gens qui n'ont jamais appliqué ce genre de précepte à eux-mêmes), beaucoup d'étudiants risquent de perdre inutilement 20 ou 30 min pour un résultat nul.

En effet, les exercices classiques sont parfois le résultat de coups de génies de mathématiciens illustres du passé. À moins d'être génial (ce qui est peut-être votre cas), voulez-vous risquer d'attendre un coup de génie identique ou plutôt essayer de comprendre et d'assimiler efficacement comment ils ont fait ?

Bref, ne cherchez pas inutilement et soyez pragmatique : passez vite à la correction et essayez de la retenir. Laissez reposer une à deux heures (en changeant d'exo par exemple) et essayez de le refaire. Vous serez vite fixés ! Si vous n'y arrivez pas, recommencez ! C'est comme en musique, n'espérez pas jouer un concerto de Chopin sans être passé par des heures et des heures d'entraînement sur des gammes. En maths, c'est pareil n'espérez pas réussir un écrit d'algèbre ou d'analyse de 4 h si vous ne vous êtes pas entraînés à développer tous les déterminants ou retrouver tous les DL classiques, etc., de ce livre.

Sommaire

Algèbre et géométrie 1re année

Analyse et probabilités 1re année

Algèbre et géométrie 1re année

Chapitres concernés :

1. Logique, raisonnement
2. Ensembles et applications
3. Calculs algébriques
4. Nombres complexes, trigonométrie
5. Polynômes
6. Arithmétique
7. Structures algébriques
8. Calcul matriciel
9. Fractions rationnelles
10. Systèmes linéaires
11. Géométrie du plan et de l’espace
12. Espaces vectoriels
13. Applications linéaires
14. Dimension finie
15. Matrices et applications linéaires
16. Déterminants
17. Produit scalaire

Il y a une infinité de nombres premiers

Chapitre concerné : 1. Logique, raisonnement

☐ Ce que montre cet exo

Que les nombres premiers (qui sont des entiers qui n'admettent pas d'autres diviseurs que 1 et eux-mêmes, comme 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23…) sont infinis. Il s'agit d'un résultat d'Euclide.

- **L'énoncé**

On souhaite montrer par l'absurde qu'il y a un nombre infini de nombres premiers.
On suppose qu'il y a un nombre fini de nombres premiers p_1, p_2, …, p_k triés par ordre croissant. On considère l'entier $N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k$.

1) Montrer que $N+1 > p_k$.

2) Montrer que l'entier $N+1$ n'admet pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même et qu'il est par conséquent premier.

3) Montrer que les questions **1)** et **2)** aboutissent à une contradiction.

- **Corrigé**

1) $N+1 = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k + 1$. Comme $p_1 > 2$ (et par conséquent tous les autres p_i), on en déduit que $N+1 > p_k$.

2) Tout d'abord, les entiers 1 et $N+1$ divisent $N+1$. Montrons que ce sont les seuls en considérant k un entier différent de 1 et $N+1$ et qui divise $N+1$. Comme $k \geq 2$, on en déduit que k admet un diviseur premier (car tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier) qui figurent nécessairement parmi la liste des nombres premiers p_1, p_2, …, p_k. Appelons-le donc p_i. Comme p_i divise k, et que k divise $N+1$, on en déduit que p_i divise $N+1$. Par ailleurs p_i divise $N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k$.

3) Comme p_i divise $N+1$ et p_i divise N, on en déduit que p_i divise leur différence égale à $N+1-N=1$. CONTRADICTION ! (car un nombre premier est supérieur ou égal à 2 et donc ne peut pas diviser 1).

Conclusion : il y a bien un nombre infini de nombres premiers.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Le raisonnement par l'absurde : pour montrer que la proposition P est vraie, on suppose qu'elle est fausse et qu'on aboutit à une contradiction.
2) Tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.
3) Un nombre premier est un nombre supérieur ou égal à 2 et qui n'admet pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même.
4) Lorsque a divise b et c, alors a divise leur différence $b - c$.

$\sqrt{2}$ est irrationnel

Chapitre concerné : 1. Logique, raisonnement

☐ Ce que montre cet exo

Que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel (grâce à un raisonnement par l'absurde).

- **L'énoncé**

1) Montrer l'implication directe : n pair $\Rightarrow$ n^2 pair.

2) En utilisant un raisonnement par contraposée, montrer que n^2 pair $\Rightarrow$ n pair.

3) En déduire l'équivalence n pair $\Leftrightarrow$ n^2 pair.

4) Application : montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel en utilisant un raisonnement par l'absurde.

- **Corrigé**

1) Supposons n pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$.

On a donc : $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$, ce qui prouve que n^2 est pair (car de la forme $2j$).

Ainsi, on vient de montrer l'implication : n pair $\Rightarrow$ n^2 pair.

2) La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est non $Q \Rightarrow$ non P. La contraposée de la proposition n^2 pair $\Rightarrow$ n pair est donc : n impair $\Rightarrow$ n^2 impair. Prouvons cette contraposée :

Supposons n impair, alors $n = 2k+1$ donc $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, ce qui prouve que n est impair (car de la forme $2j+1$). Ainsi on vient de montrer n impair $\Rightarrow$ n^2 impair, strictement équivalente à la proposition n^2 pair $\Rightarrow$ n pair.

3) Comme n pair $\Rightarrow$ n^2 pair (question 1)) et n^2 pair $\Rightarrow$ n pair (question **2)**), on en déduit l'équivalence n pair $\Leftrightarrow$ n^2 pair.

4) Supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $\text{pgcd}(p,q) = 1$. En passant au carré, on a : $2 = \frac{p^2}{q^2}$ soit $p^2 = 2q^2$. Cela prouve que p^2 est pair et donc que p est pair : il existe k entier tel que $p = 2k$.

L'égalité $p^2 = 2q^2$ devient alors : $(2k)^2 = 2q^2$ donc $4k^2 = 2q^2$ donc $2k^2 = q^2$. Cela prouve que q^2 est et donc que q est pair . Bilan : Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $\text{pgcd}(p,q) = 1$ alors p et q sont pairs (donc divisibles par 2). CONTRADICTION ! (car alors $\text{pgcd}(p,q) \neq 1$). Conclusion : $\sqrt{2}$ est bien un nombre irrationnel.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Un entier pair est un entier de la forme 2j. Un entier impair est un entier de la forme $2j+1$.
2) La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est non $Q \Rightarrow$ non P.
3) Montrer l'équivalence $A \Leftrightarrow B$ revient à montrer $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$.
4) Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.
5) Le principe du raisonnement par l'absurde.

Une récurrence pour une somme

Chapitre concerné : 1. Logique, raisonnement

☐ Ce que montre cet exo

Il montre comment démontrer la formule $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ par récurrence.

- **L'énoncé**

En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ pour $n \geq 1$.

- **Corrigé**

Soit P_n la propriété « $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ».

Initialisation : P_1 est vraie car $1=\dfrac{1\times 2}{2}$.

Hérédité : Supposons P_n vraie (c'est-à-dire que $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$), et montrons que P_{n+1} est encore vraie (c'est-à-dire que $1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$).

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\underbrace{1+2+3+\cdots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Conclusion : comme P_1 est vraie, et que P_n est héréditaire, P_n est vraie pour $n \geq 1$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Le principe du raisonnement par récurrence (initialisation, hérédité, conclusion).

Résolution d'équation par analyse-synthèse

Chapitre concerné : 1. Logique, raisonnement

☐ Ce que montre cet exo

Il montre comment résoudre l'équation $x^x = x^2$ par analyse-synthèse.

- **L'énoncé**

Résoudre par analyse-synthèse l'équation $x^x = x^2$ sur $]0\,;+\infty[$.

- **Corrigé**

Analyse : Soit $x > 0$ tel que $x^x = x^2$ alors $\ln\left(x^x\right) = \ln\left(x^2\right)$ donc $x\ln(x) = 2\ln(x)$ donc $(x-2)\ln(x) = 0$ donc $\begin{cases}(x-2)=0\\ \text{ou}\\ \ln(x)=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}x=2\\ \text{ou}\\ x=1\end{cases}$.

Ainsi : si x est solution alors nécessairement $x = 1$ ou $x = 2$.

Synthèse : 1 est bien solution de l'équation $x^x = x^2$ car $1^1 = 1^2$.

2 est bien solution de l'équation $x^x = x^2$ car $2^2 = 2^2$.

Ainsi il est suffisant que x soit égal à 1 ou à 2 pour que $x^x = x^2$.

Conclusion :

Analyse : Si $x > 0$ est solution de $x^x = x^2$ alors $x = 1$ ou $x = 2$.

Synthèse : Si $x = 1$ ou $x = 2$ alors x est solution de $x^x = x^2$.

On a donc l'équivalence : $x^x = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ \text{ou}\\ x=2\end{cases}$.

Ainsi l'équation $x^x = x^2$ admet pour ensemble des solutions $S = \{1;2\}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Un raisonnement par analyse-synthèse est un raisonnement démontrant une implication puis sa réciproque.
Dans la partie analyse, on suppose que x est solution de l'équation, on en déduit une condition nécessaire que doit vérifier x.
Dans la partie synthèse, on regarde si les conditions nécessaires sont aussi suffisantes.

2) $\ln\left(x^n\right) = n\ln(x)$.

3) $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$.

La formule de Vandermonde

Chapitre concerné : 2. Ensembles et applications

☐ Ce que montre cet exo

La démonstration de la formule $\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

- **L'énoncé**

On considère deux ensembles A et B disjoints tels que $\mathrm{card}(A) = a$ et $\mathrm{card}(B) = b$.

On considère maintenant l'ensemble $E = A \cup B$.

1) Que vaut $\mathrm{card}(E)$? Déterminer le nombre de sous-ensembles à n éléments de E.

2) On considère C, une partie de $E = A \cup B$ à n éléments. C étant constituée de k éléments de A et de $n-k$ éléments de B (avec $0 \leq k \leq n$). Combien y a-t-il de possibilités de constituer C ?

3) En déduire la formule de Vandermonde $\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

- **Corrigé**

1) On a $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B) = a + b - 0 = a + b$

Il y a donc $\binom{a+b}{n}$ sous-ensembles à n éléments de E.

2) Fixons une valeur de k (avec $0 \leq k \leq n$). Il y a $\binom{a}{k}$ possibilités pour les k éléments de A et $\binom{b}{n-k}$ possibilités $n-k$ éléments de B ce qui fait $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ possibilités en tout (principe multiplicatif). Ainsi, k pouvant varier entre 0 et n, le nombre total de manières de constituer C vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

3) Selon que l'on dénombre à la manière de la question 1) ou de la question 2), on obtient le même nombre de sous-ensembles de n éléments de $E = A \cup B$, d'où $\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)$.

2) Il y a $\binom{n}{k}$ sous-parties de k éléments d'un ensemble à n éléments (pour $0 \leq k \leq n$).

3) Le principe multiplicatif $\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}(E) \times \mathrm{card}(F)$.

La fonction affine $x \to mx + p$ est bijective

Chapitre concerné : 2. Ensembles et applications

☐ Ce que montre cet exo

Toute fonction affine $f : x \to f(x) = mx + p \ (m \neq 0)$ est injective, surjective et donc bijective.

- **L'énoncé**

On considère l'application $f : x \to f(x) = mx + p \ (m \neq 0)$ définie sur l'ensemble de départ $E = \mathbb{R}$ et à valeurs dans l'espace d'arrivée $F = \mathbb{R}$.
1) Démontrer que f est une application injective.
2) Démontrer que f est une application surjective.
3) Démontrer que f est une application bijective puis déterminer l'application réciproque f^{-1}.

- **Corrigé**

1) Soient a et b deux éléments de $E = \mathbb{R}$. Démontrons l'implication $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.
Supposons $f(a) = f(b)$ alors $ma + p = mb + p$ donc : $ma = mb$ donc $a = b$ (car $m \neq 0$).
Conclusion : f est injective.
2) Soit $y \in F$. Démontrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
$y = f(x)$ équivaut à $y = mx + p$ c'est-à-dire $mx = y - p$ c'est-à-dire : $x = \dfrac{y-p}{m}$.
Ainsi pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ (à savoir $x = \dfrac{y-p}{m}$) tel que $y = f(x)$.
Conclusion : f est surjective.
3) Comme f est injective et surjective, on en déduit que f est bijective. L'application f^{-1} définie sur F et à valeurs dans E par $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{2}$ est la bijection réciproque recherchée.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

f injective équivaut à : $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.
f surjective équivaut à : pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
f bijective équivaut à : f injective et surjective.

Composée injective, composée surjective

Chapitre concerné : 2. Ensembles et applications

☐ Ce que montre cet exo

Une condition suffisante pour qu'une fonction soit injective et une condition suffisante pour qu'elle soit surjective.

- **L'énoncé**

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que :

1) $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective.

2) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.

- **Corrigé**

1) Supposons que $f(a) = f(b)$. Alors $g \circ f(a) = g \circ f(b)$. Si $g \circ f$ est injective alors cela entraîne $a = b$. Ainsi $f(a) = f(b)$ entraîne $a = b$, ce qui entraîne f injective.

Ainsi $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective.

2) Soit $y \in G$, si $g \circ f$ surjective alors il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x)$ soit $y = g(f(x))$. Ainsi il existe $z \in F$ (à savoir $z = f(x)$) tel que $y = g(z)$, ce qui entraîne g surjective.

Ainsi $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

f injective équivaut à : $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

$f : E \to F$ surjective équivaut à : pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Calcul de $\left(f^{-1}\right)'$

Chapitre concerné : 2. Ensembles et applications

☐ Ce que montre cet exo

Que $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, et $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

- **L'énoncé**

On rappelle que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ et que $(v \circ u)' = v'(u) \times u'$.

1) Démontrer que $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ (on suppose que f' ne s'annule pas).

2) En déduire que $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (pour $x \in \mathbb{R}$).

3) En déduire que $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (pour $x \in]-1;1[$).

4) En déduire que $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (pour $x \in]-1;1[$).

- **Corrigé**

1) $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ donc pour tout x $f \circ f^{-1}(x) = x$, ce qui donne $f'\left(f^{-1}(x)\right) \times \left(f^{-1}(x)\right)' = 1$ soit : $\left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$. Conclusion : $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

2) $(\arctan(x))' = \left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \dfrac{1}{f'(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3) $(\arccos(x))' = \left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \dfrac{1}{f'(\arccos(x))} = \dfrac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \dfrac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4) $(\arcsin(x))' = \left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \dfrac{1}{f'(\arcsin(x))} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ et que $(v \circ u)' = v'(u) \times u'$
2) $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$
3) $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$
4) $\cos'(x) = -\sin(x)$
5) $\sin'(x) = \cos(x)$
6) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Identité de Brahmagupta

Chapitre concerné : 3. Calculs algébriques

☐ Ce que montre cet exo

L'égalité $\left(x^2+dy^2\right)\left(u^2+dv^2\right)=(xu-yvd)^2+d(xv+yu)^2$.

- **L'énoncé**

1) Développer $\left(x^2+dy^2\right)\left(u^2+dv^2\right)$.

2) Développer $(xu-yvd)^2+d(xv+yu)^2$.

3) En déduire l'égalité $\left(x^2+dy^2\right)\left(u^2+dv^2\right)=(xu-yvd)^2+d(xv+yu)^2$.

- **Corrigé**

1) $\left(x^2+dy^2\right)\left(u^2+dv^2\right)=x^2u^2+x^2dv^2+dy^2u^2+dy^2dv^2=x^2u^2+x^2dv^2+dy^2u^2+d^2y^2v^2$.

2) $(xu-yvd)^2+d(xv+yu)^2=x^2u^2-2xuyvd+y^2v^2d^2+d\left(x^2v^2+2xvyu+y^2u^2\right)$

$=x^2u^2-2xuyvd+y^2v^2d^2+dx^2v^2+2dxvyu+dy^2u^2=x^2u^2+y^2v^2d^2+dx^2v^2+dy^2u^2$.

3) Comme les deux développements sont égaux, on a :

$\left(x^2+dy^2\right)\left(u^2+dv^2\right)=(xu-yvd)^2+d(xv+yu)^2$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

Diverses sommes de coefficients binomiaux

Chapitre concerné : 3. Calculs algébriques

☐ Ce que montre cet exo

La simplification de certaines sommes au moyen du binôme de Newton.

- **L'énoncé**

1) Enoncer la formule du binôme de Newton permettant de développer $(a+b)^n$.

2) En déduire que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ et $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$ (pour $n\geq 1$).

3) En déduire que $\sum_{k=0\ (k\text{ pair})}^{n}\binom{n}{k}=2^{n-1}$ et $\sum_{k=1\ (k\text{ impair})}^{n}\binom{n}{k}=2^{n-1}$.

- **Corrigé**

1) $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

2) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k=(1+1)^n=2^n$ et $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}1^{n-k}(-1)^k\binom{n}{k}=(1-1)^n=0$.

3) On a : $\sum_{k=0\ (k\text{ pair})}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=1\ (k\text{ impair})}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ et :

$$\sum_{k=0\ (k\text{ pair})}^{n}\binom{n}{k}-\sum_{k=1\ (k\text{ impair})}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0\ (k\text{ pair})}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}+\sum_{k=1\ (k\text{ impair})}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0.$$

En ajoutant les 2 égalités précédentes, on a $2\times\sum_{k=0\ (k\text{ pair})}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ soit $\sum_{k=0\ (k\text{ pair})}^{n}\binom{n}{k}=2^{n-1}$.

En soustrayant les 2 égalités précédentes, on a $2\times\sum_{k=1\ (k\text{ impair})}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ soit $\sum_{k=1\ (k\text{ impair})}^{n}\binom{n}{k}=2^{n-1}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n,\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0,\ \sum_{k=0\ (k\text{ pair})}^{n}\binom{n}{k}=2^{n-1},\ \sum_{k=1\ (k\text{ impair})}^{n}\binom{n}{k}=2^{n-1}.$$

Calcul de la somme $\sum_{i=0}^{n} i^2$ par Newton

Chapitre concerné : 3. Calculs algébriques

☐ Ce que montre cet exo

Que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **L'énoncé**

Démontrer que :

1) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(i+1)^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 + 3\sum_{i=0}^{n} i^2 + 3\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1$.　　**2)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(i+1)^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 + (n+1)^3$.

3) En déduire que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Corrigé**

1) D'après le binôme de Newton $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(i+1)^3 = \sum_{i=0}^{n}\left(i^3+3i^2+3i+1\right) = \sum_{i=0}^{n} i^3 + 3\sum_{i=0}^{n} i^2 + 3\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1$.

2) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(i+1)^3 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} i^3}_{\text{décalage d'indice}} = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} i^3}_{\text{car } 0^3=0} + (n+1)^3$.

3) Ainsi $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^3 + 3\sum_{i=0}^{n} i^2 + 3\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1 = \sum_{i=0}^{n} i^3 + (n+1)^3$ donc $\displaystyle 3\sum_{i=0}^{n} i^2 + 3\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1 = (n+1)^3$ donc

$\displaystyle 3\sum_{i=0}^{n} i^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^3$ soit : $\displaystyle 3\sum_{i=0}^{n} i^2 = (n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$

donc :

$$3\sum_{i=0}^{n} i^2 = (n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) = (n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1\right] = (n+1)\left[n^2 + \frac{1}{2}n\right] = \frac{(n+1)n(2n+1)}{2}$$

d'où $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 1 = n+1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.　　2) Formule du binôme de Newton $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Calculs de sommes doubles

Chapitre concerné : 3. Calculs algébriques

☐ Ce que montre cet exo

Que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)=n^2(n+1)$, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\times j=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}=2^{n+1}-1$.

- **L'énoncé**

Démontrer : **1)** $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)=n^2(n+1)$ **2)** $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\times j=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ **3)** $\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}=2^{n+1}-1$.

- **Corrigé**

1) $\sum_{j=1}^{n}(i+j)=\sum_{j=1}^{n} i+\sum_{j=1}^{n} j=ni+\frac{n(n+1)}{2}$ donc :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)=\sum_{i=1}^{n}\left[ni+\frac{n(n+1)}{2}\right]=n\sum_{i=1}^{n} i+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]=n\frac{n(n+1)}{2}+n\frac{n(n+1)}{2}=n^2(n+1)$$

2) $\sum_{j=1}^{n} i\times j=i\sum_{j=1}^{n} j=i\times\frac{n(n+1)}{2}$ donc :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\times j=\sum_{i=1}^{n} i\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\times\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

3) $\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}1^i\cdot 1^{j-i}=(1+1)^j=2^j$ donc $\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}=\sum_{j=0}^{n} 2^j=\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=\frac{1-2^{n+1}}{-1}=2^{n+1}-1$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} f(i,j)\right)$

2) $\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)=\sum_{j=1}^{n} a_j+\sum_{j=1}^{n} b_j$

3) $\sum_{i=0}^{n} 1=n+1$

4) $\sum_{i=0}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$

5) $\sum_{j=1}^{n} f(i)\times g(j)=f(i)\times\sum_{j=1}^{n} g(j)$

6) $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ et en particulier $2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

Racines carrées d'un nombre complexe

Chapitre concerné : 4. Nombres complexes, trigonométrie

☐ Ce que montre cet exo

Qu'on peut trouver les nombres complexes z vérifiant $z^2 = 3-4i$ (c'est-à-dire les « racines carrées » complexes de $3-4i$).

- **L'énoncé**

On souhaite résoudre l'équation $z^2 = 3-4i$.

1) On pose $z = a+ib$ $(a,b \in \mathbb{R})$. Montrer que $z^2 = c+id$ $(c,d \in \mathbb{R})$ équivaut à

$$\begin{cases} a^2-b^2=c \\ 2ab=d \\ a^2+b^2=|c+id| \end{cases}.$$

2) En déduire les solutions de l'équation $z^2 = 3-4i$.

- **Corrigé**

1) Si $z = a+ib$ alors :

$z^2 = (a+ib)^2 = a^2+2aib+(ib)^2 = a^2+2aib+i^2b^2 = a^2+2aib-b^2 = a^2-b^2+i2ab$.

Ainsi $z^2 = c+id \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z^2)=c \\ \operatorname{Im}(z^2)=d \\ |z^2|=|c+id| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=c \\ 2ab=d \\ a^2+b^2=|c+id| \end{cases}$.

2) $z^2 = 3-4i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=3 \\ 2ab=-4 \\ a^2+b^2=|3-4i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=3 \\ ab=-2 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$ (car $|3-4i| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$).

Cela nous donne $2a^2=8$, $2b^2=2$, $ab=-2$ c'est-à-dire : $a^2=4$, $b^2=1$, $ab=-2$.

L'égalité $ab=-2$ nous indique que a et b sont de signe contraire. $a^2=4$, $b^2=1$ nous donnent alors les deux possibilités suivantes $(a=2, b=-1)$ et $(a=-2, b=1)$ ce qui donne $z=2-i$ et $z=-2+i$. Réciproquement $z=2-i$ et $z=-2+i$ vérifient bien l'égalité $z^2=3-4i$.

Conclusion : les racines carrées de $3-4i$ sont $2-i$ et $-2+i$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

$z^2 = c+id \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z^2)=c \\ \operatorname{Im}(z^2)=d \\ |z^2|=|c+id| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=c \\ 2ab=d \\ a^2+b^2=|c+id| \end{cases}$ (où $z=a+ib$, avec $a,b \in \mathbb{R}$ et $c,d \in \mathbb{R}$).

Simplification d'une fraction complexe

Chapitre concerné : 4. Nombres complexes, trigonométrie

☐ Ce que montre cet exo

Qu'on peut simplifier la fraction $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^4}$ par au moins trois méthodes différentes.

- **L'énoncé**

Simplifier la fraction $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^4}$ par trois méthodes différentes :

1) En utilisant le triangle de Pascal (ou le binôme de Newton).
2) En utilisant la quantité conjuguée.
3) En utilisant les formes exponentielles des numérateurs et dénominateurs.

- **Corrigé**

1) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^4}=\dfrac{1^5+5\cdot 1^4\cdot i^1+10\cdot 1^3\cdot i^2+10\cdot 1^2\cdot i^3+5\cdot 1^1\cdot i^4+i^5}{1^4+4\cdot 1^3\cdot(-i)^1+6\cdot 1^2\cdot(-i)^2+4\cdot 1^1\cdot(-i)^3+(-i)^4}=\dfrac{1+5i-10-10i+5+i}{1-4i-6+4i+1}=\dfrac{-4-4i}{-4}=1+i.$

2) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^4}=\dfrac{(1+i)^4}{(1-i)^4}(1+i)=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^4(1+i)=\left(\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^4(1+i)=\left(\dfrac{1+2i-1}{2}\right)^4(1+i)=i^4(1+i)=1+i.$

3) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^4}=\dfrac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5}{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4}=\dfrac{\sqrt{2}^5e^{i\frac{5\pi}{4}}}{\sqrt{2}^4e^{-i\frac{4\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\frac{8\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i2\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i.$

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ (binôme de Newton).

2) le nombre conjugué de $a+ib$ est $a-ib$.

3) $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, etc.

4) $z=\rho e^{i\theta}$ avec $\rho=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\theta=\arg(z)[2\pi]$ où $z=a+ib$.

Calcul de $\cos(\pi/5)$

Chapitre concerné : 4. Nombres complexes, trigonométrie

☐ Ce que montre cet exo

Que par des astuces de « fou », on peut réussir à prouver que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

- **L'énoncé**

1) Démontrer que $1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}=0$.

2) En déduire que $1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=0$ puis que $4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-1=0$.

3) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

- **Corrigé**

1) $1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}=1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^2+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4=\frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5}{1-e^{i\frac{2\pi}{5}}}=\frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{5}}}=\frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{5}}}=0$.

2) $1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}=0\Leftrightarrow 1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{-i\frac{4\pi}{5}}+e^{-i\frac{2\pi}{5}}=0$

$\Leftrightarrow 1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{-i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{-i\frac{4\pi}{5}}=0\Leftrightarrow 1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=0$

$\Leftrightarrow 1+\left(2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1\right)+2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)=0\Leftrightarrow 4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-1=0$.

3) L'équation $4x^2-2x-1=0$ admet pour solutions (après calculs) : $\frac{1+\sqrt{5}}{4}(>0)$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}(<0)$.

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de $4x^2-2x-1=0$ et que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)>0$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $1+q+q^2+\cdots+q^n=\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\quad (q\neq 1)$.

2) $e^{i2\pi}=1$, $e^{i\theta}\times e^{i(2\pi-\theta)}=1$ donc $e^{i\frac{6\pi}{5}}=e^{-i\frac{4\pi}{5}}$, $e^{i\frac{8\pi}{5}}=e^{-i\frac{2\pi}{5}}$.

3) $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos(\theta)$

4) $\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1$ et $\cos(\pi-\theta)=-\cos(\theta)$.

5) Si $0\leq x<\frac{\pi}{2}$ alors $\cos(x)>0$.

Linéarisations classiques

Chapitre concerné : 4. Nombres complexes, trigonométrie

☐ Ce que montre cet exo

Les formules donnant $\cos^2(\theta)$, $\sin^2(\theta)$, $\cos^3(\theta)$, $\sin^3(\theta)$.

- **L'énoncé**

En utilisant le fait que $\cos(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$, linéariser :

1) $\cos^2(\theta)$ **2)** $\sin^2(\theta)$ **3)** $\cos^3(\theta)$ **4)** $\sin^3(\theta)$

- **Corrigé**

1) $\cos^2(\theta)=\left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2=\dfrac{e^{i2\theta}+2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-i2\theta}}{4}=\dfrac{e^{i2\theta}+2e^{0}+e^{-i2\theta}}{4}=\dfrac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{4}+\dfrac{2}{4}$

$=\dfrac{2\cos(2\theta)}{4}+\dfrac{1}{2}$ donc $\cos^2(\theta)=\dfrac{1}{2}\cos(2\theta)+\dfrac{1}{2}$.

2) $\sin^2(\theta)=\left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2=\dfrac{e^{i2\theta}-2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-i2\theta}}{-4}=\dfrac{e^{i2\theta}-2e^{0}+e^{-i2\theta}}{-4}=\dfrac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{-4}+\dfrac{2}{4}$

$=\dfrac{2\cos(2\theta)}{-4}+\dfrac{1}{2}$ donc $\sin^2(\theta)=-\dfrac{1}{2}\cos(2\theta)+\dfrac{1}{2}$.

3) $\cos^3(\theta)=\left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3=\dfrac{e^{i3\theta}+3e^{i2\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-i2\theta}+e^{-i3\theta}}{8}=\dfrac{e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)}{8}$

$=\dfrac{2\cos(3\theta)}{8}+\dfrac{3\times 2\cos(2\theta)}{8}$ donc $\cos^3(\theta)=\dfrac{1}{4}\cos(3\theta)+\dfrac{3}{4}\cos(2\theta)$.

4) $\sin^3(\theta)=\left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3=\dfrac{e^{i3\theta}-3e^{i2\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-i2\theta}-e^{-i3\theta}}{-8i}=\dfrac{e^{i3\theta}-e^{-i3\theta}-3\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)}{-8i}$

$=\dfrac{2i\sin(3\theta)-3\times 2i\sin(\theta)}{-8i}=\dfrac{-1}{4}\sin(3\theta)+\dfrac{3}{4}\sin(\theta)$ donc $\sin^3(\theta)=\dfrac{-1}{4}\sin(3\theta)+\dfrac{3}{4}\sin(\theta)$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\cos(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ et donc : $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos(\theta)$, $e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin(\theta)$.

2) $(a+b)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ (binôme de Newton).

Formules de duplication et d'addition par les complexes

Chapitre concerné : 4. Nombres complexes, trigonométrie

☐ Ce que montre cet exo

Les formules donnant $\cos(2\theta)$, $\sin(2\theta)$, $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

- **L'énoncé**

En utilisant le fait que $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$, démontrer que **:**

1) $\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$ **2)** $\sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta)$

3) $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ **4)** $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$.

- **Corrigé**

On a $e^{i2\theta}=\left(e^{i\theta}\right)^2$ donc : $\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)=\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)^2$

donc : $\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)=\cos^2(\theta)+2i\cos(\theta)\sin(\theta)-\sin^2(\theta)$.

1) Comme deux complexes égaux ont des parties réelles égales : $\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$.

2) Comme deux complexes égaux ont des parties imaginaires égales : $\sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta)$.

On a : $e^{i(a+b)}=e^{ia+ib}=e^{ia}\times e^{ib}$ donc :

$\cos(a+b)+i\sin(a+b)=\left(\cos(a)+i\sin(a)\right)\left(\cos(b)+i\sin(b)\right)$

donc : $\cos(a+b)+i\sin(a+b)=\cos(a)\cos(b)+i\cos(a)\sin(b)+i\sin(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

donc : $\cos(a+b)+i\sin(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)+i\left[\cos(a)\sin(b)+\sin(a)\cos(b)\right]$.

3) Par identification des parties réelles : $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$.

4) Par identification des parties imaginaires : $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.

2) $e^{i2\theta}=\left(e^{i\theta}\right)^2$.

3) $e^{i(a+b)}=e^{ia}\times e^{ib}$.

Formules de trigo par l'arc moitié

Chapitre concerné : 4. Nombres complexes, trigonométrie

☐ Ce que montre cet exo

Les formules de duplication et les formules donnant $\cos(p)+\cos(q)$ et $\sin(p)+\sin(q)$.

- **L'énoncé**

1) Démontrer que $1+e^{i\theta}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1-e^{i\theta}=-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$. En déduire que :

$\cos(\theta)=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1$ et $\sin(\theta)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

2) Démontrer que $e^{ip}+e^{iq}=e^{i\frac{p+q}{2}}\cdot\left(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)$. En déduire que :

$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et $\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

- **Corrigé**

1) $1+e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=e^{i\frac{\theta}{2}}2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $1-e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$.

$1+e^{i\theta}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ donne : $1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ soit :

$1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+i2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Par égalité des partie réelles : $1+\cos(\theta)=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ donc $\cos(\theta)=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1$.

Par égalité des parties imaginaires et $\sin(\theta)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

2) $e^{i\frac{p+q}{2}}\cdot\left(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)=e^{i\frac{2p}{2}}+e^{i\frac{2q}{2}}=e^{ip}+e^{iq}$ (ce qu'on voulait). $e^{ip}+e^{iq}=e^{i\frac{p+q}{2}}\cdot\left(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)$

donne : $\cos p+i\sin p+\cos q+i\sin q=\left(\cos\frac{p+q}{2}+i\sin\frac{p+q}{2}\right)\cdot 2\cos\frac{p-q}{2}$ c'est-à-dire :

$\cos p+\cos q+i(\sin p+\sin q)=2\cos\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}+i2\cos\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$. Par identification :

$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et $\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $e^{ix}+e^{-ix}=2\cos(x)$. 2) L'arc moitié de θ est $\frac{\theta}{2}$. 3) L'arc moitié de $p+q$ est $\frac{p+q}{2}$.

Somme et arc moitié n° 1

Chapitre concerné : 4. Nombres complexes, trigonométrie

☐ Ce que montre cet exo

Que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)=2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$ et $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)=2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$.

- **L'énoncé**

On pose $C(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$ et $S(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)$.

1) En utilisant le binôme de Newton, montrer que $C(x)+iS(x)=\left(1+e^{ix}\right)^n$.

2) Après avoir factorisé $1+e^{ix}$ par $e^{\frac{ix}{2}}$, en déduire que $C(x)=2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$ et $S(x)=2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$.

- **Corrigé**

1) $C(x)+iS(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)+i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\cos(kx)+i\sin(kx)\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}$

$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{ix}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(e^{ix}\right)^k=\left(1+e^{ix}\right)^n$.

2) $1+e^{ix}=e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{-\frac{ix}{2}}+e^{\frac{ix}{2}}\right)=e^{\frac{ix}{2}}\cdot 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ donc $\left(1+e^{ix}\right)^n=\left(e^{\frac{ix}{2}}\right)^n\cdot 2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)=e^{\frac{inx}{2}}2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)$

$=\left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right)+i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right)2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)=2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)+i2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$.

Comme $C(x)+iS(x)=\left(1+e^{ix}\right)^n$, on a :

$C(x)=\mathrm{Re}\left[\left(1+e^{ix}\right)^n\right]=2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$ et $S(x)=\mathrm{Im}\left[\left(1+e^{ix}\right)^n\right]=2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $e^{ix}+e^{-ix}=2\cos(x)$.

2) $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ (Binôme de Newton).

Somme et arc moitié n°2

Chapitre concerné : 4. Nombres complexes, trigonométrie

☐ Ce que montre cet exo

Qu'on peut calculer $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$ $(x \neq 0)$.

- **L'énoncé**

1) Soit $x \neq 0$, $C(x) = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$, $S(x) = \sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$. Montrer que $C(x) + iS(x) == \frac{1-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}}$.

2) Après avoir factorisé le numérateur par $e^{\frac{ix(n+1)}{2}}$ et le dénominateur par $e^{\frac{ix}{2}}$, en déduire l'expression de $C(x)$ et $S(x)$ (pour $x \neq 0$).

- **Corrigé**

1) $C(x)+iS(x) = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx) + i\sum_{k=0}^{n}\sin(kx) = \sum_{k=0}^{n}(\cos(kx)+i\sin(kx)) = \sum_{k=0}^{n}e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n}\left(e^{ix}\right)^k$

$= \frac{1-\left(e^{ix}\right)^{n+1}}{1-e^{ix}} = \frac{1-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}}$ (car $\sum_{k=0}^{n}q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$, résultat sur les sommes géométriques).

2) $$\frac{1-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\cdot\left(e^{-\frac{i(n+1)x}{2}} - e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\right)}{e^{\frac{ix}{2}}\cdot\left(e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}\right)} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}-\frac{ix}{2}}\cdot\frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = e^{\frac{inx}{2}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \left[\cos\left(\frac{nx}{2}\right)+i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right]\cdot\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$ donc

$$C(x) = \mathrm{Re}\left[\frac{1-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}}\right] = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ et } S(x) = \mathrm{Im}\left[\frac{1-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}}\right] = \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $1+q+q^2+\cdots+q^n = \sum_{k=0}^{n}q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$

2) $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin(x)$.

Une somme étrangement nulle

Chapitre concerné : 5. Polynômes

☐ Ce que montre cet exo

Qu'on peut simplifier une somme (et montrer qu'elle est nulle) en utilisant les théorèmes de factorisation d'un polynôme.

- **L'énoncé**

Soit P un polynôme du 3e degré admettant trois racines distinctes a, b et c.

Démontrer que $\frac{a}{P'(a)}+\frac{b}{P'(b)}+\frac{c}{P'(c)}=0$.

- **Corrigé**

Comme P est degré 3, il existe donc λ réel tel que $P(x)=\lambda(x-a)(x-b)(x-c)$.

D'après la formule $(uv)'=u'v+uv'$, on obtient :

$P'(x)=\lambda\left[(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)\right]$

et donc $P'(a)=\lambda(a-b)(a-c)$, $P'(b)=\lambda(b-a)(b-c)$, $P'(c)=\lambda(c-a)(c-b)$.

Comme $P'(a)\neq 0$, $P'(b)\neq 0$ et $P'(c)\neq 0$ (En effet les 3 racines sont simples car P est de degré 3 et car les racines a, b et c sont supposées distinctes), on a :

$$\frac{a}{P'(a)}+\frac{b}{P'(b)}+\frac{c}{P'(c)}=\frac{a}{\lambda(a-b)(a-c)}+\frac{b}{\lambda(b-a)(b-c)}+\frac{c}{\lambda(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{a}{\lambda(a-b)(a-c)}-\frac{b}{\lambda(a-b)(b-c)}+\frac{c}{\lambda(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{a(b-c)}{\lambda(a-b)(a-c)(b-c)}-\frac{b(a-c)}{\lambda(a-b)(b-c)(a-c)}+\frac{c(a-b)}{\lambda(a-c)(b-c)(a-b)}$$

$$=\frac{ab-ac-bc+bc+ca-cb}{\lambda(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{0}{\lambda(a-b)(a-c)(b-c)}=0.$$

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Que si P admet pour racine a, alors on peut factoriser $P(x)$ par $(x-a)$.

2) $(uv)'=u'v+uv'$.

3) Qu'il faut parfois ne pas foncer tête baissée dans un calcul mais essayer d'utiliser d'autres formules pour parvenir à ses fins : il peut être tentant de développer $P(x)=\lambda(x-a)(x-b)(x-c)$ puis de le dériver. En réalité, la résolution en devient beaucoup plus fastidieuse.

Une somme simplifiée grâce aux polynômes

Chapitre concerné : 5. Polynômes

☐ Ce que montre cet exo

Qu'on peut calculer $1+2\omega+3\omega^2+\ldots+n\omega^{n-1}$ (où ω est une racine n-ième de l'unité, $\omega\neq 1$).

- **L'énoncé**

Soit le polynôme $P(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n$ et ω est une racine n-ième de l'unité ($\omega\neq 1$).

1) Montrer que $1+2\omega+3\omega^2+\ldots+n\omega^{n-1}=P'(\omega)$.

2) Soit $x\neq 1$, montrer que $P(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$. En déduire une nouvelle expression de $P'(x)$.

3) En déduire que $1+2\omega+3\omega^2+\ldots+n\omega^{n-1}=\dfrac{-n}{1-\omega}$.

4) Autre méthode : montrer que $P'(\omega)\times(1-\omega)=-n$. En déduire $1+2\omega+3\omega^2+\ldots+n\omega^{n-1}$.

- **Corrigé**

1) On a : $P'(x)=0+1+2x+\ldots+nx^{n-1}$ et donc $P'(\omega)=1+2\omega+3\omega^2+\ldots+n\omega^{n-1}$.

2) $P(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (d'après la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ($q\neq 1$)).

Comme $P(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}=\dfrac{u}{v}$, on a : $P'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\dfrac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2}$ soit :

$$P'(x)=\frac{-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}.$$

3) Comme $1+2\omega+3\omega^2+\ldots+n\omega^{n-1}=P'(\omega)$ et que $\omega^n=1$ (et donc $\omega^{n+1}=\omega^n\times\omega=1\times\omega=\omega$) on a

$$1+2\omega+3\omega^2+\ldots+n\omega^{n-1}=\frac{n\omega^{n+1}-(n+1)\omega^n+1}{(1-\omega)^2}=\frac{n\omega-(n+1)+1}{(1-\omega)^2}=\frac{n(\omega-1)}{(1-\omega)^2}=\frac{n(\omega-1)}{(1-\omega)(1-\omega)}=\frac{-n}{(1-\omega)}$$

4) $P'(\omega)\times(1-\omega)=(1+2\omega+3\omega^2+\ldots+n\omega^{n-1})\times(1-\omega)$

$=1+2\omega+3\omega^2+\ldots+n\omega^{n-1}-\omega-2\omega^2-3\omega^3-\ldots-n\omega^n$

$=1+\omega+\omega^2+\ldots+\omega^{n-1}-n\omega^n=\dfrac{1-\omega^n}{1-\omega}-n\omega^n=-n$. Donc $1+2\omega+3\omega^2+\ldots+n\omega^{n-1}=P'(\omega)=\dfrac{-n}{(1-\omega)}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ($q\neq 1$) 2) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ 3) ω racine n-ième de l'unité équivaut à $\omega^n=1$.

p divise $n \Leftrightarrow x^p - 1$ divise $x^n - 1$

Chapitre concerné : 5. Polynômes

☐ Ce que montre cet exo

L'équivalence : p divise $n \Leftrightarrow x^p - 1$ divise $x^n - 1$.

- **L'énoncé**

1) Supposons que p divise n, donc qu'il existe un entier k tel que $n = pk$. En utilisant la factorisation de $q^k - 1$ par $q - 1$, prouver que $x^p - 1$ divise $x^n - 1$.

2) Supposons que $x^p - 1$ divise $x^n - 1$. Montrer alors que $\omega = e^{i\frac{2\pi}{p}}$ est racine n-ième de l'unité. En déduire alors que p divise n.

3) Que peut-on en déduire ?

- **Corrigé**

1) On a $x^n - 1 = x^{pk} - 1 = \left(x^p\right)^k - 1$. Or $q^k - 1 = (q-1)\left(q^{k-1} + \cdots + q + 1\right)$. Prenons $q = x^p$, alors :

$x^n - 1 = x^{pk} - 1 = \left(x^p\right)^k - 1 = \left(x^p - 1\right)\left(\left(x^p\right)^{k-1} + \cdots + x^p + 1\right)$. Donc $x^p - 1$ divise $x^n - 1$.

2) Comme $x^p - 1$ divise $x^n - 1$, il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $x^n - 1 = \left(x^p - 1\right)Q(x)$.

$\omega = e^{i\frac{2\pi}{p}}$ vérifie : $\omega^p - 1 = 0$ et donc $\omega^n - 1 = \left(\omega^p - 1\right)Q(\omega) = 0$, ce qui prouve que ω est racine n-ième de l'unité.

Comme $\omega = e^{i\frac{2\pi}{p}}$ est racine n-ième de l'unité, on a $\left(e^{i\frac{2\pi}{p}}\right)^n = 1$ soit : $e^{i\frac{2n\pi}{p}} = 1$, il existe donc un entier L tel que $\dfrac{2n\pi}{p} = 2\pi L$ ce qui donne : $\dfrac{n}{p} = L$ soit $n = pL$, ce qui prouve que p divise L.

3) On en déduit l'équivalence : p divise $n \Leftrightarrow x^p - 1$ divise $x^n - 1$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) p divise n équivaut à « il existe un entier k tel que $n = pk$ ».

2) $A(x)$ divise $B(x)$ équivaut à : il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $B(x) = A(x)Q(x)$.

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ $(q \neq 1)$ et donc $x^k - 1 = (x-1)\left(x^{k-1} + \cdots + x + 1\right)$.

4) ω racine n-ième de l'unité équivaut à $\omega^n = 1$.

5) $e^{i\theta} = 1$ équivaut à θ est un multiple de 2π.

Polynômes de Tchebychev

Chapitre concerné : 5. Polynômes

☐ Ce que montre cet exo

Que des polynômes permettent d'exprimer $\cos(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, pour tout entier n.

- **L'énoncé**

Soit $T_n(x)$ la suite de polynômes définie par $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$ et $T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x)$.

1) Montrer par récurrence d'ordre 2 sur $n\geq 0$, la propriété P_n : " $T_n(\cos(\theta))=\cos(n\theta)$ ».

2) En déduire l'expression de $\cos(3\theta)$ et $\cos(4\theta)$.

- **Corrigé**

1) Une récurrence d'ordre 2 consiste pour l'initialisation à montrer que P_0 et P_1 sont vraies et pour l'hérédité à supposer que P_n et P_{n+1} sont vraies et prouver que P_{n+2} est encore vraie.

Initialisation : P_0 est vraie car $T_0(\cos(\theta))=1$ tandis que $\cos(0\cdot\theta)=1$.

P_1 est vraie car $T_1(\cos(\theta))=\cos(\theta)$.

Hérédité : Supposons P_n et P_{n+1} sont vraies (c'est-à-dire que $T_n(\cos(\theta))=\cos(n\theta)$ et $T_{n+1}(\cos(\theta))=\cos((n+1)\theta)$), et montrons que P_{n+2} est encore vraie (c'est-à-dire que $T_{n+2}(\cos(\theta))=\cos((n+2)\theta)$). Comme $T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x)$, on a :

$T_{n+2}(\cos(\theta))=2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta))-T_n(\cos(\theta))=2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta)-\cos(n\theta)$

$=2\cos(\theta)\cos(n\theta+\theta)-\cos(n\theta)=2\cos(\theta)(\cos(n\theta)\cos(\theta)-\sin(n\theta)\sin(\theta))-\cos(n\theta)$

$=2\cos^2(\theta)\cos(n\theta)-2\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(n\theta)-\cos(n\theta)=\cos(n\theta)(2\cos^2(\theta)-1)-\sin(2\theta)\sin(n\theta)$ t

tandis que $\cos((n+2)\theta)=\cos(n\theta+2\theta)=\cos(n\theta)\cos(2\theta)-\sin(n\theta)\sin(2\theta)$.

Comme $\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1$, on en déduit que $T_{n+2}(\cos(\theta))=\cos((n+2)\theta)$.

Conclusion : Comme P_0 et P_1 sont vraies, et qu'il y a hérédité, on en déduit que P_n est vraie pour tout $n\geq 0$.

2) $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$. Après calculs, $T_2(x)=2x^2-1$, $T_3(x)=4x^3-3x$, $T_4(x)=8x^4-8x^2+1$.

Donc $\cos(3\theta)=4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)$ et $\cos(4\theta)=8\cos^4(\theta)-8\cos^2(\theta)+1$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Le principe de la récurrence d'ordre 2.

2) $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$.

3) $\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1$.

Calcul d'un produit de sinus

Chapitre concerné : 5. Polynômes

☐ Ce que montre cet exo

Qu'un polynôme bien utilisé permet de simplifier un produit trigonométrique compliqué.

- **L'énoncé**

1) Soit $P(x)=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2}$. Montrer que $P(x)\times(1-x^2)=1-x^{2n}$. En déduire que les racines de $P(x)$ sont $e^{i\frac{k\pi}{n}}$ et $e^{-i\frac{k\pi}{n}}$ pour k entier compris entre 1 et $n-1$.

2) Montrer que $P(x)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)x+1\right)$, puis à l'aide de $P(1)$ que $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

- **Corrigé**

1) $P(x)\times(1-x^2)=(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2})\times(1-x^2)=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2}-x^2-x^4+\cdots-x^{2n}=1-x^{2n}$.

Les racines de $1-x^{2n}$ (donc de $P(x)\times(1-x^2)$) sont $e^{i\frac{2k\pi}{2n}}$ avec k entier $(0\le k\le 2n-1)$, c'est-à-dire : 1, $e^{i\frac{k\pi}{n}}$ $(1\le k\le n-1)$, –1, $e^{i\frac{k\pi}{n}}$ $(n+1\le k\le 2n-1)$. Si on retire 1 et –1 (les racines de $(1-x^2)$), les racines de $P(x)$ sont $e^{i\frac{k\pi}{n}}$ $(1\le k\le n-1)$ et $e^{i\frac{k\pi}{n}}$ $(n+1\le k\le 2n-1)$ c'est-à-dire $e^{i\frac{k\pi}{n}}$ et $e^{-i\frac{k\pi}{n}}$ $(1\le k\le n-1)$ (car $\left\{e^{i\frac{k\pi}{n}}:n+1\le k\le 2n-1\right\}=\left\{e^{-i\frac{k\pi}{n}}:1\le k\le n-1\right\}$).

2) $P(x)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\left(x-e^{i\frac{-k\pi}{n}}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}+e^{i\frac{-k\pi}{n}}\right)x+1\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)x+1\right)$ donc :

$$P(1)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)=\prod_{k=1}^{n-1}4\left(\frac{1-\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=4^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

Par ailleurs $P(1)=1+1^2+1^4+\cdots+1^{2n-2}=n$, donc $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Les n racines de $1-x^n$ sont $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ $(0\le k\le n-1)$. 2) $\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\cos\theta$ 3) $\sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$.

Petit théorème de Fermat

Chapitre concerné : 6. Arithmétique

☐ Ce que montre cet exo

Que $n^p \equiv n[p]$ pour tout entier naturel n, lorsque p est premier.

- **L'énoncé**

1) Soit p un nombre premier. Démontrer que pour tout entier $1 \leq k \leq p-1$, p divise $\binom{p}{k}$.

2) Soit p un nombre premier. Démontrer par récurrence sur n que $n^p \equiv n[p]$.

- **Corrigé**

1) On a $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ donc $k!\binom{p}{k} = p\frac{(p-1)!}{(p-k)!}$ où $\frac{(p-1)!}{(p-k)!} = (p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)$ est un entier. Donc p divise $k!\binom{p}{k}$. Or p est premier et $1 \leq k \leq p-1$ donc p est premier avec tous les entiers 1, 2, 3, $\cdots k$ et donc avec $k! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times k$.

Comme p divise $k!\binom{p}{k}$ et que p est premier avec $k!$, d'après le lemme de Gauss p divise $\binom{p}{k}$.

2) Soit P_n la propriété « $n^p \equiv n[p]$ ».

Initialisation : P_0 est vraie (car $0^p \equiv 0[p]$).

Hérédité : Supposons P_n vraie (c'est-à-dire que $n^p \equiv n[p]$), et montrons que P_{n+1} est encore vraie (c'est-à-dire que $(n+1)^p \equiv n+1[p]$). On a $(n+1)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}n^k 1^{p-k} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}n^k$.

Or $\binom{p}{k} \equiv 0[p]$ pour $1 \leq k \leq p-1$ (d'après la question 1)).

Donc $(n+1)^p \equiv \binom{p}{0}n^0 + \sum_{k=1}^{p-1} 0\cdot n^k + \binom{p}{p}n^p \equiv 1+n^p \equiv 1+n[p]$ (car $n^p \equiv n[p]$), ce qu'on voulait.

Conclusion : comme P_n est héréditaire et que P_0 est vraie, P_n est vraie pour $n \geq 0$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$; $p! = p(p-1)!$ 2) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ (Formule du binôme de Newton).

3) Le lemme de Gauss : Si a divise bc et $\text{pgcd}(a,b) = 1$ alors a divise c.

Un polynôme qui n'admet pas de racines rationnelles

Chapitre concerné : 6. Arithmétique

☐ Ce que montre cet exo

Que x^3+x+1 n'admet pas de racines rationnelles.

- **L'énoncé**

Par un raisonnement par l'absurde, montrer que x^3+x+1 n'admet pas de racines rationnelles.

- **Corrigé**

Supposons que x^3+x+1 admette une racine rationnelle de la forme $\frac{a}{b}$ avec $\text{pgcd}(a,b)=1$.

On a donc $\left(\frac{a}{b}\right)^3+\frac{a}{b}+1=0$ donc $\frac{a^3}{b^3}+\frac{a}{b}+1=0$ donc $\frac{a^3+ab^2+b^3}{b^3}=0$.

On a donc $a^3+ab^2+b^3=0$. Ainsi : $\begin{cases} a^3=-\left(ab^2+b^3\right)=b\left(-ab-b^2\right) \text{ donc b divise } a^3 \\ b^3=-\left(ab^2+a^3\right)=a\left(-b^2-a^2\right) \text{ donc a divise } b^3 \end{cases}$.

Comme $\text{pgcd}(a,b)=1$, on a aussi $\begin{cases} \text{pgcd}\left(b,a^3\right)=1 \\ \text{pgcd}\left(a,b^3\right)=1 \end{cases}$. Ainsi $\begin{cases} b \text{ divise } a^3 \\ a \text{ divise } b^3 \end{cases}$ entraîne $\begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases}$.

Donc : $\frac{a}{b}=\frac{1}{1}=1$. CONTRADICTION ! Car x^3+x+1 n'admet pas 1 comme racine.

Conclusion : x^3+x+1 est un polynôme qui n'admet aucune racine rationnelle.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Le raisonnement par l'absurde : pour montrer que la proposition P est vraie, on suppose qu'elle est fausse et qu'on aboutit à une contradiction.

2) Lorsqu'on étudie un nombre rationnel, pensez à prendre un nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$ tel que $\text{pgcd}(a,b)=1$. Cela permet d'avancer !

Une fraction toujours irréductible

Chapitre concerné : 6. Arithmétique

☐ Ce que montre cet exo

Que la fraction $\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}$ est toujours irréductible (quel que soit n entier strictement positif).

- **L'énoncé**

On considère la fraction $\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}$ (pour n entier strictement positif).

Démontrer que cette fraction est irréductible en utilisant les 3 méthodes suivantes :
1) Une relation de Bézout.
2) L'algorithme d'Euclide.
3) Un raisonnement par l'absurde : en utilisant les diviseurs premiers, lemme de Gauss, et le lemme d'Euclide.

- **Corrigé**

Montrons que $\text{pgcd}(2n+1, 2n(2n+1)) = 1$, cela prouvera que la fraction est irréductible.

1) La relation de Bézout $(2n+1)(2n+1) - 2n(n+1)\cdot 2 = 1$ prouve que $\text{pgcd}(2n+1, 2n(2n+1)) = 1$.

2) Les divisions successives de $2n(n+1) = 2n^2 + 2n$ par $2n+1$ donnent :

$2n^2 + 2n = (2n+1)\cdot n + n$; $2n+1 = n\cdot 2 + 1$; $n = n\cdot 1 + 0$. Le dernier reste non nul est 1, donc $\text{pgcd}(2n+1, 2n(n+1)) = 1$.

3) Supposons que $\text{pgcd}(2n+1, 2n(n+1)) \neq 1$ et considérons p un diviseur premier divisant à la fois $2n+1$ et $2n(n+1)$. Comme $2n+1$ est impair, $p \neq 2$ et donc p est premier avec 2. Comme p divise $2n(n+1)$ et que p est premier avec 2, d'après le lemme de Gauss il divise $n(n+1)$.
Comme p est premier, d'après le lemme d'Euclide, p divise n ou p divise $n+1$.
Si p divise n, alors p divise $2n$. Comme p divise $2n+1$, p divise leur différence égale à 1. Contradiction !
Si p divise $n+1$ alors p divise $2n+2$. Comme p divise $2n+1$, p divise leur différence égale à 1. Contradiction !
Ainsi dans tous les cas, on aboutit à une CONTRADICTION. Donc $\text{pgcd}(2n+1, 2n(n+1)) = 1$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) S'il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$ alors $\text{pgcd}(a,b) = 1$.
2) Dans les divisions successives (algorithme d'Euclide) le dernier reste non nul est le pgcd.
3) Le lemme de Gauss : Si a divise bc et $\text{pgcd}(a,b) = 1$ alors a divise c.
4) Lemme d'Euclide : Soit p un nombre premier qui divise ab, alors p divise a ou p divise b.

Une drôle de loi pour un drôle de groupe

Chapitre concerné : 7. Structures algébriques

☐ Ce que montre cet exo

Une curieuse loi qui évoque la propriété trigonométrique : $\tan(x+y)=\dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$.

- **L'énoncé**

Montrer que $(G,*)$ est un groupe où $G=]-1;1[$ avec $a*b=\dfrac{a+b}{1+ab}$.

- **Corrigé**

$G=]-1;1[$ est non vide et $*$ est une loi de composition interne, car si $a,b\in]-1;1[$ alors $a*b\in]-1;1[$. En effet : $\dfrac{a+b}{1+ab}<1$ car $a,b\in]-1;1[$ donne : $1+ab>0$ et $(a+b)-(1+ab)=(1-a)(b-1)<0$.

On a aussi $-1<\dfrac{a+b}{1+ab}$ car $a,b\in]-1;1[$ donne : $1+ab>0$ et $(a+b)+(1+ab)=(1+a)(b+1)>0$.

Associativité :

$$a*(b*c)=\frac{a+(b*c)}{1+a(b*c)}=\frac{a+\left(\frac{b+c}{1+bc}\right)}{1+a\left(\frac{b+c}{1+bc}\right)}=\frac{\left(\frac{a+abc}{1+bc}\right)+\left(\frac{b+c}{1+bc}\right)}{\left(\frac{1+bc}{1+bc}\right)+\left(\frac{ab+ac}{1+bc}\right)}=\frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc}.$$

$$(a*b)*c=\frac{(a*b)+c}{1+(a*b)c}=\frac{\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)+c}{1+\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)c}=\frac{\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)+\left(\frac{c+abc}{1+ab}\right)}{\left(\frac{1+ab}{1+ab}\right)+\left(\frac{ac+bc}{1+ab}\right)}=\frac{a+b+c+abc}{a+ab+ac+bc}.$$

Donc : $a*(b*c)=(a*b)*c$.

Existence d'un neutre e :

$e=0$ convient car $a*0=\dfrac{a+0}{1+a\times 0}=\dfrac{a}{1}=a$ et $0*a=\dfrac{0+a}{1+0\times a}=\dfrac{a}{1}=a$.

Existence pour chaque a de G d'un symétrique a' :

$a'=-a$ convient car $a*(-a)=\dfrac{a+(-a)}{1+a(-a)}=\dfrac{0}{1-a^2}=0=e$ et $(-a)*a=\dfrac{(-a)+a}{1+(-a)a}=\dfrac{0}{1-a^2}=0=e$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

$(G,*)$ est un groupe si G est non vide et si la loi $*$ vérifie les 3 propriétés suivantes :

Associativité : $\forall\, a,b,c\in G$, $a*(b*c)=(a*b)*c$.

Existence d'un neutre : $\exists\, e\in G$ tel que $\forall a\in G$, $a*e=e*a=a$.

Existence pour chaque a de G d'un symétrique a' : $\forall a\in G$, $\exists a'\in G$ tel que $a*a'=a'*a=e$.

Sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$

Chapitre concerné : 7. Structures algébriques

☐ Ce que montre cet exo

Que tout sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$ est de la forme $(n\mathbb{Z},+)$ avec n entier.

- **L'énoncé**

Soit H un sous-groupe de $G=(\mathbb{Z},+)$.

On suppose que $H\neq\{0\}$, on appelle h le plus petit élément strictement positif de H.

1) Montrer que $h\mathbb{Z}\subset H$.
2) Soit e un élément de H. En effectuant la division de e par h, montrer que le reste est nul et que e est nécessairement multiple de h. En déduire que $H\subset h\mathbb{Z}$.

3) En déduire que tout sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$ est de la forme $(n\mathbb{Z},+)$.

- **Corrigé**

1) Comme $h\in H$, par stabilité d'un sous-groupe, tout multiple de h appartient à H, d'où : $h\mathbb{Z}\subset H$.
2) Il existe $q\in\mathbb{Z}$ et $0\leq r<h$ tel que $e=qh+r$. On a $r=e-qh$ donc r est un élément de H (par stabilité d'un sous-groupe et car e et h appartiennent à H). Comme $0\leq r<h$ et que h est par définition le plus petit élément strictement positif de H, on en déduit que $r=0$. Par conséquent $e=qh$ et donc e est un multiple de H. Conclusion : on a $H\subset h\mathbb{Z}$.

3) Si $H\neq\{0\}$, les questions précédentes montrent que $h\mathbb{Z}\subset H$ et $H\subset h\mathbb{Z}$, ce qui donne $H=h\mathbb{Z}$.

Si $H=\{0\}$ alors $H=0\mathbb{Z}$.

Dans tous les cas, les sous-groupes sont de la forme $(n\mathbb{Z},+)$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Stabilité d'un sous-groupe H de $G=(\mathbb{Z},+)$: tout multiple de h appartient à H.

2) Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ de a par b : il existe q et r tels que $q\in\mathbb{Z}$, $0\leq r<b$ et $a=bq+r$.

L'anneau des entiers de Gauss

Chapitre concerné : 7. Structures algébriques

☐ Ce que montre cet exo

Comment on montre qu'un ensemble muni de deux lois est bien un anneau.

- **L'énoncé**

Soit $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib : a,b\in\mathbb{Z}\}$. On munit cet ensemble de l'addition **+** et de la multiplication $\times$. Montrer que $(\mathbb{Z}[i],+,\times)$ est un anneau.

- **Corrigé**

1) $(\mathbb{Z}[i],+)$ est un groupe.

Associativité : on a $(a_1+ib_1)+((a_2+ib_2)+(a_3+ib_3))=a_1+a_2+a_3+i(b_1+b_2+b_3)$

$=((a_1+ib_1)+(a_2+ib_2))+(a_3+ib_3)$.

Existence d'un neutre : $e=0$ convient car $(a+ib)+0=0+(a+ib)$.

Existence pour chaque élément de $\mathbb{Z}[i]$ d'un symétrique : $-a-ib$ est le symétrique de $a+ib$.

2) la multiplication est associative :

$(a_1+ib_1)\times((a_2+ib_2)\times(a_3+ib_3))=a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-a_1b_2b_3-a_2b_1b_3+i(a_1a_2b_3-b_1b_2b_3+a_1b_2a_3+a_2b_1a_3)$

$=((a_1+ib_1)\times(a_2+ib_2))\times(a_3+ib_3)$.

3) la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$(a_1+ib_1)\times((a_2+ib_2)+(a_3+ib_3))=(a_1+ib_1)\times(a_2+ib_2)+(a_1+ib_1)\times(a_3+ib_3)$ et

$((a_2+ib_2)+(a_3+ib_3))\times(a_1+ib_1)=(a_2+ib_2)\times(a_1+ib_1)+(a_3+ib_3)\times(a_1+ib_1)$.

4) Il existe un élément neutre pour la multiplication :

1 convient car $(a+ib)\times 1=1\times(a+ib)=a+ib$.

Conclusion : $(\mathbb{Z}[i],+,\times)$ est un anneau.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

$(A,+,\times)$ est un anneau si : $(A,+)$ est un groupe, la multiplication est associative ($\forall a,b,c\in A$, $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$), et distributive par rapport à l'addition : ($a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ et $(b+c)\times a=b\times a+c\times a$), et s'il existe un élément neutre pour la multiplication.

Les quaternions

Chapitre concerné : 7. Structures algébriques

☐ Ce que montre cet exo

La découverte d'un ensemble (muni de deux lois) qui n'est pas aussi bien qu'un corps mais quand même mieux qu'un simple anneau.

- **L'énoncé**

Un quaternion est un nombre q pouvant s'écrire sous la forme $q=a+bi+cj+dk$ où les nombres i, j et k vérifient $i^2=j^2=k^2=ijk=1$ (c'est une généralisation des complexes en dimension 4). Pour plus de commodité, on les considère comme des quadruplets de la forme $q=(a,b,c,d)$ avec $i=(0,1,0,0)$, $j=(0,0,1,0)$, $k=(0,0,0,1)$. Soit H l'ensemble des quaternions muni des lois + et $\times$ définies par :

$(a_1,b_1,c_1,d_1)+(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2,d_1+d_2)$ et

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)\times(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2,a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2,$$
$$a_1c_3+c_1a_2-b_1d_2+d_1b_2,d_1a_2+a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2)$$

1) Montrer que $(H,+,\times)$ est un anneau non commutatif pour la loi $\times$.

2) Montrer que tout élément $q=(a,b,c,d)\neq(0,0,0,0)$ est inversible pour la loi $\times$, d'inverse $q^{-1}=\left(\frac{a}{\sigma^2},\frac{-b}{\sigma^2},\frac{-c}{\sigma^2},\frac{-d}{\sigma^2}\right)$ où $\sigma=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$. Que peut-on en déduire ?

- **Corrigé**

1) $(H,+)$ est un groupe (Associativité immédiate. Elément neutre $(0,0,0,0)$, le symétrique de (a,b,c,d) est $(-a,-b,-c,-d)$).

La multiplication est associative (immédiat mais volumineux) mais non commutative comme le montre l'égalité suivante : $(0,1,0,0)\times(0,0,1,0)=-(0,0,1,0)\times(0,1,0,0)$ qui correspond à $ij=-ji$.

La multiplication est distributive par rapport à l'addition, à droite comme à gauche (immédiat mais volumineux).

Il existe un élément neutre pour la multiplication : $(1,0,0,0)$.

Conclusion : $(H,+,\times)$ est un anneau non commutatif.

2) $(a,b,c,d)\times\left(\frac{a}{\sigma^2},\frac{-b}{\sigma^2},\frac{-c}{\sigma^2},\frac{-d}{\sigma^2}\right)=\cdots=\left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2},\frac{0}{\sigma^2},\frac{0}{\sigma^2},\frac{0}{\sigma^2}\right)=(1,0,0,0)$. Ainsi $(H,+,\times)$ est un anneau dans lequel tout élément de A* possède un inverse pour la loi $\times$. En revanche, ce n'est pas un corps car il n'y a pas commutativité.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Un corps est un anneau commutatif pour lequel tout élément de A* possède un inverse pour la loi $\times$.

Matrice inverse (matrice carrée d'ordre 2)

Chapitre concerné : 8. Calcul matriciel

☐ Ce que montre cet exo

Qu'on peut retrouver l'expression de la matrice inverse avec la méthode de Gauss.

- **L'énoncé**

Soit $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ($ad-bc\neq 0$) Déterminer par la méthode de Gauss, l'expression de M^{-1}.

- **Corrigé**

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ s'écrit $\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1\times c \\ L_2\leftarrow L_2\times a}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ ac & ad & 0 & a \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ ac & ad & 0 & a \end{array}\right) \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ 0 & da-bc & -c & a \end{array}\right) \underset{L_2\leftarrow L_2\div(ad-bc)}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) \underset{L_1\leftarrow L_1-L_1\times bc}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} ac & 0 & c+\frac{bcc}{ad-bc} & -\frac{abc}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} ac & 0 & c+\frac{bcc}{ad-bc} & -\frac{abc}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) \underset{L_1\leftarrow L_1\div ac}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{c}{ac}+\frac{bcc}{ac(ad-bc)} & -\frac{abc}{ac(ad-bc)} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{c}{ac}+\frac{bcc}{ac(ad-bc)} & -\frac{abc}{ac(ad-bc)} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{c(ad-bc)+bcc}{ac(ad-bc)} & -\frac{b}{(ad-bc)} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{(ad-bc)} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Donc $M^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) La méthode de Gauss en notant à chaque étape l'opération effectuée.

2) Si $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (avec $ad-bc\neq 0$) alors $M^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Puissance n-ième d'1 matrice triangulaire

Chapitre concerné : 8. Calcul matriciel

☐ Ce que montre cet exo

Qu'on peut parfois calculer la puissance n-ième d'une matrice par le binôme de Newton.

- **L'énoncé**

Soit $M=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$. Montrer que $M^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\n(n+1)/2&n&1\end{pmatrix}$ en utilisant $J=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$.

- **Corrigé**

On a $M=I_3+J$ donc d'après la formule du binôme (qu'on peut appliquer car I_3 et J commutent) : $M^n=(I_3+J)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}I_3{}^{n-k}J^k$.

Or (après calculs) $J^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ et $J^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $J^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ (pour $n\geq 4$).

Donc $M^n=\binom{n}{0}I_3{}^{n-0}J^0+\binom{n}{1}I_3{}^{n-1}J^1+\binom{n}{2}I_3{}^{n-2}J^2=\binom{n}{0}I_3+\binom{n}{1}J+\binom{n}{2}I_3J^2=1\cdot I_3+nJ+\frac{n(n-1)}{2}J^2$

Ce qui donne $M^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\n&0&0\\n&n&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\n(n-1)/2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\n(n+1)/2&n&1\end{pmatrix}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Formule du binôme de Newton pour les matrices qui commutent : $(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k$.

Cette formule est surtout utile lorsque les matrices A et B sont simples (et leurs puissances également). C'est le cas ici avec $(I_3+J)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}I_3{}^{n-k}J^k$ car I_3 et J sont des matrices (elles et leurs puissances) très simples !

2) $I_3=I_3{}^2=I_3{}^3=\cdots=I_3{}^{n-1}=I_3{}^n$.

3) On pourrait aussi démontrer ce résultat par récurrence (c'est long mais c'est très facile : pour l'hérédité, on utilise le fait que $\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$).

Puissance n-ième d'une matrice

Chapitre concerné : 8. Calcul matriciel

☐ Ce que montre cet exo

Qu'on peut parfois calculer la puissance n-ième d'une matrice par le binôme de Newton.

- **L'énoncé**

Soit $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}$. Montrer que $(A+I_3)^3=0_{M_3(\mathbb{R})}$. En déduire A^n pour $n\geq 3$.

- **Corrigé**

On a : $A+I_3=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -3 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $(A+I_3)^2=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -3 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -3 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$,

$(A+I_3)^3=(A+I_3)^2(A+I_3)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -3 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ donc $(A+I_3)^3=0_{M_3(\mathbb{R})}$.

Pour $n\geq 3$, $A^n=(A+I_3-I_3)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(A+I_3)^k(-I_3)^{n-k}$ (car $A+I_3$ et $-I_3$ commutent).

Donc : $A^n=\binom{n}{0}(A+I_3)^0(-I_3)^{n-0}+\binom{n}{1}(A+I_3)^1(-I_3)^{n-1}+\binom{n}{2}(A+I_3)^2(-I_3)^{n-2}$

donc : $A^n=I_3+n(A+I_3)(-1)^{n-1}+\dfrac{n(n-1)}{2}(A+I_3)^2(-1)^{n-2}$

donc : $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+n(-1)^{n-1}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -3 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}+\dfrac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}(-1)^{n-2}$

c'est à dire : $A^n=\begin{pmatrix}1+n(-1)^n & n(-1)^{n-1} & n(-1)^{n-1}\\ (-1)^{n-2}\left(\dfrac{n^2+5n}{2}\right) & 1+\left(\dfrac{n^2+3n}{2}\right)(-1)^{n-1} & \left(\dfrac{n^2+3n}{2}\right)(-1)^{n-1}\\ \left(\dfrac{n^2+3n}{2}\right)(-1)^{n-1} & \left(\dfrac{n^2+n}{2}\right)(-1)^{n-2} & 1+\left(\dfrac{n^2+n}{2}\right)(-1)^{n-2}\end{pmatrix}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Formule du binôme pour les matrices qui commutent : $(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}$.

Simplification de $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}$

Chapitre concerné : 9. Fractions rationnelles

☐ Ce que montre cet exo

Que $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}=1-\frac{1}{n}$.

- **L'énoncé**

1) Soit $k\neq 0$ et $k\neq 1$. Déterminer a et b réels tels que $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}$.

2) En déduire que $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$.

3) Application : en déduire la valeur de la somme $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$.

- **Corrigé**

1) $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}\Leftrightarrow\frac{1}{k(k+1)}=\frac{a(k+1)}{k(k+1)}+\frac{bk}{k(k+1)}\Leftrightarrow\frac{1}{k(k+1)}=\frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}\Leftrightarrow 1=(a+b)k+a$

Deux polynômes (de variable k) étant égaux ssi ils ont même coefficient, on obtient :

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-a=-1\\a=1\end{cases}$. Ainsi : $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.

2) $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1+0+0+\cdots+0-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$ (télescopage).

3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{6\times 7}=1-\frac{1}{7}=\frac{7}{7}-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Le principe de décomposition d'une fraction rationnelle, après mise au même dénominateur.
2) Deux polynômes sont égaux ssi ils ont même coefficient.
3) Le principe du télescopage : on garde tout ce qui ne s'en va pas.

Décomposition de $\dfrac{1}{1-x^4}$

Chapitre concerné : 9. Fractions rationnelles

☐ Ce que montre cet exo

Que $\dfrac{1}{1-x^4}=\dfrac{0,25}{1-x}+\dfrac{0,25}{1+x}+\dfrac{0,5}{1+x^2}$ $(x\neq 1)$.

- **L'énoncé**

On souhaite décomposer la fraction rationnelle $F(x)=\dfrac{1}{1-x^4}$.

1) Factoriser le polynôme $1-x^4$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$.

2) En déduire le nombre de coefficients à déterminer dans la décomposition.

3) Achever cette décomposition, en utilisant une évaluation en 0 et trois calculs des limites.

- **Corrigé**

1) $1-x^4=(1-x^2)(1+x^2)=(1-x)(1+x)(1+x^2)$ (On ne peut pas aller plus loin dans $\mathbb{R}[x]$).

2) On en déduit qu'il existe quatre coefficients a, b, c, d tels que $F(x)=\dfrac{a}{1-x}+\dfrac{b}{1+x}+\dfrac{cx+d}{1+x^2}$.

3) Utilisons les deux expressions $F(x)=\dfrac{1}{1-x^4}$ et $F(x)=\dfrac{a}{1-x}+\dfrac{b}{1+x}+\dfrac{cx+d}{1+x^2}$.

$F(0)$ donne : $\dfrac{1}{1-0^4}=\dfrac{a}{1-0}+\dfrac{b}{1+0}+\dfrac{c\cdot 0+d}{1+0^2}$ donc : $1=a+b+d$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$ donne : $0=-a+b+c$ (car $\dfrac{x}{1-x^4}=\dfrac{ax}{1-x}+\dfrac{bx}{1+x}+\dfrac{cx^2+dx}{1+x^2}$).

$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)F(x)$ donne : $-\dfrac{1}{4}=-a+0+0$ (car $\dfrac{x-1}{1-x^4}=\dfrac{a(x-1)}{1-x}+\dfrac{b(x-1)}{1+x}+\dfrac{(cx+d)(x-1)}{1+x^2}$ donc :
$\dfrac{-1}{(1+x)(1+x^2)}=-a+\dfrac{b(x-1)}{1+x}+\dfrac{(cx+d)(x-1)}{1+x^2}$).

$\lim\limits_{x\to -1}(x+1)F(x)$ donne : $\dfrac{1}{4}=0+b+0$ (car $\dfrac{x+1}{1-x^4}=\dfrac{a(x+1)}{1-x}+\dfrac{b(x+1)}{1+x}+\dfrac{(cx+d)(x+1)}{1+x^2}$ donc :
$\dfrac{1}{(1-x)(1+x^2)}=\dfrac{a(x+1)}{1-x}+b+\dfrac{(cx+d)(x+1)}{1+x^2}$).

La résolution donne : $a=\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{4}$, $c=0$ et $d=\dfrac{1}{2}$ donc : $\dfrac{1}{1-x^4}=\dfrac{0,25}{1-x}+\dfrac{0,25}{1+x}+\dfrac{0,5}{1+x^2}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Le principe de décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.

Dérivée n-ième d'une fraction rationnelle

Chapitre concerné : 9. Fractions rationnelles

☐ Ce que montre cet exo

Comment à l'aide d'une décomposition en éléments simples, on peut calculer la dérivée n-ième d'une fraction rationnelle.

- **L'énoncé**

Soit $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+4}{(x-1)(x-2)^2}$ ($x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$). On souhaite calculer la dérivée n-ième de $f(x)$.

1) Décomposer la fraction rationnelle $f(x)$ en éléments simples.

2) En déduire que $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}+(-1)^n n!\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}+(n+1)!(-1)^n\dfrac{2}{(x-2)^{n+2}}$.

- **Corrigé**

1) On cherche a, b et c tels que : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$, $\dfrac{2x^2-5x+4}{(x-1)(x-2)^2}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{(x-2)^2}$.

$$\frac{2x^2-5x+4}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{(x-2)^2}\Leftrightarrow\frac{2x^2-5x+4}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{(a+b)x^2+(-4a-3b+c)x+4a+2b-c}{(x-1)(x-2)^2}.$$

Deux polynômes étant égaux ssi ils ont même coefficient, on a :
$a+b=2$, $-4a-3b+c=-5$, $4a+2b-c=4$. Ce qui donne $b=2-a$, $c-a=1$, $2a-c=0$ c'est-à-dire : $a=1$, $b=1$ et $c=2$.

Ainsi : $\dfrac{2x^2-5x+4}{(x-1)(x-2)^2}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{(x-2)^2}$.

2) Par trois raisonnements par récurrence, on peut montrer (en s'inspirant de l'énoncé) que :

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\ ;\ \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\frac{1}{(x-2)^{n+1}}\ \text{et}\ \left(\frac{2}{x-2}\right)^{(n)}=(n+1)!(-1)^n\frac{2}{(x-2)^{n+2}}.$$

D'où : $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}+(-1)^n n!\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}+(n+1)!(-1)^n\dfrac{2}{(x-2)^{n+2}}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Le principe de décomposition d'une fraction rationnelle en éléments irréductibles.
2) Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même coefficient.
3) Le principe du raisonnement par récurrence.

Primitive d'une fraction rationnelle

Chapitre concerné : 9. Fractions rationnelles

☐ Ce que montre cet exo

Comment à l'aide d'une décomposition en éléments simples, on peut déterminer une primitive d'une fraction rationnelle.

- **L'énoncé**

Soit $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{(x^2+1)(x-2)}$. On souhaite calculer une primitive de $f(x)$.

1) Décomposer la fraction rationnelle $f(x)$ en éléments simples.

2) En déduire la forme des primitives $F(x)$ de $f(x)$ sur $]2;+\infty[$.

- **Corrigé**

1) On cherche a, b et c tels que $\dfrac{2x^2-x-1}{(x^2+1)(x-2)}=\dfrac{ax+b}{x^2+1}+\dfrac{c}{x-2}$.

$$\frac{2x^2-x-1}{(x^2+1)(x-2)}=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{c}{x-2}\Leftrightarrow\frac{2x^2-x-1}{(x^2+1)(x-2)}=\frac{(ax+b)(x-2)}{(x^2+1)(x-2)}+\frac{c(x^2+1)}{(x^2+1)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x^2-x-1}{(x^2+1)(x-2)}=\frac{(a+c)x^2+(b-2a)x+c-2b}{(x^2+1)(x-2)}.$$

Deux polynômes étant égaux ssi ils ont même coefficient, on a :
$a+c=2$, $b-2a=-1$, $c-2b=-1$. Ce qui donne $c=2-a$, $b-2a=-1$, $2-a-2b=-1$ c'est-à-dire : $a=1$, $b=1$ et $c=1$.

Ainsi : $\dfrac{2x^2-x-1}{(x^2+1)(x-2)}=\dfrac{x+1}{x^2+1}+\dfrac{1}{x-2}$.

2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{x-2}$.

Donc $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+\arctan(x)+\ln|x-2|+C$ donc :

$F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\arctan(x)+\ln(x-2)+C$ (sur $]2;+\infty[$).

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Le principe de décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.

2) $\dfrac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln|u|$

3) $\dfrac{1}{1+x^2}$ a pour primitive $\arctan(x)$.

Résolution d'un système linéaire par Gauss

Chapitre concerné : 10. Systèmes linéaires

☐ Ce que montre cet exo

La méthode de Gauss pour résoudre un système (opérations sur les lignes).

- **L'énoncé**

Résoudre $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x-2y+2z=3 \\ 2x+y-4z=-8 \end{cases}$ en utilisant la méthode de Gauss : $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & -2 & 2 & \vdots & 3 \\ 2 & 1 & -4 & \vdots & -8 \end{bmatrix}$

- **Corrigé**

Etape 1 : $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & -2 & 2 & \vdots & 3 \\ 2 & 1 & -4 & \vdots & -8 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & -6 & \vdots & -12 \end{bmatrix}$

Etape 2 : $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & -6 & \vdots & -12 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -3 & \vdots & -9 \end{bmatrix}$

Etape 3 : $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -3 & \vdots & -9 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 \times (-1) \\ L_3 \leftarrow L_3 \div (-3)}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$

Etape 4 : $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$

Etape 5 : $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 - L_3}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$

Le système admet pour solution $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$ (on peut vérifier alors qu'on a bien $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x-2y+2z=3 \\ 2x+y-4z=-8 \end{cases}$).

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Dans un système de trois équations à trois inconnues :

1) On peut agir sur les lignes. Le but est de se rapprocher d'une matrice triangulaire (avec des 1 sur la diagonale) puis d'une matrice diagonale (avec des 1 sur la diagonale) : c'est cela la méthode de Gauss.

2) Lorsqu'on agit sur une ligne, il ne faut surtout oublier aucun terme (ce qui en fait 4 à modifier). Il vaut mieux indiquer au-dessous de chaque équivalence l'opération sur les lignes effectuées, pour pouvoir relire facilement ses calculs.

3) Il est conseillé de vérifier la solution trouvée dans le système de départ pour éviter les grosses erreurs de calculs

Instabilité d'un système linéaire

Chapitre concerné : 10. Systèmes linéaires

☐ Ce que montre cet exo

Qu'une légère perturbation sur les coefficients peut avoir de grandes répercussions sur les solutions.

- **L'énoncé**

Résoudre les systèmes suivants $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+4{,}01y=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+4{,}02y=0 \end{cases}$ par la méthode de Gauss.

Que constatez-vous ?

- **Corrigé**

1) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+4{,}01y=0 \end{cases}$ s'écrit $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4{,}01 & 0 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4{,}01 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0{,}01 & -10 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0{,}01 & -10 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 \times 100}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1000 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1000 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2005 \\ 0 & 1 & -1000 \end{array}\right). \text{ Solution : } \begin{cases} x = 2005 \\ y = -1000 \end{cases}.$$

2) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+4{,}02y=0 \end{cases}$ s'écrit $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4{,}02 & 0 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4{,}02 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0{,}02 & -10 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0{,}02 & -10 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 \times 50}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -500 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -500 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1005 \\ 0 & 1 & -500 \end{array}\right). \text{ Solution : } \begin{cases} x = 1005 \\ y = -500 \end{cases}.$$

Ainsi une perturbation d'un centième sur l'un des coefficients provoque ici des perturbations du simple au double. C'est très instable !

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Une infime perturbation sur l'un des coefficients peut avoir des conséquences énormes : gare aux erreurs d'arrondis des ordinateurs !

Un joli système linéaire

Chapitre concerné : 10. Systèmes linéaires

☐ Ce que montre cet exo

La résolution d'un système linéaire à paramètres.

- **L'énoncé**

Résoudre le système suivant $\begin{cases} ax+by=c \\ bx+ay=d \end{cases}$ où $a \neq b$ et $a \neq -b$.

- **Corrigé**

Etape 1 : $\left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ b & a & d \end{array}\right] \underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} a+b & b+a & c+d \\ b & a & d \end{array}\right]$

Etape 2 : $\left[\begin{array}{cc|c} a+b & b+a & c+d \\ b & a & d \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \dfrac{c+d}{a+b} \\ b & a & d \end{array}\right]$

Etape 3 : $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \dfrac{c+d}{a+b} \\ b & a & d \end{array}\right] \underset{L_2 \leftarrow L_2-bL_1}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \dfrac{c+d}{a+b} \\ 0 & a-b & d-b\dfrac{c+d}{a+b} \end{array}\right]$

Etape 4 : $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \dfrac{c+d}{a+b} \\ 0 & a-b & d-b\dfrac{c+d}{a+b} \end{array}\right] \underset{L_2 \leftarrow L_2 \times \frac{1}{a-b}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \dfrac{c+d}{a+b} \\ 0 & 1 & \dfrac{d}{a-b}-b\dfrac{c+d}{(a+b)(a-b)} \end{array}\right]$

Etape 5 : $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \dfrac{c+d}{a+b} \\ 0 & 1 & \dfrac{d}{a-b}-b\dfrac{c+d}{(a+b)(a-b)} \end{array}\right] \underset{L_1 \leftarrow L_1-L_2}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \dfrac{c+d}{a+b}-\dfrac{d}{a-b}+b\dfrac{c+d}{(a+b)(a-b)} \\ 0 & 1 & \dfrac{d}{a-b}-b\dfrac{c+d}{(a+b)(a-b)} \end{array}\right]$

Ainsi : $\begin{cases} x=\dfrac{c+d}{a+b}-\dfrac{d}{a-b}+b\dfrac{c+d}{(a+b)(a-b)} \\ y=\dfrac{d}{a-b}-b\dfrac{c+d}{(a+b)(a-b)} \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} x=\dfrac{ca-db}{a^2-b^2} \\ y=\dfrac{da-bc}{a^2-b^2} \end{cases}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Dans un système :

1) On peut agir sur les lignes. Le but étant de se rapprocher d'une matrice triangulaire (avec des 1 sur la diagonale) puis d'une matrice diagonale (avec des 1 sur la diagonale) : c'est cela la méthode de Gauss.

2) Lorsqu'on agit sur une ligne, il ne faut surtout oublier aucun terme.

Une jolie propriété des triangles

Chapitre concerné : 11. Géométrie du plan et de l'espace

☐ Ce que montre cet exo

L'inégalité $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\leq 2$ pour tout triangle de côtés a, b et c.

- **L'énoncé**

On sait que dans un triangle, n'importe quel côté est plus petit que la somme des deux autres. On considère un triangle de côtés a, b et c.

On souhaite démontrer l'inégalité $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\leq 2$.

1) Démontrer que $\frac{a}{b+c}\leq\frac{2a}{a+b+c}$.

2) En déduire que $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\leq 2$.

- **Corrigé**

1) $\frac{a}{b+c}=\frac{2a}{2(b+c)}=\frac{2a}{(b+c)+(b+c)}$.

Or $a\leq b+c$ (car dans un triangle, la longueur d'un côté est plus petite que la somme des deux autres).

Donc $a+b+c\leq b+c+b+c$ soit en passant à l'inverse $\frac{1}{a+b+c}\geq\frac{1}{b+c+b+c}$ donc $\frac{2a}{a+b+c}\geq\frac{2a}{b+c+b+c}$. Ainsi $\frac{2a}{a+b+c}\geq\frac{a}{b+c}$ c'est-à-dire : $\frac{a}{b+c}\leq\frac{2a}{a+b+c}$.

2) De même, par permutation circulaire, on a : $\frac{b}{c+a}\leq\frac{2b}{b+c+a}$ et $\frac{c}{a+b}\leq\frac{2c}{c+a+b}$.

D'où : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\leq\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{a+b+c}+\frac{2c}{a+b+c}$

donc : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\leq\frac{2a+2b+2c}{a+b+c}$

donc : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\leq\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}$

donc : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\leq 2$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Dans un triangle, la longueur d'un côté est plus petite que la somme des deux autres.

Identité de Lagrange dans le plan

Chapitre concerné : 11. Géométrie du plan et de l'espace

☐ Ce que montre cet exo

L'égalité $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2+[\vec{u},\vec{v}]^2=\|\vec{u}\|^2\times\|\vec{v}\|^2$ (où $[\vec{u},\vec{v}]=\det(\vec{u},\vec{v})$) pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan.

- **L'énoncé**

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Calculer $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2+[\vec{u},\vec{v}]^2$ (où $[\vec{u},\vec{v}]=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=xy'-x'y$) puis $\|\vec{u}\|^2\times\|\vec{v}\|^2$.
Que peut-on en conclure ?

- **Corrigé**

$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2+[\vec{u},\vec{v}]^2=(xx'+yy')^2+(xy'-x'y)^2=x^2x'^2+2xx'yy'+y^2y'^2+x^2y'^2-2xy'x'y+x'^2y^2$
$=x^2x'^2+y^2y'^2+x^2y'^2+x'^2y^2$.

Par ailleurs $\|\vec{u}\|^2\times\|\vec{v}\|^2=\left(x^2+y^2\right)\left(x'^2+y'^2\right)=x^2x'^2+x^2y'^2+y^2x'^2+y^2y'^2$.

Conclusion : $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2+[\vec{u},\vec{v}]^2=\|\vec{u}\|^2\times\|\vec{v}\|^2$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Dans le plan, $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$, $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$, $[\vec{u},\vec{v}]=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=xy'-x'y$.

Remarque : on peut faire cet exercice dans l'espace, en utilisant les formules $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$, $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=x(y'z''-z'y'')-y(x'z''-z'x'')+z(x'y''-y'x'')$, $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ mais c'est long, très long !

Coordonnées d'un projeté orthogonal

Chapitre concerné : 11. Géométrie du plan et de l'espace

☐ Ce que montre cet exo

Comment trouver les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.

- **L'énoncé**

Soient $A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ trois points (dans un repère orthonormé).

1) Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

2) A quelle distance de la droite **(**AB) se trouve le point C ?

- **Corrigé**

1) $\overline{AB}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$ et $\overline{CH}\begin{pmatrix}x_H-3\\y_H-2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux donc $7(x_H-3)+4(y_H-2)=0$.

$\overline{AB}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$ et $\overline{AH}\begin{pmatrix}x_H+2\\y_H-1\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc $7(y_H-1)-4(x_H+2)=0$.

On résout le système

$$\begin{cases}7(x_H-3)+4(y_H-2)=0\\7(y_H-1)-4(x_H+2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x_H-21+4y_H-8=0\\7y_H-7-4x_H-8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x_H+4y_H-29=0\\-4x_H+7y_H-15=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}28x_H+16y_H-116=0\\-28x_H+49y_H-105=0\end{cases}.$$

En ajoutant les 2 équations, on a $65y_H-221=0$ donc $y_H=\frac{221}{65}=3,4$.

Comme $7x_H+4y_H-29=0$, on a $7x_H+4\times3,4-29=0$ donc $7x_H+13,6-29=0$ donc :

$7x_H=15,4$ donc $x_H=\frac{15,4}{7}=2,2$. Ainsi le point H a pour coordonnées $H\begin{pmatrix}2,2\\3,4\end{pmatrix}$.

2) La distance cherchée vaut $CH=\sqrt{(2,2-3)^2+(3,4-2)^2}=\sqrt{(-0,8)^2+(1,4)^2}=\sqrt{2,6}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow xx'+yy'=0$

2) $\vec{u},\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow xy'-x'y=0$.

Distance d'un point à une droite

Chapitre concerné : 11. Géométrie du plan et de l'espace

☐ Ce que montre cet exo

Comment on peut trouver la formule $d(M_0,D)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

- **L'énoncé**

Soient $D: ax+by+c=0$ et $M_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$. La distance $d(M_0,D)$ est égale à la longueur M_0H où H est le projeté orthogonal de M_0 sur D.

1) Sachant que $H\in D$, quelle équation (faisant intervenir les coordonnées de H) peut-on obtenir ?

2) Comme $\overline{M_0H}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ vecteur normal de D sont liés, quelle autre équation obtient-on ?

3) En déduire les coordonnées de H puis la distance M_0H.

- **Corrigé**

1) Comme $H\in D: ax+by+c=0$, on a : $ax_H+by_H+c=0$.

2) $\overline{M_0H}\begin{pmatrix}x_H-x_0\\y_H-y_0\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ sont liés donc : $(x_H-x_0)\times b-(y_H-y_0)\times a=0$ (colinéarité).

3) On résout le système $\begin{cases}ax_H+by_H+c=0\\(x_H-x_0)\times b-(y_H-y_0)\times a=0\end{cases}$. On trouve $\begin{cases}x_H=\dfrac{b^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2}\\y_H=\dfrac{a^2y_0-abx_0-bc}{a^2+b^2}\end{cases}$.

$$M_0H=\sqrt{(x_H-x_0)^2+(y_H-y_0)^2}=\sqrt{\left(\frac{b^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2}-x_0\right)^2+\left(\frac{a^2y_0-abx_0-bc}{a^2+b^2}-y_0\right)^2}$$

$$M_0H=\sqrt{(x_H-x_0)^2+(y_H-y_0)^2}=\sqrt{\left(\frac{-a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{-b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right)^2}$$

$$M_0H=\sqrt{(x_H-x_0)^2+(y_H-y_0)^2}=\sqrt{\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires équivaut à $xy'-x'y=0$.

2) On peut généraliser cette formule dans l'espace : la distance d'un point à un plan vaut $d(M_0,P)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Distance de deux droites (dans l'espace)

Chapitre concerné : 11. Géométrie du plan et de l'espace

☐ Ce que montre cet exo

Comment on peut trouver la formule $d(D,D')=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AA'},\vec{u},\vec{u}'\right]\right|}{\left\|\vec{u}\wedge\vec{u}'\right\|}$ (où $\left[\overrightarrow{AA'},\vec{u},\vec{u}'\right]=\det\left(\overrightarrow{AA'},\vec{u},\vec{u}'\right)$).

- **L'énoncé**

Soient D et D' deux droites non parallèles (de l'espace). D et D' admettent une perpendiculaire commune qu'on appelle P. Soient $A\in D$ et $A'\in D'$. La distance $d(D,D')$ est égale à la longueur HH' où H est le point d'intersection de D et de P, et H' le point d'intersection de D' et de P'.

1) On considère $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ des vecteurs directeurs de D et de D'. Développer $\left[\overrightarrow{AA'},\vec{u},\vec{u}'\right]$ en décomposant $\overrightarrow{AA'}$ par la relation de Chasles.

2) En déduire que $\left|\left[\overrightarrow{AA'},\vec{u},\vec{u}'\right]\right|=\left\|\overrightarrow{HH'}\right\|\times\left\|\vec{u}\wedge\vec{u}'\right\|$ puis le résultat.

- **Corrigé**

1) $\left[\overrightarrow{AA'},\vec{u},\vec{u}'\right]=\left[\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HH'}+\overrightarrow{H'A'},\vec{u},\vec{u}'\right]=\left[\overrightarrow{AH},\vec{u},\vec{u}'\right]+\left[\overrightarrow{HH'},\vec{u},\vec{u}'\right]+\left[\overrightarrow{H'A'},\vec{u},\vec{u}'\right]$ (Chasles)

Or $\left[\overrightarrow{AH},\vec{u},\vec{u}'\right]=\left[\overrightarrow{H'A'},\vec{u},\vec{u}'\right]=0$ car $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont liés, et car $\overrightarrow{H'A'}$ et $\vec{u}'$ sont liés.

Ainsi $\left[\overrightarrow{AA'},\vec{u},\vec{u}'\right]=\left[\overrightarrow{HH'},\vec{u},\vec{u}'\right]=\overrightarrow{HH'}\cdot\left(\vec{u}\wedge\vec{u}'\right)$ (car $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$).

2) $\left|\left[\overrightarrow{AA'},\vec{u},\vec{u}'\right]\right|=\left|\overrightarrow{HH'}\cdot\left(\vec{u}\wedge\vec{u}'\right)\right|=\left\|\overrightarrow{HH'}\right\|\times\left\|\vec{u}\wedge\vec{u}'\right\|$ car $\overrightarrow{HH'}$ et $\vec{u}\wedge\vec{u}'$ sont liés (ils sont parallèles à la perpendiculaire commune).

On a donc : $\left\|\overrightarrow{HH'}\right\|=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AA'},\vec{u},\vec{u}'\right]\right|}{\left\|\vec{u}\wedge\vec{u}'\right\|}$ c'est-à-dire : $d(D,D')=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AA'},\vec{u},\vec{u}'\right]\right|}{\left\|\vec{u}\wedge\vec{u}'\right\|}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$ et donc $\left[\overrightarrow{HH'},\vec{u},\vec{u}'\right]=\overrightarrow{HH'}\cdot\left(\vec{u}\wedge\vec{u}'\right)$.

2) $|\vec{u}\cdot\vec{v}|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$ si $\vec{u},\vec{v}$ sont colinéaires.

Une jolie famille libre et une jolie famille liée

Chapitre concerné : 12. Espaces vectoriels

☐ Ce que montre cet exo

Qu'il est parfois très simple de montrer qu'une famille est libre ou bien liée.

- **L'énoncé**

Soient (x_1, x_2, x_3, x_4) une famille libre d'un espace vectoriel E.

1) Montrer que la famille $(a_i)_{1\le i\le 4}$ définie par $a_1 = x_1$, $a_2 = x_1 + x_2$, $a_3 = x_1 + x_2 + x_3$, $a_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ est une famille libre de E.

2) Montrer que la famille $(b_i)_{1\le i\le 4}$ définie par $b_1 = x_1 - x_2$, $b_2 = x_2 - x_3$, $b_3 = x_3 - x_4$, $b_4 = x_4 - x_1$ est une famille liée de E.

- **Corrigé**

1) Montrons l'implication $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 (x_1 + x_2) + \lambda_3 (x_1 + x_2 + x_3) + \lambda_4 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0$

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) x_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) x_2 + (\lambda_3 + \lambda_4) x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$

Comme (x_1, x_2, x_3, x_4) est une famille libre, on en déduit que $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = (\lambda_3 + \lambda_4) = \lambda_4 = 0$ et donc que $\lambda_4 = 0$, $\lambda_3 = -\lambda_4 = 0$, . $\lambda_2 = -\lambda_3 - \lambda_4 = 0$, $\lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0$ et donc que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

Ainsi la famille $(a_i)_{1\le i\le 4}$ est libre.

2) On a $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + x_3 - x_4 + x_4 - x_1 = 0$, donc il existe des $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ non tous nuls tels que $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = 0_E$.

Ainsi la famille $(b_i)_{1\le i\le 4}$ est liée.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $(a_i)_{1\le i\le 4}$ est une famille libre de E si on a l'implication :

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

2) $(b_i)_{1\le i\le 4}$ est une famille liée de E s'il existe des $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ non tous nuls tels que $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = 0_E$.

Un espace vectoriel tout simple

Chapitre concerné : 12. Espaces vectoriels

☐ Ce que montre cet exo

Comment montrer qu'un plan est un espace vectoriel et en déterminer une base.

- **L'énoncé**

Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$.

1) Montrer que F est un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel.

2) Déterminer une base de F. Quelle est la dimension de F ?

- **Corrigé**

1) Nous allons montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, ce qui prouvera au passage que F est également un espace vectoriel.

$0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$ car $0 - 0 + 0 = 0$.

Soient $u = (x,y,z) \in F$, $v = (x',y',z') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $u + \lambda v \in F$.

Comme $u = (x,y,z) \in F$, on a $x - y + z = 0$. Comme $v = (x',y',z') \in F$, on a $x' - y' + z' = 0$.

On a $u + \lambda v = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$. Montrons que $x + \lambda x' - (y + \lambda y') + z + \lambda z' = 0$.

On a $x + \lambda x' - (y + \lambda y') + z + \lambda z' = x + \lambda x' - y - \lambda y' + z + \lambda z' = x - y + z + \lambda(x' - y' + z') = 0 + \lambda \cdot 0 = 0$

Donc $u + \lambda v \in F$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donc un espace vectoriel.

2) On a : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = x + z\} = \{(x, x+z, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,1,0) + z(0,1,1) : x, z \in \mathbb{R}\}$. Ainsi la famille $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ est une famille génératrice de F.

Montrons qu'elle est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(0,1,1) = (0,0,0)$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

$\lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(0,1,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_1, 0) + (0, \lambda_2, \lambda_2) = (0,0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ainsi la famille $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ est libre et génératrice.

Une base de F est $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$.

Comme cette base possède deux éléments, la dimension de F vaut 2 : $\dim(F) = 2$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel.

2) F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel E si :

   a) $0_E \in F$

   b) pour tout $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $u + \lambda v \in F$.

3) Une famille est une base si elle est une famille libre et génératrice.

4) La famille $\{f_1, f_2\}$ est génératrice de F si $\forall f \in F$, $\exists \lambda_1, \lambda_2$ tels que $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

5) La famille $\{f_1, f_2\}$ est une famille libre si $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

6) La dimension d'un espace vectoriel est égal au nombre de vecteurs d'une de ses bases.

Suites constantes et suites de limite nulle sont en somme directe

Chapitre concerné : 12. Espaces vectoriels

☐ Ce que montre cet exo

Que $C = N \oplus K$ où $C = \{(u_n) : (u_n) \text{ CV}\}$, $N = \{(u_n) : \lim u_n = 0\}$, $K = \{(u_n) : \exists K, \forall n : u_n = K\}$.

- **L'énoncé**

Soit $C = \{(u_n) : (u_n) \text{ CV}\}$ l'espace vectoriel des suites réelles convergentes. On considère les sous-espaces vectoriels $N = \{(u_n) : \lim u_n = 0\}$ (l'ensemble des suites de limite nulle), et $K = \{(u_n) : \exists K, \forall n : u_n = K\}$ (l'ensemble des suites constantes).

1) Montrer que $C = N \oplus K$.

2) Décomposer la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$.

- **Corrigé**

1) Montrons que $N \cap K = \{0\}$.

On a $N \cap K \supset \{0\}$ (car N et K sont des s.e.v). Montrons que $N \cap K \subset \{0\}$. Soit $(u_n) \in N \cap K$ alors $\begin{cases} \lim u_n = 0 \\ (u_n) \text{ est constante} \end{cases}$ donc (u_n) est la suite nulle. D'où $N \cap K \subset \{0\}$ et donc $N \cap K = \{0\}$.

Montrons que $N \cap K = C$.

On a $N + K \subset C$ car N et C sont des s.e.v des C (les suites constantes sont convergentes).

Montrons que $N + K \supset C$. Soit $(u_n) \in C$ de limite L. Comme $u_n = u_n - L + L$, $(u_n) \in C$ peut se décomposer comme somme de la suite $(u_n - L) \in N$ (convergente de limite nulle) et la suite constante égale à L. D'où $N + K \supset C$ et donc $N + K = C$.

2) On a $\lim u_n = 2$. On a $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2} = \left(\dfrac{2n+1}{n+2} - 2\right) + 2 = \left(\dfrac{2n+1}{n+2} - \dfrac{2(n+2)}{n+2}\right) + 2 = \left(\dfrac{-1}{n+2}\right) + 2$.

Ainsi (u_n) se décompose comme somme de la suite $\left(\dfrac{-1}{n+2}\right) \in N$ et de la suite constante égale à 2 ($\in K$).

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

$E = F \oplus G \Leftrightarrow E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

Fonctions paires et fonctions impaires sont en somme directe

Chapitre concerné : 12. Espaces vectoriels

☐ Ce que montre cet exo

Que toute fonction peut se décomposer de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

- **L'énoncé**

Soient $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F=\{f\in E : \forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=f(x)\}$ $G=\{g\in E : \forall x\in\mathbb{R}, g(-x)=g(x)\}$.

1) Montrer que $E=F\oplus G$.

2) Décomposer $e(x)=x^3+6x^2+5x-4$ sous la forme $e(x)=f(x)+g(x)$ avec $f\in F$, $g\in G$.

- **Corrigé**

1) Montrons que $F\cap G=\{0_E\}$. On a $F\cap G\supset\{0_E\}$ (car F et G sont des s.e.v). Montrons que $F\cap G\subset\{0_E\}$. Soit $a\in F\cap G$ alors $\forall x\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} a(-x)=a(x) \\ a(-x)=-a(x) \end{cases}$ d'où $a(x)=-a(x)$ d'où $\forall x\in\mathbb{R}, a(x)=0$. Ainsi $F\cap G\subset\{0_E\}$ et donc $F\cap G=\{0_E\}$.

Montrons que $F+G=E$. On a $F+G\subset E$ (car F et G sont des s.e.v de E). Montrons que $E\subset F+G$. Soit $e\in E$.

Analyse : Supposons trouvés $f\in F, g\in G$ tels que $e=f+g$.

$e=f+g$ donne $\forall x\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} e(x)=f(x)+g(x) \\ e(-x)=f(-x)+g(-x) \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} e(x)=f(x)+g(x) \\ e(-x)=f(x)-g(x) \end{cases}$ (car $f\in F, g\in G$)

c'est à dire : $f(x)=\dfrac{e(x)+e(-x)}{2}$, $g(x)=\dfrac{e(x)-e(-x)}{2}$.

Synthèse : Les fonctions f et g définies par $f(x)=\dfrac{e(x)+e(-x)}{2}$ et $g(x)=\dfrac{e(x)-e(-x)}{2}$ sont paires et impaires (immédiat) et vérifient $e=f+g$. On a donc $E\subset F+G$ et donc $F+G=E$.

Comme $F\cap G=\{0_E\}$ et $F+G=E$, on a bien : $E=F\oplus G$.

2) On trouve : $e(x)=x^3+6x^2+5x-4=\underbrace{x^3+5x}_{f(x)}+\underbrace{6x^2-4}_{g(x)}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $E=F\oplus G \Leftrightarrow E=F+G$ et $F\cap G=\{0_E\}$.

2) $\{0_E\}\subset F$ pour tout F, sous-espace vectoriel (s.e.v) de E.

3) Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F+G$ également.

Matrices symétriques et antisymétriques sont en somme directe

Chapitre concerné : 12. Espaces vectoriels

☐ Ce que montre cet exo

Que toute matrice peut se décomposer de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et antisymétrique.

- **L'énoncé**

Soient $S_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tM = M\}$ et $A_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tM = -M\}$.

1) Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

2) Décomposer $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ sous la forme $M = S + A$ avec $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$.

- **Corrigé**

1) Montrons que $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$. On a $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) \supset \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$ (s.e.v). Montrons que $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) \subset \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$. Soit $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$ alors $\begin{cases} {}^tM = M \\ {}^tM = -M \end{cases}$ d'où $M = -M$ d'où $M = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. Ainsi $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) \subset \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$ et donc $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$.

Montrons que $S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$. On a $S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ (s.e.v de $M_n(\mathbb{R})$).

Montrons que $M_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$.

Analyse : Supposons trouvés $S \in S_n(\mathbb{R}), A \in A_n(\mathbb{R})$ telles que $M = S + A$.

$M = S + A$ nous donne $\begin{cases} M = S + A \\ {}^tM = {}^tS + {}^tA \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} M = S + A \\ {}^tM = S - A \end{cases}$ (car $S \in S_n(\mathbb{R}), A \in A_n(\mathbb{R})$)

c'est à dire : $S = \dfrac{M + {}^tM}{2}$, $A = \dfrac{M - {}^tM}{2}$.

Synthèse : Les matrices S et M définies par $S = \dfrac{M + {}^tM}{2}$ et $A = \dfrac{M - {}^tM}{2}$ sont symétriques et antisymétriques (immédiat) et vérifient $M = S + A$. On a donc $M_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$ et donc $S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$. Comme $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$ et $S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$, on a bien : $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

2) On trouve $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2,5 \\ 2,5 & 4 \end{pmatrix}}_{\in S_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0,5 \\ -0,5 & 0 \end{pmatrix}}_{\in A_n(\mathbb{R})}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Le raisonnement est identique à celui de l'exercice sur les fonctions paires et impaires.

Une belle équivalence sur les noyaux

Chapitre concerné : 13. Applications linéaires

☐ Ce que montre cet exo

L'équivalence : $\mathrm{Ker}(f^2)=\mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f)\cap \mathrm{Im}(f)=\{0\}$.

- **L'énoncé**

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

1) Démontrer l'implication : $\mathrm{Ker}(f^2)=\mathrm{Ker}(f) \Rightarrow \mathrm{Ker}(f)\cap \mathrm{Im}(f)=\{0\}$ (par double inclusion).

2) Démontrer l'implication : $\mathrm{Ker}(f)\cap \mathrm{Im}(f)=\{0\} \Rightarrow \mathrm{Ker}(f^2)=\mathrm{Ker}(f)$ (par double inclusion).

3) Que peut-on en déduire ?

- **Corrigé**

1) Supposons $\mathrm{Ker}(f^2)=\mathrm{Ker}(f)$ et montrons que $\mathrm{Ker}(f)\cap \mathrm{Im}(f)=\{0\}$.

On a toujours $\mathrm{Ker}(f)\cap \mathrm{Im}(f)\supset\{0\}$ (car $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels).

Soit $x\in \mathrm{Ker}(f)\cap \mathrm{Im}(f)$, alors $f(x)=0$ et il existe $y\in E$ tel que $x=f(y)$.

D'où $0=f(x)=f(f(y))=f^2(y)$. Donc $y\in \mathrm{Ker}(f^2)$. Or $\mathrm{Ker}(f^2)=\mathrm{Ker}(f)$. Donc $y\in \mathrm{Ker}(f)$ donc $x=f(y)=0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f)\cap \mathrm{Im}(f)\subset\{0\}$ d'où : $\mathrm{Ker}(f)\cap \mathrm{Im}(f)=\{0\}$.

2) Supposons $\mathrm{Ker}(f)\cap \mathrm{Im}(f)=\{0\}$ et montrons que $\mathrm{Ker}(f^2)=\mathrm{Ker}(f)$.

On a $\mathrm{Ker}(f^2)\supset \mathrm{Ker}(f)$ (si $x\in \mathrm{Ker}(f)$, $f^2(x)=f(f(x))=f(0)=0$, donc $x\in \mathrm{Ker}(f^2)$).

Soit $x\in \mathrm{Ker}(f^2)$, alors $f(f(x))=f^2(x)=0$ donc $f(x)\in \mathrm{Ker}(f)$. Or $f(x)\in \mathrm{Im}(f)$.

Comme $\mathrm{Ker}(f)\cap \mathrm{Im}(f)=\{0\}$, on en déduit que $f(x)=0$ et donc que $x\in \mathrm{Ker}(f)$.

D'où $\mathrm{Ker}(f^2)=\mathrm{Ker}(f)$.

3) Les deux implications précédentes prouvent l'équivalence :
$\mathrm{Ker}(f^2)=\mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f)\cap \mathrm{Im}(f)=\{0\}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Lorsque f est un endomorphisme de E, on a :

1) $\mathrm{Ker}(f)=\{x\in E : f(x)=0\}$.

2) $\mathrm{Im}(f)=\{y\in E : \exists x\in E, y=f(x)\}$ ou $\mathrm{Im}(f)=\{f(x) : x\in E\}$.

Une belle équivalence sur les images

Chapitre concerné : 13. Applications linéaires

☐ Ce que montre cet exo

L'équivalence : $\mathrm{Im}(f^2)=\mathrm{Im}(f)\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)=E$.

- **L'énoncé**

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

1) Démontrer l'implication : $\mathrm{Im}(f^2)=\mathrm{Im}(f)\Rightarrow \mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)=E$ (par double inclusion).

2) Démontrer l'implication : $\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)=E\Rightarrow \mathrm{Im}(f^2)=\mathrm{Im}(f)$ (par double inclusion).

3) Que peut-on en déduire ?

- **Corrigé**

1) Supposons $\mathrm{Im}(f^2)=\mathrm{Im}(f)$ et montrons que $\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)=E$.

$\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)\subset E$ car $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Soit $x\in E$, alors $f(x)\in \mathrm{Im}(f)$ donc $f(x)\in \mathrm{Im}(f^2)$. Donc $\exists y\in E$ tel que $f(x)=f^2(y)=f(f(y))$ donc $f(x-f(y))=0$ donc $x-f(y)\in \mathrm{Ker}(f)$. Donc $x=\underbrace{x-f(y)}_{\in \mathrm{Ker}(f)}+\underbrace{f(y)}_{\in \mathrm{Im}(f)}\in \mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)$.

Donc $E\subset \mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)$. Conclusion : $\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)=E$.

2) Supposons $\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)=E$ et montrons que $\mathrm{Im}(f^2)=\mathrm{Im}(f)$.

$\mathrm{Im}(f^2)\subset \mathrm{Im}(f)$ car tout élément $f^2(x)$ de $\mathrm{Im}(f^2)$ s'écrit $f(f(x))$ et donc appartient à $\mathrm{Im}(f)$.

Soit $x\in \mathrm{Im}(f)$, alors $\exists y\in E$ tel que $x=f(y)$. Or $y\in E=\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)$ donc il existe $z\in \mathrm{Ker}(f)$ et $t\in \mathrm{Im}(f)$ tels que $y=z+t$. Or $t\in \mathrm{Im}(f)$, donc il existe $s\in E$ tel que $t=f(s)$ d'où $y=z+f(s)$ d'où $x=f(y)=f(z+f(s))=f(z)+f(f(s))=0+f^2(s)=f^2(s)$ donc $x\in \mathrm{Im}(f^2)$. Donc $\mathrm{Im}(f)\subset \mathrm{Im}(f^2)$. Conclusion : $\mathrm{Im}(f^2)=\mathrm{Im}(f)$.

3) Les deux implications précédentes prouvent l'équivalence :
$\mathrm{Im}(f^2)=\mathrm{Im}(f)\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)=E$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Lorsque f est un endomorphisme de E, on a :

1) $\mathrm{Ker}(f)\subset E$ et $\mathrm{Im}(f)\subset E$ (comme sous-espaces vectoriels de E).

2) $\mathrm{Ker}(f)=\{x\in E:f(x)=0\}$.

3) $\mathrm{Im}(f)=\{y\in E:\exists x\in E, y=f(x)\}$ ou $\mathrm{Im}(f)=\{f(x):x\in E\}$.

Noyau et image d'un projecteur

Chapitre concerné : 13. Applications linéaires

☐ Ce que montre cet exo

Que lorsque p est un projecteur de E, on a $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$.

- **L'énoncé**

On rappelle que p est un projecteur de E s'il vérifie les deux conditions suivantes :

Condition n° 1 : p est un endomorphisme de E ; Condition n° 2 : $p^2 = p$.

Soit p un projecteur de E, démontrer que $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$.

- **Corrigé**

Montrons que $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$.

On a $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) \supset \{0\}$ car $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont des sous-espaces vectoriels. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$, alors $p(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$. D'où $0 = p(x) = p(p(y)) = p^2(y)$. Ainsi $p^2(y) = 0$. Comme $p^2 = p$, on a donc $p(y) = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) \subset \{0\}$ d'où : $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$.

Montrons que $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p) = E$.

$\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p) \subset E$ car $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont des sous-espaces vectoriels de E. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in E$, alors $x = x - p(x) + p(x)$.

Or $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$ car $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0$ (car $p^2 = p$).

Donc $x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}(p)} + \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)} \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$.

Donc $E \subset \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$ d'où : $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p) = E$.

Conclusion : $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) p projecteur de E équivaut à p est un endomorphisme de E et $p^2 = p$.

2) $F \oplus G = E \Leftrightarrow F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

3) Lorsque f est un endomorphisme de E, on a :

a) $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E : f(x) = 0\}$.

b) $\mathrm{Im}(f) = \{y \in E : \exists x \in E, y = f(x)\}$ ou $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in E\}$.

Base naturelle et dimension d'un s.e.v

Chapitre concerné : 14. Dimension finie

☐ **Ce que montre cet exo**
Comment trouver ce qui peut être considéré comme une base naturelle de sous-espaces vectoriels classiques.

- **L'énoncé**

Dans chaque cas, déterminer une base et la dimension de l'espace vectoriel proposé :

1) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}$ **2)** $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=0\}$ **3)** $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=0\}$

4) $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=0\}$ **5)** $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$

6) $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=0, z+x=0\}$ **7)** $G=\{P\in\mathbb{R}_1[x] : P(0)=P'(0)=0\}$

8) $H=\{P\in\mathbb{R}_2[x] : P(0)=P'(0)=0\}$ **9)** $J=\{P\in\mathbb{R}_3[x] : P(0)=P'(0)=0\}$

- **Corrigé**

1) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}=\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\{(1,0)\}$. $\dim(A)=1$.

2) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=-x\}=\{(x,-x) : x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\{(1,-1)\}$. $\dim(B)=1$.

3) $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=0\}=\{(0,y,z) : y,z\in\mathbb{R}\}=\{y(0,1,0)+z(0,0,1) : y,z\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$.
$\dim(C)=2$.

4) $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=-x\}=\{(x,-x,z) : x,z\in\mathbb{R}\}$
$=\{x(1,-1,0)+z(0,0,1) : x,z\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\{(1,-1,0),(0,0,1)\}$. $\dim(D)=2$.

5) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=-x-y\}=\{(x,y,-x-y) : x,y\in\mathbb{R}\}$
$=\{x(1,0,-1)+y(0,1,-1) : x,y\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$. $\dim(E)=2$.

6) $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=0, z+x=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=-x, z=-x\}=\{(x,-x,-x) : x\in\mathbb{R}\}$
$=\{x(1,-1,-1) : x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\{(1,-1,-1)\}$. $\dim(F)=1$.

7) $G=\{P\in\mathbb{R}_1[x] : P(0)=P'(0)=0\}=\{P(x)=ax+b : b=0, a=0\}=\{0_{\mathbb{R}_1[x]}\}$. $\dim(G)=0$.

8) $H=\{P\in\mathbb{R}_2[x] : P(0)=P'(0)=0\}=\{P(x)=ax^2+bx+c : c=0, 2a\cdot 0+b=0\}$
$=\{P(x)=ax^2 : a\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(\{x^2\})$. $\dim(H)=1$.

9) $J=\{P\in\mathbb{R}_3[x] : P(0)=P'(0)=0\}=\{P(x)=ax^3+bx^2+cx+d : d=0, 3a^2\cdot 0+2b\cdot 0+c=0\}$
$=\{P(x)=ax^3+bx^2 : a,b\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(\{x^3,x^2\})$. $\dim(J)=2$.

☐ **Ce qu'il faut retenir du cours**
est le nombre de vecteurs d'une base de E.

Une application linéaire toute simple (n°1)

Chapitre concerné : 14. Dimension finie

☐ Ce que montre cet exo

Comment étudier une application linéaire.

- **L'énoncé**

Soit $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x,y,z)=(x+y,x-y,x)$.

1) Démontrer que f est linéaire.

2) Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ en précisant leurs dimensions. Que vaut $\operatorname{rg}(f)$?

3) Que peut-on en déduire ?

- **Corrigé**

1) Soient $(x,y,z),(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Montrons que $f\big((x,y,z)+\lambda(x',y',z')\big)=f(x,y,z)+\lambda f(x',y',z')$.

$f\big((x,y,z)+\lambda(x',y',z')\big)=f(x+\lambda x',y+\lambda y',z+\lambda z')=(x+\lambda x'+y+\lambda y',x+\lambda x'-y-\lambda y',x+\lambda x')$

$=(x+y,x-y,x)+\lambda(x'+y',x'-y',x')=f(x,y,z)+\lambda f(x',y',z')$. Ainsi f est bien linéaire.

2) $\operatorname{Ker}(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=0, x-y=0, x=0\right\}$.

Or $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x=0 \\ y=x=0 \\ x=0 \end{cases}$.

Donc $\operatorname{Ker}(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=0,y=0\right\}=\left\{(0,0,z):z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{z(0,0,1):z\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\left\{(0,0,1)\right\}$.

On a $\dim(\operatorname{Ker}(f))=1$.

$\operatorname{Im}(f)=\left\{f(x,y,z):(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{(x+y,x-y,x):(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{x(1,1,1)+y(1,-1,0):x,y\in\mathbb{R}\right\}$

$=\operatorname{Vect}\left\{(1,1,1),(1,-1,0)\right\}$.

On a $\dim(\operatorname{Im}(f))=2$ (car $\big((1,1,1),(1,-1,0)\big)$ est une famille libre).

Comme $\operatorname{rg}(f)=\dim(\operatorname{Im}(f))$, on en déduit que l'application f est de rang 2.

3) Comme $\operatorname{Ker}(f)\neq\left\{0_{\mathbb{R}^3}\right\}$, f n'est pas injective. Comme $\operatorname{Im}(f)\neq\mathbb{R}^3$, f n'est pas surjective.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) f est une application linéaire de E dans F si $f(u+\lambda v)=f(u)+\lambda f(v)$ pour tout $u,v\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

2) Lorsque f est une application linéaire de E dans F, on a :

a) $\operatorname{Ker}(f)=\left\{x\in E : f(x)=0\right\}$.

b) $\operatorname{Im}(f)=\left\{y\in F:\exists x\in E, y=f(x)\right\}$ ou $\operatorname{Im}(f)=\left\{f(x):x\in E\right\}$.

Une application linéaire toute simple (n°2)

Chapitre concerné : 14. Dimension finie

☐ Ce que montre cet exo
Comment étudier une application linéaire.

- **L'énoncé**

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x,y,z)=(x+y,x+z,x-z)$.

1) Démontrer que f est linéaire.

2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

3) Que peut-on en déduire ?

- **Corrigé**

1) Soient $(x,y,z),(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Montrons que $f\big((x,y,z)+\lambda(x',y',z')\big)=f(x,y,z)+\lambda f(x',y',z')$.

$f\big((x,y,z)+\lambda(x',y',z')\big)=f(x+\lambda x',y+\lambda y',z+\lambda z')=(x+\lambda x'+y+\lambda y',x+\lambda x'+z+\lambda z',x+\lambda x'-z-\lambda z')$

$=(x+y,x+z,x-z)+\lambda(x'+y',x'+z',x'-z')=f(x,y,z)+\lambda f(x',y',z')$. Ainsi f est bien linéaire.

2) $\mathrm{Ker}(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=0, x+z=0, x-z=0\}$.

Or $\begin{cases}x+y=0\\x+z=0\\x-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\2x=0\\x-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x=0\\x=0\\z=x=0\end{cases}$. Donc $\mathrm{Ker}(f)=\{(0,0,0)\}=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

D'après le théorème du rang, on a $\dim(E)=\dim(\mathrm{Ker}(f))+\mathrm{rg}(f)$ donc $\dim(\mathbb{R}^3)=\dim\{0_{\mathbb{R}^3}\}+\dim(\mathrm{Im}(f))$ ce qui donne : $3=0+\dim(\mathrm{Im}(f))$. Donc $\dim(\mathrm{Im}(f))=3$.

Comme $\mathrm{Im}(f)\subset\mathbb{R}^3$ et que $\dim(\mathrm{Im}(f))=\dim(\mathbb{R}^3)$, on en déduit $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$

3) Comme $\mathrm{Ker}(f)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, f est injective. Comme $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$, f est surjective.

Conclusion : f est bijective.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours
1) Lorsque f est une application linéaire de E dans F, on a :

a) $\mathrm{Ker}(f)=\{x\in E : f(x)=0\}$.

b) $\mathrm{Im}(f)=\{y\in F : \exists x\in E, y=f(x)\}$ ou $\mathrm{Im}(f)=\{f(x) : x\in E\}$.

2) Théorème du rang: $\dim(E)=\dim(\mathrm{Ker}(f))+\mathrm{rg}(f)$ où f est une application linéaire de E dans F.

3) Si $F\subset E$ et $\dim(F)\subset\dim(E)$ alors $F=E$.

Existence et unicité d'un polynôme interpolateur

Chapitre concerné : 14. Dimension finie

☐ Ce que montre cet exo

Qu'il existe un unique polynôme de degré n dont la courbe passe par les $(n+1)$ points distincts $(x_0,y_0)\dots(x_n,y_n)$.

- **L'énoncé**

Soient $x_0,x_1\cdots x_n$ $(n+1)$ valeurs réelles distinctes. Soit f l'application définie sur l'espace $E=\mathbb{R}_n[x]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par $f(P)=(P(x_0),P(x_1),\cdots P(x_n))$.

1) Montrer que f est une application linéaire.
2) Démontrer que f est injective.
3) Soient $y_0,y_1\cdots y_n$ $(n+1)$ valeurs réelles. En déduire l'existence d'un unique polynôme P de degré n vérifiant $P(x_0)=y_0$, $P(x_1)=y_1,\dots$ $P(x_n)=y_n$.

- **Corrigé**

1) Immédiat : soient P et Q deux vecteurs de $E=\mathbb{R}_n[x]$ et λ un nombre réel, alors :
$f(P+\lambda Q)=((P+\lambda Q)(x_0),\cdots(P+\lambda Q)(x_n))=(P(x_0),\cdots P(x_n))+\lambda(Q(x_0),\cdots Q(x_n))=f(P)+\lambda f(Q)$.

2) Soit $P\in\mathrm{Ker}(f)$ alors $f(P)=(0,0\cdots,0)$ donc $P(x_0)=0,\ P(x_1)=0,\cdots\ P(x_n)=0$. Le polynôme P, de degré n, admet $(n+1)$ racines. Cela n'est possible que s'il s'agit du polynôme nul.

Ainsi $\mathrm{Ker}(f)\subset\{0_{\mathbb{R}_n[x]}\}$. Comme $\{0_{\mathbb{R}_n[x]}\}\subset\mathrm{Ker}(f)$ (car $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel), on en déduit $\mathrm{Ker}(f)=\{0_{\mathbb{R}_n[x]}\}$. Ainsi f est injective.

3) Appliquons le théorème du rang : $\dim(E)=\dim(\mathrm{Ker}(f))+\mathrm{rg}(f)$ soit : $\dim(\mathbb{R}_n[x])=\dim(\{0\}_{\mathbb{R}_n[x]})+\mathrm{rg}(f)$ donc $n+1=0+\mathrm{rg}(f)$. Ainsi $\mathrm{rg}(f)=n+1$.

Donc $\dim(\mathrm{Im}(f))=n+1$. Comme $\mathrm{Im}(f)\subset\mathbb{R}^{n+1}$ et que $\dim(\mathbb{R}^{n+1})=n+1$, on en déduit $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^{n+1}$.

Ainsi f est surjective. Comme f est aussi injective, f est donc bijective. Soit $(y_0,y_1\cdots y_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, il existe donc un unique polynôme $P\in\mathbb{R}_n[x]$ tel que $f(P)=(y_0,y_1\cdots y_n)$ c'est-à-dire tel que $(P(x_0),P(x_1),\cdots P(x_n))=(y_0,y_1\cdots y_n)$, c'est-à-dire tel que $P(x_0)=y_0$, $P(x_1)=y_1,\dots$ $P(x_n)=y_n$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Théorème du rang: $\dim(E)=\dim(\mathrm{Ker}(f))+\mathrm{rg}(f)$ où f est une application linéaire de E dans F.

2) $\mathrm{rg}(f)=\dim(\mathrm{Im}(f))$.

3) Si $E\subset F$ et $\dim(E)=\dim(F)$ alors $E=F$.

Dimension par deux méthodes

Chapitre concerné : 14. Dimension finie

☐ Ce que montre cet exo

Deux méthodes pour trouver la dimension d'un sous-espace vectoriel défini par une équation.

• L'énoncé

Soit $E=\mathbb{R}^n$. On considère V le sous-espace vectoriel de E défini par $V=\{(x_1,x_2,\cdots x_n)\in E : a_1x_1+a_2x_2+\cdots a_nx_n=0\}$ avec $a_1\neq 0$.

1) Déterminer la dimension de V en déterminant une base de V.

2) Déterminer la dimension de V en le considérant comme le noyau d'une certaine application linéaire.

• Corrigé

1) $V=\{(x_1,x_2,\cdots x_n)\in E : a_1x_1+a_2x_2+\cdots a_nx_n=0\}=\left\{(x_1,x_2,\cdots x_n)\in E : x_1=-\frac{a_2}{a_1}x_2-\cdots-\frac{a_n}{a_1}x_n\right\}$

$V=\left\{\left(-\frac{a_2}{a_1}x_2-\cdots-\frac{a_n}{a_1}x_n,x_2,\cdots x_n\right)\right\}=\left\{x_2\left(-\frac{a_2}{a_1},1,\cdots 0\right)+\cdots+x_n\left(-\frac{a_n}{a_1},0,\cdots 1\right)\right\}$.

Donc $V=\mathrm{Vect}\left\{\left(-\frac{a_2}{a_1},1,\cdots 0\right),\cdots,\left(-\frac{a_n}{a_1},0,\cdots 1\right)\right\}$. Ces $n-1$ vecteurs étant libres (immédiat), on a $\dim(V)=n-1$.

2) Considérons f l'application linéaire définie sur $E=\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $F=\mathbb{R}$ par $f(x_1,x_2,\cdots x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots a_nx_n$.

On constate que $V=\{(x_1,x_2,\cdots x_n)\in E : a_1x_1+a_2x_2+\cdots a_nx_n=0\}$ est égal à $\mathrm{Ker}(f)$.

D'après le théorème du rang, on a $\dim(E)=\dim(\mathrm{Ker}(f))+\mathrm{rg}(f)$.

Comme $a_1\neq 0$, f est une application non nulle. Par conséquent $\dim(\mathrm{Im}(f))\neq 0$ donc $\dim(\mathrm{Im}(f))=1$ car $\mathrm{Im}(f)\subset F$ et que $\dim(F)=\dim(\mathbb{R})=1$.

$\dim(E)=\dim(\mathrm{Ker}(f))+\mathrm{rg}(f)$ devient donc : $n=\dim(V)+1$ soit $\dim(V)=n-1$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\dim(F)$ est le nombre de vecteurs d'une base de F.

2) Théorème du rang: $\dim(E)=\dim(\mathrm{Ker}(f))+\mathrm{rg}(f)$ où f est une application linéaire de E dans F.

Changement de base et dérivation

Chapitre concerné : 15. Matrices et applications linéaires

☐ Ce que montre cet exo

Comment un changement de base permet de découvrir la nature d'une application linéaire.

- **L'énoncé**

Soit $E=\mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. On considère $B=\left(1,x,x^2\right)$ la base canonique de E et $B'=\left(1,1+x,1+x+x^2\right)$ une autre base de E.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice exprimée dans la base B' est $M'=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$.

1) Quelle est la matrice M de f par rapport à la base B ?
2) Comment peut-on alors interpréter l'application f ? f est-elle bijective ?

- **Corrigé**

1) On a $M'=P^{-1}MP$ où :
M' est la matrice de f exprimée dans la base B'

$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ est la matrice de passage (où l'on exprime la base B' en fonction de B)

M est la matrice de f exprimée dans la base B.

Or $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ (après calculs par l'algorithme de Gauss).

Comme $M'=P^{-1}MP$, on a aussi : $M=PM'P^{-1}$

donc : $M=PM'P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$.

2) Ainsi, par rapport à la base $B=\left(1,x,x^2\right)$, on a : $f(1)=0$, $f(x)=1$ et $f\left(x^2\right)=2x$.

On reconnaît les dérivées ! L'application f est donc l'application « Dérivation ».
f n'est pas bijective : le rang de la matrice M vaut 2 (et pas 3), car il y a un vecteur colonne nul et deux vecteurs colonnes indépendants. On peut aussi dire que la dérivation n'est pas injective : deux fonctions, qui diffèrent d'une constante, ont la même dérivée !

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

$M'=P^{-1}MP$ avec M' matrice de f exprimée dans la base B', P la matrice de passage (où l'on exprime la base B' en fonction de B) et M matrice de f exprimée dans la base B.

Trace et rang d'un projecteur sont égaux

Chapitre concerné : 15. Matrices et applications linéaires

☐ Ce que montre cet exo

Qu'un projecteur possède une propriété matricielle intéressante : sa trace est égale à son rang.

- **L'énoncé**

On rappelle que p est un projecteur de E si p est un endomorphisme de E et si $p^2 = p$.

1) Soit p un projecteur de E, démontrer que $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$.

2) Comme $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$, on considère B (base de E) la concaténation d'une base B_1 de $\mathrm{Ker}(p)$ et B_2 de $\mathrm{Im}(p)$.

a) Ecrire la matrice M du projecteur p dans la base B.

b) En déduire que $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{rg}(p)$.

- **Corrigé**

1) Déjà fait (Voir exercice « Noyau et image d'un projecteur », chapitre « Applications linéaires).

2) On a $B = B_1 \cup B_2$ avec B_1 base de $\mathrm{Ker}(p)$ et B_2 base de $\mathrm{Im}(p)$.

Donc : pour tout $b \in B_1$, on a $p(b) = 0$ (par définition de $\mathrm{Ker}(p)$) ;

pour tout $b \in B_2$ $p(b) = b$ (car pour tout b, il existe c tel que $b = p(c)$ [par définition de $\mathrm{Im}(p)$] d'où $p(b) = p(p(c)) = p^2(c) = p(c) = b$).

a) On a donc : $M = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$.

b) On a. $\mathrm{Tr}(M) = \underbrace{0 + \cdots + 0}_{\mathrm{card}(B_1)} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\mathrm{card}(B_2)} = \mathrm{card}(B_2) = \dim(\mathrm{Im}(p)) = \mathrm{rg}(p)$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) p projecteur de E si p est un endomorphisme de E et $p^2 = p$. On a alors $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$.

2) Si $F \oplus G = E$, on peut constituer une base B de E à partir d'une base B_1 de F et B_2 de G.

3) $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

4) La trace d'une matrice est égale à la somme de ses éléments diagonaux.

Matrice triangulaire des coefficients binomiaux

Chapitre concerné : 15. Matrices et applications linéaires

☐ Ce que montre cet exo
Comment inverser une matrice particulière en interprétant son application linéaire associée.

- **L'énoncé**

Soit $M=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&1&3&6\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$. On se place sur l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}_4[x]$. On considère l'application linéaire $\varphi:E\to E$ définie par $\varphi(P(x))=P(x+1)$.

1) Montrer que φ a pour matrice M dans la base canonique $(1,x,x^2,x^3,x^4)$ de $E=\mathbb{R}_4[x]$.

2) φ est-elle bijective ? Quelle est l'application linéaire φ^{-1} ? En déduire M^{-1}.

- **Corrigé**

1) Immédiat car $\varphi(1)=1$, $\varphi(x)=1+x$, $\varphi(x^2)=(1+x)^2=1+2x+x^2$, $\varphi(x^3)=(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$, $\varphi(x^4)=(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4$.

2) φ est bijective car la matrice M a pour rang 5 (car M est triangulaire et possède 5 éléments diagonaux non nuls) qui est égal à la dimension de l'espace d'arrivée $E=\mathbb{R}_4[x]$. Comme $\varphi(P(x))=P(x+1)$, la bijection réciproque est alors définie par $\varphi^{-1}(P(x))=P(x-1)$.

On a : $\varphi^{-1}(1)=1$, $\varphi^{-1}(x)=-1+x$, $\varphi^{-1}(x^2)=(-1+x)^2=1-2x+x^2$,

$\varphi^{-1}(x^3)=(-1+x)^3=-1+3x-3x^2+x^3$ et $\varphi^{-1}(x^4)=(-1+x)^4=1-4x+6x^2-4x^3+x^4$.

Sa matrice dans la base canonique $(1,x,x^2,x^3,x^4)$ est alors : $M^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&1&-2&3&-4\\0&0&1&-3&6\\0&0&0&1&-4\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours
Lorsqu'une matrice est triangulaire ou diagonale, le rang de la matrice est égal au nombre de ses éléments diagonaux non nuls.

Matrice triangulaire des 1

Chapitre concerné : 15. Matrices et applications linéaires

☐ Ce que montre cet exo

Comment inverser une matrice particulière en interprétant son application linéaire associée.

- **L'énoncé**

Soit $M=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. On se place sur l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^4$.

Soit $\varphi : E \to E$ dont la matrice dans la base canonique (e_1,e_2,e_3,e_4) est M.

1) φ est-elle bijective ?

2) Après avoir exprimé $\varphi(e_i)$ en fonction des e_1,e_2,e_3,e_4, en déduire φ^{-1} puis la matrice M^{-1}.

- **Corrigé**

1) φ est bijective car la matrice M a pour rang 4 (car M est triangulaire et possède 4 éléments diagonaux non nuls) qui est égal à la dimension de l'espace d'arrivée $E=\mathbb{R}^4$.

2) On a $\begin{cases}\varphi(e_1)=e_1\\ \varphi(e_2)=e_1+e_2\\ \varphi(e_3)=e_1+e_2+e_3\\ \varphi(e_4)=e_1+e_2+e_3+e_4\end{cases}$ donc : $\begin{cases}e_1=\varphi(e_1)\\ e_2=\varphi(e_2)-\varphi(e_1)=\varphi(e_2-e_1)\\ e_3=\varphi(e_3)-\varphi(e_2)=\varphi(e_3-e_2)\\ e_4=\varphi(e_4)-\varphi(e_3)=\varphi(e_4-e_3)\end{cases}$,

Ainsi : $\begin{cases}\varphi^{-1}(e_1)=e_1\\ \varphi^{-1}(e_2)=e_2-e_1\\ \varphi^{-1}(e_3)=e_3-e_2\\ \varphi^{-1}(e_4)=e_4-e_3\end{cases}$ (car $\varphi^{-1}\circ\varphi=\mathrm{Id}$).

La matrice de φ^{-1} dans la base canonique (e_1,e_2,e_3,e_4) est alors : $M^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Lorsqu'une matrice est triangulaire ou diagonale, le rang de la matrice est égal au nombre de ses éléments diagonaux non nuls.

2) $\varphi^{-1}\circ\varphi=\mathrm{Id}$ et $\varphi\circ\varphi^{-1}=\mathrm{Id}$.

Matrice à diagonale inversée

Chapitre concerné : 15. Matrices et applications linéaires

☐ Ce que montre cet exo

Comment inverser une matrice particulière en interprétant son application linéaire associée.

- **L'énoncé**

Soit $M=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{pmatrix}$. On se place sur l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^4$.

Soit $\varphi:E\to E$ dont la matrice dans la base canonique (e_1,e_2,e_3,e_4) est M.

1) φ est-elle bijective ?

2) Après avoir exprimé $\varphi(e_i)$ en fonction des e_1,e_2,e_3,e_4, en déduire φ^{-1} puis la matrice M^{-1}.

- **Corrigé**

1) φ est bijective car la matrice M a pour rang 4 (car elle possède 4 vecteurs colonnes libres) qui est égal à la dimension de l'espace d'arrivée $E=\mathbb{R}^4$.

2) On a $\begin{cases}\varphi(e_1)=4e_4\\\varphi(e_2)=3e_3\\\varphi(e_3)=2e_2\\\varphi(e_4)=e_1\end{cases}$ donc $\begin{cases}e_4=\frac{1}{4}\varphi(e_1)\\e_3=\frac{1}{3}\varphi(e_2)\\e_2=\frac{1}{2}\varphi(e_3)\\e_1=\varphi(e_4)\end{cases}$ donc $\begin{cases}\varphi^{-1}(e_4)=\frac{1}{4}e_1\\\varphi^{-1}(e_3)=\frac{1}{3}e_2\\\varphi^{-1}(e_2)=\frac{1}{2}e_3\\\varphi^{-1}(e_1)=e_4\end{cases}$. Ainsi : $\begin{cases}\varphi^{-1}(e_1)=e_4\\\varphi^{-1}(e_2)=\frac{1}{2}e_3\\\varphi^{-1}(e_3)=\frac{1}{3}e_2\\\varphi^{-1}(e_4)=\frac{1}{4}e_1\end{cases}$ (car $\varphi^{-1}\circ\varphi=\mathrm{Id}$).

La matrice de φ^{-1} dans la base canonique (e_1,e_2,e_3,e_4) est alors : $M^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&\frac{1}{4}\\0&0&\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

2) $\varphi^{-1}\circ\varphi=\mathrm{Id}$ et $\varphi\circ\varphi^{-1}=\mathrm{Id}$.

Matrice à diagonale dominante

Chapitre concerné : 15. Matrices et applications linéaires

☐ Ce que montre cet exo

Qu'une matrice à diagonale dominante est toujours inversible.

- **L'énoncé**

Soit $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ une matrice à diagonale dominante, c'est-à-dire telle que $|m_{jj}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{3} |m_{jk}|$ pour tout j compris entre 1 et 3.

1) Démontrer que $MX=0 \Rightarrow X=0$ (on pourra utiliser $|x_j| = \max(|x_1|,|x_2|,|x_3|)$.

2) Que peut-on en déduire ?

- **Corrigé**

1) Soit $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. $MX=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} m_{11}x_1+m_{12}x_2+m_{13}x_3=0 \\ m_{21}x_1+m_{22}x_2+m_{23}x_3=0 \\ m_{31}x_1+m_{32}x_2+m_{33}x_3=0 \end{cases}$.

Soit $|x_j| = \max(|x_1|,|x_2|,|x_3|)$, alors $-m_{jj}x_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{3} m_{jk}x_k$ donc :

$$|-m_{jj}x_j| = \left|\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{3} m_{jk}x_k\right| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{3} |m_{jk}||x_k| \text{ donc } |m_{jj}||x_j| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{3} |m_{jk}||x_k| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{3} |m_{jk}||x_j|.$$

(car $|x_j| = \max(|x_1|,|x_2|,|x_3|)$, donc $|x_k| \leq |x_j|$ pour tout k, $k \neq j$).

Or $|m_{jj}||x_j| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{3} |m_{jk}||x_j|$ n'est possible que si $|x_j|=0$ (car $|m_{jj}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{3} |m_{jk}|$ pour tout j)

Ainsi $|x_j|=0$ soit $\max(|x_1|,|x_2|,|x_3|)=0$ et donc $x_1=x_2=x_3=0$, donc $X=0$.

2) Ainsi $\mathrm{Ker}(M)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Comme M est une matrice carrée, on en déduit que M est inversible.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Inégalité triangulaire : $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$

2) M (carrée) inversible $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(M)=\{0\}$.

Equation de plan obtenu par un déterminant

Chapitre concerné : 16. Déterminants

☐ Ce que montre cet exo

Combien les déterminants sont pratiques pour obtenir une équation de plan.

- **L'énoncé**

Soient $A\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix}$ trois points de l'espace avec $abc \neq 0$. Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (ABC)$. En utilisant le fait que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont liés, déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

- **Corrigé**

$\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont liés $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a & -a & -a \\ y & b & 0 \\ z & 0 & c \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x-a)\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -a & -a \\ 0 & c \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -a & -a \\ b & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-a)bc - y(-ac) + zab = 0$

$\Leftrightarrow xbc - abc + acy + zab = 0 \Leftrightarrow xbc + acy + abz = abc \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

Ainsi une équation cartésienne du plan (ABC) est : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée équivaut à $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.

$A^2 - tr(A)A + det(A)I_2 = 0$ et calcul de A^n

Chapitre concerné : 16. Déterminants

☐ Ce que montre cet exo

Que lorsque A est une matrice carrée d'ordre 2, on a : $A^2 - tr(A)A + det(A)I_2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$.

- **L'énoncé**

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Soit $P_A(x) = x^2 - tr(A)x + det(A)$.

1) Démontrer l'égalité $P_A(A) = 0_{M_2(\mathbb{R})}$, c'est-à-dire : $A^2 - tr(A)A + det(A)I_2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer l'expression de $P_A(x) = x^2 - tr(A)x + det(A)$.

En déduire une méthode utilisant la division euclidienne de x^n par $P_A(x)$ pour déterminer A^n.

- **Corrigé**

1) On a $A^2 = \begin{pmatrix} a_{11}{}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}{}^2 \end{pmatrix}$, $tr(A) = a_{11} + a_{22}$, $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Après calculs, $A^2 - tr(A)A + det(A)I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_2(\mathbb{R})}$.

2) On a $P_A(x) = x^2 - tr(A)x + det(A) = x^2 - 5x + 6$ (polynôme de degré 2 de racines 2 et 3).

La division euclidienne de x^n par $P_A(x)$ nous donne : $x^n = P_A(x) \times Q(x) + R(x)$ avec $0 < deg(R(x)) \leq 1$. Comme $deg(R(x)) = 1$, il existe a et b tels que $R(x) = ax + b$.

On a donc : $x^n = P_A(x) \times Q(x) + ax + b$. Comme les racines sont 2 et 3, on a :

$$\begin{cases} 2^n = P_A(2) \times Q(2) + 2a + b = 0 \times Q(2) + 2a + b = 2a + b \\ 3^n = P_A(3) \times Q(3) + 3a + b = 0 \times Q(3) + 3a + b = 3a + b \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = 3^n - 2^n \\ b = 2^n - 2(3^n - 2^n) \end{cases}.$$

D'où : $x^n = P_A(x) \times Q(x) + (3^n - 2^n)x + 2^n - 2(3^n - 2^n)$. D'où :

$$A^n = P_A(A) \times Q(A) + (3^n - 2^n)A + (2^n - 2(3^n - 2^n))I_2 = (3^n - 2^n)A + (2^n - 2(3^n - 2^n))I_2$$

(car $P_A(A) = 0$) donc : $A^n = \begin{pmatrix} -3^n + 2^{n+1} & -2(3^n - 2^n) \\ 3^n - 2^n & 2 \times 3^n - 2^n \end{pmatrix}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Les polynômes de matrices : si $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors $P(M) = aM^2 + bM + I_n$ (où M est une matrice).
2) Division euclidienne de polynôme : $A = BQ + R$ avec $0 < deg(R) < deg(B)$.

Déterminant de Vandermonde

Chapitre concerné : 16. Déterminants

☐ Ce que montre cet exo

Comment calculer élégamment un déterminant célèbre.

- **L'énoncé**

Soit $D=\begin{vmatrix}1 & x_0 & x_0^2\\ 1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\end{vmatrix}$. Démontrer que. $D=\prod_{0\le i<j\le 2}(x_j-x_i)=(x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_2-x_1)$.

- **Corrigé**

$$D=\begin{vmatrix}1 & x_0 & x_0^2\\ 1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\end{vmatrix}\underset{C_3\leftarrow C_3-x_2C_2}{=}\begin{vmatrix}1 & x_0 & x_0^2-x_0x_2\\ 1 & x_1 & x_1^2-x_1x_2\\ 1 & x_2 & 0\end{vmatrix}\underset{C_2\leftarrow C_2-x_2C_1}{=}\begin{vmatrix}1 & x_0-x_2 & x_0^2-x_0x_2\\ 1 & x_1-x_2 & x_1^2-x_1x_2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x_0-x_2 & x_0(x_0-x_2)\\ 1 & x_1-x_2 & x_1(x_1-x_2)\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

Ensuite, on développe ce déterminant par rapport à la dernière ligne, ce qui donne :

$$=1\times\begin{vmatrix}x_0-x_2 & x_0(x_0-x_2)\\ x_1-x_2 & x_1(x_1-x_2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_0-x_2 & x_0(x_0-x_2)\\ x_1-x_2 & x_1(x_1-x_2)\end{vmatrix}=(x_0-x_2)\begin{vmatrix}1 & x_0\\ x_1-x_2 & x_1(x_1-x_2)\end{vmatrix}$$

$$=(x_0-x_2)(x_1-x_2)\begin{vmatrix}1 & x_0\\ 1 & x_1\end{vmatrix}=(x_0-x_2)(x_1-x_2)(x_1-x_0)=(x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_2-x_1)=\prod_{0\le i<j\le 2}(x_j-x_i).$$

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) On peut ajouter à une colonne des multiples des autres colonnes, en conservant au moins une colonne intacte (à chaque étape). Le résultat n'en sera pas affecté et on pourra ainsi essayer de faire apparaître un maximum de zéros !
2) On peut développer par rapport à une ligne (ou une colonne) si on estime qu'il y a suffisamment de zéros.
3) On peut factoriser toute une ligne (ou toute une colonne) par un facteur qui « sortira » du déterminant.

Déterminants circulants

Chapitre concerné : 16. Déterminants

☐ Ce que montre cet exo

Comment calculer élégamment deux déterminants célèbres et y constater une certaine forme de symétrie.

- **L'énoncé**

Soient $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}$ et $G=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}$. Calculer D et G. Que peut-on en déduire ?

- **Corrigé**

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}\underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=}\begin{vmatrix}6&2&3\\6&1&2\\6&3&1\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&2\\1&3&1\end{vmatrix}\underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_2\\L_2\leftarrow L_2-L_1}}{=}6\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-1\\0&2&-1\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}-1&-1\\2&-1\end{vmatrix}=6(1+2)=18.$$

$$G=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}\underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=}\begin{vmatrix}6&2&3\\6&3&1\\6&1&2\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&1\\1&1&2\end{vmatrix}\underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_2\\L_2\leftarrow L_2-L_1}}{=}6\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\0&-2&1\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&-2\\-2&1\end{vmatrix}=6(1-4)=-18.$$

Donc $D=-G$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) On peut ajouter à une colonne toutes les autres colonnes, en conservant au moins une colonne intacte (à chaque étape). On peut soustraire également des lignes.
2) On peut factoriser toute une colonne par un facteur qui « sortira » du déterminant.
3) On peut développer par rapport à une ligne (ou une colonne) si on estime qu'il y a suffisamment de zéros.
4) $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$.

Déterminants circulants généralisés

Chapitre concerné : 16. Déterminants

☐ Ce que montre cet exo

Comment calculer élégamment deux déterminants célèbres et y voir une forme de symétrie.

- **L'énoncé**

Soient $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix}$ et $G=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{vmatrix}$. Calculer D et G. Que peut-on en déduire ?

- **Corrigé**

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} a_1+a_2+a_3 & a_2 & a_3 \\ a_1+a_2+a_3 & a_1 & a_2 \\ a_1+a_2+a_3 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = (a_1+a_2+a_3)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & a_3 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_2 \\ L_2\leftarrow L_2-L_1}}{=} (a_1+a_2+a_3)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_1-a_2 & a_2-a_3 \\ 0 & a_3-a_1 & a_1-a_2 \end{vmatrix} = (a_1+a_2+a_3)\begin{vmatrix} a_1-a_2 & a_2-a_3 \\ a_3-a_1 & a_1-a_2 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1+a_2+a_3)\left[(a_1-a_2)^2-(a_2-a_3)(a_3-a_1)\right]$$

$$=(a_1+a_2+a_3)\left(a_1^2-a_1a_2+a_2^2-a_1a_3-a_2a_3+a_3^2\right).$$

$$G=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} a_1+a_2+a_3 & a_2 & a_3 \\ a_1+a_2+a_3 & a_3 & a_1 \\ a_1+a_2+a_3 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1+a_2+a_3)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_3 & a_1 \\ 1 & a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_2 \\ L_2\leftarrow L_2-L_1}}{=} (a_1+a_2+a_3)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_3-a_2 & a_1-a_3 \\ 0 & a_1-a_3 & a_2-a_1 \end{vmatrix} = (a_1+a_2+a_3)\begin{vmatrix} a_3-a_2 & a_1-a_3 \\ a_1-a_3 & a_2-a_1 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1+a_2+a_3)\left[(a_3-a_2)(a_2-a_1)-(a_1-a_3)^2\right]$$

$$=(a_1+a_2+a_3)\left(-a_1^2+a_1a_2-a_2^2+a_1a_3+a_3a_2-a_3^2\right).$$

Donc $D=-G$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) On peut ajouter à une colonne toutes les autres colonnes, en conservant au moins une colonne intacte (à chaque étape). On peut soustraire également des lignes.
2) On peut factoriser toute une colonne par un facteur qui « sortira » du déterminant.
3) On peut développer par rapport à une ligne (ou une colonne) si on estime qu'il y a suffisamment de zéros.
4) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$.

Des déterminants nuls quasi sans calcul !

Chapitre concerné : 16. Déterminants

☐ Ce que montre cet exo
Qu'avec un peu d'observation sur les lignes ou les colonnes, on peut montrer qu'un déterminant est nul sans avoir besoin de le développer !

- **L'énoncé**

Dans chaque cas, montrer que le déterminant proposé est nul.

1) $\begin{vmatrix} a & 2 & 4a+4 \\ b & 4 & 4b+8 \\ c & 6 & 4c+12 \end{vmatrix}$ **2)** $\begin{vmatrix} P(-1) & P(0) & P(1) \\ Q(-1) & Q(0) & Q(1) \\ R(-1) & R(0) & R(1) \end{vmatrix}$ où $P,Q,R \in \mathbb{R}_1[x]$

3) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ **4)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sin(x) & \sin(2x) \\ 0 & \sin(2x) & \sin(3x)+\sin(x) \end{vmatrix}$ **5)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 \\ 1 & 1 & \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \\ 0 & 0{,}25 & \vec{u}\cdot\vec{v} \end{vmatrix}$

- **Corrigé**

1) On a $C_3 = 4C_1 + 2C_2$ donc les vecteurs colonnes sont liés : le déterminant est nul.

2) $\dim(\mathbb{R}_1[x]) = 2$. Les 3 vecteurs P,Q, R sont donc liés. Ainsi il existe λ,μ non tous nuls tels que $R(x) = \lambda P(x) + \mu Q(x)$. Ainsi $L_3 = \lambda L_1 + \mu L_2$.Les vecteurs lignes sont liés : déterminant nul.

3) Soit A la matrice associée. Elle est antisymétrique car elle vérifie ${}^tA = -A$.
On a $\det({}^tA) = \det(-A) \Leftrightarrow \det(A) = (-1)^3 \det(A) \Leftrightarrow \det(A) = -\det(A) \Leftrightarrow \det(A) = 0$.

4) Comme $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ et $\sin(3x)+\sin(x) = 2\sin(2x)\cos(x)$, on en déduit que $L_3 = 2\cos(x) L_2$. Les vecteurs lignes sont liés : déterminant nul.

5) On a : $L_3 = \dfrac{1}{4}(L_2 - L_1)$ (d'après l'identité de polarisation). Les vecteurs lignes sont liés : déterminant nul.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours
1) $\det({}^tA) = \det(A)$.

2) $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$ si $A \in M_n(\mathbb{R})$.

3) $\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

4) Identité de polarisation $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.

Déterminants, retenez-les tous ! (n°1)

Chapitre concerné : 16. Déterminants

☐ Ce que montre cet exo

Qu'en utilisant à bon escient des opérations sur les lignes (ou les colonnes), on peut calculer facilement un déterminant.

- **L'énoncé**

1) Soit $A = \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & 0 \end{vmatrix}$. Démontrer que $A = 2xyz$.

2) Soit $B = \begin{vmatrix} -x & x+z & x+y \\ y+z & -y & x+y \\ y+z & x+z & -z \end{vmatrix}$. Démontrer que $B = (x+y+z)^3$.

- **Corrigé**

1) $$\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & 0 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} -\begin{vmatrix} x & 0 & z \\ 0 & x & y \\ y & z & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 \times y \\ L_3 \leftarrow L_3 \times x}}{=} -\frac{1}{y}\frac{1}{x}\begin{vmatrix} xy & 0 & zy \\ 0 & x & y \\ xy & xz & 0 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} -\frac{1}{xy}\begin{vmatrix} xy & 0 & zy \\ 0 & x & y \\ 0 & xz & -zy \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 \times z}{=} -\frac{1}{xy}\frac{1}{z}\begin{vmatrix} xy & 0 & zy \\ 0 & xz & yz \\ 0 & xz & -zy \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} -\frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} xy & 0 & zy \\ 0 & xz & yz \\ 0 & 0 & -2zy \end{vmatrix} = -\frac{1}{xyz} \cdot xy \cdot xz \cdot (-2zy) = 2xyz.$$

2) $$\begin{vmatrix} -x & x+z & x+y \\ y+z & -y & x+y \\ y+z & x+z & -z \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} -x & x+z & x+y \\ x+y+z & -x-y-z & 0 \\ x+y+z & 0 & -x-y-z \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} x+y+z & x+z & x+y \\ 0 & -x-y-z & -0 \\ 0 & 0 & -x-y-z \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)(-x-y-z)(-x-y-z) = (x+y+z)(-1)(x+y+z)(-1)(x+y+z) = (x+y+z)^3.$$

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Une permutation de lignes dans un déterminant provoque un changement de signe.
2) Si on multiplie une ligne (ou une colonne) par λ le déterminant est multiplié par λ.
3) Un déterminant triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.

Déterminants, retenez-les tous ! (n°2)

Chapitre concerné : 16. Déterminants

☐ Ce que montre cet exo

Qu'en utilisant à bon escient des opérations sur les lignes (ou les colonnes), on peut calculer facilement un déterminant.

- **L'énoncé**

Soit $C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(x) & \cos(y) & \cos(z) \\ \sin(x) & \sin(y) & \sin(z) \end{vmatrix}$. Démontrer que $C = 4\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{y-z}{2}\right)\sin\left(\frac{z-x}{2}\right)$.

- **Corrigé**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(x) & \cos(y) & \cos(z) \\ \sin(x) & \sin(y) & \sin(z) \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(x) & \cos(y)-\cos(x) & \cos(z)-\cos(x) \\ \sin(x) & \sin(y)-\sin(x) & \sin(z)-\sin(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(x) & -2\sin\left(\frac{y+x}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right) & -2\sin\left(\frac{z+x}{2}\right)\sin\left(\frac{z-x}{2}\right) \\ \sin(x) & 2\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\cos\left(\frac{y+x}{2}\right) & 2\sin\left(\frac{z-x}{2}\right)\cos\left(\frac{z+x}{2}\right) \end{vmatrix}$$

$$= -4\sin\left(\frac{y+x}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\sin\left(\frac{z-x}{2}\right)\cos\left(\frac{z+x}{2}\right) + 4\sin\left(\frac{z+x}{2}\right)\sin\left(\frac{z-x}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\cos\left(\frac{y+x}{2}\right)$$

$$= 4\sin\left(\frac{z-x}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\left[-\sin\left(\frac{y+x}{2}\right)\cos\left(\frac{z+x}{2}\right) + \sin\left(\frac{z+x}{2}\right)\cos\left(\frac{y+x}{2}\right)\right]$$

$$= 4\sin\left(\frac{z-x}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{z+x}{2}\right)\cos\left(\frac{y+x}{2}\right) - \sin\left(\frac{y+x}{2}\right)\cos\left(\frac{z+x}{2}\right)\right]$$

$$= 4\sin\left(\frac{z-x}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\sin\left(\frac{z+x}{2} - \frac{y+x}{2}\right) = 4\sin\left(\frac{z-x}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\sin\left(\frac{z-y}{2}\right)$$

$$= 4\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{y-z}{2}\right)\sin\left(\frac{z-x}{2}\right).$$

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

2) $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

3) $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

4) $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Déterminants, retenez-les tous ! (n°3)

Chapitre concerné : 16. Déterminants

☐ Ce que montre cet exo

Qu'en utilisant à bon escient des opérations sur les lignes (ou les colonnes), on peut calculer facilement un déterminant.

- **L'énoncé**

1) Soit $D = \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ -x & 0 & x & x \\ -x & -x & 0 & x \\ -x & -x & -x & 0 \end{vmatrix}$. Démontrer que $D = x^4$.

2) Soit $E = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & b & b \\ b & b & x & c \\ c & c & c & x \end{vmatrix}$. Démontrer que $E = (x+a+b+c)(x-a)(x-b)(x-c)$.

- **Corrigé**

1) $$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ -x & 0 & x & x \\ -x & -x & 0 & x \\ -x & -x & -x & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1}}{=} \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & 2x & 2x \\ 0 & 0 & x & 2x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^4.$$

2) $$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & b & b \\ b & b & x & c \\ c & c & c & x \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} x+a+b+c & a+x+b+c & a+b+x+c & a+b+c+x \\ a & x & b & b \\ b & b & x & c \\ c & c & c & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & b & b \\ b & b & x & c \\ c & c & c & x \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - bL_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - cL_1}}{=} (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & x-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & x-c \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b+c)(x-a)(x-b)(x-c).$$

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) On peut ajouter la même ligne aux autres.
2) On peut soustraire d'une ligne un multiple d'une même ligne.

Déterminants, retenez-les tous ! (n°4)

Chapitre concerné : 16. Déterminants

☐ Ce que montre cet exo

Qu'en utilisant à bon escient des opérations sur les lignes (ou les colonnes), on peut calculer facilement un déterminant.

- **L'énoncé**

1) Soit $F=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix}$. Démontrer que $F=xyz$.

2) Soit $G=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ y_1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ y_1 & y_2 & x_2 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_3 \end{vmatrix}$. Démontrer que $G=(x_1-y_1)(x_2-y_2)(x_3-y_3)$.

- **Corrigé**

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1 \\ L_4\leftarrow L_4-L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{vmatrix} = xyz$.

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ y_1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ y_1 & y_2 & x_2 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_3 \end{vmatrix} \underset{C_4\leftarrow C_4-C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ y_1 & x_1 & x_1 & 0 \\ y_1 & y_2 & x_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_3-y_3 \end{vmatrix} \underset{C_3\leftarrow C_3-C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & x_2-y_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3-y_2 & x_3-y_3 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & x_2-y_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3-y_2 & x_3-y_3 \end{vmatrix} \underset{C_2\leftarrow C_2-C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & x_1-y_1 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2-y_1 & x_2-y_2 & 0 \\ y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_2 & x_3-y_3 \end{vmatrix}$.

Donc $G=(x_1-y_1)(x_2-y_2)(x_3-y_3)$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) On peut soustraire à toutes les lignes la même ligne (pareil pour les colonnes).
2) On peut soustraire d'une colonne la colonne précédente (pareil pour les lignes).

Un produit scalaire et une norme pour les polynômes

Chapitre concerné : 17. Produit scalaire

☐ Ce que montre cet exo

Comment montrer qu'on a bien un produit scalaire et comment en déduire sa norme associée.

- **L'énoncé**

Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$.

1) Montrer que $\langle P,Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ définit bien un produit scalaire sur E.

2) En déduire l'expression de la norme associée.

- **Corrigé**

1) On a : $\langle P,Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2) = Q(0)P(0) + Q(1)P(1) + Q(2)P(2) = \langle Q,P \rangle$

On a : $\langle P_1 + P_2, Q \rangle = (P_1(0) + P_2(0))Q(0) + (P_1(1) + P_2(1))Q(1) + (P_1(2) + P_2(2))Q(2)$

$= P_1(0)Q(0) + P_2(0)Q(0) + P_1(1)Q(1) + P_2(1)Q(1) + P_1(2)Q(2) + P_2(2)Q(2)$

$= P_1(0)Q(0) + P_1(1)Q(1) + P_1(2)Q(2) + P_2(0)Q(0) + P_2(1)Q(1) + +P_2(2)Q(2) = \langle P_1, Q \rangle + \langle P_2, Q \rangle$.

On a :

$\langle \lambda P, Q \rangle = \lambda P(0)Q(0) + \lambda P(1)Q(1) + \lambda P(2)Q(2) = \lambda(P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)) = \lambda \langle P,Q \rangle$

On a : $\langle P,P \rangle = P^2(0) + P^2(1) + P^2(2)$ donc $\langle P,P \rangle \geq 0$.

On a : $\langle P,P \rangle = 0 \Leftrightarrow P^2(0) + P^2(1) + P^2(2) = 0 \Leftrightarrow P^2(0) = P^2(1) = P^2(2) = 0$ (car tous les nombres sont positifs) donc : $P(0) = P(1) = P(2) = 0$. Ainsi le polynôme P admet 3 racines (0, 1 et 2). Or P est degré 2 (car $E = \mathbb{R}_2[x]$). Ainsi P a plus de racines que son degré, ceci n'est possible que si P est le polynôme nul ! D'où : $P = 0$.

2) La norme associée est $N(P) = \sqrt{\langle P,P \rangle} = \sqrt{P^2(0) + P^2(1) + P^2(2)}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\langle P,Q \rangle$ est un produit scalaire s'il s'agit d'une forme symétrique, bilinéaire et définie positive, c'est-à-dire si :

$\langle P,Q \rangle = \langle Q,P \rangle$;

$\langle P_1 + P_2, Q \rangle = \langle P_1, Q \rangle + \langle P_2, Q \rangle$ et $\langle \lambda P, Q \rangle = \lambda \langle P,Q \rangle$;

$\langle P,P \rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si $P = 0$.

2) La norme associée est alors : $N(P) = \sqrt{\langle P,P \rangle}$.

Identités de polarisation

Chapitre concerné : 17. Produit scalaire

☐ Ce que montre cet exo

La démonstration des trois identités de polarisation permettant d'exprimer un produit scalaire en fonction des normes.

- **L'énoncé**

Démontrer les identités de polarisation :

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$ **2)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ **3)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

- **Corrigé**

1 $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

donc : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=2\vec{u}\cdot\vec{v}$

donc : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$.

2) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

donc : $\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\left(\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\right)=2\vec{u}\cdot\vec{v}$

donc : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.

3) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

donc : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2-\left(\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\right)=4\vec{u}\cdot\vec{v}$

donc : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$.

2) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$.

3) Les trois identités de polarisation :

Identité n°1 : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$.

Identité n°2 : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.

Identité n°3 : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.

Des fonctions trigonométriques orthogonales

Chapitre concerné : 17. Produit scalaire

☐ Ce que montre cet exo

Que des objets aussi abstraits que des fonctions trigonométriques peuvent être considérés comme des vecteurs orthogonaux pour un certain produit scalaire.

- **L'énoncé**

Soit $E = C([-\pi;\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$.

1) Démontrer que $c_p(t) = \cos(pt)$ et $c_q(t) = \cos(qt)$ sont orthogonales lorsque $p \neq q$.

2) Démontrer que $s_p(t) = \sin(pt)$ et $s_q(t) = \sin(qt)$ sont orthogonales lorsque $p \neq q$.

3) Démontrer que $c_p(t) = \cos(pt)$ et $s_q(t) = \sin(qt)$ sont orthogonales lorsque $p \neq q$.

- **Corrigé**

1) $\langle c_p, c_q\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(pt)\cos(qt)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos((p+q)t) + \cos((p-q)t)\right]dt$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p+q)t)}{p+q} + \frac{\sin((p-q)t)}{p-q}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

2) $\langle s_p, s_q\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(pt)\sin(qt)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos((p-q)t) - \cos((p+q)t)\right]dt$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\sin((p-q)t)}{p-q} + \frac{\sin((p+q)t)}{p+q}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

3) $\langle c_p, s_q\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(pt)\sin(qt)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\sin((p+q)t) + \sin((q-p)t)\right]dt$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos((p+q)t)}{p+q} + \frac{\cos((q-p)t)}{q-p}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

2) $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

3) $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(b-a))$

4) $\langle f,g\rangle = 0$ équivaut à f et g sont orthogonaux.

Des polynômes orthogonaux

Chapitre concerné : 17. Produit scalaire

☐ Ce que montre cet exo

Que des objets aussi abstraits que des polynômes peuvent être considérés comme des vecteurs orthogonaux pour un certain produit scalaire.

- **L'énoncé**

Soit $E=\mathbb{R}_2[x]$ muni du produit scalaire $\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)dt$.

Démontrer que $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$ forment une base orthogonale de E.

- **Corrigé**

Comme $E=\mathbb{R}_2[x]$ est de dimension 3 et que $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$ forment une famille libre de E (car de degré différents), on en déduit qu'ils forment une base de E.
Montrons maintenant qu'ils sont deux à deux orthogonaux :

$$\langle P_0,P_1\rangle=\int_{-1}^{1}P_0(t)P_1(t)dt=\int_{-1}^{1}tdt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

$$\langle P_0,P_2\rangle=\int_{-1}^{1}P_0(t)P_2(t)dt=\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}\right)dt=\left[\frac{t^3}{2}-\frac{1}{2}t\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\right)=0.$$

$$\langle P_1,P_2\rangle=\int_{-1}^{1}P_1(t)P_2(t)dt=\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}t^3-\frac{1}{2}t\right)dt=\left[\frac{3t^4}{8}-\frac{1}{4}t^2\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=0.$$

Ainsi P_0,P_1,P_2 forment une base orthogonale de E.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Trois polynômes de degré 0,1 et 2 (donc différents) forment une base de $E=\mathbb{R}_2[x]$, au même titre que la base canonique $(1,x,x^2)$.

2) $\langle f,g\rangle=0$ équivaut à f et g sont orthogonaux.

« Gram-Schmidtage » d'un plan

Chapitre concerné : 17. Produit scalaire

☐ Ce que montre cet exo

Comment trouver une base orthonormée d'un plan vectoriel par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

- **L'énoncé**

On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique $\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = xx'+yy'+zz'$. Soit $E=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$.

1) Démontrer que $(e_1,e_2)=((1,0,-1),(0,1,-1))$ est une base de E. En déduire sa dimension.

2) A partir de la base (e_1,e_2), déterminer une base orthonormale (o_1,o_2) par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

- **Corrigé**

1) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=-x-y\}=\{(x,y,-x-y) : x,y\in\mathbb{R}\}=\{x(1,0,-1)+y(0,1,-1) : x,y\in\mathbb{R}\}$

$=\mathrm{Vect}\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$. $(e_1,e_2)=((1,0,-1),(0,1,-1))$ est une base (famille génératrice et libre).

2) Base d'origine : $(e_1,e_2)=((1,0,-1),(0,1,-1))$.

Base transitoire (t_1,t_2) et base orthonormale (o_1,o_2).

On pose $t_1=e_1=(1,0,-1)$ donc $o_1=\frac{1}{\|t_1\|}t_1=\frac{1}{\sqrt2}(1,0,-1)=\left(\frac{1}{\sqrt2},0,-\frac{1}{\sqrt2}\right)$ puis

$$t_2=e_2-\langle e_2,o_1\rangle o_1=(0,1,-1)-\left\langle(0,1,-1),\left(\frac{1}{\sqrt2},0,-\frac{1}{\sqrt2}\right)\right\rangle\left(\frac{1}{\sqrt2},0,-\frac{1}{\sqrt2}\right)$$

Soit $t_2=(0,1,-1)-\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{1}{\sqrt2},0,-\frac{1}{\sqrt2}\right)=(0,1,-1)-\left(\frac12,0,-\frac12\right)=\left(-\frac12,1,-\frac12\right)$ donc :

$$o_2=\frac{1}{\|t_2\|}t_2=\frac{1}{\sqrt{\frac14+1+\frac14}}\left(-\frac12,1,-\frac12\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac32}}\left(-\frac12,1,-\frac12\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt6},\frac{\sqrt2}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt6}\right).$$

Base orthonormale (o_1,o_2) : $o_1=\left(\frac{1}{\sqrt2},0,-\frac{1}{\sqrt2}\right)$ et $o_2=\left(-\frac{1}{\sqrt6},\frac{\sqrt2}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt6}\right)$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Le projeté de $\vec v$ sur $\vec u$ est : $\mathrm{proj}_{\vec u}(\vec v)=\langle\vec v,\vec u\rangle\vec u$ (où $\vec u$ est un vecteur normé).

2) Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt : $o_k=\frac{1}{\|t_k\|}t_k$ où $t_1=e_1$ et

$t_k=e_k-\sum_{i=1}^{k-1}\mathrm{proj}_{o_i}(e_k)o_i$ (ou encore $t_k=e_k-\sum_{i=1}^{k-1}\langle e_k,o_i\rangle o_i$) pour $k\geq 2$.

Matrice de Gram

Chapitre concerné : 17. Produit scalaire

☐ Ce que montre cet exo

L'équivalence entre l'inversibilité d'une matrice de produits scalaires et la liberté d'une famille de vecteurs.

- **L'énoncé**

Soit $(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ une famille de E, espace euclidien de dimension 2 et $G=(g_{i,j})_{1\le i,j\le 2}$ la matrice de Gram définie par $g_{i,j}=\langle \vec{u}_i,\vec{u}_j\rangle$. On veut démontrer que $(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ est libre ssi G est inversible.

1) Soit $\vec{X}=x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2$ et $V=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$. Démontrer que ${}^tVGV=\|\vec{X}\|^2$.

2) En déduire que $GV=0 \Leftrightarrow \vec{X}=\vec{0}$ et que G est inversible ssi $(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ est libre.

- **Corrigé**

1) ${}^tVGV=(x_1\quad x_2)\begin{pmatrix}\langle\vec{u}_1,\vec{u}_1\rangle & \langle\vec{u}_1,\vec{u}_2\rangle\\ \langle\vec{u}_2,\vec{u}_1\rangle & \langle\vec{u}_2,\vec{u}_2\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=(x_1\quad x_2)\begin{pmatrix}\langle\vec{u}_1,\vec{u}_1\rangle x_1+\langle\vec{u}_1,\vec{u}_2\rangle x_2\\ \langle\vec{u}_2,\vec{u}_1\rangle x_1+\langle\vec{u}_2,\vec{u}_2\rangle x_2\end{pmatrix}$

$=\langle\vec{u}_1,\vec{u}_1\rangle x_1^2+\langle\vec{u}_1,\vec{u}_2\rangle x_2x_1+\langle\vec{u}_2,\vec{u}_1\rangle x_1x_2+\langle\vec{u}_2,\vec{u}_2\rangle x_2^2=\langle x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2,x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2\rangle=\|\vec{X}\|^2$.

2) Si $GV=0$ alors ${}^tVGV=0$ et donc $\|\vec{X}\|^2=0$ et donc $\vec{X}=\vec{0}$.

Réciproquement si $\vec{X}=\vec{0}$ alors $\langle\vec{u}_1,\vec{X}\rangle=0$ et $\langle\vec{u}_2,\vec{X}\rangle=0$ et donc :

$GV=\begin{pmatrix}\langle\vec{u}_1,\vec{u}_1\rangle & \langle\vec{u}_1,\vec{u}_2\rangle\\ \langle\vec{u}_2,\vec{u}_1\rangle & \langle\vec{u}_2,\vec{u}_2\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\langle\vec{u}_1,\vec{u}_1\rangle x_1+\langle\vec{u}_1,\vec{u}_2\rangle x_2\\ \langle\vec{u}_2,\vec{u}_1\rangle x_1+\langle\vec{u}_2,\vec{u}_2\rangle x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\langle\vec{u}_1,\vec{u}_1x_1+\vec{u}_2x_2\rangle\\ \langle\vec{u}_2,\vec{u}_1x_1+\vec{u}_2x_2\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\langle\vec{u}_1,\vec{X}\rangle\\ \langle\vec{u}_2,\vec{X}\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$. Ainsi : $GV=0\Leftrightarrow\vec{X}=\vec{0}$.

$G=\begin{pmatrix}\langle\vec{u}_1,\vec{u}_1\rangle & \langle\vec{u}_1,\vec{u}_2\rangle\\ \langle\vec{u}_2,\vec{u}_1\rangle & \langle\vec{u}_2,\vec{u}_2\rangle\end{pmatrix}$ inversible $\Leftrightarrow \begin{cases}\langle\vec{u}_1,\vec{u}_1\rangle x_1+\langle\vec{u}_1,\vec{u}_2\rangle x_2=0\\ \langle\vec{u}_2,\vec{u}_1\rangle x_1+\langle\vec{u}_2,\vec{u}_2\rangle x_2=0\end{cases}$ est un système de Cramer.

$\Leftrightarrow$ Proposition : $\begin{cases}\langle\vec{u}_1,\vec{u}_1\rangle x_1+\langle\vec{u}_1,\vec{u}_2\rangle x_2=0\\ \langle\vec{u}_2,\vec{u}_1\rangle x_1+\langle\vec{u}_2,\vec{u}_2\rangle x_2=0\end{cases}$ implique $x_1=x_2=0$.

$\Leftrightarrow$ Proposition : $GV=0$ implique $x_1=x_2=0$ (car $GV=\begin{pmatrix}\langle\vec{u}_1,\vec{u}_1\rangle x_1+\langle\vec{u}_1,\vec{u}_2\rangle x_2\\ \langle\vec{u}_2,\vec{u}_1\rangle x_1+\langle\vec{u}_2,\vec{u}_2\rangle x_2\end{pmatrix}$).

$\Leftrightarrow$ Proposition : $\vec{X}=\vec{0}$ implique $x_1=x_2=0$ (car $GV=0\Leftrightarrow\vec{X}=\vec{0}$).

$\Leftrightarrow$ Proposition : $x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2=\vec{0}$ implique $x_1=x_2=0 \Leftrightarrow (\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ est libre.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\|\vec{X}\|=0\Leftrightarrow\vec{X}=\vec{0}$ 2) $(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ libre si $x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2=\vec{0}$ implique $x_1=x_2=0$.

Analyse et probabilités 1re année

Chapitres concernés :

1. Inégalités
2. Dérivées, primitives
3. Fonctions usuelles
4. Équations différentielles
5. Suites réelles
6. Limites et continuité
7. Dérivabilité
8. Développements limités
9. Équivalents et petits o
10. Intégration simple
11. Séries numériques
12. Dénombrement
13. Probabilités
14. Variables aléatoires sur un univers fini

Inégalités obtenues par des identités remarquables

Chapitre concerné : 1. Inégalités

☐ Ce que montre cet exo

Que parfois de simples identités remarquables aboutissent à des inégalités superbes !

- **L'énoncé**

1) En utilisant l'identité remarquable $(x-y)^2$, démontrer l'inégalité : $xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$.

2) En utilisant l'identité remarquable $(x+y)^2$, démontrer l'inégalité : $xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2$.

3) En utilisant l'identité remarquable $(x-1)^2$, démontrer que pour tout $x>0$, $x+\frac{1}{x} \geq 2$.

- **Corrigé**

1) On a $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$. Or un carré est toujours positif. Donc $(x-y)^2 \geq 0$ et donc $x^2-2xy+y^2 \geq 0$ donc $x^2+y^2 \geq 2xy$ et donc : $\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \geq xy$.

2) $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$. Or $x^2+y^2 \geq 2xy$ (question **1)**) donc : $(x+y)^2 \geq 2xy+2xy$ donc : $(x+y)^2 \geq 4xy$ donc : $xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2$.

3) $(x-1)^2 = x^2-2x+1$. Or un carré est toujours positif. Donc $(x-1)^2 \geq 0$ donc $x^2-2x+1 \geq 0$ donc $x^2+1 \geq 2x$. Or $x>0$, donc en divisant le sens de l'inégalité est conservé et on a : $\frac{x^2+1}{x} \geq \frac{2x}{x}$ donc : $x+\frac{1}{x} \geq 2$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Un carré est positif.

2) $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$

3) $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$.

Inégalité triangulaire

Chapitre concerné : 1. Inégalités

☐ Ce que montre cet exo

La double inégalité $\big||a|-|b|\big| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$ pour tous réels a et b.

- **L'énoncé**

1) Sachant que $x^2 = |x|^2$ et que $x \leq |x|$, démontrer que $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$.

En déduire que $|a+b| \leq |a|+|b|$.

2) Sachant que $|a| = |a+b-b|$ et que $|b| = |a+b-a|$, démontrer que $\begin{cases} |a|-|b| \leq |a+b| \\ |b|-|a| \leq |a+b| \end{cases}$.

En déduire que $\big||a|-|b|\big| \leq |a+b|$.

- **Corrigé**

1) On a $\begin{cases} |a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = |a|^2+2ab+|b|^2 \\ (|a|+|b|)^2 = |a|^2+2|ab|+|b^2| \end{cases}$ donc $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$

donc : $|a+b| \leq |a|+|b|$ (car $|a+b| > 0$ et $|a|+|b| > 0$).

2) $|a| = |a+b-b| \leq |a+b|+|-b|$ donc : $|a| \leq |a+b|+|b|$ donc : $|a|-|b| \leq |a+b|$.

$|b| = |a+b-a| \leq |a+b|+|-a|$ donc : $|b| \leq |a+b|+|a|$ donc : $|b|-|a| \leq |a+b|$.

Comme $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$, on a $\big||a|-|b|\big| = \begin{cases} |a|-|b| \text{ si } |a|-|b| \geq 0 \\ |b|-|a| \text{ si } |a|-|b| < 0 \end{cases}$,

on en déduit que : $\big||a|-|b|\big| \leq |a+b|$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

2) $x \leq |x|$

3) $x^2 = |x|^2$

4) $\big||a|-|b|\big| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$.

Inégalité de Bernoulli

Chapitre concerné : 1. Inégalités

☐ Ce que montre cet exo

L'inégalité $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour $x>0$ et $n \geq 0$, appelée inégalité de Bernoulli (1654-1705).

- **L'énoncé**

En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour $x>0$, $n \geq 0$.

- **Corrigé**

Soit $x>0$ et P_n la propriété « $(1+x)^n \geq 1+nx$ ».

Initialisation : P_0 est vraie car $(1+x)^0 = 1$ et $1+0\cdot x = 1$.

Hérédité : Supposons P_n vraie (c'est-à-dire que $(1+x)^n \geq 1+nx$), et montrons que P_{n+1} est encore vraie (c'est-à-dire que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$).

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$ donc $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$ c'est à dire $(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2$ c'est à dire $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2$ donc : $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ car $nx^2 \geq 0$ (ce qu'on voulait).

Conclusion : Comme P_0 est vraie, et que P_n est héréditaire, P_n est vraie pour $n \geq 0$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Le principe du raisonnement par récurrence (initialisation, hérédité, conclusion).

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Chapitre concerné : 1. Inégalités

☐ Ce que montre cet exo

L'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

- **L'énoncé**

1) 1re méthode : rappeler la formule donnant le produit scalaire de deux vecteurs du plan en fonction du cosinus. En déduire que $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

2) 2e méthode : on considère le polynôme du second degré de variable x : $P(x) = \|\vec{u} + x\vec{v}\|^2$.

Quel est le signe de $P(x) = \|\vec{u} + x\vec{v}\|^2$? Montrer que $P(x) = \|\vec{u} + x\vec{v}\|^2$ est un polynôme de degré deux. Combien alors au maximum $P(x)$ admet-il alors de racines réelles ? Que peut-on en déduire sur le signe du discriminant de $P(x)$? En déduire alors que $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

- **Corrigé**

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$ donc $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\cos(\vec{u},\vec{v})|$. Or $|\cos(x)| \leq 1$ pour tout x, d'où :

$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times 1$ $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

2) $P(x) = \|\vec{u} + x\vec{v}\|^2$ étant un carré, son signe est positif ou nul.

$P(x) = \|\vec{u} + x\vec{v}\|^2 = (\vec{u} + x\vec{v})\cdot(\vec{u} + x\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + 2\vec{u}\cdot x\vec{v} + x^2\vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + (2\vec{u}\cdot\vec{v})x + \|\vec{v}\|^2 x^2$ est bien un polynôme de degré 2.

Un polynôme de degré 2 de signe positif admet au maximum 1 racine réelle (car s'il en admet deux, il change de signe, d'après le théorème du signe du trinôme), donc son discriminant Δ vérifie l'inégalité $\Delta \leq 0$.

Déterminons le discriminant du polynôme $P(x) = \|\vec{u}\|^2 + (2\vec{u}\cdot\vec{v})x + \|\vec{v}\|^2 x^2$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (2\vec{u}\cdot\vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 = 4(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$

$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow |\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$ et $|\cos(x)| \leq 1$ pour tout x.

2) Un polynôme de degré 2 qui est toujours positif admet au maximum une racine réelle et admet donc un discriminant $\Delta \leq 0$.

3) $a^2 < b^2 \Leftrightarrow |a| < |b|$.

4) Il faut bien retenir la 2e méthode qui marchera sans l'appui du cosinus. En effet, par la suite, de nouveaux produits scalaires ne faisant pas intervenir de cosinus seront utilisés : on peut avoir des produits scalaires de vecteurs non géométriques comme des fonctions, des polynômes, etc. Dans ces cas-là, le cosinus ne nous est d'aucun secours.

Inégalité $e^x \geq 1+x$

Chapitre concerné : 1. Inégalités

☐ Ce que montre cet exo

L'inégalité $e^x \geq 1+x$ pour tout x et son interprétation graphique.

- **L'énoncé**

1) Etudier les variations de $f(x)=e^x-(1+x)$ sur $]-\infty;+\infty[$.

2) En déduire que $e^x \geq 1+x$ pour tout x.

3) Que peut-on en déduire graphiquement ?

- **Corrigé**

1) $f'(x)=e^x-1$.

Lorsque $x>0$, $f'(x)>0$ donc f est croissante sur $]0;+\infty[$.

Lorsque $x<0$, $f'(x)<0$ donc f est décroissante sur $]-\infty;0[$.

2) Ainsi f admet $f(0)$ comme minimum sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$, c'est-à-dire que $f(x)\geq f(0)$ pour tout x. Or $f(0)=e^0-(1+0)=0$, donc $f(x)\geq 0$ pour tout x, donc $e^x \geq 1+x$ pour tout x.

3) On peut en déduire que la courbe $y=e^x$ est toujours au-dessus de la droite $y=1+x$. On peut même être plus précis. Posons $g(x)=e^x$. La tangente à la courbe C_g au point d'abscisse 0 admet comme équation réduite : $y=g'(0)(x-0)+g(0)$ c'est-à-dire : $y=1(x-0)+1$ (car $g'(x)=e^x$ donc $g'(0)=e^0=1$ et $g(x)=e^x$ donc $g(0)=e^0=1$) c'est-à-dire : $y=x+1$.

Ainsi l'inégalité $e^x \geq 1+x$ montrer que la courbe C_g est toujours au-dessus de la tangente à la courbe C_g au point d'abscisse 0.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\left(e^x\right)'=e^x$.

2) Le principe de Lagrange : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors :

$f'>0$ sur un intervalle I $\Rightarrow$ f strictement croissante sur I.

$f'<0$ sur un intervalle I $\Rightarrow$ f strictement décroissante sur I.

3) La position relative de deux courbes :

$f(x)\leq g(x)$ équivaut à C_f au-dessous de C_g.

$f(x)\geq g(x)$ équivaut à C_f au-dessus de C_g.

Inégalité $\ln(1+x) \le x \le (1+x)\ln(1+x)$

Chapitre concerné : 1. Inégalités

☐ Ce que montre cet exo

La double inégalité $\ln(1+x) \le x \le (1+x)\ln(1+x)$ pour $x > 0$.

- **L'énoncé**

1) Etudier les variations de $f(x) = \ln(1+x) - x$ sur $]0;+\infty[$.

En déduire que $\ln(1+x) \le x$ lorsque $x > 0$.

2) Etudier les variations de $g(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$ sur $]0;+\infty[$.

En déduire que $x \le (1+x)\ln(1+x)$ lorsque $x > 0$.

3) Conclure.

- **Corrigé**

1) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$. Lorsque $x > 0$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $]0;+\infty[$. Donc pour $x > 0$, $f(x) \le f(0)$ soit $\ln(1+x) - x \le 0$ (car $f(0) = 0$) soit $\ln(1+x) \le x$.

2) $g'(x) = 1 - \left(1 \cdot \ln(1+x) + (1+x)\dfrac{1}{1+x}\right) = -\ln(1+x)$. Lorsque $x > 0$, $g'(x) < 0$ donc g est décroissante sur $]0;+\infty[$. Donc pour $x > 0$, $g(x) \le g(0)$ donc $x - (1+x)\ln(1+x) \le 0$ (car $g(0) = 0$) donc : $x \le (1+x)\ln(1+x)$.

3) Pour $x > 0$, on a $\ln(1+x) \le x \le (1+x)\ln(1+x)$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\left(\ln(u)\right)' = \dfrac{u'}{u}$.

2) $(u \times v)' = u'v + uv'$.

3) Si f est strictement décroissante et continue sur $]0;+\infty[$ alors $f(x) \le f(0)$ pour $x > 0$.

Inégalité de convexité pour la fonction carré

Chapitre concerné : 1. Inégalités

☐ Ce que montre cet exo

Que la fonction carré vérifie l'inégalité de convexité $f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b)$.

- **L'énoncé**

Une fonction est convexe sur $\mathbb{R}$ lorsque pour tous a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a<b$, on a, pour tout t compris entre 0 et 1 : $f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b)$.

Démontrer que la fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tous a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a<b$, on a, pour tout t compris entre 0 et 1 : $(ta+(1-t)b)^2 \leq ta^2+(1-t)b^2$.

- **Corrigé**

Soient a et b deux réels et t un réel compris entre 0 et 1.

Nous allons prouver que $ta^2+(1-t)b^2-(ta+(1-t)b)^2 \geq 0$.

$$ta^2+(1-t)b^2-(ta+(1-t)b)^2 = ta^2+(1-t)b^2-\left[t^2a^2+2ta(1-t)b+(1-t)^2b^2\right]$$

$$= ta^2+(1-t)b^2-t^2a^2-2ta(1-t)b-(1-t)^2b^2$$

$$= ta^2-t^2a^2+\left(1-t-(1-t)^2\right)b^2-2ta(1-t)b$$

$$= \left(t-t^2\right)a^2+\left(1-t-1+2t-t^2\right)b^2-2ta(1-t)b$$

$$= \left(t-t^2\right)a^2+\left(t-t^2\right)b^2-2ta(1-t)b$$

$$= \left(t-t^2\right)a^2+\left(t-t^2\right)b^2-2a\left(t-t^2\right)b$$

$$= \left(t-t^2\right)\left(a^2+b^2-2ab\right)$$

$$= \left(t-t^2\right)(a-b)^2 = t(1-t)(a-b)^2.$$

Or $t \geq 0$, $1-t \geq 0$ (car $t \leq 1$), $(a-b)^2 \geq 0$ (car un carré est toujours positif).

Donc $ta^2+(1-t)b^2-(ta+(1-t)b)^2 \geq 0$ (comme produit de nombres positifs).

D'où $(ta+(1-t)b)^2 \leq ta^2+(1-t)b^2$.

La fonction carré est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

$a^2+b^2-2ab = a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$.

Inégalité arithmético-géométrique

Chapitre concerné : 1. Inégalités

☐ Ce que montre cet exo

L'inégalité $\dfrac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n} \geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$ pour $n \geq 1$ et $x_1 > 0, x_2 > 0, \cdots x_n > 0$.

- **L'énoncé**

Démontrer par récurrence la propriété P_n : $\dfrac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n} \geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$.

(On étudiera la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x+x_1+x_2+\cdots+x_n}{n+1} - x^{\frac{1}{n+1}}(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n+1}}$).

- **Corrigé**

Initialisation : P_1 est vraie (car $\dfrac{x_1}{1} \geq (x_1)^1$).

Hérédité : Supposons P_n vraie (c'est-à-dire que $\dfrac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n} \geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$) et montrons que P_{n+1} l'est encore (c'est-à-dire que $\dfrac{x_1+x_2+\cdots x_{n+1}}{n+1} \geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}$).

On a : $f'(x) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n+1}} x^{\frac{1}{n+1}-1} = \dfrac{1}{n+1}\left(1 - (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n+1}} x^{\frac{-n}{n+1}}\right)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{-n}{n+1}}(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n+1}} = 1 \Leftrightarrow \left(x^{-n}(x_1x_2\cdots x_n)\right)^{\frac{1}{n+1}} = 1 \Leftrightarrow x_1x_2\cdots x_n = x^n$.

De plus, $f'(x) \leq 0$ lorsque $x \leq (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$ et $f'(x) \geq 0$ lorsque $x \geq (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$.

Ainsi f admet pour minimum $f\left((x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}\right)$.

Or $f\left((x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} + x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n+1} - \left((x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n+1}}(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n+1}}$

$= \dfrac{(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} + x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n+1} - \left((x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}+1}$

$= \dfrac{(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} + x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n+1} - (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{-n(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} + x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n+1}$ (expression positive puisque P_n est vraie). Donc f est toujours positive, ce qui prouve que P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_1 étant vraie et P_n étant héréditaire, on en déduit que P_n est vraie pour $n \geq 1$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) On peut démontrer une inégalité par un raisonnement par récurrence.
2) Lorsqu'une fonction admet un minimum positif, elle est toujours positive.

Dérivées successives de xe^x

Chapitre concerné : 2. Dérivées, primitives

☐ Ce que montre cet exo

Que le calcul des dérivées successives de $f(x) = xe^x$ donne $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$.

- **L'énoncé**

Soit $f(x) = xe^x$.

1) Montrer que $f'(x) = (x+1)e^x$ et que $f''(x) = (x+2)e^x$.

2) Montrer par récurrence sur n que $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$ pour $n \geq 1$.

- **Corrigé**

1) $f(x) = xe^x$ donc : $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1)e^x$.

$f'(x) = (x+1)e^x$ donc $f''(x) = 1 \cdot e^x + (x+1)e^x = (1+x+1)e^x = (x+2)e^x$.

2) Soit $P_n : f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$.

Initialisation : P_1 est vraie (car $f'(x) = (x+1)e^x$).

Hérédité : Supposons P_n vraie (c'est-à-dire que $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$) et montrons que P_{n+1} l'est encore (c'est-à-dire que $f^{(n+1)}(x) = (x+n+1)e^x$).

On a : $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left((x+n)e^x\right)' = 1 \cdot e^x + (x+n)e^x = (x+n+1)e^x$.

Conclusion : P_1 étant vraie et P_n étant héréditaire, on en déduit que P_n est vraie pour $n \geq 1$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $(u \times v)' = u'v + uv'$.

2) $\left(e^x\right)' = e^x$.

De belles primitives de fractions rationnelles

Chapitre concerné : 2. Dérivées, primitives

☐ Ce que montre cet exo

Qu'en « découpant » astucieusement une fonction, on peut en trouver facilement une primitive.

- **L'énoncé**

Dans chaque cas, déterminer une primitive $F(x)$ de la fonction $f(x)$.

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ **2)** $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2+4}$ **3)** $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+2x+2}$ **4)** $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+2x+3}$

- **Corrigé**

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}=\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)+\dfrac{1}{x^2+1}$ donc : $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+\arctan(x)+C$.

2) $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2+4}=\dfrac{x}{x^2+4}+\dfrac{4}{x^2+4}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x}{x^2+4}\right)+\dfrac{1}{\dfrac{x^2}{4}+1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x}{x^2+4}\right)+2\dfrac{\frac{1}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+1}$ donc :

$F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|+2\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)+C$.

3) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+2x+2}=\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}+\dfrac{1}{x^2+2x+2}=\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}+\dfrac{1}{(x+1)^2+1}$ donc :

$F(x)=\ln\left|x^2+2x+2\right|+\arctan(x+1)+C$.

4)

$$f(x)=\frac{2x+3}{x^2+2x+5}=\frac{2x+2}{x^2+2x+5}+\frac{1}{x^2+2x+5}=\frac{2x+2}{x^2+2x+5}+\frac{1}{(x+1)^2+4}=\frac{2x+2}{x^2+2x+5}+\frac{1}{4\left[\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2+1\right]}$$

$$=\frac{2x+2}{x^2+2x+5}+\frac{1}{4}\frac{1}{\left[\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2+1\right]}=\frac{2x+2}{x^2+2x+5}+\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\left[\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2+1\right]}=\frac{2x+2}{x^2+2x+5}+\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{\left[\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2+1\right]}$$

donc : $F(x)=\ln\left|x^2+2x+5\right|+\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+C$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\dfrac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln|u|$

2) $\dfrac{1}{1+x^2}$ a pour primitive $\arctan(x)$, $\dfrac{u'}{1+u^2}$ a pour primitive $\arctan(u)$.

Primitive de puissances de cosinus

Chapitre concerné : 2. Dérivées, Primitives

☐ Ce que montre cet exo

Qu'un changement de variable ou l'utilisation de la formule d'Euler peuvent nous sauver !

- **L'énoncé**

1) Montrer que $\int_0^x \cos^3(t)\,dt = \int_0^x \left(1-\sin^2(t)\right)\cos(t)\,dt$. En déduire une primitive de $\cos^3(x)$.

2) Montrer que $\int_0^x \cos^4(t)\,dt = \int_0^x \left[\frac{\cos(4t)}{8} + \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{3}{8}\right]dt$. En déduire une primitive de $\cos^4(x)$.

- **Corrigé**

1) $\int_0^x \cos^3(t)\,dt = \int_0^x \cos^2(t)\cos(t)\,dt = \int_0^x \left(1-\sin^2(t)\right)\cos(t)\,dt$. Soit $u=\sin(t)$ (alors $du=\cos(t)\,dt$).

Donc $\int_0^x \left(1-\sin^2(t)\right)\cos(t)\,dt = \int_{\sin(0)}^{\sin(x)} \left(1-u^2\right)du = \left[u-\frac{u^3}{3}\right]_0^{\sin(x)} = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}$ (primitive cherchée).

2) $\cos^4(t) = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^4 = \frac{\left(e^{it}\right)^4 + 4\left(e^{it}\right)^3 e^{-it} + 6\left(e^{it}\right)^2\left(e^{-it}\right)^2 + 4e^{it}\left(e^{it}\right)^{-3} + \left(e^{-it}\right)^4}{2^4}$

$= \frac{e^{i4t} + 4e^{i2t} + 6 + 4e^{-i2t} + e^{-i4t}}{16} = \frac{2\cos(4t) + 8\cos(2t) + 6}{16} = \frac{1}{8}\cos(4t) + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{3}{8}$.

Ainsi $\int_0^x \cos^4(t)\,dt = \int_0^x \left[\frac{1}{8}\cos(4t) + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{3}{8}\right]dt = \left[\frac{1}{8}\frac{\sin(4t)}{4} + \frac{1}{2}\frac{\sin(2t)}{2} + \frac{3}{8}t\right]_0^x$

$= \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3}{8}x$ (primitive cherchée).

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Pour trouver une primitive de $\cos^n(x)$, on calcule $\int_0^x \cos^n(t)\,dt$. Si n est impair, on fait le changement de variable $u=\sin(t)$. Si n est pair, on linéarise en utilisant la formule d'Euler $\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ et le binôme de Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Sommes constantes de fonctions trigonométriques réciproques

Chapitre concerné : 3. Fonctions usuelles

☐ Ce que montre cet exo

Que $\arccos(x)+\arcsin(x)$ et $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ sont égaux à $\frac{\pi}{2}$ (pour $0<x<1$).

- **L'énoncé**

En utilisant les dérivées montrer que :

1) $\arccos(x)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}$ lorsque $-1<x<1$. **2)** $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$ si $x>0$.

- **Corrigé**

1) Soit f la fonction définie sur $]-1;1[$ par $f(x)=\arccos(x)+\arcsin(x)$.

Alors $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$. Donc f est égale à une fonction constante. En particulier

$f(x)=f(0)=\arccos(0)+\arcsin(0)=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}$ (pour tout $x\in]-1;1[$).

Conclusion : $\arccos(x)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}$ lorsque $-1<x<1$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Alors $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2+1}=0$. Donc f est égale à une fonction constante.

En particulier $f(x)=f(1)=\arctan(1)+\arctan(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ (pour tout $x\in]0;+\infty[$).

Conclusion : $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$ lorsque $x>0$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\arccos'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (pour $x\in]-1;1[$).

2) $\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (pour $x\in]-1;1[$).

3) $\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ (pour $x\in\mathbb{R}$).

4) $\arctan(u)$ a pour dérivée $\frac{u'}{1+u^2}$.

Simplification de arccos(cos) et arcsin(sin)

Chapitre concerné : 3. Fonctions usuelles

☐ Ce que montre cet exo

Comment simplifier $\arccos(\cos(x))$ et $\arcsin(\sin(x))$.

- **L'énoncé**

Simplifier les expressions suivantes :

1) $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ **2)** $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ **3)** $\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

4) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ **5)** $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ **6)** $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

- **Corrigé**

Il faut bien se souvenir que l'image de la fonction $\arccos$ est $[0;\pi]$. Donc :

1) $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$.

2) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

3) $\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$.

Il faut bien se souvenir que l'image de la fonction $\arcsin$ est $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Donc :

4) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$.

5) $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$.

6) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) L'image de la fonction $\arccos$ est $[0;\pi]$.

2) L'image de la fonction $\arcsin$ est $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Simplification de arctan(tan)

Chapitre concerné : 3. Fonctions usuelles

☐ Ce que montre cet exo

Comment simplifier $\arctan(\tan(x))$.

- **L'énoncé**

Simplifier les expressions suivantes :

1) $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ **2)** $\arctan\left(\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ **3)** $\arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

4) $\arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ **5)** $\arctan\left(\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right)$ **6)** $\arctan\left(\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

- **Corrigé**

Il faut bien se souvenir que l'image de la fonction $\arctan$ est $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Donc :

1) $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\arctan\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$.

2) $\arctan\left(\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\arctan\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$.

3) $\arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$.

4) $\arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\arctan\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$.

5) $\arctan\left(\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right)=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$.

6) $\arctan\left(\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)=\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

L'image de la fonction $\arctan$ est $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Variation de constante

Chapitre concerné : 4. Equations différentielles

☐ Ce que montre cet exo

Que l'équation $xy' - y = x^2e^{-x}$ peut être résolue par la méthode de la variation de la constante.

- **L'énoncé**

Résoudre $xy' - y = x^2e^{-x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ en utilisant la méthode de la variation de la constante.

- **Corrigé**

Solution y_H **de l'équation homogène** $xy' - y = 0$ **.**

Equation normalisée : $y' - \frac{1}{x}y = 0$. On a alors $y_H = \lambda e^{-(-\ln(x))} = \lambda e^{\ln(x)} = \lambda x$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

Recherche d'une solution particulière y_P **de l'équation complète** $xy' - y = x^2e^{-x}$.

On utilise la variation de la constante (λ devient $\lambda(x)$).

Soit $y_P = \lambda(x)x$ une solution particulière de l'équation complète $xy' - y = x^2e^{-x}$.

On a donc : $xy_P' - y_P = x^2e^{-x}$ c'est-à-dire $x(\lambda'(x) \cdot x + \lambda(x) \cdot 1) - (\lambda(x)x) = x^2e^{-x}$

donc : $\lambda'(x)x^2 + \lambda(x)x - \lambda(x)x = x^2e^{-x}$ donc $\lambda'(x)x^2 = x^2e^{-x}$ donc $\lambda'(x) = e^{-x}$

donc $\lambda(x) = -e^{-x}$. Ainsi $y_P = \lambda(x)x = -xe^{-x}$.

Principe de superposition et ensemble des solutions

Les solutions de l'équation $xy' - y = x^2e^{-x}$ sont : $y = y_H + y_P = \lambda x - xe^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a donc : $S = \left\{x \to \lambda x - xe^{-x}; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) L'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ admet comme solutions $y_H = \lambda e^{-A(x)}$ où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$.

2) Principe de superposition : les solutions sont : $y = y_H + y_P$ où y_H est solution de l'équation homogène et y_P est une solution particulière de l'équation complète.

Recollement qui « marche »

Chapitre concerné : 4. Equations différentielles

☐ Ce que montre cet exo
Un cas de recollement qui « marche » (constantes égales à gauche et à droite)

- **L'énoncé**

Résoudre $xy' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$ (en utilisant le principe du recollement).

- **Corrigé**

1) Equation normalisée : $y' - \dfrac{1}{x}y = 0$ pour $x \neq 0$. Les intervalles d'études sont $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

2) sur $]-\infty;0[$, on a : $y = \lambda_1 e^{-(-\ln|x|)} = \lambda_1 e^{\ln|x|} = \lambda_1 e^{\ln(-x)} = -\lambda_1 x$.

sur $]0;+\infty[$, on a : $y = \lambda_2 e^{-(-\ln|x|)} = \lambda_2 e^{\ln|x|} = \lambda_2 e^{\ln(x)} = \lambda_2 x$.

3) Extension aux intervalles $]-\infty;0]$ et $[0;+\infty[$.

a) Si y est solution sur $]-\infty;0]$, alors sa restriction à $]-\infty;0[$ est solution sur $]-\infty;0[$, donc $y_{]-\infty;0[} = -\lambda_1 x$. Or y' existe (d'après l'énoncé), y est dérivable donc continue en 0.

La continuité en 0 impose que $y(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} y_{]-\infty;0[}(x)$ ce qui donne $y(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\lambda_1 x = -\lambda_1 \times 0 = 0$.

La dérivabilité en 0 impose $y'_g(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{-\lambda_1 x - 0}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{-\lambda_1 x}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\lambda_1 = -\lambda_1$.

Avec ces conditions, on a bien $0y'(0) - y(0) = 0$. Ainsi la fonction y définie sur $]-\infty;0]$ par $y = -\lambda_1 x$ est bien solution de l'équation différentielle $xy' - y = 0$ sur l'intervalle $]-\infty;0]$.

b) De même (après calculs donnant $y'_d(0) = \lambda_2$) la fonction y définie sur $[0;+\infty[$ par $y = \lambda_2 x$ est bien solution de l'équation différentielle $xy' - y = 0$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

4) Recollement : jusqu'ici la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y = \begin{cases} -\lambda_1 x \text{ sur }]-\infty;0] \\ \lambda_2 x \text{ sur } [0;+\infty[\end{cases}$ convient.

Or y étant dérivable, on doit avoir $y'_g(0) = y'_d(0)$ donc $-\lambda_1 = \lambda_2$.

Conclusion : les solutions de l'équation $xy' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont : $y = \lambda x$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

☐ Ce qu'il faut retenir du cours
1) La normalisation donne 2 intervalles ouverts et donc : « 1 solution à gauche, 1 à droite ».
2) L'existence de y' impose la dérivabilité et la continuité. Cela permet d'étendre les solutions aux intervalles fermés.
3) La dérivabilité impose $y'_g = y'_d$ donc des conditions sur les constantes qui permettent de recoller.

Recollement qui « ne marche pas »

Chapitre concerné : 4. Equations différentielles

☐ Ce que montre cet exo

Un cas de recollement qui ne « marche pas » (constantes différentes à gauche et à droite).

- **L'énoncé**

Résoudre $xy' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ (en utilisant le principe du recollement).

- **Corrigé**

1) Equation normalisée : $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$ pour $x \neq 0$. Les intervalles d'études sont $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

2) sur $]-\infty;0[$, on a : $y = \lambda_1 e^{-(-2\ln|x|)} = \lambda_1 e^{2\ln|x|} = \lambda_1 e^{2\ln(-x)} = \lambda_1 e^{\ln\left((-x)^2\right)} = \lambda_1 x^2$.

sur $]0;+\infty[$, on a : $y = \lambda_2 e^{-(-2\ln|x|)} = \lambda_2 e^{2\ln(x)} = \lambda_2 e^{\ln(x^2)} = \lambda_2 x^2$.

3) Extension aux intervalles $]-\infty;0]$ et $[0;+\infty[$.

a) Si y est solution sur $]-\infty;0]$, alors sa restriction à $]-\infty;0[$ est solution sur $]-\infty;0[$, donc $y_{]-\infty;0[} = \lambda_1 x^2$. Or y' existe (d'après l'énoncé), y est dérivable donc continue en 0.

La continuité en 0 impose que $y(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} y_{]-\infty;0[}(x)$ ce qui donne $y(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \lambda_1 x^2 = \lambda_1 \times 0 = 0$.

La dérivabilité en 0 impose $y'_g(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{\lambda_1 x^2 - 0}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \lambda_1 x = 0$.

Avec ces conditions, on a bien $0y'(0) - 2y(0) = 0$. Ainsi la fonction y définie sur $]-\infty;0]$ par $y = \lambda_1 x^2$ est bien solution de l'équation différentielle $xy' - 2y = 0$ sur l'intervalle $]-\infty;0]$.

b) De même (après calculs donnant $y'_d(0) = 0$), la fonction y définie sur $[0;+\infty[$ par $y = \lambda_2 x^2$ est bien solution de l'équation différentielle $xy' - 2y = 0$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

4) Recollement : la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y = \begin{cases} \lambda_1 x^2 \text{ sur }]-\infty;0] \\ \lambda_2 x^2 \text{ sur } [0;+\infty[\end{cases}$ convient. y étant dérivable, on doit avoir $y'_g(0) = y'_d(0)$ donc $0 = 0$. Aucune information supplémentaire !

Conclusion : les solutions de l'équation $xy' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont : $y = \begin{cases} \lambda_1 x^2 \text{ sur }]-\infty;0] \\ \lambda_2 x^2 \text{ sur } [0;+\infty[\end{cases}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) 2) 3) Même chose que l'exo précédent.

4) La dérivabilité impose $y'_g = y'_d$ mais ne nous donne pas d'informations supplémentaires !

Equation de Bernoulli

Chapitre concerné : 4. Equations différentielles

☐ Ce que montre cet exo

Qu'un changement de fonction permet de résoudre une équation différentielle célèbre.

- **L'énoncé**

Résoudre $xy' + 3y = x^2y^2$ sur $]0;+\infty[$ avec le changement de fonction $z = \frac{1}{y}$.

- **Corrigé**

$xy' + 3y = x^2y^2 \Leftrightarrow x\frac{y'}{y^2} + 3\frac{1}{y} = x^2$. Si $z = \frac{1}{y}$ alors $z' = \frac{-y'}{y^2}$. L'équation est alors : $-xz' + 3z = x^2$.

Equation normalisée : $z' - \frac{3}{x}z = -x$.

Solution z_H de l'équation homogène $z' - \frac{3}{x}z = 0$.

$z_H = \lambda e^{-(-3\ln x)} = \lambda e^{3\ln x} = \lambda e^{\ln(x^3)} = \lambda x^3$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

Recherche d'une solution particulière z_P de l'équation complète $z' - \frac{3}{x}z = -x$.

$z_P = x^2$ convient (soit on est très observateur, soit on utilise la méthode de la variation de la constante).

Principe de superposition

Les solutions de l'équation $-xz' + 3z = x^2$ sont : $z = z_H + z_P = \lambda x^3 + x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Conclusion : comme $z = \frac{1}{y}$, on a $y = \frac{1}{z}$ et l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ x \to \frac{1}{\lambda x^3 + x^2}; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

L'équation de Jacques Bernoulli (1654-1705) $xy' + 3y = x^2y^2$ peut être résolue par le changement de fonction $z = \frac{1}{y}$. Il suffit ensuite de remarquer que $z' = \frac{-y'}{y^2}$ et de réinjecter.

Equation de Ricatti

Chapitre concerné : 4. Equations différentielles

☐ Ce que montre cet exo

Qu'un changement de fonction permet de résoudre une équation différentielle célèbre.

- **L'énoncé**

Résoudre $y' - \frac{1}{x}y^2 + \left(2 + \frac{1}{x}\right)y = x + 2$ sur $]0;+\infty[$ avec les changements $z = y - x$ puis $u = \frac{1}{z}$.

- **Corrigé**

1) 1er changement de fonction : $z = y - x$ donc $z' = y' - 1$. L'équation devient :

$z' + 1 - \frac{1}{x}(z+x)^2 + \left(2 + \frac{1}{x}\right)(z+x) = x + 2$ soit : $z' + 1 - \frac{1}{x}\left(z^2 + 2zx + x^2\right) + 2z + 2x + \frac{1}{x}z + 1 = x + 2$

soit : $z' + 1 - \frac{1}{x}z^2 - 2z - x + 2z + 2x + \frac{1}{x}z + 1 = x + 2$ soit : $z' - \frac{1}{x}z^2 + \frac{1}{x}z = 0$.

2) 2e changement de fonction : $u = \frac{1}{z}$ donc $u' = \frac{-z'}{z^2}$.

$z' - \frac{1}{x}z^2 + \frac{1}{x}z = 0 \Leftrightarrow \frac{z'}{z^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow -u' - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot u = 0 \Leftrightarrow u' - \frac{1}{x} \cdot u = -\frac{1}{x}$.

Solution u_H de l'équation homogène $u' - \frac{1}{x} \cdot u = 0$.

$u_H = \lambda e^{-(-\ln x)} = \lambda e^{\ln x} = \lambda x$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

Recherche d'une solution particulière u_P de l'équation complète $u' - \frac{1}{x} \cdot u = -\frac{1}{x}$.

$u_P = 1$ convient (sinon on peut utiliser la méthode de la variation de la constante).

Principe de superposition

Les solutions de l'équation $u' - \frac{1}{x} \cdot u = -\frac{1}{x}$ sont : $u = u_H + u_P = \lambda x + 1$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Conclusion : Comme $y = z + x = \frac{1}{u} + x$, l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ x \to \frac{1}{\lambda x + 1} + x \; ; \; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

L'équation de Ricatti (1676-1754) peut être résolue par deux changements de fonctions successifs $z = y - x$ ($z' = y' - 1$), $u = \frac{1}{z}$ ($u' = \frac{-z'}{z^2}$).

Equation différentielle linéaire d'ordre 2

Chapitre concerné : 4. Equations différentielles

☐ Ce que montre cet exo

L'étude d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

- **L'énoncé**

Soit y la fonction solution de l'équation différentielle $\begin{cases} y'' = y' + 6y \\ y(0) = 0 \ ; \ y'(0) = 5 \end{cases}$.

1) Donner l'expression de $y(x)$ à l'aide de l'équation caractéristique.

2) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$.

- **Corrigé**

1) Equation caractéristique : $r^2 = r + 6$ soit $r^2 - r - 6 = 0$, de racines $r_1 = -2$ et $r_2 = 3$.

Il existe donc λ_1 et λ_2 tels que $y(x) = \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 e^{3x}$.

Comme $y(0) = 0$, on a $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ donc $\lambda_2 = -\lambda_1$. Comme $y'(0) = 5$ (et que $y'(x) = -2\lambda_1 e^{-2x} + 3\lambda_2 e^{3x}$), on a $-2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 5$ donc $5\lambda_2 = 5$ donc $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_1 = -1$.

Ainsi : $y(x) = -e^{-2x} + e^{3x}$.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -e^{-2x} + e^{3x} = +\infty$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Théorème sur les équation différentielles linéaires d'ordre 2 (cas réel)

Soit y vérifiant $ay'' + by + cy = 0$. L'équation caractéristique est $ar^2 + br + c = 0$.

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$, il y a deux racines distinctes r_1 et r_2 : il existe λ_1 et λ_2 tels que $y(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$.

Si $\Delta = 0$, il y a une racine double r_0 : il existe λ_1 et λ_2 tels que $y(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{r_0 x}$.

Si $\Delta < 0$, il y a deux racines complexes $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_1 = \alpha - i\beta$: il existe λ_1 et λ_2 tels que $y(x) = \lambda_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \lambda_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$.

La suite de Fibonacci

Chapitre concerné : 5. Suites réelles

☐ Ce que montre cet exo

L'étude classique d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

- **L'énoncé**

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \end{cases}$.

1) Donner l'expression de u_n en fonction de n à l'aide de l'équation caractéristique.

2) En déduire que $\lim u_n = +\infty$.

- **Corrigé**

1) Equation caractéristique : $r^2 = r + 1$ soit $r^2 - r - 1 = 0$, de racines $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Il existe donc λ_1 et λ_2 tels que $u_n = \lambda_1 r_1^{\,n} + \lambda_2 r_2^{\,n}$.

Comme $u_0 = 0$, on a $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ donc $\lambda_2 = -\lambda_1$. Comme $u_1 = 1$, on a $\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = 1$ donc $\lambda_1 r_1 - \lambda_1 r_2 = 1$ donc $\lambda_1(r_1 - r_2) = 1$ donc $\lambda_1\left(\sqrt{5}\right) = 1$ donc $\lambda_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ (et donc $\lambda_2 = -\lambda_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$).

Conclusion : $u_n = \lambda_1 r_1^{\,n} + \lambda_2 r_2^{\,n} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

2) Comme $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$, $\lim \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = +\infty$. Comme $-1 < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, $\lim \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = 0$.

Par conséquent $\lim u_n = +\infty$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Théorème sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :

Soit (u_n) vérifiant $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$. L'équation caractéristique est $ar^2 + br + c = 0$.

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$, il y a deux racines distinctes r_1 et r_2 : il existe λ_1 et λ_2 tels que $u_n = \lambda_1 r_1^{\,n} + \lambda_2 r_2^{\,n}$.

Si $\Delta = 0$, il y a une racine double r_0 : il existe λ_1 et λ_2 tels que $u_n = (\lambda_1 + \lambda_2 n) r_0^{\,n}$.

Si $\Delta < 0$, il y a deux racines complexes $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$: il existe λ_1 et λ_2 tels que $u_n = \rho^n\left(\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta)\right)$.

2) Si $q > 1$ alors $\lim q^n = +\infty$. Si $-1 < q < 1$ alors $\lim q^n = 0$.

3) La suite étudiée ici porte le nom de suite de Fibonacci (1175-1250). C'est le 1er exemple de modélisation mathématique d'un problème biologique (modélisation de la population de lapins en absence de prédateurs).

La suite de Babylone

Chapitre concerné : 5. Suites réelles

☐ Ce que montre cet exo

Que la suite de Babylone (définie ci-dessous) est convergente vers $\sqrt{a}$.

- **L'énoncé**

Soit a un entier strictement positif et (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \\ u_0 = a \end{cases}$.

1) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$.

2) Montrer que $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}u_n\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2$. En déduire que $u_n \geq \sqrt{a}$ pour tout $n \geq 1$.

3) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2u_n}\left(\sqrt{a}^2 - u_n^2\right)$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

4) Montrer enfin que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente vers $\sqrt{a}$.

- **Corrigé**

1) Facile (Initialisation : $u_0 > 0$ (car $u_0 = a$), Hérédité immédiate).

2) $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}\frac{a}{u_n} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n} - 2\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}u_n\left(u_n^2 - 2\sqrt{a}u_n + \sqrt{a}^2\right) = \frac{1}{2}u_n\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2$

Comme pour $n \geq 0$, $u_n > 0$ (question **1)**), on a $u_{n+1} - \sqrt{a} \geq 0$. Donc $u_n \geq \sqrt{a}$ pour $n \geq 1$.

3) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}\frac{a}{u_n} - u_n = \frac{1}{2u_n}\left(-u_n^2 + a\right) = \frac{1}{2u_n}\left(\sqrt{a}^2 - u_n^2\right)$.

Si $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{a}$ (question **2)**) donc $u_n^2 \geq \sqrt{a}^2$ donc : $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
Ainsi $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

4) Comme $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée, on en déduit qu'elle converge vers $L \geq 0$. On a $L = \lim u_n = \lim u_{n+1}$ donc $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right)$ donc $L^2 = \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{2}a$ donc $\frac{1}{2}L^2 = \frac{1}{2}a$ donc $L = \sqrt{a}$ (car $L \geq 0$). Conclusion : (u_n) est convergente vers $\sqrt{a}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Le principe du raisonnement par récurrence.
2) L'identité remarquable $(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$, utilisée à 3 reprises.
3) L'égalité $\sqrt{a}^2 = a \quad (a > 0)$.
4) Une suite décroissante et minorée converge.
5) Une suite (u_n) convergente vers L vérifie $L = \lim u_n = \lim u_{n+1}$.

Les suites adjacentes

Chapitre concerné : 5. Suites réelles

☐ Ce que montre cet exo

Les nombreuses propriétés des suites adjacentes.

- **L'énoncé**

(u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : (u_n) est croissante, (v_n) décroissante, $\lim(u_n - v_n) = 0$.

On considère (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Montrer les propriétés suivantes :

1) $u_n \le v_n$ pour tout n.

2) (u_n) est majorée et (v_n) est minorée.

3) (u_n) et (v_n) sont convergentes de même limite.

- **Corrigé**

1) Etudions la suite (Δ_n) définie par $\Delta_n = v_n - u_n$.

$\Delta_{n+1} - \Delta_n = v_{n+1} - u_{n+1} - (v_n - u_n) = v_{n+1} - v_n - (u_{n+1} - u_n)$ donc : $\Delta_{n+1} - \Delta_n \le 0$ (car (v_n) étant décroissante, on a $v_{n+1} - v_n \le 0$; (u_n) étant croissante, on a $u_{n+1} - u_n \ge 0$).

Ainsi (Δ_n) est décroissante.

On a $\lim \Delta_n = 0$ (car $\lim(u_n - v_n) = 0$).

Comme (Δ_n) est décroissante et de limite nulle, on a $\Delta_n \ge 0$, donc $v_n - u_n \ge 0$ donc : $u_n \le v_n$.

2) Pour tout n, $u_0 \le u_n \le v_n \le v_0$ (par croissance de (u_n) et décroissance de (v_n)).

Par conséquent, (u_n) est majorée par v_0 et (v_n) est minorée par u_0.

3) (u_n) étant croissante et majorée, elle converge vers une limite qu'on va appeler L_1.

(v_n) étant décroissante et minorée, elle converge vers une limite qu'on va appeler L_2.

Comme $\lim(u_n - v_n) = 0$, on a : $L_1 - L_2 = 0$ donc : $L_1 = L_2$.

Conclusion : (u_n) et (v_n) sont convergentes de même limite.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) (u_n) est croissante équivaut à $u_{n+1} - u_n \ge 0$. (v_n) est décroissante équivaut à $v_{n+1} - v_n \le 0$.

2) Une suite croissante et majorée converge. Une suite décroissante et minorée converge.

3) Si (u_n) et (v_n) sont convergentes, alors : $\lim\ (u_n - v_n) = \lim\ u_n - \lim v_n$.

Moyenne arithmético-géométrique

Chapitre concerné : 5. Suites réelles

☐ Ce que montre cet exo

La convergence de deux suites vers une même limite.

- **L'énoncé**

Soient (a_n) et (b_n) deux suites définies par $\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} a_0 > 0 \\ b_0 > 0 \end{cases}$.

1) Montrer par récurrence que $a_n > 0$ et $b_n > 0$ pour tout $n \geq 0$.

2) Démontrer que $b_n^2 - a_n^2 = \left(\dfrac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}\right)^2$. En déduire que $a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 1$.

3) Montrer que (a_n) est croissante.

4) Montrer que (b_n) est décroissante. En déduire que la suite (b_n) est convergente.

5) Montrer enfin que (a_n) est convergente de même limite que (b_n).

- **Corrigé**

1) Facile (Initialisation : $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$ (indiquées dans l'énoncé), Hérédité immédiate).

2) Comme $a_n > 0$ et $b_n > 0$, l'inégalité $a_n \leq b_n$ est équivalente à l'inégalité $a_n^2 \leq b_n^2$.

Or $b_n^2 - a_n^2 = \left(\dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}\right)^2 = \dfrac{a_{n-1}^2 + 2a_{n-1}b_{n-1} + b_{n-1}^2}{4} - a_{n-1}b_{n-1} = \left(\dfrac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}\right)^2$

Donc $b_n^2 - a_n^2 \geq 0$, donc $b_n^2 \geq a_n^2$ donc : $b_n \geq a_n$.

3) $a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n b_n} - \left(\sqrt{a_n}\right)^2 = \sqrt{a_n}\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)$ donc $a_{n+1} - a_n \geq 0$ (car $\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n} \geq 0$).

Ainsi (a_n) est croissante.

4) $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2}$ donc $b_{n+1} - b_n \leq 0$ (car $a_n \leq b_n$). Donc (b_n) est décroissante. Comme (b_n) est minorée par 0 (question **1)**), on en déduit que (b_n) est convergente.

5) (b_n) étant décroissante, on a $b_n \leq b_1$ donc $a_n \leq b_n \leq b_1$. Ainsi (a_n) est majorée. Etant croissante, (a_n) converge. Soient $L_1 = \lim a_n$ et $L_2 = \lim b_n$. Comme $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, en passant à la limite, on a : $L_2 = \dfrac{L_1 + L_2}{2}$ donc $L_2 = L_1$. Ainsi (a_n) et (b_n) ont même limite.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Le principe du raisonnement par récurrence.

2) L'identité remarquable $(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$ et l'égalité $\sqrt{a}^2 = a$.

3) Une suite croissante et majorée converge. Une suite décroissante et minorée converge.

Constante d'Euler

Chapitre concerné : 5. Suites réelles

☐ Ce que montre cet exo

La convergence d'une suite définie par une série et un logarithme.

- **L'énoncé**

On veut montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ est convergente.

1) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

2) Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Montrer que f est croissante sur $]0;+\infty[$.

En déduire que (u_n) est décroissante.

3) Démontrer que $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$ puis que $\ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Que peut-on en déduire pour (u_n) ?

- **Corrigé**

1) $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

2) $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-x}{x(x+1)^2} + \frac{x+1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}$ donc $f'(x) > 0$.

f est donc croissante. Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, on en déduit que $f(x) \leq 0$ pour tout x, donc $\frac{1}{x+1} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 0$. Ainsi $\frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ donc (u_n) est décroissante.

3) Pour $t \in]k;k+1[$, on a : $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ donc $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}$ soit $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$. Ainsi $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

donc $\int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ donc $[\ln(t)]_1^n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ donc $\ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ et donc $\ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Ainsi $u_n \geq 0$, donc (u_n) est minorée par 0. Comme (u_n) est décroissante, (u_n) converge.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$; $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

2) La limite de (u_n) s'appelle constante d'Euler et est notée γ.

3) Une suite décroissante et minorée converge.

Convergence au sens de Cesàro

Chapitre concerné : 5. Suites réelles

☐ Ce que montre cet exo

L'implication : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_1+\cdots+u_n}{n} = L$.

- **L'énoncé**

Soit (u_n) une suite convergente vers L. On souhaite montrer que (u_n) converge au sens de Cesàro, c'est-à-dire que la suite (C_n) définie par $C_n = \dfrac{u_1+\cdots+u_n}{n}$ converge vers L.

1) Démontrer que pour tout entier n, $|C_n - L| \le \left|\dfrac{u_1-L}{n}\right| + \cdots + \left|\dfrac{u_n-L}{n}\right|$.

2) Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_n) converge vers L, il existe un entier n_0 tel que $n \ge n_0 \Rightarrow |u_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Sachant que $|C_n - L| \le \left|\dfrac{u_1-L}{n}\right| + \cdots + \left|\dfrac{u_{n_0}-L}{n}\right| + \left|\dfrac{u_{n_0+1}-L}{n}\right| + \cdots + \left|\dfrac{u_n-L}{n}\right|$:

a) Montrer qu'il existe un entier n_1 tel que $n \ge n_1 \Rightarrow \left|\dfrac{u_1-L}{n}\right| + \cdots + \left|\dfrac{u_{n_0}-L}{n}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

b) En déduire qu'il existe un entier N_{max} tel que $n \ge N_{max} \Rightarrow |C_n - L| \le \varepsilon$.

3) Que peut-on en conclure ?

- **Corrigé**

1) On a : $|C_n - L| = \left|\dfrac{u_1+\cdots+u_n}{n} - L\right| = \left|\dfrac{u_1+\cdots+u_n}{n} - \dfrac{nL}{n}\right| = \left|\dfrac{u_1-L+\cdots+u_n-L}{n}\right|$.

D'après l'inégalité triangulaire, on a donc $|C_n - L| \le \left|\dfrac{u_1-L}{n}\right| + \cdots + \left|\dfrac{u_n-L}{n}\right|$.

2) a) n_0 fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_1-L}{n}\right| + \cdots + \left|\dfrac{u_{n_0}-L}{n}\right| = 0$. Donc il existe n_1 tel que $n \ge n_1 \Rightarrow \left|\dfrac{u_1-L}{n}\right| + \cdots + \left|\dfrac{u_{n_0}-L}{n}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

b) Posons $N_{max} = \max(n_0, n_1)$. Pour $n \ge N_{max}$, on a :

$$|C_n - L| \le \underbrace{\left|\frac{u_1-L}{n}\right| + \cdots + \left|\frac{u_{n_0}-L}{n}\right|}_{\le\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left|\frac{u_{n_0+1}-L}{n}\right|}_{\le\frac{\varepsilon}{2n}} + \cdots + \underbrace{\left|\frac{u_n-L}{n}\right|}_{\le\frac{\varepsilon}{2n}} \le \frac{\varepsilon}{2} + (n-n_0)\frac{\varepsilon}{2n} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ donc } |C_n - L| \le \varepsilon.$$

3) Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_{max} tel que $n \ge N_{max} \Rightarrow |C_n - L| \le \varepsilon$, ce qui prouve que (C_n) tend vers L et donc que la suite (u_n) converge au sens de Cesàro.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) L'inégalité triangulaire $|x+y| \le |x| + |y|$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tel que $n \ge n_0 \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon$.

Convergence par majoration

Chapitre concerné : 5. Suites réelles

☐ Ce que montre cet exo

L'égalité : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}=1$.

- **L'énoncé**

1) Montrer que $\left|\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}-1\right|=\int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^n}$.

2) En déduire que $\left|\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}-1\right|\le \frac{1}{n+1}$ puis que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}=1$.

- **Corrigé**

1) On a : $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}-1=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}-\int_0^1 dt=\int_0^1\left(\frac{1}{1+t^n}-1\right)dt=\int_0^1\left(\frac{1}{1+t^n}-\frac{1+t^n}{1+t^n}\right)dt=\int_0^1\left(\frac{-t^n}{1+t^n}\right)dt$.

Donc $\left|\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}-1\right|=\left|\int_0^1 \frac{-t^n dt}{1+t^n}\right|=\left|-\int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^n}\right|=|-1|\left|\int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^n}\right|=1\times\int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^n}=\int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^n}$ (car $\int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^n}\ge 0$).

2) On a $\int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^n}\le\int_0^1 t^n dt$ (car $\frac{t^n}{1+t^n}\le t^n$ pour t compris entre 0 et 1).

Donc $\int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^n}\le\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$ soit $\int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^n}\le\frac{1}{n+1}$. Ainsi $\left|\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}-1\right|\le\frac{1}{n+1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$, on en déduit que $\left|\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}-1\right|=0$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}=1$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $|x|=x$ si $x\ge 0$.

2) On ne peut pas intervertir limite et intégrale comme ça (il y a beaucoup de conditions à vérifier, vues en Spé), donc on ne peut pas écrire $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}=\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{dt}{1+t^n}=\int_0^1 \frac{dt}{1+0}=\int_0^1 dt=1$. Il faut donc passer par des majorations, comme on le fait dans cet exercice de manière détaillée.

Divergence de la suite (cos(n))

Chapitre concerné : 5. Suites réelles

☐ Ce que montre cet exo

Que la suite (u_n) définie par $u_n = \cos(n)$ est divergente.

- **L'énoncé**

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \cos(n)$. On veut démontrer par l'absurde que la suite (u_n) est divergente. On suppose que la suite (u_n) est convergente vers L.

1) Montrer que $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1}\cos(1)$ et que $u_{2n} = 2{u_n}^2 - 1$.

2) En déduire que $2L = 2L\cos(1)$ et $L = 2L^2 - 1$ et donc qu'on aboutit à une contradiction.

3) Conclure.

- **Corrigé**

1) $u_{n+2} + u_n = \cos(n+2) + \cos(n) = 2\cos\left(\dfrac{n+2+n}{2}\right)\cos\left(\dfrac{n+2-n}{2}\right) = 2\cos(n+1)\cos(1)$ donc :

$u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1}\cos(1)$.

Par ailleurs : $u_{2n} = \cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1 = 2{u_n}^2 - 1$.

2) Comme (u_n) est convergente vers L, on a : $L = \lim u_n = \lim u_{n+1} = \lim u_{2n}$.

Les égalités $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1}\cos(1)$ et $u_{2n} = 2{u_n}^2 - 1$ donnent : $2L = 2L\cos(1)$ et $L = 2L^2 - 1$.

$2L = 2L\cos(1)$ nous donne $2L(1-\cos(1)) = 0$ donc $L = 0$ (car $\cos(1) \neq 1$) donc

$L = 2L^2 - 1$ est alors impossible si $L = 0$ (car $-1 \neq 0$). CONTRADICTION !

3) Ainsi la suite (u_n) est divergente.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

2) Une suite (u_n) convergente vers L vérifie : $L = \lim u_n = \lim u_{n+1} = \lim u_{2n}$.

Continuité de la fonction racine carrée (par les epsilon)

Chapitre concerné : 6. Limites et continuité

☐ Ce que montre cet exo

Que la fonction $x \to \sqrt{x}$ est continue en 4.

- **L'énoncé**

Montrer, en utilisant des ε que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\sqrt{x}$ est continue en 4, c'est-à-dire que : $\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0$ tel que $|x-4|<\eta$ entraîne $|f(x)-f(4)|<\varepsilon$.

- **Corrigé**

On veut montrer que $\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0$ tel que $|x-4|<\eta$ entraîne $|f(x)-f(4)|<\varepsilon$.

Phase de recherche : $f(x)-f(4)=\sqrt{x}-\sqrt{4}=\sqrt{x}-2=\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)}=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}$ donc :

$|f(x)-f(4)|=\dfrac{|x-4|}{\sqrt{x}+2}$ et donc : $|f(x)-f(4)|\le\dfrac{|x-4|}{2}$ (car $\sqrt{x}\ge 0$).

Ainsi, en prenant $\eta=2\varepsilon$, on aura $|f(x)-f(4)|<\varepsilon$ dès que $|x-4|<\eta$.

Rédaction : Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ (à savoir $\eta=2\varepsilon$) tel que $|x-4|<\eta$ entraîne $|f(x)-f(4)|<\varepsilon$.

Conclusion : Ainsi f est continue en 4.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) f est continue en a équivaut à : $\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0$ tel que $|x-a|<\eta$ entraîne $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

2) Le raisonnement en deux temps (sorte de raisonnement par analyse-synthèse) : la phase de recherche, où on étudie $|f(x)-f(a)|$ tout en cherchant quelle valeur de η pourrait convenir afin que $|x-a|<\eta$ entraîne $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

La partie rédactionnelle où en fixant $\varepsilon>0$, on donne η permettant de justifier la propriété « $|x-a|<\eta$ entraîne $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. »

Non-continuité d'une fonction par les suites

Chapitre concerné : 6. Limites et continuité

☐ Ce que montre cet exo

Qu'on peut montrer en utilisant une suite qu'une fonction n'est pas continue en un point.

- **L'énoncé**

Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$. Montrer que f n'est pas continue en 0 (on pourra utiliser la suite (u_n) définie par $u_n=\frac{1}{2n\pi}$ (pour $n\geq 1$)).

- **Corrigé**

Nous allons montrer par un raisonnement par l'absurde que f n'est pas continue en 0.

Supposons f continue en 0 et considérons la suite (u_n) définie par $u_n=\frac{1}{2n\pi}$ (pour $n\geq 1$).

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$. Comme f est continue en 0, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=f(0)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=0$ (car $f(0)=0$).

Or pour tout $n\geq 1$, $f(u_n)=\cos(2n\pi)=1$ (car $\cos(2\pi)=\cos(4\pi)=\cos(6\pi)=\cdots=1$) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=1$. CONTRADICTION !

Conclusion : la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$ n'est pas continue en 0.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Le raisonnement par l'absurde : pour montrer que la proposition P est vraie, on suppose qu'elle est fausse et qu'on aboutit à une contradiction.

2) La caractérisation séquentielle de la continuité : « f est continue en a équivaut à : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=f(a)$ pour toute suite (u_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=a$. »

3) $\cos(2n\pi)=1$ pour tout entier n.

Existence d'un point fixe

Chapitre concerné : 6. Limites et continuité

☐ Ce que montre cet exo

Qu'une fonction définie sur $[0;1]$ et à valeurs dans $[0;1]$ et continue admet au moins un point fixe (c'est-à-dire une valeur c pour laquelle $f(c)=c$).

- **L'énoncé**

Soit f une fonction définie et continue sur $[0;1]$ et à valeurs dans $[0;1]$.

1) En utilisant la fonction annexe g définie sur $[0;1]$ par $g(x)=f(x)-x$ et le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que f admet au moins un point fixe c, c'est-à-dire une valeur c comprise dans l'intervalle $[0;1]$ pour laquelle $f(c)=c$.

2) En donner une interprétation graphique.

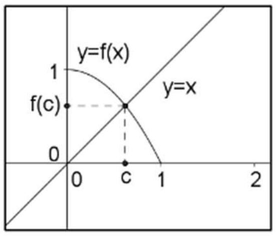
- **Corrigé**

1) En posant $g(x)=f(x)-x$, on constate que g est une fonction continue sur $[0;1]$ (comme différence de deux fonctions continues sur $[0;1]$) et que $\begin{cases} g(0)=f(0)-0=f(0) \\ g(1)=f(1)-1 \end{cases}$.

Or f étant à valeurs dans $[0;1]$, on a $\begin{cases} 0 \le f(0) \le 1 \\ 0 \le f(1) \le 1 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} g(0) \ge 0 \\ g(1) \le 0 \end{cases}$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme g est continue sur $[0;1]$ et que $\begin{cases} g(0) \ge 0 \\ g(1) \le 0 \end{cases}$, il existe c compris dans l'intervalle $[0;1]$ tel que $g(c)=0$, c'est-à-dire telle que $f(c)-c=0$ c'est-à-dire telle que $f(c)=c$ (ce qu'on voulait).

2) Le point fixe correspond au point d'intersection de la courbe $y=f(x)$ et de la droite $y=x$.



☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) La différence de deux fonctions continues sur $[a;b]$ est une fonction continue sur $[a;b]$.

2) Le théorème des valeurs intermédiaires : Si g est continue sur $[a;b]$ avec $g(a)\times g(b) \le 0$, alors il existe c dans l'intervalle $[a;b]$ tel que $g(c)=0$.

Equation fonctionnelle et fonction nulle

Chapitre concerné : 6. Limites et continuité

☐ Ce que montre cet exo

Que la fonction continue vérifiant $f(2x)=f(x)$ et $f(0)=0$ est la fonction nulle.

- **L'énoncé**

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(2x)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $f(0)=0$.
Montrer que la fonction f est la fonction nulle.

- **Corrigé**

La relation $f(2x)=f(x)$ nous suggère que $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{4}\right)=f\left(\frac{x}{8}\right)=\cdots$

Montrons par récurrence pour $n\geq 0$, la propriété $P(n)$: « $f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ ».

Initialisation : $P(0)$ est vraie, car $f(x)=f\left(\frac{x}{2^0}\right)$ (puisque $2^0=1$).

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie (c'est-à-dire que $f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)$) et montrons que $P(n+1)$ l'est encore (c'est-à-dire que $f(x)=f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$).

On a $f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Or la relation $f(2x)=f(x)$ donne $f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$. Donc : $f(x)=f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$.

Conclusion : comme $P(0)$ est vraie et que $P(n)$ est héréditaire, $P(n)$ est vraie pour $n\geq 0$.

Ainsi $f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ pour tout $n\geq 0$ et tout x.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x}{2^n}=0$ et que f est continue en 0 (car continue sur $\mathbb{R}$), on obtient :

$\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(0)=0$ (car $f(0)=0$). Donc $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right)=0$.

Conséquence : f est la fonction nulle car $f(x)=0$ pour tout x.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Raisonnement par récurrence en trois étapes (initialisation, hérédité, conclusion).
2) Caractérisation séquentielle de la continuité : Si f est continue en a et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=a$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=f(a)$.

Equation fonctionnelle et fonction identité

Chapitre concerné : 6. Limites et continuité

☐ Ce que montre cet exo

Que la fonction continue vérifiant $f(x+y)=f(x)+f(y)$ et $f(1)=1$ est la fonction identité.

- **L'énoncé**

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ et $f(1)=1$. Le but de l'exercice est de montrer que la fonction f est la fonction identité.

1) Montrer que $f(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{Z}$.

2) Montrer que $f(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{Q}$.

3) En déduire que $f(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ (on utilisera le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que quelque soit $a\in\mathbb{R}$, il existe une suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$ telle que $a=\lim u_n$).

- **Corrigé**

1) On a $f(0)=0$ (en prenant $x=0$ et $y=0$). Par récurrence, on montre que $f(n)=n$ pour $n\geq 0$ (immédiat). Si $n\leq 0$ alors l'égalité $f(-n+n)=f(-n)+f(n)$ donne $f(-n)=-f(n)=-n$. Ainsi $f(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{Z}$.

2) Soit $x=\dfrac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ (avec a et b entiers) alors $a=f(a)$ et

$$bf(x)=bf\left(\frac{a}{b}\right)=\underbrace{f\left(\frac{a}{b}\right)+\cdots+f\left(\frac{a}{b}\right)}_{\text{b fois}}=f\left(\underbrace{\frac{a}{b}+\cdots+\frac{a}{b}}_{\text{b fois}}\right)=f\left(b\times\frac{a}{b}\right)=f(a)=a \text{ donc } f(x)=\frac{a}{b}=x.$$

Ainsi $f(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{Q}$.

3) Soit $x\in\mathbb{R}$ avec $x=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ où (u_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=x$ et que f est continue, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)=f(x)$.

Comme $f(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{Q}$ (question précédente), on a $f(u_n)=u_n$ pour tout n.

Donc $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=x$.

Ainsi $f(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Conclusion : f est la fonction identité (définie par $f(x)=x$).

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Le raisonnement caractéristique en trois étapes : $\mathbb{Z}$, puis $\mathbb{Q}$ puis sur $\mathbb{R}$ (par densité).

2) Caractérisation séquentielle de la continuité : Si f est continue en a et si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)=f(a)$.

Une fonction continue en 0 mais non dérivable en 0

Chapitre concerné : 7. Dérivabilité

☐ Ce que montre cet exo

Que certaines fonctions bien que continues ne sont pas forcément dérivables.

- **L'énoncé**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x|=\begin{cases} x \text{ si } x\geq 0 \\ -x \text{ si } x<0 \end{cases}$.

1) Déterminer la limite à gauche de f en 0 puis la limite à droite de f en 0. Calculer $f(0)$. Que peut-on en conclure ?

2) Déterminer le nombre dérivé à gauche de f en 0 puis le nombre dérivé à droite de f en 0. Que peut-on en conclure ?

- **Corrigé**

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}|x|=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(-x)=-0=0$. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}|x|=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x=0$.

Comme les deux limites sont toutes les deux égales à $f(0)=|0|=0$, on en déduit que f est continue en 0.

2) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-x-0}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-x}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}-1=-1.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x-0}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}1=1.$$

Comme les deux limites sont différentes, on en déduit que f n'est pas dérivable en 0.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) f continue en a équivaut à $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

2) f dérivable en a équivaut à $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\;(\neq\pm\infty)$.

Une fonction dérivable et C1

Chapitre concerné : 7. Dérivabilité

☐ Ce que montre cet exo

Comment montrer qu'une fonction est de classe C^1.

- **L'énoncé**

Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\ln(x)} \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$.

1) Montrer que f est C^0 (c'est-à-dire continue) sur $[0;1[$.

2) Montrer que f est dérivable sur $]0;1[$ en précisant $f'(x)$ pour $x>0$.

3) En étudiant le taux d'accroissement de f en 0, démontrer que f est également dérivable en 0 en précisant la valeur de $f'(0)$.

4) Montrer que f est C^1 (c'est-à-dire que f' est continue) sur $[0;1[$.

- **Corrigé**

1) f est continue sur $]0;1[$ comme quotient de fonctions continues sur $]0;1[$ (et ne s'annulant pas sur $]0;1[$). On a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(x)}=0$. Donc f est continue en 0 (car $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$).

Ainsi f est continue sur $[0;1[$.

2) f est dérivable sur $]0;1[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]0;1[$.

Pour $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1\cdot\ln(x)-x\cdot\dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2}=\dfrac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}$.

3) $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\dfrac{x}{\ln(x)}-0}{x}=\dfrac{1}{\ln(x)}$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$. Ainsi f est dérivable en 0 avec $f'(0)=0$

4) f' est continue sur $]0;1[$ comme quotient de fonctions continues sur $]0;1[$.

Montrons que f' est continue en 0, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=f'(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{(\ln(x))^2}\right)=0-0=0=f'(0)$. Ainsi f' est continue sur $[0;1[$, ce qui prouve que f est de classe C^1 sur $[0;1[$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln(x)=-\infty$ 3) f est de classe C^1 si f' existe et est continue.

Une fonction dérivable sans être C1

Chapitre concerné : 7. Dérivabilité

☐ Ce que montre cet exo

Que certaines fonctions bien que dérivables ne sont pas forcément à dérivée continue (c'est-à-dire de classe C^1).

• L'énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x\neq 0 \\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$.

1) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en précisant $f'(x)$ pour $x\neq 0$.

2) En étudiant le taux d'accroissement de f en 0, démontrer que f est également dérivable en 0 en précisant la valeur de $f'(0)$.

3) Montrer par l'absurde que la fonction f' n'est pas continue en 0 et que par conséquent la fonction f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser la suite (u_n) définie par $u_n=\frac{1}{2n\pi}$).

• Corrigé

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $x\neq 0$, $f'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x}=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\leq|x|$ (car $|\sin(y)|\leq 1$ pour tout y).

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$. Ainsi f est dérivable en 0 avec $f'(0)=0$.

3) $\lim u_n=\lim \frac{1}{2n\pi}=0$. Si f' était continue en 0 alors nous aurions $\lim f'(u_n)=f'(0)$. Or ceci n'est pas le cas, car $f'(u_n)=2u_n\sin\left(\frac{1}{u_n}\right)-\cos\left(\frac{1}{u_n}\right)=2\frac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi)-\cos(2n\pi)=0-1=-1$.

Donc $\lim f'(u_n)=-1$ alors que $f'(0)=0$.

Conclusion : f' n'est pas continue en 0, par conséquent f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $(u\times v)'=u'v+uv'$. 2) $(\sin(u))'=u'\cos(u)$. 3) $|\sin(y)|\leq 1$ pour tout y.

4) La caractérisation séquentielle de la continuité : « f est continue en a équivaut à : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=f(a)$ pour toute suite (u_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=a$. »

5) f est de classe C^1 si f' existe et est continue.

Des limites évidentes sans en avoir l'air

Chapitre concerné : 7. Dérivabilité

☐ Ce que montre cet exo

Que certaines limites d'apparence compliquée sont en fait parfaitement calculables.

- **L'énoncé**

Déterminer : **1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}$ **3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ **4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x}$

- **Corrigé**

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^0}{x-0}=f'(0)$ où $f(x)=e^x$.

Comme $f'(x)=e^x$, $f'(0)=e^0=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}=f'(0)$ où $f(x)=\sin(x)$.

Comme $f'(x)=\cos(x)$, $f'(0)=\cos(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{0+1}}{x-0}=f'(0)$ où $f(x)=\sqrt{1+x}$.

Comme $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $f'(0)=\dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}=f'(0)$ où $f(x)=\cos(x)$.

Comme $f'(x)=-\sin(x)$, $f'(0)=-\sin(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x}=0$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

2) $\left(e^x\right)'=e^x$.

3) $\sin'(x)=\cos(x)$ et $\cos'(x)=-\sin(x)$.

4) $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Equation fonctionnelle et fonction logarithme

Chapitre concerné : 7. Dérivabilité

☐ Ce que montre cet exo

Que la fonction f dérivable vérifiant $f(xy)=f(x)+f(y)$ et $f(e)=1$ est la fonction logarithme.

- **L'énoncé**

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ vérifiant $f(xy)=f(x)+f(y)$ pour $x>0$ et $y>0$ ainsi que $f(e)=1$. Le but de l'exercice est de montrer que f est la fonction ln.

1) Soit $a>0$. Prouver que $f'(a)=\dfrac{f'(1)}{a}$. En déduire que $f'(x)=\dfrac{f'(1)}{x}$ pour tout $x>0$.

2) Montrer que $f(1)=0$ puis que $f(x)=f'(1)\times\ln(x)$.

3) Montrer que $f'(1)=1$. En déduire enfin que $f(x)=\ln(x)$ pour tout $x>0$.

- **Corrigé**

1) Prenons y égal à une constante $a>0$. Alors la relation $f(xy)=f(x)+f(y)$ devient $f(xa)=f(x)+f(a)$, ce qui en dérivant par rapport à la variable x devient : $af'(xa)=f'(x)$.

En prenant $x=1$, on obtient $af'(a)=f'(1)$ donc $f'(a)=\dfrac{f'(1)}{a}$. Ainsi $f'(x)=\dfrac{f'(1)}{x}$ pour tout $x>0$.

2) Comme $f'(x)=\dfrac{f'(1)}{x}$, on en déduit par intégration que $f(x)=f'(1)\times\ln(x)+C$ (car $x>0$).

La relation $f(xy)=f(x)+f(y)$ donne en prenant $x=y=1$, $f(1)=f(1)+f(1)$ donc $f(1)=0$.

Comme $f(x)=f'(1)\times\ln(x)+C$, on en déduit (avec $x=1$) : $f(1)=f'(1)\times\ln(1)+C$ donc $0=C$.

Ainsi $f(x)=f'(1)\times\ln(x)+0$ donc $f(x)=f'(1)\times\ln(x)$.

3) Comme $f(x)=f'(1)\times\ln(x)$, on a $f(e)=f'(1)\times\ln(e)$ donc $1=f'(1)\times 1$ donc : $f'(1)=1$.

Ainsi $f(x)=f'(1)\times\ln(x)=\ln(x)$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $(v\circ u)'=v'(u)\times u'$.

2) $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$.

3) $\ln(1)=0$ et $\ln(e)=1$.

Equation fonctionnelle et fonction exponentielle

Chapitre concerné : 7. Dérivabilité

☐ Ce que montre cet exo

Que la fonction dérivable f vérifiant $f(x+y)=f(x)\times f(y)$ et $f(1)=e$ est la fonction exponentielle.

- **L'énoncé**

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y)=f(x)\times f(y)$ pour tout x et y ainsi que $f(1)=e$. Le but de l'exercice est de montrer que f est la fonction exponentielle e^x .

1) Prouver que $f'(x)=f(x)f'(0)$.

2) Prouver que $f(x)>0$ pour tout x . En déduire que $f(x)=ke^{f'(0)x}$ pour tout x.

3) Montrer que $f(0)=1$ et que $f'(0)=1$ En déduire enfin que $f(x)=e^x$ pour tout x.

- **Corrigé**

1) En dérivant $f(x+y)=f(x)\times f(y)$ par rapport à la variable y, on obtient : $f'(x+y)=f(x)\times f'(y)$ pour tout y. En prenant $y=0$, on obtient : $f'(x)=f(x)f'(0)$.

2) La relation $f(x+y)=f(x)\times f(y)$ donne $f(x)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$ donc $f(x)\geq 0$ pour tout x.

Montrons par un raisonnement par l'absurde que l'égalité $f(x)=0$ est impossible.

Supposons qu'il existe a tel que $f(a)=0$. Alors $f(1)=f(a)\times f(1-a)$ soit $f(1)=0$. CONTRADICTION ! (car $f(1)=e$). Conclusion $f(x)>0$ pour tout x.

L'égalité $f'(x)=f(x)f'(0)$ devient donc : $\frac{f'(x)}{f(x)}=f'(0)$. En intégrant des deux côtés, on obtient (car $f(x)>0$) $\ln(f(x))=f'(0)x+C$ donc $f(x)=e^{f'(0)x+C}=e^{f'(0)x}\times e^C$ donc $f(x)=Ke^{f'(0)x}$.

3) $f'(x)=f(x)f'(0)$ donne pour $x=0$, $f'(0)=f(0)f'(0)$ donc $f'(0)(1-f(0))=0$.

Or $f'(0)=0$ est impossible car alors $f'(x)=f(x)f'(0)=0$ donc f serait constante égale à $f(1)=e$ et l'égalité $f(x+y)=f(x)\times f(y)$ ne serait pas vérifiée car on aurait $e=e\times e$.

Donc $1-f(0)=0$ donc $f(0)=1$. L'égalité $f(x)=Ke^{f'(0)x}$ devient alors en prenant $x=0$, $f(0)=Ke^{f'(0)0}$ donc $1=K$. Conclusion : $f(x)=e^{f'(0)x}$. En prenant $x=1$, on a $f(1)=e^{f'(0)}$ donc $e=e^{f'(0)}$ donc $f'(0)=1$. Conclusion : $f(x)=e^x$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\int\frac{u'}{u}=\ln|u|+C$. 2) $f'(x)=0$ (sur un intervalle) équivaut à f constante.

Dérivées n-ièmes des fonctions cos et sin

Chapitre concerné : 7. Dérivabilité

☐ Ce que montre cet exo

Que $\cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ pour tout entier $n\geq 1$.

- **L'énoncé**

Démontrer par récurrence que $\cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ pour $n\geq 1$.

- **Corrigé**

Soit P_n la propriété « $\cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ ».

Initialisation : P_1 est vraie car $\cos'(x)=-\sin(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin'(x)=\cos(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Hérédité : Supposons P_n vraie (c'est-à-dire que $\cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$), et montrons que P_{n+1} est encore vraie (c'est-à-dire que $\cos^{(n+1)}(x)=\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(n+1)}(x)=\sin\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$).

On a :

$$\cos^{(n+1)}(x)=\left(\cos^{(n)}(x)\right)'=\left(\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right)'=-\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin^{(n+1)}(x)=\left(\sin^{(n)}(x)\right)'=\left(\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

Conclusion : Comme P_1 est vraie, et que P_n est héréditaire, P_n est vraie pour $n\geq 1$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Le principe du raisonnement par récurrence (initialisation, hérédité, conclusion).

2) $(\cos(u))'=-u'\sin(u)$ et $(\sin(u))'=u'\cos(u)$.

3) $-\sin(y)=\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$ et $\cos(y)=\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$.

Dérivée n-ième de $\left(x^2-1\right)^n$ et Leibniz

Chapitre concerné : 7. Dérivabilité

☐ Ce que montre cet exo

Comment calculer la dérivée n-ième de $h(x)=\left(x^2-1\right)^n$ par la formule de Leibniz (1646-1716).

- **L'énoncé**

Soit $h(x)=\left(x^2-1\right)^n$. En remarquant que $x^2-1=(x+1)(x-1)$, déterminer $h^{(n)}(x)$.

- **Corrigé**

On a $h(x)=(x+1)^n(x-1)^n$.

Appliquons Leibniz $(f\times g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}$ en posant $f(x)=(x+1)^n$ et $g(x)=(x-1)^n$.

Comme $f(x)=(x+1)^n$, on a $f^{(i)}(x)=n(n-1)\cdots(n-i+1)(x+1)^{n-i}=\dfrac{n!}{(n-i)!}(x+1)^{n-i}$ (pour $i\le n$).

Comme $g(x)=(x-1)^n$, on a $g^{(i)}(x)=n(n-1)\cdots(n-i+1)(x-1)^{n-i}=\dfrac{n!}{(n-i)!}(x-1)^{n-i}$ (pour $i\le n$).

Donc : $h^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{n!}{(n-(n-k))!}(x+1)^{n-(n-k)}\dfrac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}$

donc $h^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{n!}{k!}\dfrac{n!}{(n-k)!}(x+1)^k(x-1)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\dfrac{n!}{k!}\dfrac{n!}{(n-k)!}(x+1)^k(x-1)^{n-k}$

donc $h^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(n!)^3}{(k!)^2\left((n-k)!\right)^2}(x+1)^k(x-1)^{n-k}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) La formule de Leibniz : $(f\times g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}$.

2) $\left(u^n\right)'=nu'u^{n-1}$.

Inégalités célèbres et accroissements finis

Chapitre concerné : 7. Dérivabilité

☐ Ce que montre cet exo

Les inégalités $|\cos(b)-\cos(a)| \leq |b-a|$, $|\sin(b)-\sin(a)| \leq |b-a|$, $|\arctan(b)-\arctan(a)| \leq |b-a|$ et $\tan(x) \geq x$ (pour $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$).

- **L'énoncé**

1) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que pour tous réels $a < b$:

a) $|\cos(b)-\cos(a)| \leq |b-a|$

b) $|\sin(b)-\sin(a)| \leq |b-a|$

c) $|\arctan(b)-\arctan(a)| \leq |b-a|$

2) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $\tan(x) \geq x$ pour $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

- **Corrigé**

1) a) Soient a et b tels que $a < b$. Si $f(x) = \cos(x)$ alors $f'(x) = -\sin(x)$ et donc $|f'(x)| \leq 1$.

L'inégalité des accroissements finis donne : $|\cos(b)-\cos(a)| \leq |b-a|$.

b) Soient a et b tels que $a < b$. Si $f(x) = \sin(x)$ alors $f'(x) = \cos(x)$ et donc $|f'(x)| \leq 1$.

L'inégalité des accroissements finis donne : $|\sin(b)-\sin(a)| \leq |b-a|$.

c) Soient a et b tels que $a < b$. Si $f(x) = \arctan(x)$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et donc $|f'(x)| \leq 1$.

L'inégalité des accroissements finis donne $|\arctan(b)-\arctan(a)| \leq |b-a|$

2) Soit $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Si $f(x) = \tan(x)$ alors $f'(x) = 1+\tan^2(x)$.

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0;x[$ tel que : $f(x)-f(0) = f'(c)(x-0)$ ce qui donne : $\tan(x)-\tan(0) = \left(1+\tan^2(c)\right)(x-0)$, ce qui donne : $\tan(x) = \left(1+\tan^2(c)\right)x$ et donc : $\tan(x) \geq x$ (car $1+\tan^2(c) \geq 1$).

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Inégalité des accroissements finis : soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. S'il existe M tel que pour tout $x \in]a;b[$, $|f'(x)| \leq M$ alors $|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$.

2) Le théorème des accroissements finis : soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ alors il existe un nombre $c \in]a;b[$ tel que : $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.

Suite convergente et accroissements finis

Chapitre concerné : 7. Dérivabilité

☐ Ce que montre cet exo

L'utilisation des accroissements finis pour montrer qu'une suite est convergente.

- **L'énoncé**

Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 = 0{,}75$ où f est définie sur $[0{,}5;1]$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

1) Démontrer par récurrence sur n la propriété : $P_n : 0{,}5 \leq u_n \leq 1$.

2) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{2}{2{,}25}|u_n - 1|$.

3) En déduire que $\lim u_n = 1$.

- **Corrigé**

1) Initialisation : P_0 est vraie car $u_0 = 0{,}75$. Hérédité : Supposons P_n vraie. On a $f'(x) = \dfrac{2\cdot(x+1) - 2x\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$. f est donc croissante sur $[0{,}5;1]$, donc : $f(0{,}5) \leq f(x) \leq f(1)$ soit : $0{,}5 \leq f(x) \leq 1$ (car $f(0{,}5) = \dfrac{2}{3}$ et $f(1) = 1$). Comme $0{,}5 \leq u_n \leq 1$, on en déduit $0{,}5 \leq f(u_n) \leq 1$ soit $0{,}5 \leq u_{n+1} \leq 1$. Ainsi P_{n+1} est vraie.
Conclusion : P_0 étant vraie et P_n est héréditaire, P_n est vraie pour tout $n \geq 0$.

3) Si $x \in [0{,}5;1]$ alors $\dfrac{2}{(1+1)^2} \leq \dfrac{2}{(x+1)^2} \leq \dfrac{2}{(0{,}5+1)^2}$ soit $\dfrac{1}{2} \leq f'(x) \leq \dfrac{2}{2{,}25}$. Donc $|f'(x)| \leq \dfrac{2}{2{,}25}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, $|f(x) - f(1)| \leq \dfrac{2}{2{,}25}|x-1|$ pour tout $x \in [0{,}5;1]$.

Comme $0{,}5 \leq u_n \leq 1$ pour tout n, on a $|f(u_n) - f(1)| \leq \dfrac{2}{2{,}25}|u_n - 1|$ soit $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{2}{2{,}25}|u_n - 1|$.

4) Par récurrence, on a $|u_n - 1| \leq \left(\dfrac{2}{2{,}25}\right)^n |u_0 - 1|$. Comme $0 < \dfrac{2}{2{,}25} < 1$, on en déduit que $\lim \left(\dfrac{2}{2{,}25}\right)^n = 0$ et donc $\lim |u_n - 1| = 0$. Ainsi (u_n) est convergente avec $\lim u_n = 1$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Le principe du raisonnement par récurrence.
2) Si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue et (u_n) convergente vers L, alors $f(L) = L$.
3) Inégalité des accroissements finis : si f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ et s'il existe M tel que pour tout $x \in]a;b[$, $|f'(x)| \leq M$ alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Le théorème de Darboux

Chapitre concerné : 7. Dérivabilité

☐ Ce que montre cet exo

Que f' (sans supposer sa continuité) atteint toute valeur comprise entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

- **L'énoncé**

Soit f une fonction dérivable sur $[a;b]$. Soit λ compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un réel k tel que $\lambda = f'(k)$.

1) Soit u définie par $u(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (si $x \neq a$) et $u(a) = f'(a)$. Montrer que u est continue.

2) Soit λ compris entre $f'(a)$ et $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. En déduire qu'il existe c tel que $\lambda = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$.

3) Montrer qu'il existe un réel k tel que $f'(k) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$. En déduire que f' atteint toutes les valeurs intermédiaires comprises entre $f'(a)$ et $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

4) Conclure.

- **Corrigé**

1) u est continue en a car $\lim\limits_{x \to a} u(x) = u(a)$ (car f est dérivable en a).

2) u étant continue sur $[a;b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c tel que $\lambda = u(c)$ soit $\lambda = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$.

3) En utilisant le théorème des accroissements finis à f, il existe k compris entre a et c tel que $f'(k) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$ c'est-à-dire tel que $\lambda = f'(k)$. f' atteint donc les valeurs intermédiaires comprises entre $f'(a)$ et $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

4) Par un raisonnement similaire, en utilisant la fonction v définie par $v(x) = \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$ (si $x \neq b$) et $v(b) = f'(b)$, on montre que f' atteint toutes les valeurs intermédiaires comprises entre $f'(b)$ et $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Ainsi f' atteint toutes les valeurs comprises entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Le théorème des valeurs intermédiaires : Si f est continue sur $[a;b]$ avec alors pour toute valeur k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe c dans l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(c) = k$.

2) Le théorème des accroissements finis : soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ alors il existe un nombre $c \in]a;b[$ tel que : $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Les DL, retrouvez-les tous ! (« famille » série géométrique)

Chapitre concerné : 8. Développements limités

☐ Ce que montre cet exo

Comment, avec, un minimum de mémoire, retrouver un max de développements limités !

- **L'énoncé**

Sachant que : $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$ retrouver les DL de :

1) $\frac{1}{1-x}$ **2)** $\frac{1}{1+x}$ **3)** $\ln(1+x)$ **4)** $\ln(1-x)$ **5)** $\frac{1}{1+x^2}$ **6)** $\arctan(x)$.

- **Corrigé**

1) $\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$ (c'est la même formule car $\lim q^{n+1} = 0$ lorsque $-1 < q < 1$).

2) $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$.

3) $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} dx \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$.

4) $\ln(1-x) = \ln(1+(-x)) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(-x)^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) \underset{0}{=} -\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$ car $(-1)^{2k+1} = -1$.

5) $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k + o\left((x^2)^n\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$.

6) $\arctan(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$ et donc : 1) $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$. 2) $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$.

3) $\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$. 4) $\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$.

5) $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$. 6) $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$.

Les DL, retrouvez-les tous ! (« famille » exponentielle)

Chapitre concerné : 8. Développements limités

☐ Ce que montre cet exo

Comment, avec, un minimum de mémoire, retrouver un max de développements limités !

- **L'énoncé**

Sachant que : $f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + o(x^n)$ (formule de Taylor) retrouver les DL de :

1) e^x **2)** e^{-x} **3)** $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$ **4)** $\cos(x)$ et $\sin(x)$

- **Corrigé**

1) Si $f(x) = e^x$ alors $f^{(k)}(x) = e^x$ et $f^{(k)}(0) = 1$ d'où $e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.

2) $e^{-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + o(x^n)$ (en remplaçant x par $-x$).

3) Sachant que $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$ et que $\mathrm{ch}(x)$ est paire et $\mathrm{sh}(x)$ impaire, on a :

$\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$ (partie paire de e^x) et $\mathrm{sh}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ (partie impaire).

4) Pour $\cos(x)$ et $\sin(x)$ il faut se souvenir que les DL sont identiques à ceux de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$ l'alternance de signe en plus (on rajoute le $(-1)^k$), on a donc :

$\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$ et $\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

La formule de Taylor : $f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + o(x^n)$ et donc : 1) $e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.

2) $e^{-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + o(x^n)$. 3) $\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$. 4) $\mathrm{sh}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$.

5) $\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$. 6) $\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$.

Les DL, retrouvez les tous ! (« famille » binomiale)

Chapitre concerné : 8. Développements limités

☐ Ce que montre cet exo

Comment, avec, un minimum de mémoire, retrouver (sans démontrer) un max de développements limités.

- **L'énoncé**

Sachant que : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ déterminer un moyen mnémotechnique permettant de déterminer les DL à l'ordre n de : **1)** $(1+x)^\alpha$ **2)** $\sqrt{1+x}$.

- **Corrigé**

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ donne :

$$(1+x)^n \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k.$$

En « généralisant » (abusivement mais l'idée ici est de retrouver et de retenir le DL pas de le démontrer rigoureusement…) :

1) $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$

2) $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \underset{0}{=} 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + o(x^n).$

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) La formule du binôme de Newton (1642-1727) : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

2) $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$

3) $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \underset{0}{=} 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + o(x^n).$

Une limite célèbre, vaincue par les DL

Chapitre concerné : 8. Développements limités

☐ Ce que montre cet exo

Comment, en utilisant un bon DL tout simple, déterminer une limite compliquée !

- **L'énoncé**

1) Déterminer un DL(0) à l'ordre 1 de $\ln(1+x)$. En déduire un développement asymptotique en $+\infty$ de $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ à l'ordre 1.

2) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

- **Corrigé**

1) La formule $\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right)$ nous donne : $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x)$.

Ainsi $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{=} e^{n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+o(1)}$ donc par continuité de la fonction $x \to e^x$:

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{1+o(1)} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} 1+o(1)} = e^{1+0} = e^1 = e$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right)$.

2) Le développement asymptotique en $+\infty$ s'obtient en remplaçant x (au voisinage de 0) par $\frac{1}{n}$.

3) Caractérisation séquentielle de la continuité : Si f est continue en a et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.

Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Chapitre concerné : 8. Développements limités

☐ **Ce que montre cet exo**

Comment, en utilisant un DL, déterminer la position d'une courbe par rapport à sa tangente.

- **L'énoncé**

1) Déterminer un DL(0) à l'ordre 3 de $f(x)=\frac{1}{2-x}$. En déduire l'équation de la tangente T_0 puis la position de C_f par rapport à T_0 (quitte à rectifier l'ordre du DL).

2) Même consigne avec $g(x)=\sin(x)-\sin(2x)$.

- **Corrigé**

1) On a $f(x)=\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\underset{0}{=}\frac{1}{2}\times\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x}{2}\right)^k+o(x^n)\right)$ donc :

$f(x)\underset{0}{=}\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+o(x^3)\right)=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)$. Donc $T_0 : y=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}$.

Or $f(x)-\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{4}\right)\underset{0}{=}\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)$ soit $f(x)-\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{4}\right)\underset{0}{=}\frac{x^2}{8}+o(x^2)$ (à l'ordre 2).

Comme $\frac{x^2}{8}\geq 0$ pour tout x, C_f est (localement) toujours au-dessus de T_0 .

2) $g(x)=\sin(x)-\sin(2x)\underset{0}{=}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+1})$ donc :

$g(x)=\sin(x)-\sin(2x)\underset{0}{=}x-\frac{x^3}{6}-2x+\frac{8x^3}{6}+o(x^3)=-x+\frac{7x^3}{6}+o(x^3)$. Donc $T_0 : y=-x$.

Or $g(x)-(-x)\underset{0}{=}\frac{7x^3}{6}+o(x^3)$. Comme $\frac{7x^3}{6}\leq 0$ pour $x\leq 0$ et $\frac{7x^3}{6}\geq 0$ pour $x\geq 0$, on en déduit C_f est (localement) au-dessous de T_0 pour $x\leq 0$ et au-dessus pour $x\geq 0$.

☐ **Ce qu'il faut retenir du cours**

1) $\frac{1}{1-x}\underset{0}{=}\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)$ qui donne : $\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\underset{0}{=}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x}{2}\right)^k+o(x^n)$.

2) $\sin(x)\underset{0}{=}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+1})$ qui donne : $\sin(2x)\underset{0}{=}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+1})$.

3) Dans un DL en 0, le polynôme de degré 1 $(ax+b)$ donne la tangente $T_0 : y=ax+b$. Pour déterminer la position de C_f et T_0 , on étudie à l'aide du DL le signe de $f(x)-(ax+b)$.

Une limite de fonction résolue par les équivalents

Chapitre concerné : 9. Equivalents

☐ Ce que montre cet exo

Qu'on peut obtenir des équivalents à l'aide de DL et les utiliser pour effectuer un calcul de limite compliqué.

- **L'énoncé**

Le but de l'exercice est de déterminer $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin(x))-1}{\sin(\cos(x)-1)}$.

1) Rappeler un équivalent en 0 de $\cos u-1$. En déduire un équivalent de $\cos(\sin(x))-1$.

2) Rappeler un équivalent en 0 de $\sin u$. En déduire un équivalent de $\sin(\cos(x)-1)$

3) En déduire que $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin(x))-1}{\sin(\cos(x)-1)}=1$.

- **Corrigé**

1) $\cos u-1\underset{0}{\sim}-\dfrac{u^2}{2}$ donc $\cos(\sin(x))-1\underset{0}{\sim}-\dfrac{\sin^2(x)}{2}$ donc $\cos(\sin(x))-1\underset{0}{\sim}-\dfrac{x^2}{2}$

(car $\sin(x)\underset{0}{\sim}-\dfrac{x^2}{2}$).

2) $\sin u\underset{0}{\sim}u$ donc $\sin(\cos(x)-1)\underset{0}{\sim}\cos(x)-1$ (car $\lim_{x\to 0}(\cos(x)-1)=0$) donc $\sin(\cos(x)-1)\underset{0}{\sim}-\dfrac{x^2}{2}$.

3) $\dfrac{\cos(\sin(x))-1}{\sin(\cos(x)-1)}\underset{0}{\sim}\dfrac{-\dfrac{x^2}{2}}{-\dfrac{x^2}{2}}$ soit $\dfrac{\cos(\sin(x))-1}{\sin(\cos(x)-1)}\underset{0}{\sim}1$ donc $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin(x))-1}{\sin(\cos(x)-1)}=1$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\cos u-1\underset{0}{\sim}-\dfrac{u^2}{2}$.

2) $\sin u\underset{0}{\sim}u$.

3) Si $f(x)\underset{0}{\sim}L$ (L constante non nulle) alors $\lim_{x\to 0}f(x)=L$.

Une limite de fonction résolue par des DL puis des équivalents

Chapitre concerné : 9. Equivalents

☐ Ce que montre cet exo

Qu'on peut obtenir des équivalents à l'aide de DL et les utiliser pour effectuer un calcul de limite compliqué.

- **L'énoncé**

Le but de l'exercice est de montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-\operatorname{sh}(x)}{x(\cos(x)-\operatorname{ch}(x))} = \dfrac{1}{3}$.

1) Déterminer un DL d'ordre 3 en 0 de $\sin(x)-\operatorname{sh}(x)$. En déduire un équivalent.

2) Déterminer un DL d'ordre 3 en 0 de $x(\cos(x)-\operatorname{ch}(x))$. En déduire un équivalent.

3) En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-\operatorname{sh}(x)}{x(\cos(x)-\operatorname{ch}(x))} = \dfrac{1}{3}$.

- **Corrigé**

1) $\sin(x)-\operatorname{sh}(x) = \left(x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\left(x+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\right) = -\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ donc $\sin(x)-\operatorname{sh}(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^3}{3}$.

2) $x(\cos(x)-\operatorname{ch}(x)) = x\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)-\left(1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right) = -x^3+o(x^3)$ donc

$x(\cos(x)-\operatorname{ch}(x)) \underset{0}{\sim} -x^3$.

3) $\dfrac{\sin(x)-\operatorname{sh}(x)}{x(\cos(x)-\operatorname{ch}(x))} \underset{0}{\sim} \dfrac{-\dfrac{x^3}{3}}{-x^3} \sim \dfrac{1}{3}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-\operatorname{sh}(x)}{x(\cos(x)-\operatorname{ch}(x))} = \dfrac{1}{3}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\cos(x) \underset{0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$.

2) $\sin(x) \underset{0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$.

3) $\operatorname{ch}(x) \underset{0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$.

4) $\operatorname{sh}(x) \underset{0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$.

5) La notion d'équivalent : $f \sim g$ équivaut à $\lim \dfrac{f}{g} = 1$.

6) On peut diviser deux équivalents.

7) Si $f(x) \underset{0}{\sim} L$ (L constante non nulle) alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = L$.

Une limite de suite résolue par les équivalents

Chapitre concerné : 9. Equivalents

☐ Ce que montre cet exo

Comment déterminer une limite par discussion de cas.

- **L'énoncé**

Le but de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ (où a et b sont strictement positifs).

1) Démontrer que si $a=b$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=a$.

2) Démontrer, en utilisant les équivalents, que :

a) Si $a>b$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=a$.

b) Si $a<b$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=b$.

- **Corrigé**

1) Si $a=b$ alors $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\dfrac{a^{n+1}+a^{n+1}}{a^n+a^n}=\dfrac{2a^{n+1}}{2a^n}=a$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=a$.

2) a) Si $a>b$ alors $a^{n+1}+b^{n+1}\sim a^{n+1}$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+1}=1$).

De même $a^n+b^n\sim a^n$, on a donc $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}\sim\dfrac{a^{n+1}}{a^n}\sim a$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=a$.

b) Si $a<b$ alors $a^{n+1}+b^{n+1}\sim b^{n+1}$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{b^{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}+1=1$). De même $a^n+b^n\sim b^n$, on a donc $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}\sim\dfrac{b^{n+1}}{b^n}\sim b$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=b$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) La notion d'équivalent : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ équivaut à $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}=1$.

2) On peut diviser deux équivalents.

3) Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} L$ (L constante non nulle) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L$.

Une intégrale vaincue par la linéarisation

Chapitre concerné : 10. Intégration simple

☐ Ce que montre cet exo

Que certaines intégrales trigonométriques sont en fait parfaitement calculables.

- **L'énoncé**

Déterminer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^4(x)+\sin^4(x)\right)dx$.

- **Corrigé**

$$\cos^4(x)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\frac{e^{i4x}+4e^{i3x}e^{-ix}+6e^{i2x}e^{-i2x}+4e^{-i3x}e^{ix}+e^{-i4x}}{16}=\frac{e^{i4x}+e^{-i4x}+4\left(e^{i2x}+e^{-i2x}\right)+6}{16}$$

$$=\frac{2\cos(4x)+4\times 2\cos(2x)+6}{16}=\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}.$$

$$\sin^4(x)=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4=\frac{e^{i4x}-4e^{i3x}e^{-ix}+6e^{i2x}e^{-i2x}-4e^{-i3x}e^{ix}+e^{-i4x}}{16}=\frac{e^{i4x}+e^{-i4x}-4\left(e^{i2x}+e^{-i2x}\right)+6}{16}$$

$$=\frac{2\cos(4x)-4\times 2\cos(2x)+6}{16}=\frac{1}{8}\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}.$$

Donc : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^4(x)+\sin^4(x)\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}\cos(4x)+\frac{3}{4}\right)dx=\left[\frac{1}{4}\frac{\sin(4x)}{4}+\frac{3}{4}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$=\left(\frac{\sin(2\pi)}{16}+\frac{3\pi}{8}\right)-0=\frac{3\pi}{8}.$$

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\cos(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $\sin(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ et donc : $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos(\theta)$, $e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin(\theta)$.

2) $(a+b)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ (binôme de Newton).

3) $u'\sin(u)$ a pour primitive $-\cos(u)$ et $u'\cos(u)$ a pour primitive $\sin(u)$. Donc en particulier $x\to\sin(4x)$ a pour primitive $x\to\dfrac{-\cos(4x)}{4}$ et $x\to\cos(4x)$ a pour primitive $x\to\dfrac{\sin(4x)}{4}$.

Des intégrales évidentes sans en avoir l'air

Chapitre concerné : 10. Intégration simple

☐ Ce que montre cet exo

Que certaines intégrales d'apparence complexe sont en fait parfaitement calculables.

- **L'énoncé**

Déterminer : **1)** $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx$ **2)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$ **3)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2}{x+1}dx$ **4)** $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(\ln x+1)^2}dx$

- **Corrigé**

1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx = \int_1^e \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{u}dx\left(=\int u'u=\left[\frac{u^2}{2}\right]\right)=\left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_1^e=\frac{(\ln(e))^2}{2}-\frac{(\ln(1))^2}{2}=\frac{1}{2}.$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx\left(=\int\frac{u'}{u}=[\ln u]=\right)=\left[\ln(1+e^x)\right]_0^1=\ln(1+e)-\ln(2).$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x+1}{x+1}dx+\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\int_0^1 dx+\left[\ln(x+1)\right]_0^1=[x]_0^1+\ln(2)-\ln(1)=1+\ln(2).$

4) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(\ln x+1)^2}dx=\int_1^e\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x+1)^2}dx\left(=\int\frac{u'}{u^2}=\left[-\frac{1}{u}\right]=\right)=\left[-\frac{1}{\ln x+1}\right]_1^e=-\frac{1}{\ln e+1}-\left(-\frac{1}{\ln 1+1}\right)=\frac{1}{2}.$

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $u'u$ a pour primitive $\dfrac{u^2}{2}$

2) $\dfrac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln|u|$

3) $\dfrac{-u'}{u^2}$ a pour primitive $\dfrac{1}{u}$.

Intégrale et quart de cercle

Chapitre concerné : 10. Intégration simple

☐ Ce que montre cet exo

Que les calculs d'intégrales très techniques ont parfois une interprétation graphique évidente.

- **L'énoncé**

Déterminer : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ à l'aide du changement de variable $x = \cos(t)$.

- **Corrigé**

Le changement de variable $x = \cos(t)$, nous donne $dx = -\sin(t)dt$ et $t = \arccos(x)$.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\arccos(0)}^{\arccos(1)} \sqrt{1-(\cos(t))^2}\,(-\sin(t)dt) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-\cos^2(t)}\,(-\sin(t)dt)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{\sin^2(t)}\,(-\sin(t)dt) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t)(-\sin(t)dt) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin^2(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt.$$

car $\sin^2(t) = 1-\cos^2(t)$ et $\sqrt{\sin^2(t)} = |\sin(t)| = \sin(t)$ (car $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ d'où $\sin(t) \geq 0$).

Par ailleurs $\sin^2(t) = \left(\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2 = \dfrac{e^{i2t}-2e^{it}e^{-it}+e^{-i2t}}{-4} = \dfrac{1}{2}-\dfrac{e^{i2t}+e^{-i2t}}{4} = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos(2t)$. Donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)dt = \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$= \left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin(\pi)}{2}\right) - \left(\dfrac{1}{2}\cdot 0 - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin(0)}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ Conclusion : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$ (C'est normal : $y = \sqrt{1-x^2}$ ($x \in [0;1]$) représente le quart de cercle de rayon 1 (car $y = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1$). $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ est donc égale à $\dfrac{1}{4}\pi R^2 = \dfrac{1}{4}\pi 1^2 = \dfrac{\pi}{4}$.)

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ où φ est C^1 2) $\cos^2(t)+\sin^2(t) = 1$ 3) $\sin(t) = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$.

Les intégrales de Wallis

Chapitre concerné : 10. Intégration simple

☐ Ce que montre cet exo

L'utilisation de 2 points clefs du chapitre : changement de variable, intégration par parties (IPP).

- **L'énoncé**

1) Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$. Démontrer que $I_n = J_n$ (on posera $t = x - \frac{\pi}{2}$).

2) Calculer I_0 et I_1. Démontrer que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ (à l'aide d'une IPP en posant $\begin{cases} u' = \sin(t) \\ v = \sin^{n-1}(t) \end{cases}$).

3) En déduire que $I_{2n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$ et $I_{2n+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}$.

- **Corrigé**

1) $t = x - \frac{\pi}{2}$, $dt = -dx$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(-dx) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n(x)(-dx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx = J_n$.

2) On a $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) = \left[-\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(t)}_{u'}\underbrace{\sin^{n-1}(t)}_{v}\,dt = \Big[\underbrace{-\cos(t)}_{u}\underbrace{\sin^{n-1}(t)}_{v}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{-\cos(t)}_{u}\underbrace{(n-1)\sin^{n-2}(t)\cos(t)}_{v'}\,dt$$

$$= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^{n-2}(t)\,dt = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2(t)\right)\sin^{n-2}(t)\,dt = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{n-2}(t) - \sin^n(t)\right)dt.$$

Donc $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$ soit $nI_n = (n-1)I_{n-2}$. D'où le résultat.

3) $I_{2n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$ et $I_{2n+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}$ se démontrent par récurrence grâce à la relation $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ et en utilisant $I_0 = \frac{\pi}{2}$ pour I_{2n} et $I_1 = 1$ pour I_{2n+1}.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ où φ est C^1 2) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ 3) IPP $\int u'v = [uv] - \int uv'$.

Une somme de Riemann convergente

Chapitre concerné : 10. Intégration simple

☐ Ce que montre cet exo

L'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\ln(2)$.

- **L'énoncé**

On souhaite démontrer l'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\ln(2)$.

1) Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

2) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\ln(2)$.

- **Corrigé**

1) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

2) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1-0}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(0+k\frac{1-0}{n}\right)$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-0}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(0+k\frac{1-0}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\left[\ln(1+x)\right]_0^1=\ln(2)$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Somme de Riemann : soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

2) $\int\frac{1}{1+x}=\ln|1+x|$.

Une série alternée convergente

Chapitre concerné : 11. Séries numériques

☐ Ce que montre cet exo

La convergence d'une série numérique par l'étude de suites extraites de la somme partielle.

- **L'énoncé**

Soit (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. On considère les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

1) Montrer que (u_{2n}) est croissante et que (u_{2n+1}) est décroissante.

2) Montrer que $\lim(u_{2n} - u_{2n+1}) = 0$. En déduire que (u_{2n}) est majorée et (u_{2n+1}) minorée.

3) En déduire que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes de même limite. Que peut-on en déduire concernant la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$?

- **Corrigé**

1) $u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1}$ donc $u_{2n+2} - u_{2n} > 0$ donc (u_{2n}) est croissante.

$u_{2n+3} - u_{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2}$ donc $u_{2n+3} - u_{2n+1} < 0$ donc (u_{2n+1}) est décroissante.

2) $u_{2n} - u_{2n+1} = \frac{-1}{2n+1}$ donc $\lim(u_{2n} - u_{2n+1}) = 0$. La suite $(u_{2n} - u_{2n+1})$ étant convergente, elle est bornée. Il existe $M > 0$ tel que $|u_{2n} - u_{2n+1}| < M$. Or $|u_{2n} - u_{2n+1}| \leq M \Leftrightarrow -M \leq u_{2n} - u_{2n+1} \leq M$ ce qui donne $u_{2n} \leq M + u_{2n+1} \leq M + u_1$ (car (u_{2n+1}) est décroissante) donc (u_{2n}) est majorée.

On a $-M \leq u_{2n} - u_{2n+1} \leq M$ donc $M \geq -u_{2n} + u_{2n+1} \geq -M$ donc : $u_{2n+1} \geq u_{2n} - M \geq u_0 - M$ (car (u_{2n}) est croissante) donc (u_{2n+1}) est minorée.

3) (u_{2n}) est croissante et majorée donc convergente. (u_{2n+1}) est décroissante et minorée donc convergente. Soit $L_1 = \lim u_{2n}$ et $L_2 = \lim u_{2n+1}$. Comme $\lim(u_{2n} - u_{2n+1}) = 0$, on a $L_1 - L_2 = 0$ soit $L_1 = L_2$. Conclusion : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont même limite.

Comme les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) de la suite (u_n) sont convergentes de même limite, on en déduit que la suite (u_n) elle-même est convergente. Ainsi $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Toute suite convergente est bornée.
2) Une suite croissante et majorée converge. Une suite décroissante et minorée converge.
3) Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes de même limite, alors (u_n) est convergente.

Divergence de la série harmonique par Oresme

Chapitre concerné : 11. Séries numériques

☐ Ce que montre cet exo

La démonstration par l'absurde de la divergence de la série harmonique $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$.

• L'énoncé

Soit (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On suppose que (u_n) est convergente.

1) Que peut-on en déduire pour la suite extraite (u_{2^n}) ?

2) Montrer que $u_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ pour tout $n \geq 0$. En déduire que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ est divergente.

• Corrigé

1) Comme (u_n) est convergente, la suite extraite (u_{2^n}) est également convergente.

2) On peut soit démontrer le résultat par récurrence (immédiat) soit remarquer que :

$$u_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n + 1} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

donc : $u_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \Bigg(\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}\Bigg) + \Bigg(\underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}\Bigg) + \ldots + \Bigg(\underbrace{\frac{1}{2^n + 1} + \ldots + \frac{1}{2^n}}_{\geq \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}}\Bigg)$

donc : $u_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \Bigg(\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{2}{4}}\Bigg) + \Bigg(\underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{4}{8}}\Bigg) + \ldots + \Bigg(\underbrace{\frac{1}{2^n - 1} + \ldots + \frac{1}{2^n}}_{\geq \frac{2^{n-1}}{2^n}}\Bigg)$

donc $u_{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}$ et donc $u_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

Comme $u_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_{2^n} = +\infty$ (car $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{n}{2} = +\infty$). CONTRADICTION ! (car (u_{2^n}) convergente). Ainsi (u_n) n'est pas convergente et donc la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ est divergente.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Tout suite extraite d'une suite convergente est-elle-même convergente, de même limite.
2) Théorème de comparaison : si $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Transformation d'Abel

Chapitre concerné : 11. Séries numériques

☐ Ce que montre cet exo

L'égalité $\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n + a_N B_N$ où $B_p = \sum_{k=0}^{p} b_k$ (somme partielle de la série $\sum b_n$).

- **L'énoncé**

1) Montrer que $\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n (B_n - B_{n-1})$ où $B_p = \sum_{k=0}^{p} b_k$.

2) En déduire que $\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n + a_N B_N$.

- **Corrigé**

1) $\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n b_n$. Or $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ et $B_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$ d'où $B_n - B_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k = b_n$.

Ainsi $\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n b_n = a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n (B_n - B_{n-1})$.

2) On a : $\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n (B_n - B_{n-1})$

$= a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n B_n - \sum_{n=1}^{N} a_n B_{n-1}$

$= a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n B_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} B_n$ (décalage d'indice)

$= a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{N-1} a_n B_n + a_N B_N - a_1 b_0 - \sum_{n=1}^{N-1} a_{n+1} B_n$ (car $b_0 = B_0$)

$= (a_0 - a_1) b_0 + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n + a_N b_N = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n + a_N B_N$ (car $b_0 = B_0$).

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $b_n = \sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k = B_n - B_{n-1}$ où $B_p = \sum_{k=0}^{p} b_k$.

2) $\sum_{n=1}^{N} a_n B_{n-1} = \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} B_n$.

Une jolie série télescopique

Chapitre concerné : 11. Séries numériques

☐ Ce que montre cet exo

Le calcul de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ qui s'avère être une série télescopique (sans en avoir l'air).

- **L'énoncé**

1) Soit $u_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}$. Montrer que $u_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.

2) En déduire que $\sum_{n\geq 1} u_n = \tan(1)$.

- **Corrigé**

1) $$u_n = \frac{\sin\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)} = \frac{\sin\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)} = \frac{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - \sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}$$

(car $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$)

donc : $$u_n = \frac{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)} - \frac{\sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)} = \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

2) $$\sum_{n=1}^{p} u_n = \sum_{n=1}^{p}\left(\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) = \tan(1) - \tan\left(\frac{1}{2}\right) + \tan\left(\frac{1}{2}\right) - \tan\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots - \tan\left(\frac{1}{p+1}\right)$$

$\sum_{n=1}^{p} u_n = \tan(1) - \tan\left(\dfrac{1}{p+1}\right)$. Donc $\sum_{n\geq 1} u_n = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{p} u_n = \lim_{p\to+\infty} \tan(1) - \tan\left(\dfrac{1}{p+1}\right) = \tan(1)$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$.

2) $\tan(a) = \dfrac{\sin(a)}{\cos(a)}$.

3) Le télescopage : $\sum_{n=1}^{p}(v_n - v_{n+1}) = v_1 - v_{p+1}$

4) La formule $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{p} u_n$.

Quand d'Alembert nous sauve

Chapitre concerné : 11. Séries numériques

☐ Ce que montre cet exo

La convergence de la série numérique $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}$ grâce à la règle de d'Alembert (1717-1783).

- **L'énoncé**

1) Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

2) Après avoir prouvé que $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, en déduire la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

- **Corrigé**

1) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n!}{(n+1)^n(n+1)} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

2) $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ car $\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim n\frac{1}{n} \sim 1$ donc $\lim \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 1$ et donc $\lim e^{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)} = e^1$ donc $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Ainsi $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}$. Comme $\frac{1}{e} < 1$, on en déduit, d'après la règle de d'Alembert que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Règle de d'Alembert : soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

Si $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors $\sum u_n$ converge. Si $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

2) $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (qu'on peut aussi redémontrer avec les DL, voir exercice « une limite célèbre vaincue par les DL »).

Quand Riemann nous sauve

Chapitre concerné : 11. Séries numériques

☐ Ce que montre cet exo

La convergence ou divergence immédiate d'une série numérique grâce aux équivalents.

- **L'énoncé**

En utilisant le critère de Riemann, déterminer de manière immédiate la convergence ou divergence de la série à termes positifs proposée.

1) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2+1}$ **2)** $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ **3)** $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^3-n^2+2}$ **4)** $\sum_{n\geq 0}\frac{2n^2}{n^3+1}$ **5)** $\sum_{n\geq 0}\frac{2n-1}{n^4+1}$ **6)** $\sum_{n\geq 0}\frac{\cos(n)}{n^3+1}$

- **Corrigé**

1) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2+1}$ converge car $\frac{1}{n^2+1}\sim\frac{1}{n^2}$ $(\alpha>1)$.

2) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ diverge car $\frac{1}{\sqrt{n}+1}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$ $(\alpha<1)$.

3) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^3-n^2+2}$ converge car $\frac{1}{n^3-n^2+2}\sim\frac{1}{n^3}$ $(\alpha>1)$.

4) $\sum_{n\geq 0}\frac{2n^2}{n^3+1}$ diverge car $\frac{2n^2}{n^3+1}\sim\frac{1}{n}$ $(\alpha=1)$.

5) $\sum_{n\geq 0}\frac{2n-1}{n^4+1}$ converge car $\frac{2n-1}{n^4+1}\sim\frac{1}{n^3}$ $(\alpha>1)$.

6) $\sum_{n\geq 0}\frac{\cos(n)}{n^3+1}$ converge car $\left|\frac{\cos(n)}{n^3+1}\right|\leq\frac{1}{n^3+1}$ et $\frac{1}{n^3+1}\sim\frac{1}{n^3}$ $(\alpha>1)$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Equivalents : $u_n\sim v_n$ ssi $\lim\frac{u_n}{v_n}=1$.

Critère de Riemann (1826-1866) : $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^\alpha}$ CV ssi $\alpha>1$.

Les anagrammes

Chapitre concerné : 12. Dénombrement

☐ Ce que montre cet exo

Qu'on peut dénombrer les anagrammes en utilisant à bon escient les factorielles et en repérant les lettres qui se répètent.

- **L'énoncé**

Combien d'anagrammes possède le mot :
1) Marie **2)** Adam **3)** Testament **4)** Association **5)** Bob

- **Corrigé**

1) Il y a 5 lettres en tout, toutes différentes, ce qui donne $5! = 120$ anagrammes.

2) Il y a 4 lettres en tout dont le a qui se répète deux fois, ce qui donne $\frac{4!}{2!} = 12$ anagrammes.

3) Il y a 9 lettres en tout dont le « t » qui se répète 3 fois et le « e » qui se répète 2 fois ce qui donne $\frac{9!}{3!2!} = 30240$ anagrammes.

4) Il y a 11 lettres en tout dont le « a » qui se répète 2 fois, le « s » qui se répète 2 fois, le « i » qui se répète 2 fois et le « o » qui se répète 2 fois ce qui donne $\frac{11!}{2!2!2!2!} = 2494800$ anagrammes.

5) Il y a 3 lettres en tout dont le b qui se répète deux fois, ce qui donne $\frac{3!}{2!} = 3$ anagrammes (on peut préciser qu'il s'agit de « bob, bbo, obb »).

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

$$\text{Nombre d'anagrammes} = \frac{(\text{Nombre de lettres})!}{\prod(\text{Nombre de fois que se répète chaque lettre})!}.$$

Les frites « à Toufik »

Chapitre concerné : 12. Dénombrement

☐ Ce que montre cet exo

Qu'on peut dénombrer les manières de régler la dette « à Toufik ».

• L'énoncé

Toufik veut s'acheter une frite taille max à 2,20 €. Il a dans sa poche : une pièce de 2 €, 2 pièces de 1 €, 6 pièces de 0,20 €, et 2 pièces de 0,10 €.
De combien de manières différentes peut-il régler sa dette en faisant l'appoint ? (On considère que les pièces sont discernables, c'est-à-dire d'années différentes.)

• Corrigé

1re possibilité de payer: 1 pièce de 2 € + 1 pièce de 0,20 €. Nombre de possibilités : $\binom{1}{1}\times\binom{6}{1}$.

2e possibilité : 1 pièce de 2 € + 2 pièces de 0,10 €. Nombre de possibilités : $\binom{1}{1}\times\binom{2}{2}$.

3e possibilité : 2 pièces de 1 € + 1 pièce de 0,20 €. Nombre de possibilités : $\binom{2}{2}\times\binom{6}{1}$.

4e possibilité : 2 pièces de 1 € + 2 pièces de 0,10 €. Nombre de possibilités : $\binom{2}{2}\times\binom{2}{2}$.

5e possibilité : 1 pièce de 1 € + 6 pièces de 0,20 €. Nombre de possibilités : $\binom{1}{1}\times\binom{6}{6}$.

6e possibilité : 1 pièce de 1 € + 5 de 0,20 € + 2 de 0,10€. Nbre de possibilités: $\binom{1}{1}\times\binom{6}{5}\times\binom{2}{2}$

Nombre total de possibilités :

$$\binom{1}{1}\times\binom{6}{1}+\binom{1}{1}\times\binom{2}{2}+\binom{2}{2}\times\binom{6}{1}+\binom{2}{2}\times\binom{2}{2}+\binom{1}{1}\times\binom{6}{6}+\binom{1}{1}\times\binom{6}{5}\times\binom{2}{2}$$

$=1\times6+1\times1+1\times6+1\times1+1\times1+1\times6\times1=6+1+6+1+1+6=21.$

Toufik a 21 manières de régler ses frites en faisant l'appoint.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Il y a $\binom{n}{p}$ façons de choisir p objets parmi n.

2) Le principe multiplicatif.

Table ronde de huit personnes

Chapitre concerné : 12. Dénombrement

☐ Ce que montre cet exo

Qu'on peut dénombrer les manières de placer huit personnes à table.

- **L'énoncé**

On veut faire une table ronde de huit personnes (quatre femmes et quatre hommes).
Combien y a-t-il de manières différentes de les placer :
1) sans contrainte particulière ?
2) en alternant les femmes et les hommes ?
Remarque : on considère comme identiques deux dispositions se déduisant l'une de l'autre par rotation.

- **Corrigé**

1) Plaçons la 1re personne (il y a huit possibilités). Pour la 2e personne, il n'y en a plus que sept, etc. jusqu'à la 8e personne qui n'a plus qu'une seule possibilité : cela fait $8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$ possibilités (principe multiplicatif).
Si on considère comme identiques deux dispositions se déduisant l'une de l'autre par rotation, cela nous fait un total de $\dfrac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{8}=7!=5040$ possibilités.

2) Occupons-nous d'abord des femmes. La 1re femme a huit possibilités. La 2e femme, en revanche, n'a plus que 3 possibilités (car elle ne doit pas choisir une place à côté de la 1re femme). La 3e femme n'a plus que 2 possibilités et la 4e femme une seule possibilité.
Une fois les femmes placées, le 1er homme a quatre possibilités, le 2e homme trois possibilités, le 3e homme deux possibilités et le 4e homme, 1 seule.
Cela fait donc $8\times3\times2\times1\times4\times3\times2\times1$ possibilités (principe multiplicatif).
Si on considère comme identiques deux dispositions se déduisant l'une de l'autre par rotation, cela nous fait un total de $\dfrac{8\times3\times2\times1\times4\times3\times2\times1}{8}=144$ possibilités.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Le principe multiplicatif.

La commode « à Kévina »

Chapitre concerné : 13. Probabilités

☐ Ce que montre cet exo
Comment calculer une probabilité conditionnelle dans un cadre pas si évident que ça.

- **L'énoncé**

La commode « à Kévina » comporte 3 tiroirs. Il y a une chance sur deux que son smartphone soit dans la commode.
1) On ne sait pas du tout où est le smartphone. Quelle est la probabilité qu'il se trouve dans le 3e tiroir de la commode ?
2) Kévina ne trouve pas son smartphone après avoir ouvert les deux premiers tiroirs. Quelle est la probabilité que son smartphone se trouve dans le 3e tiroir ?

- **Corrigé**

1) Soit T_3 l'événement : « le smartphone se trouve dans le 3e tiroir » et C l'événement « le smartphone se trouve dans la commode ». On cherche $p(T_3)$.

On a $p(T_3)=p(T_3\cap C)+p(T_3\cap\overline{C})$. Or $p(T_3\cap C)=p_C(T_3)\times p(C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

et $p(T_3\cap\overline{C})=0$ (car T_3 et $\overline{C}$ sont incompatibles). Donc $p(T_3)=\frac{1}{6}$. La probabilité est de $\frac{1}{6}$.

2) On cherche $p_{\overline{T_1}\cap\overline{T_2}}(T_3)$

$$p_{\overline{T_1}\cap\overline{T_2}}(T_3)=\frac{p(T_3)}{p(\overline{T_1}\cap\overline{T_2})}=\frac{\frac{1}{6}}{p(\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap C)+p(\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\overline{C})}=\frac{\frac{1}{6}}{p(T_3)+p(\overline{C})}$$

$=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{3}{6}}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{6}}=\dfrac{1}{4}$ car : $\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap C=T_3$ et car $\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\overline{C}=\overline{C}$ (car $\overline{C}\subset\overline{T_1}$ et $\overline{C}\subset\overline{T_2}$).

☐ Ce qu'il faut retenir du cours
Les formules :

1) $p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap\overline{B})$.

2) $p(A\cap B)=p(B)\times p_B(A)=p(A)\times p_A(B)$.

3) Si A et B sont incompatibles alors $p(A\cap B)=0$.

4) $p_B(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$.

5) Si $A\subset B$ alors $A\cap B=A$.

Le sorcier du château

Chapitre concerné : 13. Probabilités

☐ Ce que montre cet exo

Les risques qu'on prend en allant voir un sorcier du bas Moyen Age…

- **L'énoncé**

Dans la cellule du sorcier d'un château, un « aventurier » doit à l'aveugle plonger la main dans l'une des trois boîtes face à lui (il ne peut en choisir qu'une) et prélever une et une seule fiole.
Dans la boîte de gauche, il y a 5 fioles roses et 2 fioles blanches.
Dans la boîte du centre, il y a 2 fioles roses et 5 fioles blanches.
Dans la boîte de droite, il y a 3 fioles roses et 4 fioles blanches.
Sachant que les fioles roses vont le changer en roi couvert d'or et que les fioles blanches vont le changer en chèvre, déterminer la probabilité que l'« aventurier » soit changé en roi couvert d'or.

- **Corrigé**

C'est une application élémentaire de la formule des probabilités totales.
En utilisant les abréviations G (gauche), C (centre), D (droite), R (rose) et B (blanche), la probabilité cherchée vaut : $p(R)=p(G)\times p_G(R)+p(C)\times p_C(R)+p(D)\times p_D(R)$

soit : $p(R)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{7}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{10}{21}$.

Ainsi la probabilité que l'« aventurier » soit changé en roi couvert d'or est de $\frac{10}{21}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Formule des probabilités totales : $p(A)=p(B_1)p_{B_1}(A)+p(B_2)p_{B_2}(A)+p(B_3)p_{B_3}(A)$ où $\{B_1,B_2,B_3\}$ forme un système complet d'événements.

Les buteurs au foot

Chapitre concerné : 13. Probabilités

☐ Ce que montre cet exo

Qu'on peut calculer une probabilité de manière « quasi rétro-active » en appliquant la formule de Bayes (en gros un événement vient de se produire, quelle est la probabilité que ce soit la responsabilité de l'un ou de l'autre).

• L'énoncé

Dans une équipe de foot, il y a huit droitiers et trois gauchers. Les droitiers marquent avec 65 % de succès. Les gauchers marquent avec 75 % de succès.
Un but vient d'être marqué par l'équipe. Calculer la probabilité que le buteur soit droitier (écrire le résultat sous forme de fraction irréductible puis en pourcentage arrondi au dixième).

• Corrigé

Soit B l'événement : « le joueur a mis un but » et D l'événement « le joueur est droitier ».
On cherche la probabilité $p_B(D)$.

D'après la formule de Bayes, $p_B(D) = \dfrac{p(D)\times p_D(B)}{p(D)\times p_D(B) + p(\overline{D})\times p_{\overline{D}}(B)}$. Or :

$p(D) = \dfrac{8}{11}$ (car il y a huit droitiers dans l'équipe de 11 joueurs) ;

$p_D(B) = 0{,}65$ (car les droitiers marquent avec 65 % de succès) ;

$p(\overline{D}) = \dfrac{3}{11}$ (car $\overline{D}$ est l'événement « le joueur est gaucher » et qu'il y a trois gauchers dans l'équipe) ;

$p_{\overline{D}}(B) = 0{,}75$ (car les gauchers marquent avec 75 % de succès).

Donc : $p_B(D) = \dfrac{\frac{8}{11}\times 0{,}65}{\frac{8}{11}\times 0{,}65 + \frac{3}{11}\times 0{,}75} = \dfrac{\frac{8}{11}\times\frac{65}{100}}{\frac{8}{11}\times\frac{65}{100} + \frac{3}{11}\times\frac{75}{100}} = \dfrac{\frac{520}{1100}}{\frac{745}{1100}} = \dfrac{520}{745} = \dfrac{104}{149} \simeq 69{,}8\ \%$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

La formule de Bayes (1702-1761) : $p_B(A) = \dfrac{p(A)\times p_A(B)}{p(A)\times p_A(B) + p(\overline{A})\times p_{\overline{A}}(B)}$.

La formule de Poincaré

Chapitre concerné : 13. Probabilités

☐ Ce que montre cet exo

La généralisation à 3 événements de la formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

- **L'énoncé**

Démontrer la formule de Poincaré (1854-1912) :
$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - \left[p(A \cap B) + p(B \cap C) + p(C \cap A)\right] + p(A \cap B \cap C)$.

- **Corrigé**

Nous allons utiliser la formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

$$p(A \cup B \cup C) = p\left((A \cup B) \cup C\right)$$
$$= p(A \cup B) + p(C) - p\left((A \cup B) \cap C\right)$$
$$= p(A \cup B) + p(C) - p\left((A \cap C) \cup (B \cap C)\right)$$
$$= \underbrace{p(A) + p(B) - p(A \cap B)}_{p(A \cup B)} + p(C) - p\left((A \cap C) \cup (B \cap C)\right)$$
$$= p(A) + p(B) - p(A \cap B) + p(C) - \left[p(A \cap C) + p(B \cap C) - p\left((A \cap C) \cap (B \cap C)\right)\right]$$
$$= p(A) + p(B) - p(A \cap B) + p(C) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p\left((A \cap C) \cap (B \cap C)\right)$$
$$= p(A) + p(B) - p(A \cap B) + p(C) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$
$$= p(A) + p(B) + p(C) - \left[p(A \cap B) + p(A \cap C) + p(B \cap C)\right] + p(A \cap B \cap C).$$

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Les formules :

1) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

2) $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$.

3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

4) $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ car $C \cap C = C$.

Les elfes et les gobelins

Chapitre concerné : 14. Variables aléatoires sur un univers fini

☐ Ce que montre cet exo

La détermination d'une loi de probabilité à l'aide de p-listes et de combinaisons.

• L'énoncé

Dans les terres du milieu, il y a 3 elfes-archers et 6 gobelins. Chaque archer va choisir au hasard de tirer une flèche sur l'un des 6 gobelins. Les archers sont suffisamment entraînés pour ne pas rater leur cible.
Soit X la variable aléatoire associée au nombre de gobelins touchés. Déterminer la loi de X.

• Corrigé

Nombre de cas possibles : $6^3 = 216$.
En effet, si l'on numérote les gobelins par 1, 2 … 6, chaque tir des 3 elfes est une 3-liste de la forme (a,b,c) où $a,b,c \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

L'événement $\{X=1\}$ (un seul gobelin touché) contient les 3-listes de la forme (a,a,a) où $a \in \{1,2,\cdots,6\}$. Il y en a 6. Donc $p(X=1) = \dfrac{6}{216}$.

L'événement $\{X=2\}$ (deux gobelins touchés) contient les 3-listes de la forme (a,a,b), (a,b,a) (b,a,a), (a,b,b), (b,a,b), (b,b,a), où $a,b \in \{1,2,\cdots,6\}$ avec $a \neq b$.

Il y en a $\underbrace{\dbinom{6}{2}}_{\text{pour le choix de a et b}} \times 6$. Donc $p(X=2) = \dfrac{\dbinom{6}{2}\times 6}{216} = \dfrac{90}{216}$.

L'événement $\{X=3\}$ (trois gobelins touchés) contient les 3-listes de la forme (a,b,c), (a,c,b) (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a), où $a,b,c \in \{1,2,\cdots,6\}$ avec a, b et c distincts.

Il y en a $\underbrace{\dbinom{6}{3}}_{\text{pour le choix de a b et c}} \times 6$. Donc $p(X=3) = \dfrac{\dbinom{6}{3}\times 6}{216} = \dfrac{120}{216}$.

Récapitulons :

loi de X : $p(X=1) = \dfrac{6}{216}$, $p(X=2) = \dfrac{90}{216}$, $p(X=3) = \dfrac{120}{216}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Il y a n^p p-listes parmi $\{1,2,\cdots,n\}$.

2) Il y a $\dbinom{n}{k}$ manières de choisir k éléments parmi n.

La pièce et Bienaymé-Tchebychev

Chapitre concerné : 14. Variables aléatoires sur un univers fini

☐ Ce que montre cet exo

Comment utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

- **L'énoncé**

On veut déterminer le nombre de fois qu'il suffit de lancer une pièce pour que la probabilité que la fréquence des piles observés soit comprise entre 40% et 60% soit supérieure à 95 %.

1) Soit n le nombre de lancers cherché. Soit X_n la variable aléatoire associée au nombre de fois où la pièce est tombée sur « pile ». Déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

2) Soit Y_n la variable aléatoire définie par $Y_n = \frac{X_n}{n}$. Y_n étant associée à la fréquence de piles observés, déterminer $E(Y_n)$, $V(Y_n)$ et $\sigma(Y_n)$.

3) En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, en déduire le résultat.

- **Corrigé**

1) X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$. On a donc $E(X_n) = np = \frac{n}{2}$ et $V(X_n) = \frac{n}{4}$.

2) $E(Y_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{E(X_n)}{n} = \frac{\frac{n}{2}}{n} = \frac{1}{2}$, $V(Y_n) = V\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{V(X_n)}{n^2} = \frac{\frac{n}{4}}{n^2} = \frac{1}{4n}$ et $\sigma(Y_n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

3) Que la fréquence des piles observés soit comprise entre 40 % et 60 % revient à dire que Y_n soit compris entre 0,40 et 0,60 ou encore que $|Y_n - E(Y_n)| \le 0{,}10$ (car $E(Y_n) = \frac{1}{2} = 0{,}50$).

Or d'après Bienaymé-Tchebychev : $p(|Y_n - E(Y_n)| \ge 0{,}10) \le \frac{(\sigma(Y_n))^2}{0{,}10^2}$ donc :

$p(|Y_n - E(Y_n)| \le 0{,}10) \ge 1 - \frac{(\sigma(Y_n))^2}{0{,}10^2}$ c'est à dire $p(|Y_n - E(Y_n)| \le 0{,}10) \ge 1 - \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2}{0{,}10^2}$ c'est à dire $p(|Y_n - E(Y_n)| \le 0{,}10) \ge 1 - \frac{1}{0{,}04n}$. Une condition suffisante que $p(|Y_n - E(Y_n)| \le 0{,}10) \ge 0{,}95$ est $1 - \frac{1}{0{,}04n} \ge 0{,}95$ c'est-à-dire $\frac{1}{0{,}04n} \le 0{,}05 \Leftrightarrow 0{,}04n \ge 20 \Leftrightarrow n \ge 500$.

Ainsi il suffit d'effectuer 500 lancers.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Si X suit la loi binomiale de paramètres p et n alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

2) Linéarité de l'espérance.

3) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et d'écart type $\sigma(X)$ alors pour tout $\alpha > 0$, on a $p(|X - E(X)| \ge \alpha) \le \frac{(\sigma(X))^2}{\alpha^2}$.

Le robot sur l'étagère

Chapitre concerné : 14. Variables aléatoires sur un univers fini

☐ Ce que montre cet exo

Comment déterminer la probabilité qu'un robot tombe d'une étagère.

- **L'énoncé**

Un robot est posé au centre d'une étagère (abscisse 0) de 2 m de large. A chaque étape, il se déplace de 1 dm vers la droite avec une probabilité p ou de 1 dm vers la gauche avec une probabilité $1-p$. Soit X la variable aléatoire associée à son abscisse au bout de n étapes.

1) On veut déterminer la loi de X. Soit X_i la variable aléatoire qui vaut 1 avec la probabilité p et -1 avec la probabilité $1-p$ (on a donc $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$). Soit $Y_i = \dfrac{1+X_i}{2}$.

a) Quelle loi suit Y_i ? Quelle loi suit $Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$? En déduire $p(Y=k)$ pour $0 \le k \le n$.

b) Déterminer les valeurs possibles de X puis déterminer $p(X = 2k-n)$ pour $0 \le k \le n$.

2) On suppose que $p = 0{,}5$.

a) Quelle est la probabilité que le robot tombe de l'étagère au bout de 10 étapes ?

b) Selon vous, si $p > 0{,}5$, augmente-t-on ou diminue-t-on cette probabilité ?

- **Corrigé**

1) a) Y_i prend la valeur 1 avec la proba p et la valeur 0 avec la proba $1-p$ donc Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Y suit donc une loi binomiale de paramètres n et p.

Ainsi $p(Y=k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

b) Les valeurs possibles de X sont pour $-n, \cdots, n$.

Comme $Y = \dfrac{n+X}{2}$, on a $p(X = 2k-n) = p(2Y - n = 2k - n) = p(Y=k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

2) a) Cela revient à déterminer $p(X=10) + p(X=-10)$ pour $n = 10$ (ce qui correspond à $k = 10$ et $k = 0$) car le robot ne peut pas tomber de l'étagère en moins de 10 étapes.

La probabilité vaut $\dbinom{10}{10} 0{,}5^{10} 0{,}5^{0} + \dbinom{10}{0} 0{,}5^{0} 0{,}5^{10} = 2 \times 0{,}5^{10} \simeq 0{,}002$ (soit 0,2%).

b) Si $p > 0{,}5$, on augmente cette probabilité. Il suffit pour cela de réfléchir au cas extrême où $p = 1$ où le robot sera par terre avec certitude au bout des 10 étapes.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p alors $p(X=0) = 1-p$ et $p(X=1) = p$.

2) Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors $p(X=k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Proba d'avoir le même nombre de piles

Chapitre concerné : 14. Variables aléatoires sur un univers fini

☐ Ce que montre cet exo

Le calcul de la probabilité que 2 personnes aient le même nombre de piles au bout de n lancers de pièces.

- **L'énoncé**

Xavier et Yann ont tous les deux une pièce de monnaie équilibrée. Ils la lancent chacun n fois et comptent le nombre de piles obtenus. Soient X et Y les variables aléatoires associées au nombre de piles obtenus par Xavier et par Yann. On veut déterminer $p(X=Y)$.

1) Déterminer les lois suivies par X et Y.

2) Montrer que $p(X=Y)=\sum_{k=0}^{n} p(X=k)p(Y=k)$ puis que : $p(X=Y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

3) En utilisant la formule de Vandermonde $\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n'}{p-k}=\binom{n+n'}{p}$, en déduire que $p(X=Y)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\binom{2n}{n}$.

- **Corrigé**

1) En considérant comme succès le fait d'obtenir pile à chaque étape, X et Y suivent une loi binomiale de paramètres n et $p=\frac{1}{2}$.

2) $p(X=Y)=\sum_{k=0}^{n} p(X=k \text{ et } Y=k)=\sum_{k=0}^{n} p(X=k)p(Y=k)$ (car X et Y sont indépendantes).

Or $p(X=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$ et $p(Y=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$, donc $p(X=Y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

Comme $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, on a $\binom{n}{k}^{2}=\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ et donc $p(X=Y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

3) On a $p(X=Y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\binom{2n}{n}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors $p(X=k)=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$.

2) Lois indépendantes : $p(X=k \text{ et } Y=k')=p(X=k)p(Y=k')$.

3) Formule de Vandermonde $\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n'}{p-k}=\binom{n+n'}{p}$. Pour la preuve, voir partie algèbre.

TOUS LES EXOS MATHÉMATIQUES

EXERCICES CORRIGÉS / CONSEILS

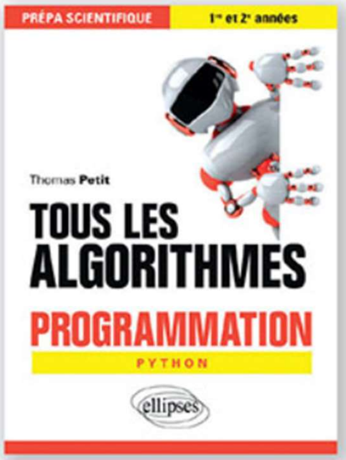
Pourquoi, parmi les innombrables livres de Prépa, acheter ce livre ?

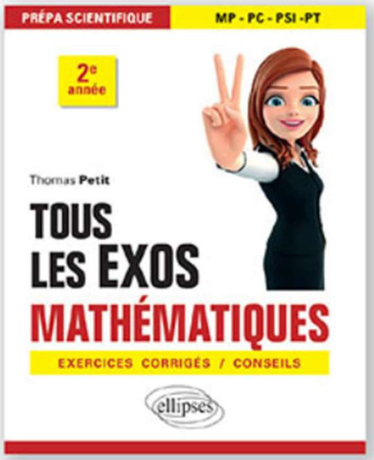
Voici le top 5 des bonnes raisons !

- Raison n° 5 : Parce que je n'ai pas le temps de lire des manuels de 1000 pages.
- Raison n° 4 : Parce que je suis perdu et que je ne sais pas par où commencer pour enfin comprendre quelque chose.
- Raison n° 3 : Parce que j'ai envie de faire le tour du programme à l'aide d'exemples basiques, fondamentaux et simples.
- Raison n° 2 : Parce qu'il est facilement transportable : très utile pour réviser dans les couloirs avant une colle de Maths.
- Raison n° 1 : Parce que le gros DS, c'est demain et que j'ai la curieuse impression de ne plus rien savoir…

Dans ce livre, près de 160 exos incontournables ont été choisis et testés par de vrais étudiants parfois perdus ou démoralisés. Si c'est votre cas, nous faisons le pari que « quand vous les aurez vus, ça ira tout de suite mieux ! »

Thomas Petit *est professeur agrégé de Mathématiques au lycée Marie Curie de Nogent-sur-Oise, examinateur en Classe préparatoire et auteur de plusieurs livres.*





www.editions-ellipses.fr
9 782340 028685

Illustration de couverture : © pixdesign123 - Fotolia.com