100 Jeux pour bien maîtriser les maths

Zbigniew Romanowicz, Bartholomew Dyda

La logique c'est fantastique

Rose de la Fontaine

Classes de collège

100 Jeux pour bien maîtriser les maths

Zbigniew Romanowicz, Bartholomew Dyda

La logique c'est fantastique

Rose de la Fontaine

Classes de collège

100 Jeux pour bien maîtriser les maths

Zbigniew Romanowicz

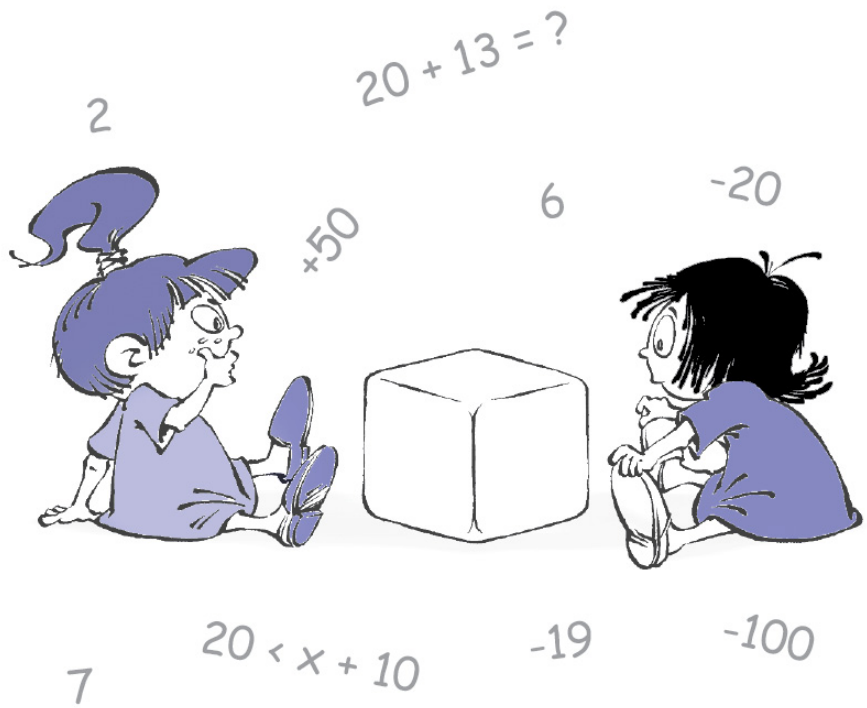
Bartholomew Dyda

Rose de la Fontaine

CHAPITRE 1

NOMBRES NATURELS

ET ENTIERS

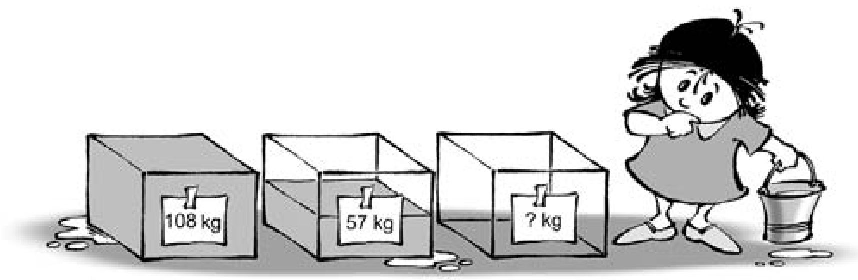


1. À LA LIBRAIRIE

Agathe veut acheter 8 livres, mais il lui manque 7 euros. Elle achète seulement 7 livres et alors il lui reste 5 euros. Quel est le prix d'un seul livre s'ils coûtent tous le même prix ?

2. L'AQUARIUM

Un aquarium cubique rempli à ras bord avec de l'eau pèse 108 kg. Le même aquarium à moitié plein pèse 57 kg. Quel est le poids de l'aquarium vide ?



3. MULTIPLIER

Sur la figure ci-dessous, trouve le domino mystère qui donne le résultat de la multiplication d'un nombre de trois chiffres par un nombre d'un chiffre dont le résultat est égal à 2 532 ?

4. L’ANNÉE DE NAISSANCE DE SOPHIE

En janvier 1993, l’âge de Sophie égale la somme des chiffres compris dans son année de naissance. En quelle année est née Sophie ?

5. JE NE SERAI PAS UN TRIANGLE !

Christine a trouvé six nombres à deux chiffres, tels que trois d’entre eux ne peuvent constituer les longueurs des côtés d’un triangle.
Peux-tu trouver ces nombres ?
Rappel : Étant donné que $a, b, c > 0$ *sont les longueurs d’un certain triangle, si* $a + b > c$, $b + c > a$, *et* $c + a > b$, *la longueur de n’importe quel côté d’un triangle est plus petite que la somme des longueurs des deux autres côtés.*

6. MESURER DU SUCRE

Avec une balance à deux plateaux et seulement quatre poids de 1 g, 3 g, 9 g et 27 g, comment mesurer 15 g de sucre, puis 25 g ?

7. UN HOMME ÉNIGMATIQUE

Quand Auguste de Morgan (un mathématicien né et mort au XIX^e siècle) était interrogé sur son âge, il répondait : « *j'avais* x *années dans l'année* x^2 ». En quelle année était-il né ?

Quelqu'un né et mort au XX^e siècle pourrait-il répondre comme Auguste de Morgan à la question sur son âge ?

8. QU'EST-CE QUE TOM A ÉCRIT ?

Tom a écrit deux entiers positifs constitués des chiffres suivants 1, 2, 3, 4, 5, et 6. Chacun des chiffres apparaît seulement une fois et une seule dans un seul des deux nombres. Quand Tom additionne ces nombres, il obtient 750. Quels sont ces deux nombres ?

9. UN NOMBRE À NEUF CHIFFRES

Avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, forme un nombre à neuf chiffres dans lequel chacun des chiffres est utilisé une seule fois, et de plus, chaque chiffre est soit plus grand de cinq unités soit plus petit de quatre par rapport au précédent. Combien de tels nombres peut-on former ?

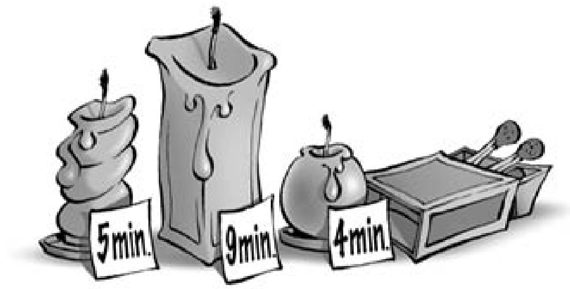
10. LES ÉLÈVES ET LA GÉOMÉTRIE

Le professeur a donné à ses élèves de cinquième un problème de géométrie difficile à résoudre. Le nombre de garçons qui ont réussi est égal au nombre de filles qui n’ont pas réussi plus un. Quel groupe était plus nombreux que l’autre : celui de tous les élèves qui ont résolu le problème ou celui des filles ?

11. DES MONTRES EN CIRE

Tu as 3 bougies, la première brûle en 4 minutes, la deuxième en 5 minutes et la troisième en 9 minutes. Comment mesurer 6 minutes en allumant et éteignant les bougies ?

On fait l’hypothèse que l’allumage et l’extinction ont lieu sans délai.



12. UNE SUITE BIZARRE

Y a-t-il une suite de onze nombres entiers autres que zéro dont la somme de sept chiffres successifs est toujours positive alors que la somme de tous ses termes est un nombre négatif ?
Indice : Est-ce qu’une suite de trois termes a, b, c existe dans laquelle $a + b + c < 0$, mais $a + b > 0$ et $b + c > 0$?

13. DES POINTS SUR LES CÔTÉS DU DÉ

Anne et Christine sont assises face à face devant un gros dé. Chaque fille voit la face supérieure du dé et seulement deux des quatre faces latérales, mais elles ne voient pas les mêmes. Anne a compté dix points sur ses trois côtés alors que Christine en voit quatorze. Combien de points y a-t-il sur le côté invisible pour les filles ?
Note : La somme des points sur les côtés opposés est toujours égale à 7.

14. ELLE EST ÉTOURDIE, JEANNE !

Jeanne aide sa tante dans sa boutique de bonbons. Lorsque le magasin ferme le soir, la jeune fille doit compter toutes les tablettes de chocolat qui sont restées sur les étagères. Mais en raison de sa distraction, elle a oublié d’écrire le dernier chiffre du nombre de tablettes. Le lendemain matin, sa tante a trouvé, à sa grande surprise que le nombre de tablettes de chocolat

sur les étagères était supérieur de 89 au nombre trouvé dans le carnet de Jeanne.
Quel était le nombre écrit par Jeanne ?

15. UNE QUESTION D'ÂGE

Deux sœurs, Barbara et Monique, célèbrent leur anniversaire ensemble depuis qu'elles sont nées, le même jour et le même mois, sauf que Barbara est de deux ans plus jeune que Monique. À une question indiscrète sur son âge, Monique a répondu avec un sourire : « *Barbara est très jeune. Elle est plus jeune que la somme de nos âges il y a neuf ans. Quant à moi, je suis très vieille car je suis plus vieille que la somme de nos âges il y a neuf ans.* »
Quel est l'âge de chaque sœur ?

16. BREST A LE DESSUS !

Le score final du match de hockey entre les Albatros de Brest et les Scorpions de Mulhouse est de 9 à 5. Est-il possible que, à un moment du match, les Albatros aient eu exactement le même nombre de buts que les Scorpions auront marqués dans le reste du match ?

17. UN PROBLÈME DE CHOCOLAT

Un commerçant a 30 barres de chocolat, dont chacune pèse 10, 15 ou 20 dag. Le poids total des barres est de 500 dag. Le commerçant a-t-il plus de barres de 10 ou de 20 dag ?

18. LES ROITELETS

Un roi a de nombreux enfants. Son fils aîné est un des jumeaux et les autres enfants, à l’exception de sept, sont aussi des jumeaux. En outre, tous les enfants du roi sont des triplés, sauf les sept. Combien le roi a-t-il eu d’enfants ?

19. PAIR ? IMPAIR ? PAIR ? …

Un entier *m* est le carré d'un nombre à deux chiffres et se termine par 5. Le troisième chiffre de *m* en partant de la fin est-il pair ou impair ?

20. UN GRAND CONCOURS POUR LES AUTEURS DE PROBLÈMES DE MATHS

Dix élèves de sixième ont proposé 35 problèmes de maths intéressants. Parmi les participants, il y a au moins un élève qui a proposé un problème, au moins un autre qui en a proposé deux, et au moins un autre trois. La plupart des problèmes ont été proposés par Philippe. Quel est le plus petit nombre possible de problèmes qu'il aurait pu soumettre ?

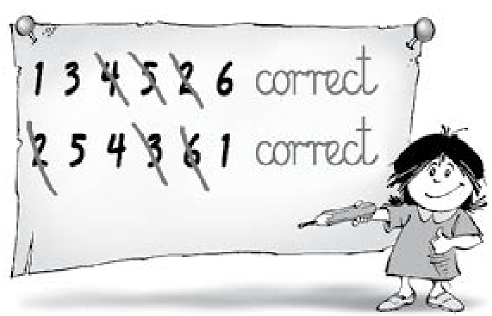
21. TOM ET SES SUITES

Tom a écrit les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, et 7 dans une suite, mais dans un ordre tel que si nous rayons trois nombres quelconques, il restera toujours quatre chiffres qui forment une suite ni croissante ni décroissante. Peux-tu trouver la suite de Tom ?

Y a-t-il une seule façon d'écrire une telle suite ?

22. AGATHE DIT

Agathe dit que, si tu écris les nombres 1, 2, 3, 4, 5, et 6 dans n'importe quel ordre, tu seras toujours en mesure de rayer trois d'entre eux de telle sorte que les trois autres devraient former une suite croissante ou décroissante. A-t-elle raison ?



23. EXAMEN APRÈS EXAMEN

Pendant ses cinq années d'études un étudiant a passé 33 examens. Chaque année, il a passé moins d'examens que l'année précédente. Le nombre de ses examens la première année était trois fois plus grand que le nombre de ses examens la dernière année. Combien d'examens l'élève a-t-il passé dans sa troisième année ?

24. MÉLANGER LES CHIFFRES

Trois nombres à trois chiffres, dans lesquels sont représentés tous les chiffres sauf zéro, font un total de 1 665. Dans chacun de ces nombres on intervertit le premier et le dernier chiffre puis on additionne les nouveaux nombres obtenus de cette façon. Quelle sera leur somme ?

25. LE CODE PIN DE GUILLAUME

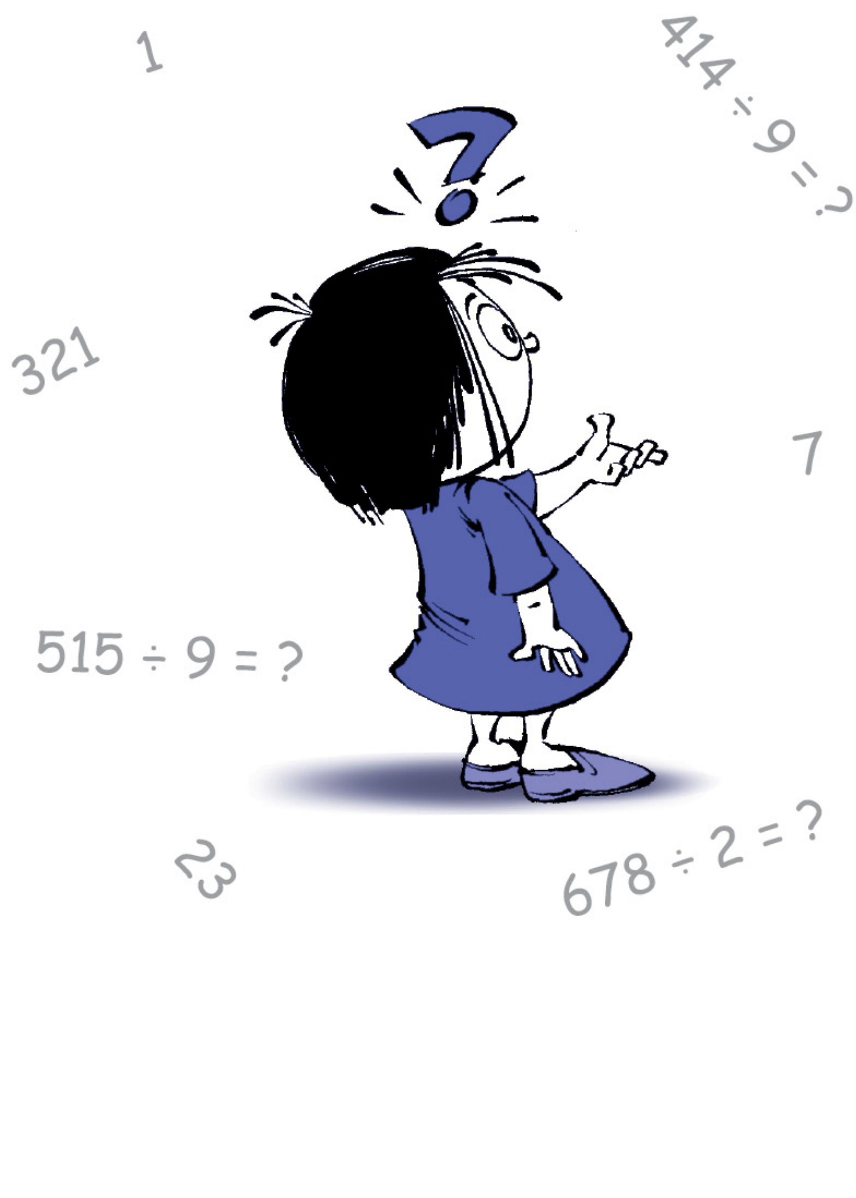
Pour se souvenir de certains codes ou mots de passe, comme un code PIN, il est conseillé d'établir une relation entre les chiffres. Cela facilite la mémorisation. Guillaume a remarqué que dans le code PIN à quatre chiffres de son téléphone portable, le deuxième chiffre (en partant de la gauche) est la somme des deux derniers chiffres, et le premier est le quotient des deux derniers. De plus, les deux premiers chiffres et les deux derniers considérés comme des nombres, ont une somme égale à 100. Quel est le code PIN du téléphone portable de Guillaume ?


4975
6432
7471
5268

CHAPITRE 2

DIVISIBILITÉ ET

NOMBRES PREMIERS

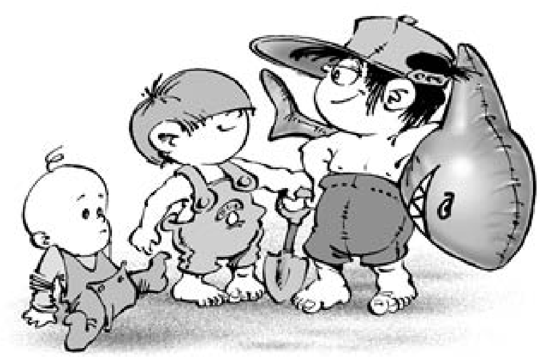


26. QUEL ÂGE A M. WILSON ?

Les Wilson sont nés au XX^{e} siècle. M^{me} Wilson est un an plus jeune que son mari. La somme des chiffres de l'année de naissance du mari et la somme de celle de la femme sont des entiers divisibles par 4. En quelle année M. Wilson est-il né ?

27. LES FILS DE M. TRIANGLE

L'âge de chacun des trois fils de M. Triangle est un entier. La somme de ces entiers est égale à 12, et leur produit à 30. Quel est l'âge de chacun des fils de M. Triangle ?



28. LA MULTIPLICATION MYSTÉRIEUSE

Quels chiffres doit-on affecter à *A* et *B* pour obtenir une équation telle que : $AB \times A \times B = BBB$, où *AB* est un nombre à deux chiffres et *BBB* un nombre à trois chiffres ?

29. UN DRAGON À CENT TÊTES

Il était une fois un terrible dragon qui avait 100 têtes. Avec un coup d'épée, un chevalier pouvait couper une, sept ou onze têtes, mais s'il restait au moins une tête non coupée, quatre, une ou cinq têtes repoussaient dans cet ordre.
Le chevalier est-il capable de tuer le dragon ? Quelle serait la réponse si le dragon avait seulement 99 têtes ?
Rappel : Le dragon ne meurt que s'il ne lui reste plus de tête.

30. LA PUISSANCE D'UN NOMBRE BIZARRE

Est-il vrai que toute puissance du nombre 376 (avec un exposant entier positif) se termine par les trois chiffres : 376 ?

31. DES SOLDATS RANGÉS EN COLONNE

Henri a une armée de soldats en plastique. Quand il essaie de former, avec ses soldats, des colonnes de quatre, il reste trois soldats dans la dernière rangée. Lorsque Henri range ses soldats en colonnes de trois, la dernière rangée est composée de deux soldats. Combien de soldats restent-ils dans la dernière ligne s'il les range en colonnes de six ?

32. LA DEMOISELLE D'ORLÉANS

Jeanne d'Arc fut brûlée sur le bûcher le 30 mai de l'année qui est un nombre impair à 4 chiffres, divisible par 27 et commençant par le chiffre 1. Le produit de ces chiffres est 12. En quelle année Jeanne d'Arc a-t-elle été brûlée ?

33. DES NOMBRES NATURELS SPÉCIAUX

Peux-tu trouver dix nombres naturels différents dont la somme est divisible par chacun des nombres ?
Aide : Commence ta résolution de ce problème avec seulement trois nombres.

34. LA DÉCOMPOSITION D'UN ENTIER

Peut-on représenter chaque nombre naturel supérieur à 5 comme la somme d'un nombre premier et d'un nombre composé ?

35. DIVISER DES NOMBRES

La somme d'entiers positifs $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{49}$ est égale à 999. Quelle valeur a le plus grand commun diviseur (PGCD) des nombres a_1, a_2, a_3, … , a_{49} ?

36. LES SEPT MERCENAIRES

Sept nombres entiers ont été choisis de telle sorte que la somme de deux chiffres quelconques est divisible par 7. Combien de chiffres de l'ensemble choisi sont-ils divisibles par 7 ?

37. NOSTRADAMUS ET SA PROPHÉTIE

Selon Nostradamus (1503-1566), un apothicaire et astrologue français célèbre, sont exceptionnelles, les années qui, écrites sous forme décimale

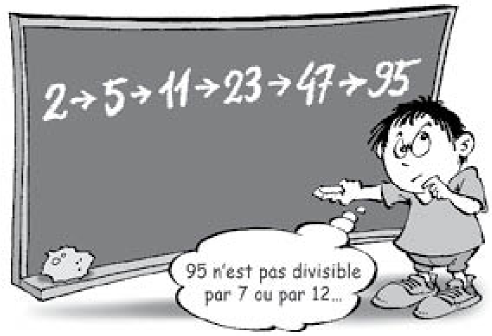
abcd, sont telles que *ab* + *cd* = *bc* où *ab*, *cd* et *bc* sont des nombres à deux chiffres écrits sous forme décimale.
On suppose que si *c* = 0, alors 0*d* désigne un nombre à un chiffre.
Par exemple, l'année 1208 était exceptionnelle, car 12 + 08 = 20.
Quelle année la plus proche de 2006, postérieure à cette année, est-elle exceptionnelle ?

38. L'ÉNIGME DU CARRÉ

Existe-t-il un nombre naturel *a* tel que (a^2 + 2006) soit le carré d'un nombre naturel ?

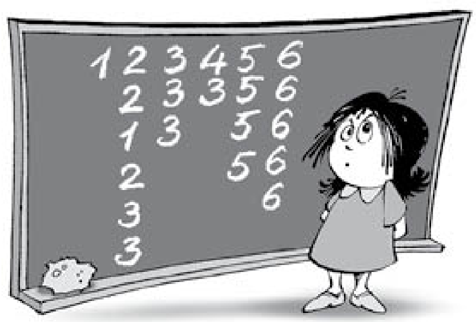
39. MULTIPLIER ET ADDITIONNER, MULTIPLIER ET ADDITIONNER …

Un nombre naturel est multiplié par 2 et ce produit augmenté de 1. Puis le nombre obtenu a été multiplié à nouveau par 2 et on y a ajouté 1. On refait ces opérations cinq fois. Le résultat final peut-il être :
a) divisible par 7 ?
b) divisible par 12 ?



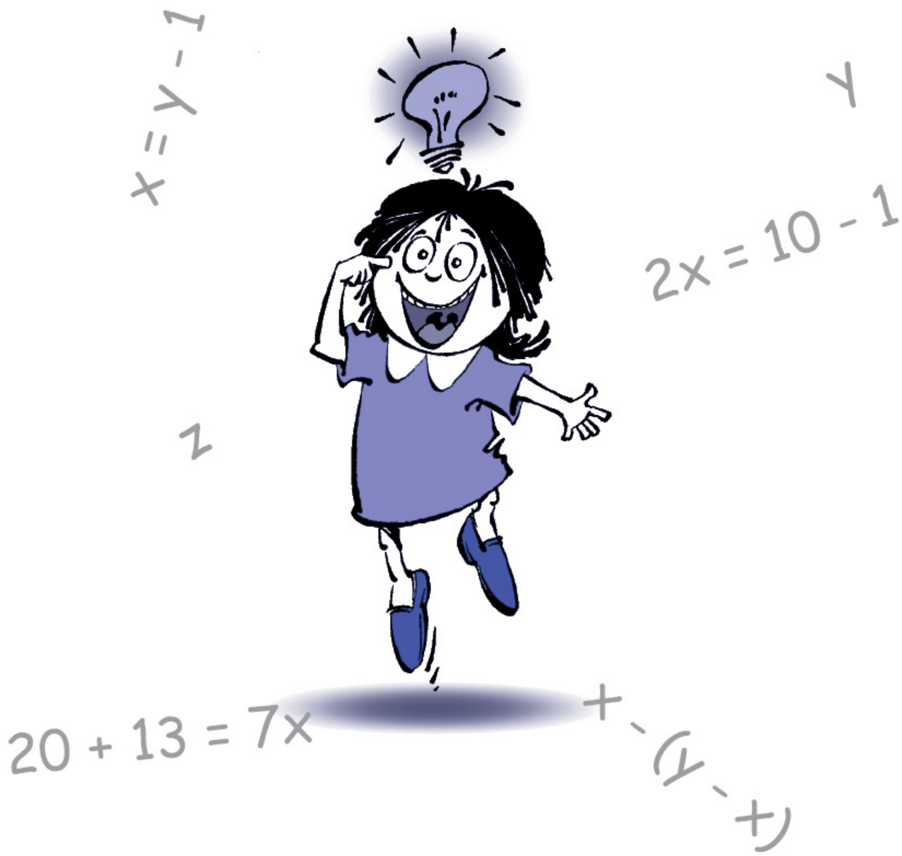
40. JOUER AVEC LES NOMBRES

Les nombres : 1, 2, 3, …, 110 sont inscrits sur le tableau noir. Efface deux nombres pour les remplacer par leur différence. Après avoir fait cela 109 fois, il reste sur le tableau noir un seul nombre.
Serait-ce le 10 ?



CHAPITRE 3

ÉQUATIONS

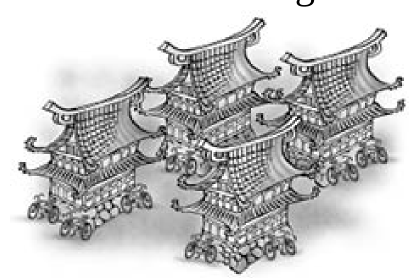


41. UN JEU À SOMME NULLE

Tom et Simon lancent chacun à leur tour un seul dé. Si le un sort, Tom paie 50 centimes à Simon, mais quand c’est une autre valeur, Simon donne à Tom 10 centimes. Après 30 lancers, ils sont à égalité, et aucun d’eux n’a gagné « un centime ». Combien de fois le un est-il sorti ?

42. DES CHINOIS ET LEURS VÉLOS

Dans un village chinois vivent 29 familles. Chaque famille a un, deux ou trois vélos. Il y a autant de familles avec trois vélos que de familles avec un seul. Combien y a-t-il de vélos dans le village ?



43. UN CONCOURS DE SAUT EN LONGUEUR

Dans un concours de saut en longueur à l’école, Marc a fini septième, alors que son ami David était sixième. Guillaume, cependant, a fait mieux que ses deux amis et figurait au milieu, ce qui signifie qu’autant de sauteurs sont devant lui que derrière. Paul a sauté moins bien que Marc et a fini en avant-dernière position. Combien de garçons ont-ils participé à la compétition ?

44. TEL PÈRE, TEL FILS ?

Un père et son fils prennent 8 heures pour retourner un terrain. Le père seul mettrait 12 heures pour accomplir cette tâche. Combien d'heures mettrait le fils pour le faire seul ?

45. DES ESCARGOTS RAPIDES

Deux escargots, Rapido et Presto, sont en compétition le long d'une piste divisée en trois parties. Chaque partie mesure exactement un mètre. Rapido avance à une vitesse constante, alors que Presto couvre la première partie de la piste à une vitesse deux fois plus élevée que celle de Rapido, la deuxième à la même vitesse et la troisième à la moitié de la vitesse de son rival. Qui va gagner, et de combien de mètres ?

46. LES AMATEURS DE GÂTEAUX

À la pâtisserie, il y a trois types de gâteaux. Les prix sont en euros.
Pour un euro, on peut acheter un gâteau à la crème, deux gâteaux aux fruits, ou trois beignets. Deux frères, Jérémie et Roger, avaient reçu onze euros de leurs parents et ils ont invité un groupe de copains à manger avec eux. Le groupe se composait d'autant de garçons que de filles. Chaque enfant a eu droit au même nombre de gâteaux. Combien y avait-il d'enfants ?

47. ACHETER UN NOUVEAU BALLON

Trois garçons ont acheté un ballon de football pour 45 euros. Le premier a donné un montant inférieur à celui des deux autres. Le deuxième a donné moins que la moitié de la somme versée par les deux autres. Le troisième a contribué pour moins d'un cinquième du montant des deux autres.
Combien chaque garçon a-t-il donné pour payer le ballon ?

48. LES FARCEURS

Jean et Pierre aiment se jouer des tours. Hier, ils étaient sur un escalator descendant dans un centre commercial. A mi-hauteur, Jean a arraché la casquette de Pierre et l'a jetée sur l'escalator montant. Pierre, en un rien de temps, a grimpé en haut de l'escalier roulant pour reprendre sa casquette. Jean, de son côté, a couru en bas, puis pris l'escalator montant pour attraper la casquette de Pierre. Les garçons ont couru à la même vitesse, aussi bien en montant qu'en descendant (leur vitesse était deux fois plus élevée que celle de l'escalier mécanique). Qui a attrapé la casquette le premier ?

49. UNE LONGUEUR D'AVANCE

André court plus vite que David, et dans une course de 100 m, lorsqu'il franchit la ligne d'arrivée, David est à 20 m de la fin de la course. Leur ami Jean a tracé une ligne 20 m derrière la ligne de départ, et dit : *« Que David commence à la ligne de départ et André à la nouvelle. S'ils commencent en même temps et courent à leur vitesse habituelle, ils finiront au coude à coude »*.
Jean a-t-il raison ? Si non, à quelle distance de la ligne de départ David doit-il partir pour que les deux coureurs finissent en même temps ?

50. DES QUERELLES TOUT AU LONG DU CHEMIN

Lors d'un voyage scolaire, avec tous les élèves de la classe 5B, il y a eu plusieurs malentendus qui ont divisé la classe en deux groupes distincts. Si Sophie décide de quitter le groupe 1 et de rejoindre le groupe 2, le premier groupe ferait un tiers de la classe. Si, toutefois, Adam, Michel et Guillaume quittent le second groupe pour le premier, ce dernier ferait la moitié de la classe.

Combien d'élèves sont en 5B ?

51. DU FIL À RETORDRE

Imagine 2 005 fractions :

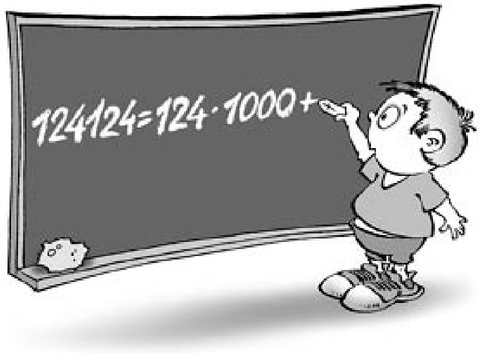
$$\frac{2}{2\,006}, \frac{3}{2\,005}, \frac{4}{2\,004}, \ldots, \frac{2\,004}{4}, \frac{2\,005}{3}, \frac{2\,006}{2}.$$

Peux-tu trouver trois fractions parmi celles-ci dont le produit soit égal à 1 ?

52. LE PLUS PETIT NOMBRE

Lequel des nombres suivants est le plus petit :

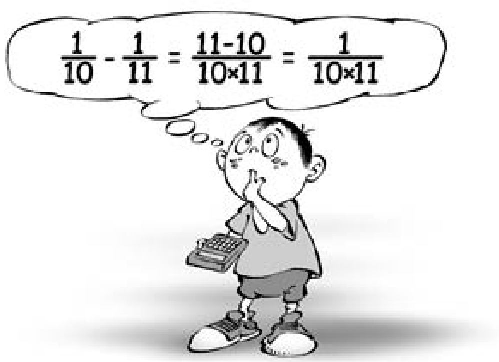
$$\frac{124}{421}, \frac{124\,124}{421\,421}, \frac{1\,240\,124}{4\,210\,421}?$$



53. CALCULER DE LA FAÇON LA PLUS SIMPLE

Donne une façon simple de calculer l'addition :

$$\frac{1}{10\times 11}+\frac{1}{11\times 12}+\ldots+\frac{1}{19\times 20}.$$



54. DES MOITIÉS DE PASTÈQUE

Catherine vend des pastèques au marché.

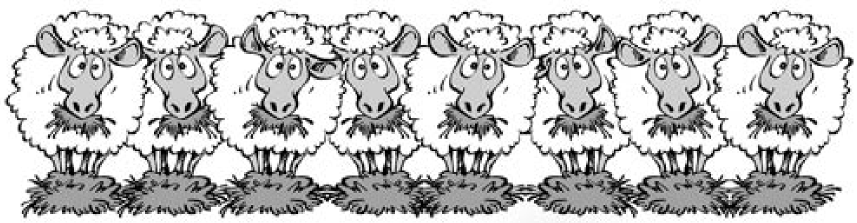
La première cliente, M^{me} Gourmande, a acheté la moitié des pastèques plus une demie. La deuxième cliente, M^{me} Gourmet, a acheté la moitié du reste. La troisième cliente, M^{me} Friande, a encore une fois acheté la moitié de ce qui restait et la moitié d'un fruit. Comme personne n'a acheté la dernière pastèque, Catherine l'a rapportée à la maison. Quelle a été la recette de sa journée si elle a vendu chaque pastèque 2 euros ?

55. LES LAPINS À VENDRE

Un éleveur vend ses lapins au marché. Le premier client achète un sixième de tous les animaux plus un, le deuxième achète un sixième des lapins restants plus deux, le troisième client un sixième des animaux restants plus trois, et ainsi de suite. Quand l'éleveur a tout vendu, il constate, à sa grande surprise, que chaque client avait acheté le même nombre de lapins.
Combien de lapins avait-il emmenés au marché ?
Combien a-t-il eu d'acheteurs ?

56. DES MOUTONS VORACES

Il y a huit moutons dans le troupeau. Le premier mouton engloutit une botte de foin en une seule journée, le deuxième prend deux jours, le troisième mouton a besoin de trois jours et le quatrième de quatre jours, etc. Les bottes sont identiques. Quels moutons mangent le plus vite : les deux premiers ou les six autres ?



57. MICHEL LE GASPILLEUR

Michel est allé au marché. Un quart d’heure plus tard, il a rencontré son ami Mathieu et lui a dit : *« J’ai déjà dépensé la moitié de l’argent que j’avais quand je suis arrivé ici. Il me reste autant de centimes que j’avais d’euros, mais la moitié d’euros que j’avais de centimes »*. L’énigme fait réfléchir Mathieu : il se demande combien Michel avait au début du marché. Aide-le à trouver.

58. LES JUMEAUX ET LES AUTRES

Jacques a quatre ans de plus que Marc et huit ans de plus que David. Le produit de l’âge de Marc et de celui de Paul est supérieur de 16 au produit des âges de Jacques et David. Dans ce groupe, deux garçons sont des jumeaux. Qui sont-ils ?

59. UNE ERREUR DE CAISSE

Michel est allé à sa banque pour encaisser un chèque. Le caissier, par erreur, lui a versé autant en euros qu'il aurait dû lui donner en centimes et autant en centimes qu'il aurait dû donner en euros. Michel n'a pas compté l'argent avant de l'empocher et n'a pas fait attention à une pièce de monnaie de 5 centimes qui est tombée par terre. En comptant l'argent à la maison il a trouvé, à sa grande surprise, qu'il avait deux fois plus que le montant du chèque.
Quelle était la valeur du chèque ?

60. EN RANG PAR DEUX

Lorsque les élèves de la classe 5A se tiennent en rang par deux dans la cour de l'école, le nombre de couples mixtes (un garçon et une fille) est égal au nombre des autres paires.
Combien d'élèves y a-t-il dans la classe, sachant qu'il y a 14 garçons et que les filles sont minoritaires ?

61. L'ÂGE D'ANNE

Marie a 24 ans. Elle a deux fois plus d'années qu'Anne avait quand Marie avait son âge.
Quel est l'âge d'Anne ?

62. MAMIE, QUEL ÂGE AS-TU ?

63. À LA CUEILLETTE DE CHAMPIGNONS

Jean et Alex ont ramassé trois fois plus de champignons que Frank, tandis qu'Alex et Frank avaient cinq fois plus de champignons que Jean.
Qui a cueilli le plus de champignons : Jean avec Frank ou Alex seul ?

64. LES JOUEURS

Ben a proposé à son ami Louis une partie de bataille navale. *« Chaque fois que nous jouerons, l'enjeu sera la moitié de l'argent qu'il y a dans ta poche à ce moment-là. Combien as-tu maintenant ?*

– *32 euros,* a répondu Louis.

– *Si tu gagnes, tu empocheras 16 euros de plus. Si tu perds, tu me donneras 16 euros. Mais ne t'inquiète pas : nous allons jouer plusieurs fois et il se trouve que tu vas gagner plus souvent que moi ».*

Après avoir établi les règles, les garçons ont joué sept fois. Louis a gagné quatre fois et Ben trois. Combien d'argent Louis a-t-il maintenant ?
Note : Nous ne connaissons pas la séquence exacte des victoires et défaites de Louis.

65. SUIS-JE UNE PUISSANCE DE 2 ?

Dans une représentation décimale d’un nombre naturel, chaque chiffre, c’est-à-dire 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, et 0, est utilisé le même nombre de fois. Ce nombre serait-il une puissance de 2 ?

66. UN DISQUE DE PONÇAGE

Michel et Mathieu se cotisent pour acheter un disque de ponçage de 22 pouces de diamètre avec un trou de montage de $^3/_7$ de pouces au milieu.

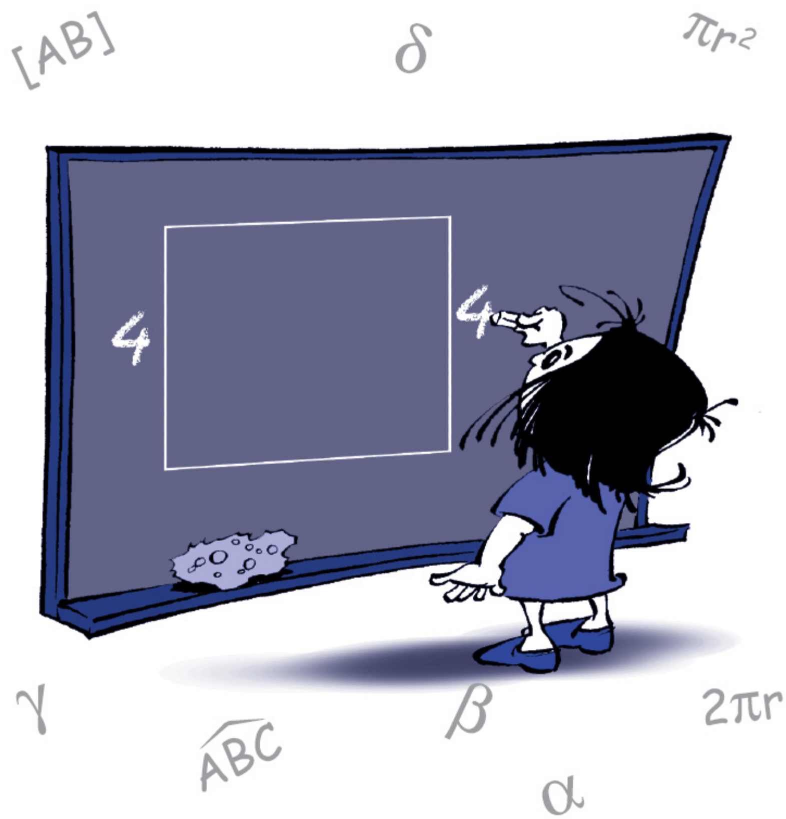
Comme ils vivent à 10 km l’un de l’autre, ils ont convenu que Mathieu serait le premier à le prendre, et lorsqu’il serait usé à moitié, il le donnerait à Michel.

Quel sera le diamètre du disque au moment de l’échange ?

Indice : L’aire du cercle est πr^2*, où r est la longueur du rayon.*

CHAPITRE 4

GÉOMÉTRIE

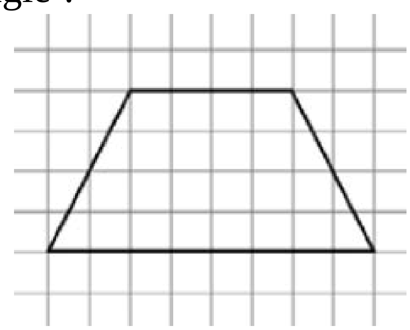


67. LES VILLAGES DU BORD DE LA ROUTE

Le long d'une route, il y a 5 villages. Appelons-les *A*, *B*, *C*, *D*, et *E*. La distance de *A* à *D* est de 6 km, de *A* à *E* 16 km, de *D* à *E* 22 km, de *D* à *C* 6 km, et de *A* à *B* 16 km. Les distances ont été mesurées le long de la route. Trouve l'ordre dans lequel les villages sont situés.

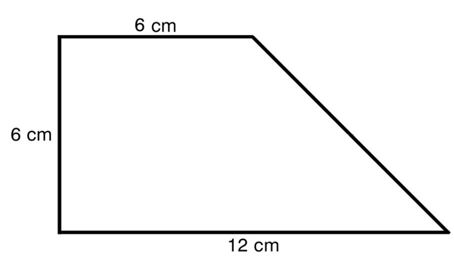
68. DIVISER UN TRAPÈZE EN DEUX

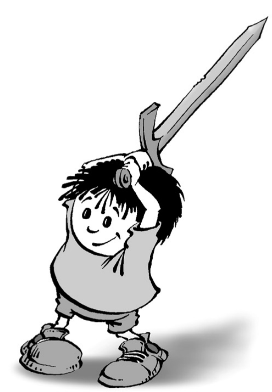
Comment peux-tu diviser le trapèze en deux parties de sorte que pliées, celles-ci forment un triangle ?



69. DIVISER UN TRAPÈZE EN QUATRE

Divise le trapèze présentée ci-dessous en quatre parties identiques coïncidentes.

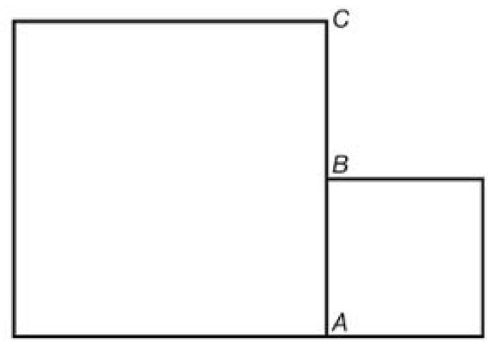




70. COUPER LA FIGURE EN TROIS

Une figure plane se compose de deux carrés tels que [*AB*] = [*BC*] (voir la figure).

Divise la figure avec deux coupes perpendiculaires de sorte que, après translation des 3 parties, celles-ci forment un carré.

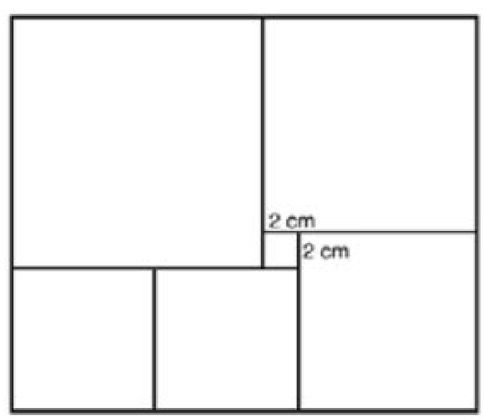


71. UN RECTANGLE DE CARRÉS

Le rectangle représenté par la figure ci-contre se compose de six carrés, le plus petit d'entre eux ayant des côtés de 2 cm.

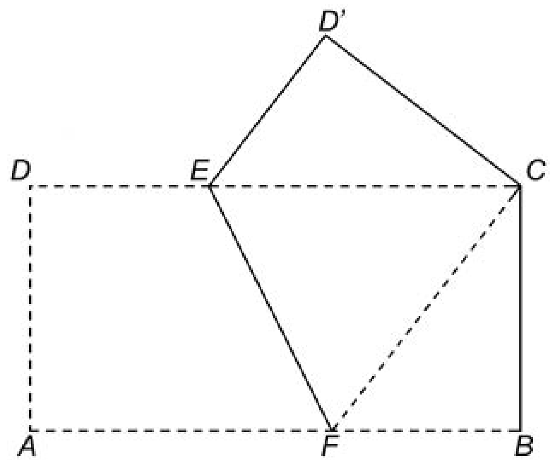
Peux-tu calculer l'aire du rectangle ?

Note : La figure n'est pas à l'échelle !



72. UN PEU DE BLANC, UN PEU DE VERT

Une feuille de papier blanc rectangulaire, aux sommets *ABCD* et à la superficie de 20 cm^2 a été pliée de telle sorte que les sommets opposés *A* et *C* se touchent. Ainsi, on a créé un pentagone *BCD'EF* avec une superficie de 12 cm^2. Les deux côtés sont peints en vert et ensuite dépliés pour revenir au rectangle initial. Un côté du rectangle a maintenant deux couleurs.
Quelle est la superficie de la partie blanche ?

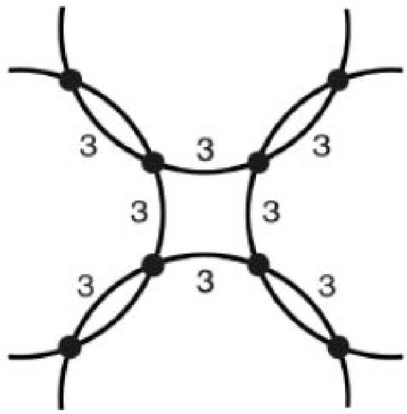


73. UNE LIGNE DROITE

Une ligne droite coupe un carré de telle manière qu'elle divise le périmètre du carré dans un rapport de 9/7 et deux côtés du carré dans un rapport de 7/1 et 5/3. Dans quel rapport la ligne droite a divisé la superficie du carré ?

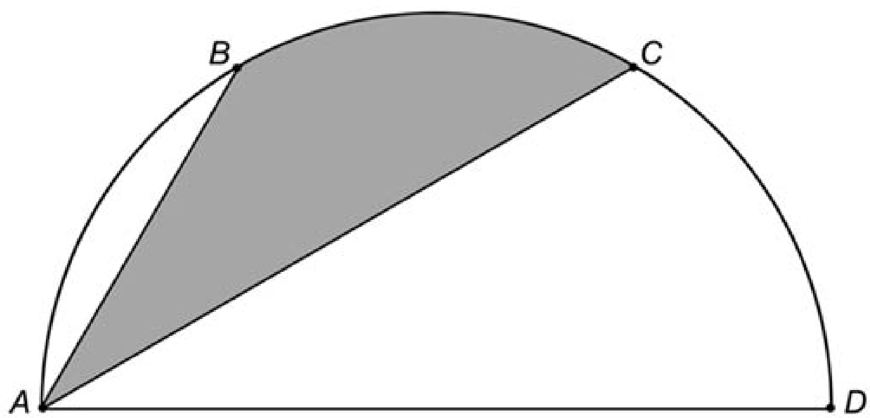
74. LA CIRCONFÉRENCE DES QUATRE CERCLES

Quatre cercles identiques se coupent de telle sorte que la longueur de chaque arc le plus court est égale à 3 cm.
Quelle est la circonférence de chaque cercle ?



75. UN TRIANGLE PAS SI DROIT

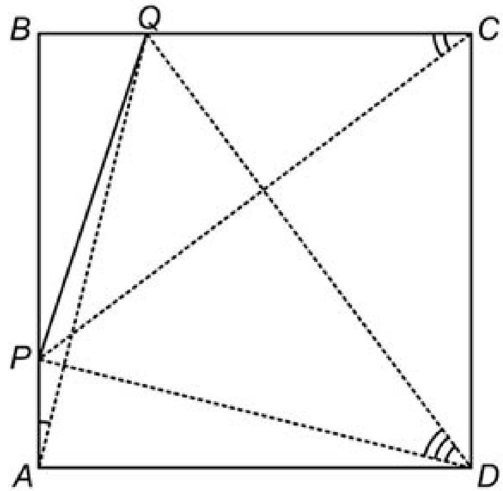
La figure ci-dessous décrit un demi-cercle de rayon $r = 10$ cm. Les points *B* et *C* divisent le demi-cercle *AD* en trois arcs égaux. Calcule l'aire du triangle gris *ABC*.



76. UNE SŒUR MALIGNE

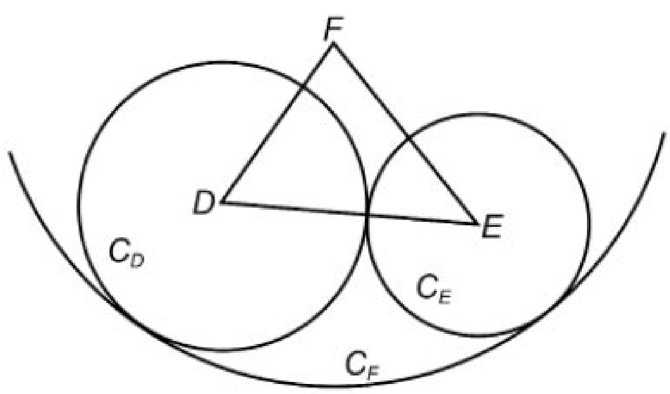
Nicolas marque les points *P* et *Q* sur les côtés du carré *ABCD* à des endroits tels que la somme des longueurs des segments [*PB*] et [*BQ*] soit égale à la longueur du côté du carré *ABCD*. Il a utilisé un rapporteur pour mesurer trois angles : *PAQ*, *PCQ*, *PDQ* face au segment [*PQ*] des sommets *A*, *C* et *D* du carré *ABCD*. Ensuite, Nicolas a ajouté les mesures de ces angles et fut très surpris d'obtenir une somme particulière. Sa sœur aînée, Anne jeta un

œil sur la figure, et sans rien mesurer, calcula dans sa tête la somme des angles.
Comment a-t-elle fait ?



77. DES CERCLES ET UN TRIANGLE

Le périmètre d'un triangle de sommets D, E et F est égal à 30 cm.
Les centres des cercles C_D, C_E et C_F coïncident avec les sommets du triangle, c'est-à-dire D, E et F.
Les cercles C_D et C_E sont extérieurement tangents, et chacun d'eux est tangent intérieurement au cercle C_F.
Quelle est la longueur du rayon du cercle C_F ?

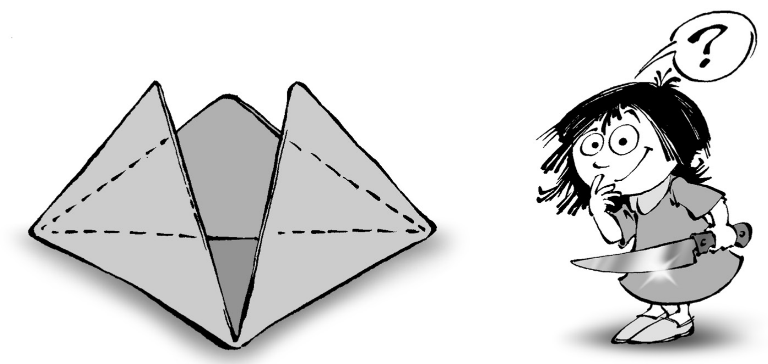


78. UN TRIANGLE MYSTÉRIEUX

Dans un triangle, chaque angle est plus petit que la somme des deux autres angles. Que pouvons-nous dire au sujet de ce triangle ?

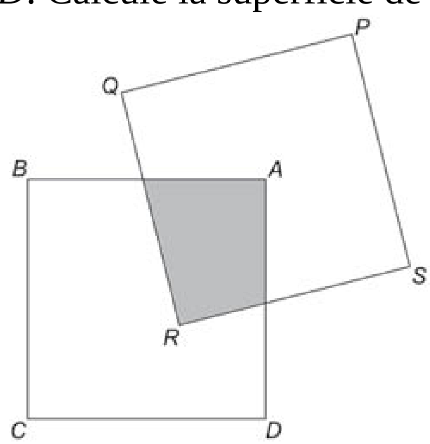
79. UNE BOÎTE DÉCOUPÉE ET APLATIE

Avec un couteau bien aiguisé, nous coupons un tétraèdre en carton le long de trois bords unis par le sommet. Puis, nous aplatissons le carton et posons la figure plane obtenue sur la table. Serait-ce un carré ?



80. UN CARRÉ SUR UN CARRÉ

Un carré *PQRS* de 10 cm de côté chevauche un carré *ABCD* aux côtés de même longueur. Il s'avère que le centre du carré *PQRS* coïncide avec le sommet *A* du carré *ABCD*. Calcule la superficie de la zone d'intersection.

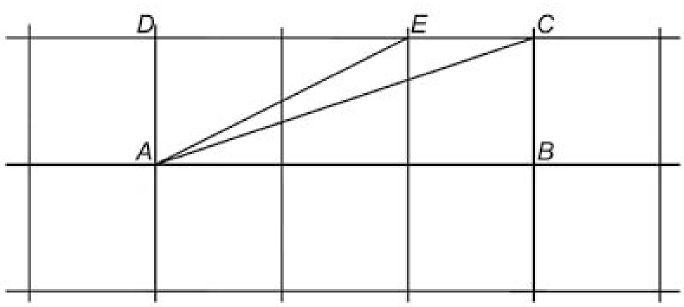


81. UNE TERRE TRIANGULAIRE

Une île a la forme d’un triangle. Où se trouve le point le plus éloigné de la mer ?

82. AJOUTER LES ANGLES

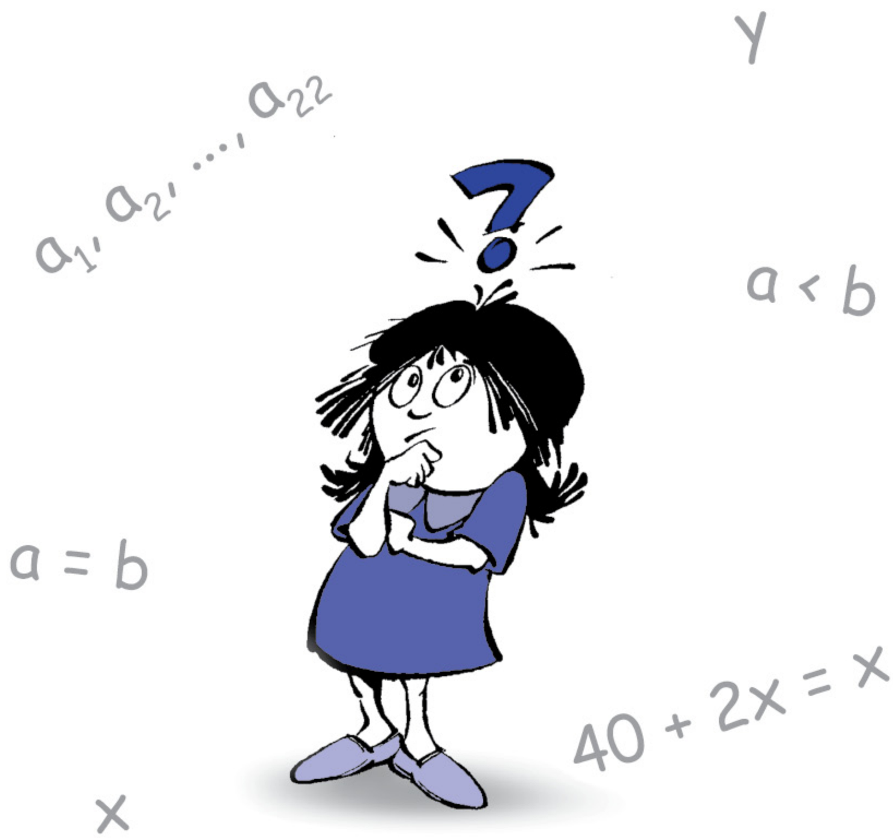
Deux segments, [*AC*] et [*AE*], ont été dessinés sur une feuille de papier quadrillée.
Calcule la somme des angles *BAC* et *BAE*.



CHAPITRE 5

JEUX, TESTS DE LOGIQUE

ET AUTRES

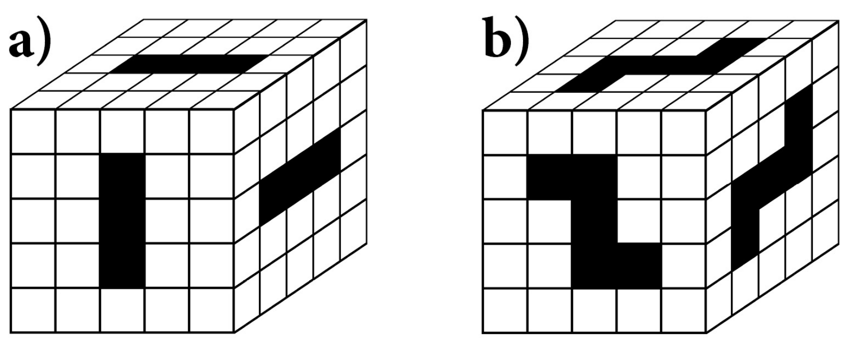


83. DES FILLES ÉNIGMATIQUES

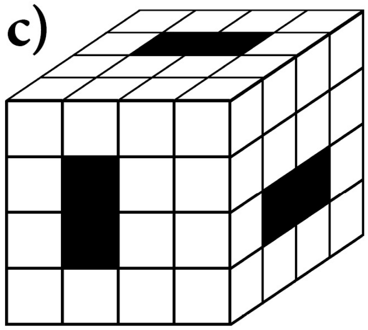
Parmi quatre filles, il n'y en a pas trois du même prénom, du même nom de famille, et de la même couleur de cheveux. Cependant, les filles partagent, deux à deux, une caractéristique commune.
Est-ce possible ?

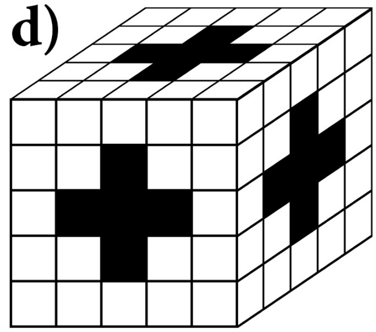
84. UN CUBE AVEC DES TROUS

Plusieurs petits cubes ont été collés ensemble pour former un hexaèdre de 5 × 5 × 5, avec trois tunnels creusés de part en part. Leurs sections ont été noircies sur la figure ci-dessous. Puis, un autre hexaèdre a été fait de la même manière, également avec des tunnels, mais de formes différentes.
Combien de petits cubes ont été utilisés pour construire chacun de ces hexaèdres ?



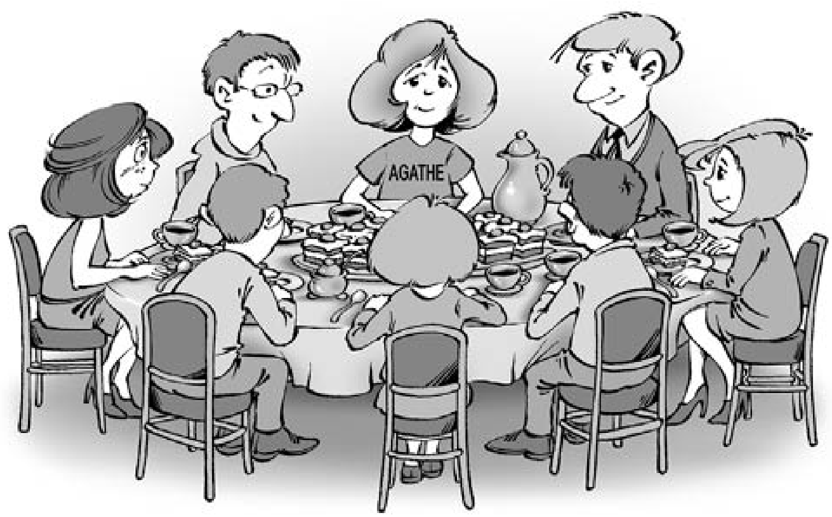
Et combien de cubes forment les hexaèdres creux présentés sur les dessins ci-dessous ?





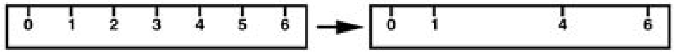
85. L'ÉNIGME DE LA TABLE RONDE

Quatre couples mariés – Agathe et Jean, Barbara et Kevin, Céline et Léon, Daphné et Mathieu (les hôtes) – fêtent l'anniversaire de Mathieu. Tout le monde est assis à une table ronde de telle manière que chaque femme soit assise entre deux hommes, et que tous les couples soient séparés. Agathe a pris place entre Kevin et Mathieu. Mathieu est assis à la droite d'Agathe. Jean est assis à côté de Daphné. Qui occupe le siège à la droite de Barbara ?

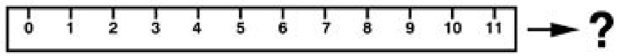


86. DES MARQUES EFFACÉES

Si nous effaçons trois marques sur une règle ordinaire de 6 cm (comme sur la figure ci-dessous), nous allons obtenir une nouvelle règle composée seulement de quatre marques. Grâce à cette règle, nous pouvons mesurer des distances entières de 1 à 6 cm. Par exemple on peut mesurer deux centimètres, parce que c'est la distance entre les marques 4 et 6 cm.



Quel est le nombre maximum de marques que nous pouvons retirer d'une règle de 11 cm tout en étant capable de mesurer des distances en nombres entiers de 1 à 11 cm ?
Dessine une telle règle.



87. LA PLUS JEUNE OU LA PLUS VIEILLE ?

Annie, Babette, Céline et Dorothée sont quatre amies d'âges différents. Lorsqu'on leur a demandé qui était la plus jeune d'entre elles, elles ont répondu ce qui suit :

Étant donné que l'une des filles ne disait pas la vérité, devine qui est la plus jeune et qui est la plus âgée.

88. D'ÉTRANGES VILLAGES ET UN INCENDIE

Quelque part, hors des sentiers battus, se trouvent trois villages, Aden, Baden, et Caden, qui partagent une brigade de pompiers située en dehors de ces lieux.

Les habitants d'Aden disent toujours la vérité, tandis que les habitants de Baden commencent leur conversation avec une vérité invariablement suivie d'un paquet de mensonges. Les villageois de Caden se lancent dans une conversation avec une vérité, puis alternativement ils mentent et disent la vérité. Un jour, le pompier de permanence reçoit un appel d'un habitant d'un des villages :

« Un incendie a éclaté !

– Dans quel village ?, demande le pompier.

– Dans le nôtre !

– Le nôtre ? ... Et plus précisément ?

– À Caden ! »

À ce moment, la ligne fut coupée.

De quel village venait l'appel ?

Et où le pompier doit-il envoyer la grande échelle ?

89. UN INTERROGATOIRE

Des policiers ont arrêté six criminels et tentent d'identifier lequel d'entre eux est le chef du gang. L'inspecteur qui procède à l'enquête organise les suspects en ligne (dans le même ordre que dans le tableau) et pose à chacun d'entre eux quatre questions.

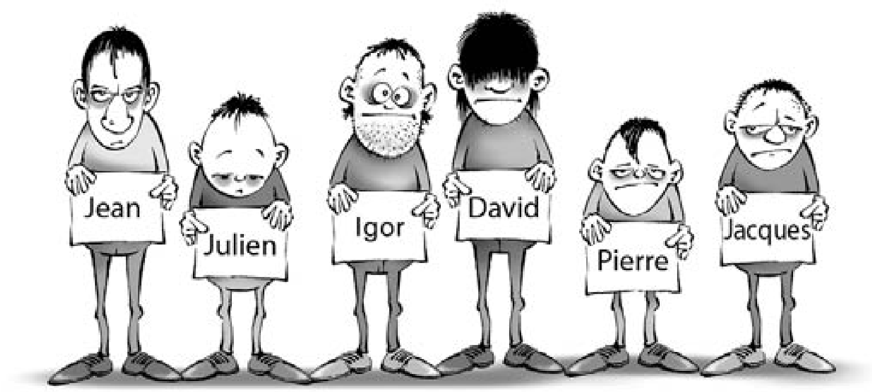
Les questions et les réponses sont présentées dans le tableau ci-dessous :

N°	Questions	Jean	Julien	Igor	David	Pierre	Jacques
1	Êtes-vous le chef du gang ?	NON	NON	NON	NON	NON	OUI

2	Le chef du gang est-il à votre gauche ?	NON	OUI	NON	NON	OUI	NON
3	Le chef du gang est-il à votre droite ?	NON	OUI	OUI	NON	OUI	NON
4	Le chef du gang est-il à côté de vous ?	OUI	OUI	OUI	OUI	NON	NON

Chaque criminel a menti exactement deux fois. Peux-tu, sur la base de ce qui précède, identifier le chef de gang ?

Note : À la gauche d'Igor se trouve David, et à sa droite, Julien.

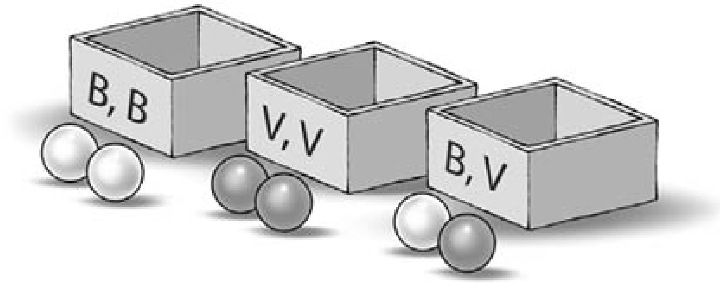


90. DIVISIBLE PAR 10

Soit six nombres positifs. Est-il vrai que parmi eux il doit y avoir deux nombres dont la somme ou la différence est divisible par 10 ?

91. ORGANISER LES BILLES

Anne a trois boîtes marquées (B, B), (V, V) et (B, V) et six billes, qu'elle range par paires de telle manière que la première paire se compose de deux billes blanches, la deuxième de deux vertes, et la troisième d'une verte et d'une blanche. Anne va mettre chaque paire de billes dans une des boîtes de sorte que les lettres sur la boîte correspondent à son contenu. Toutefois, en raison d'une faute d'inattention toutes les paires de billes ont été mises dans les mauvaises boîtes. Maintenant sortons une seule bille de l'une des boîtes sans voir les billes restantes. Sur la base de la couleur de la bille que nous venons de prendre, nous devons déterminer quelle boîte contient la paire de billes blanches et quelle boîte contient la paire de billes vertes. Comment faire ?



92. LA SOMME DE 50 NOMBRES EST ÉGALE À 100

La somme de 50 nombres $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{50}$ égale 100.

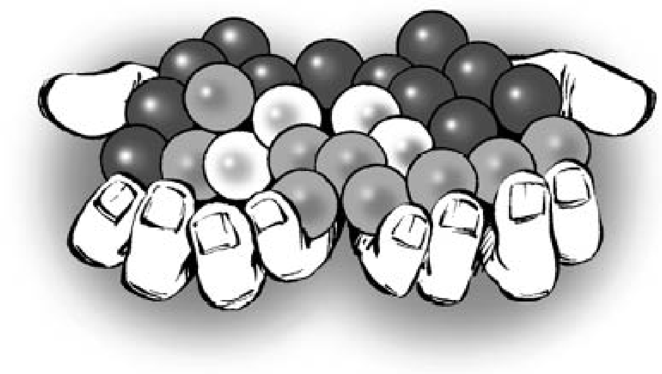
Peut-il y avoir, parmi ces 50 nombres, 3 nombres dont la somme est égale au moins à 6 ?

93. UN PROBLÈME DE CHAMPIGNONS

Il y a trente champignons dans un panier. Si nous choisissons au hasard douze champignons, il y aura au moins un cèpe parmi eux et si nous choisissons vingt champignons, nous aurons au moins une girolle. Combien y a-t-il de cèpes dans le panier ?

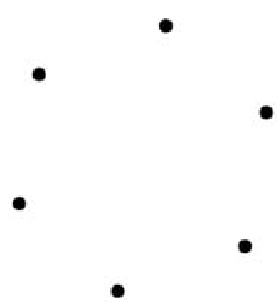
94. DES BOULES DE COULEUR

Dans une boîte, il y a trente boules monochromes de trois couleurs différentes. Si on prend au hasard vingt-cinq boules dans la boîte, il y aura toujours au moins trois blanches, au moins cinq bleues, et au moins sept boules noires. Combien de boules de chaque couleur y a-t-il dans la boîte ?



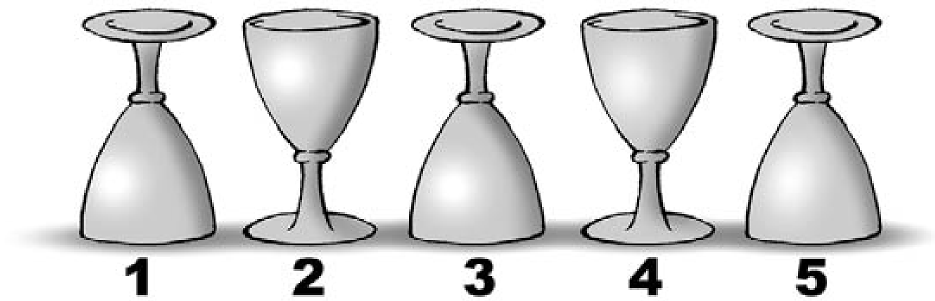
95. UN PRIX TROMPEUR

Marc a marqué six points sur une feuille de papier comme indiqué sur l’image ci-contre, et il dit à Sophie :
« Prends deux crayons de couleur : un rouge et un bleu. Joins chaque paire de points avec une ligne rouge ou bleue de sorte à ne pas obtenir un triangle d’une seule couleur. Si tu réussis, je te donnerai une plaque de chocolat. »
Sophie a-t-elle eu du chocolat ?



96. À L’ENDROIT, À L’ENVERS

Cinq verres à vin ont été disposés comme on peut le voir sur le dessin ci-dessous et numérotés de 1 à 5.



Deux joueurs participent au jeu, chacun à leur tour.
Seuls deux types de mouvements sont autorisés :
1) Tout verre à côté d’un verre à l’envers peut être placé dans l’autre sens.
2) Un joueur peut bouger deux verres côte à côte si celui à droite est à l’envers.
Le vainqueur est le joueur qui finira avec tous les verres à l’endroit.
Le joueur qui commence peut-il avoir une stratégie gagnante (c’est-à-dire, peut-il toujours gagner, indépendamment de ce que son adversaire fait) ?

97. ÉCRIRE DES CHIFFRES

Deux joueurs écrivent alternativement un des chiffres d’un nombre à douze chiffres. Si le nombre final de douze chiffres est divisible par 3, le gagnant est le joueur qui a commencé le jeu, sinon c’est le second qui gagne. Les règles suivantes s’appliquent :
a) Le premier chiffre ne peut pas être 0.
b) Les chiffres différents de 9 ne peuvent être suivis que par un chiffre plus élevé.
c) Le chiffre 9 peut être suivi de n’importe quel chiffre.
Lequel des joueurs a une stratégie gagnante ?
Rappel : Tu dois garder à l’esprit qu’un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme des chiffres de ce nombre est divisible par 3.

98. UNE ADDITION JUSQU’À 100

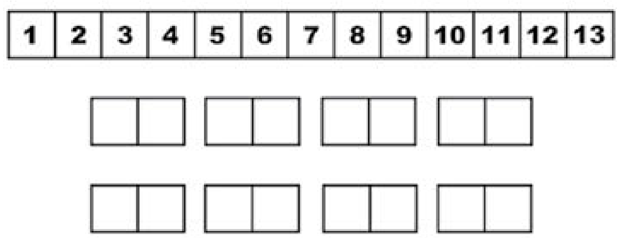
Adam et Paul ont décidé d’additionner jusqu’à 100. C’est Adam qui commence. Sa première action est d’écrire un entier naturel inférieur à 10, puis c’est au tour de Paul, qui augmente ce nombre de 10 au plus, et 1 au moins. Adam continue de la même façon. Les deux joueurs jouent ainsi chacun leur tour jusqu’à ce que le joueur qui atteint le premier 100 soit déclaré vainqueur.
Est-ce que le joueur qui commence a une stratégie gagnante ? Si oui, quel est le premier nombre choisi ? Quelles doivent être ses réponses aux nombres proposés par son adversaire ?

99. JOUER AVEC DES ALLUMETTES

Il y a 48 allumettes dans la boîte. Les joueurs jouent chacun à leur tour. Chaque joueur peut prendre une, deux ou cinq allumettes dans la boîte (si elle n'est pas vide). Le gagnant est la personne qui prend les dernières allumettes, laissant son adversaire avec une boîte vide.
Le joueur qui commence le jeu peut-il avoir une stratégie gagnante ?
Si oui, combien d'allumettes doit-il prendre au début ? Quelle serait la stratégie si la boîte contenait au début 49 allumettes ?

100. DES DOMINOS SUR UN RUBAN

Marc et Daniel vont alternativement poser des dominos sur un ruban divisé en treize carrés. Chaque domino couvre exactement deux carrés. Un domino peut être placé sur deux cases vides, mais pas sur un autre domino. Le gagnant est le joueur qui recouvre le dernier carré vide (après son placement, il n'y a pas deux cases libres adjacentes).
Marc commence. Comme premier joueur, peut-il gagner le match ?
Quelle serait la réponse si le ruban était constitué de quatorze carrés ?



SOLUTIONS

CHAPITRE 1

NOMBRES ENTIERS ET NATURELS

1. Après avoir acheté sept livres, Agathe a encore 5 euros. Pour acheter le huitième livre, elle a besoin d'un supplément de 7 euros. C'est la raison pour laquelle nous savons que le livre coûte $5 + 7 = 12$ euros, tout comme chacun des livres achetés.
Réponse : Chaque livre coûte 12 euros.

2. La différence entre l'aquarium plein et à moitié vide est de $108 - 57 = 51$ kg soit le poids de l'eau dans la moitié de l'aquarium. L'aquarium vide pèse autant que l'aquarium à moitié plein moins le poids de l'eau, c'est-à-dire $57 - 51 = 6$.
Réponse : L'aquarium vide pèse 6 kg.

3. Le second facteur de la multiplication doit être le nombre 4. Si c'était 3 ou un plus petit nombre, le produit serait égal au plus à $639 \times 3 < 2\,000$. Si, toutefois, le second facteur était 5 ou un plus grand nombre, alors le produit serait égal au moins à $630 \times 5 > 3\,000$. Le premier facteur est donc de $2\,532 \div 4 = 633$.
Réponse : Le domino manquant comporte donc trois points en haut et quatre points en bas.

4. La somme des chiffres d'une année avant 1993 est égale au plus à $1 + 9 + 9 + 9 = 28$, donc Sophie a tout au plus 28 ans. Ce qui signifie que Sophie est née, au plus tôt, en $1993 - 28 = 1965$. La somme des chiffres de n'importe quelle année entre 1965 et 1993 est égale à au moins $1 + 9 + 6 + 0 = 16$, donc Sophie serait née au plus tard en $1993 - 16 = 1977$.

Prenons deux cas :

a) Sophie est née dans les années 1960, c'est-à-dire en l'an $1960 + x$, où x est un nombre à un seul chiffre. La somme des chiffres de l'année où elle serait née serait égale à $1 + 9 + 6 + x = 16 + x$.

Sophie aurait $16 + x$ ans en l'an $1960 + x + 16 + x = 1976 + 2x$. Cette année est donc un nombre pair. Toutefois, il ressort de l'énigme que Sophie aurait eu $16 + x$ ans en 1993, qui est un nombre impair. Dans ce cas, Sophie ne peut pas être née dans les années 1960.

b) Sophie est née dans les années 1970, c'est-à-dire en l'an $1970 + x$, où x est un nombre à un seul chiffre. La somme des chiffres de l'année où elle est née serait $1 + 9 + 7 + x = 17 + x$. Sophie aurait $17 + x$ ans en $1970 + x + 17 + x = 1987 + 2x = 1993$ donc $2x = 1993 - 1987 = 6$; $x = 3$, soit $1970 + 3 = 1973$.

Réponse : Sophie est née en 1973.

5. Commençons par deux nombres à deux chiffres le plus petit possible soit 10 et 10. Comme $a + 10 > 10$ pour $a > 0$, pour que 10, 10 et a ne soient pas les longueurs des côtés d'un triangle quelconque, on doit considérer que a remplit la condition : $a \geq 10 + 10 = 20$.

Supposons maintenant le plus petit nombre possible, c'est-à-dire 20.

Considérons que si $b > 0$ et $b < 20$, donc 10, 10 et b peuvent être les longueurs des côtés d'un triangle quelconque, de même, si $b > 10$, et $b < 30$, alors 10, 20 et b peuvent être des longueurs des côtés d'un triangle. Pour le quatrième nombre, prenons la somme des deux plus grands nombres choisis jusqu'à maintenant, soit $10 + 20 = 30$, etc.

De cette façon, nous obtiendrons six nombres : 10, 10, 20, 30, 50 et 80, dont trois ne peuvent pas être les longueurs des côtés d'un triangle.

Réponse : Un ensemble de nombres satisfaisant les conditions définies ci-dessus sont par exemple : 10, 10, 20, 30, 50 et 80 (également 11, 12, 24, 37, 62, et 99 ; etc.)

6. D'un côté de la balance, nous mettons le poids de 27 g. De l'autre, nous mettons des poids de 3 et 9 g et on ajoute le sucre jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint. Sur la balance, on aura $27 - 3 - 9 = 15$ g de sucre.

Pour peser 25 g de sucre, il suffit de mettre un poids de 27 g avec un poids de 1 g d'un côté, et un poids de 3 g de l'autre, puis on ajoute le sucre jusqu'à l'équilibre. Le poids de sucre sera de $27 + 1 - 3 = 25$ g.

7. L'année x^2 doit avoir été au XIX^e^ siècle. En vérifiant nous voyons que le seul carré dans l'intervalle de 1801 à 1900 est le nombre $43^2 = 1\ 849$. Morgan avait donc 43 ans en l'an 1849, par conséquent, il est né en $1849 - 43 = 1806$.
Seconde partie du problème : supposons que quelqu'un ait y ans dans l'année y^2 au XX^e^ siècle. Le seul carré entre 1901 et 2000 est $44^2 = 1\ 936$.
La personne en question aurait eu 44 ans en 1936 et il a dû naître en $1936 - 44 = 1892$. Cela signifie que la personne serait née au XIX^e^ siècle.
Note : Le XIX^e^ siècle a commencé le 1^er^ janvier 1801 et pris fin le 31 décembre 1900. Le XX^e^ siècle a commencé le 1^er^ janvier 1901 et a pris fin le 31 décembre 2000.
Réponse : Auguste de Morgan est né en 1806. Il est impossible que quelqu'un né au XX^e^ siècle réponde aux mêmes conditions.

8. Il faut noter que les deux nombres doivent avoir au plus trois chiffres, sinon leur somme aurait eu au moins quatre chiffres. Appelons ces nombres abc et def. La somme de $c + f$ doit être un nombre dont le dernier chiffre est égal à 0, ce qui ne se produit que pour $c = 4$ et $f = 6$, ou $c = 6$ et $f = 4$. Alors $abc + def = 750$, car $c + f = 10$ et $ab + de = 74$. Alors $b + e$ égale 4 ou 14, soit $b = 1$ et $e = 3$, ou $b = 3$ et $e = 1$. Donc $a = 2$ et $d = 5$ ou $a = 5$ et $d = 2$ (car il ne reste que ces deux nombres).
Réponse : Les paires possibles de nombres écrits par Tom sont : 214 et 536, 216 et 534, 234 et 516, ou 236 et 514.

9. Le chiffre 1 ne peut être suivi que par le chiffre 6. Écrivons-le comme $1 \rightarrow 6$.
Le chiffre 6 ne peut être suivi que par 2, on écrira donc $1 \rightarrow 6 \rightarrow 2$.
En continuant, nous allons obtenir le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \rightarrow & 6 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 7 & \rightarrow & 3 \\ \uparrow & & & & & & & & \downarrow \\ 5 & \leftarrow & 9 & & \leftarrow & 4 & & \leftarrow & 8 \end{array}$$

Chaque nombre à neuf chiffres du problème est formé en choisissant le premier chiffre (1-9), et les suivants avec le diagramme ci-dessus. Par exemple, si nous choisissons 3 comme premier chiffre, nous obtiendrons le nombre 384 951 627, et d'autre part, si le premier chiffre était 4, nous obtiendrions

495 162 738. Il s'avère qu'il y a autant de nombres à neuf chiffres que de choix du premier chiffre, soit 9.

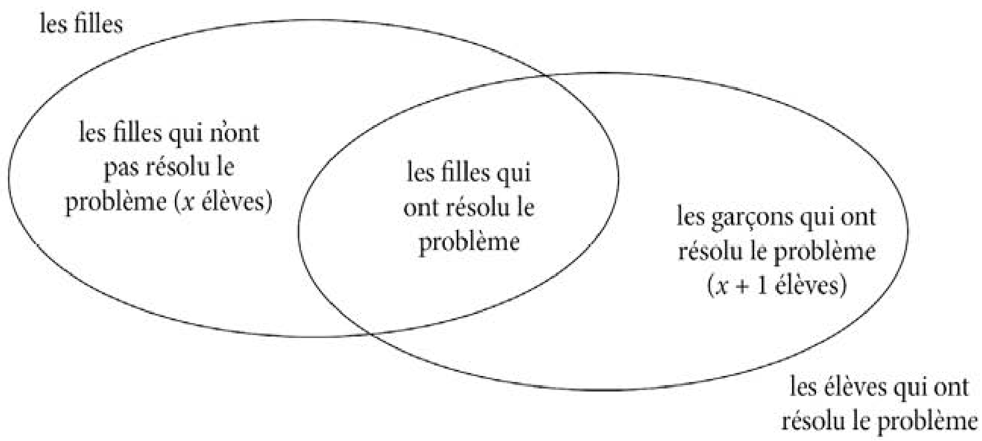
Réponse : Il y a neuf nombres à neuf chiffres répondant au problème.

10. Nous savons que :

(Le nombre d'élèves qui ont résolu le problème) = (le nombre de filles qui ont résolu le problème) + (le nombre de garçons qui ont résolu le problème) = (le nombre de filles qui ont résolu le problème) + (le nombre de filles qui n'ont pas résolu le problème) + 1 = (le nombre des filles) + 1.

Donc le nombre d'élèves qui ont résolu le problème est supérieur d'une unité au nombre de filles dans la classe.

Réponse : Il y a plus d'élèves qui ont résolu le problème que de filles dans la classe.



11. La méthode de résolution est présentée dans le tableau ci-dessous :

Minutes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bougie de 4 minutes					S'éteint						
Bougie de 5 minutes					On éteint					On rallume	S'éteint
Bougie de 9 minutes										S'éteint	
					On commence à mesurer le temps						Fin des 6 minutes

Moment 0. Nous allumons les trois bougies simultanément.
Après 4 minutes. La bougie de 4 minutes s'éteint, et on éteint la bougie de 5 minutes (le reste servira plus tard à mesurer une minute) et on commence à mesurer le temps.
Après 9 minutes. La bougie de 9 minutes brûle complètement. Cela signifie aussi que 5 minutes se sont écoulées depuis le moment où nous avons commencé à mesurer le temps.
Pour mesurer 6 minutes, il suffit maintenant d'allumer le reste de la bougie de 5 minutes.
Après 10 minutes. Le reste de la bougie de 5 minutes vient de se terminer – 6 minutes se sont écoulées depuis que nous avons commencé à mesurer les temps.

12. Prenons une suite à trois termes : a, b, c. Si $a + b > 0$, mais $a + b + c < 0$, alors le nombre c doit être négatif ; de même, si $a < 0$. Comme $a + b + c > 0$, alors $b > 0$. Cela permet d'arriver à une suite, par exemple, –2, 3, –2.
Cette version simpliste nous permet de deviner que la solution doit être recherchée parmi les suites ayant des valeurs négatives à ses extrémités et positives entre les deux.
Ces conditions sont satisfaites, par exemple, avec cette suite : –1, –1, –1, 1, 1, 1, 1, 1, –1, –1, –1.
Réponse : Une telle suite existe.

13. La somme de tous les points sur un dé est : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Si Christine voit la face cachée au lieu de la face supérieure (tout en voyant les mêmes faces latérales qu'elle voit), alors chaque côté ne serait observé que par une fille et une seule, les filles verraient alors 21 points au total, or Christine en voit seulement $21 - 10 = 11$ points. Cependant, Christine voit 14 points au lieu de 11. On peut en conclure que, en haut, il y a $14 - 11 = 3$ points de plus qu'en bas. Comme le nombre de points sur les paires opposées sont 1 et 6 (soit une différence de 5), 2 et 5 (différence de 3) ou 3 et 4 (soit une différence de 1), ce qui signifie que sur le côté haut on a 5 points et en bas (caché) 2 points.
Réponse : Sur la face cachée du dé il y a 2 points.

14. Si, à la fin d'un entier positif, nous mettons le chiffre 0, cet entier va augmenter dix fois. Si nous mettons tout chiffre à la fin d'un tel entier, ce

nombre augmentera au moins dix fois. Jeanne ne pouvait pas avoir écrit dans son carnet le nombre 10 ou plus, parce que le vrai nombre de tablettes de chocolat aurait été au moins dix fois plus grand que celui qu'elle avait écrit, c'est-à-dire supérieur d'au moins neuf fois le nombre écrit dans le carnet. Dans ce cas, le nombre réel de tablettes de chocolat aurait été supérieur au nombre que Jeanne a écrit par au moins $10 \times 9 = 90$. Donc, Jeanne a écrit un nombre à un seul chiffre a.
Le nombre exact de tablettes de chocolat est égal au nombre à deux chiffres $ab = 10a + b$ et est supérieur de 89 à celui écrit par Jeanne, soit $10a + b = a + 89$. Le nombre $(a + 89)$ en représentation décimale commence par le chiffre 8 ou 9, donc $a = 8$ ou $a = 9$. Dans le premier cas nous obtenons $80 + b = 97$, ce qui est impossible, alors que dans le second cas, on a $90 + b = 98$, si $b = 8$.
Donc Jeanne avait écrit le nombre 9, et en fait il y avait $89 + 9 = 98$ tablettes de chocolat.
Réponse : Jeanne aurait dû écrire le nombre 98.

15. Appelons m, l'âge actuel de Monique et b celui de Barbara.
Nous avons $b + 2 = m$ et $b < (m - 9) + (b - 9) < m = b + 2$.
Or $(m - 9) + (b - 9) = b + 1$, donc $m = 19$ et $b = m - 2 = 17$.
Réponse : Monique a 19 ans et Barbara a 17 ans.

16. Nous demandons dans ce problème si à un certain moment du match le score était de n-b, avec $b = 9 - n$, ou : $b + n = 9$. Cela signifie que le moment en question arrive quand les deux équipes ont déjà marqué neuf buts au total. Une telle situation a lieu car à la fin, les deux équipes avaient marqué $9 + 5 = 14$ buts au total, et donc l'un des scores suivants a eu lieu à un moment donné : 9-0, 8-1, 7-2, 6-3, 5-4 ou 4-5.
Réponse : La situation décrite s'est produite pendant le match.

17. Soit a le nombre de barres de chocolat de 10 dag, et b le nombre de celles de 20 dag. Le nombre de barres de 15 dag est $(30 - a - b)$, et donc, le poids total de l'ensemble des barres est $10a + 20b + 15\,(30 - a - b) = 500$. Après calcul, nous obtenons $5\,(b - a) = 50$. D'où $b = a + 10$, c'est-à-dire qu'il y a plus de barres de chocolat de 20 dag que celles de 10 dag.
Réponse : Il y a plus de barres de 20 dag.

18. Soit x le nombre de paires de jumeaux et y le nombre de triplés. Le nombre total des enfants du roi est égal à $7 + 2x = 7 + 3y$, donc $2x = 3y$. En outre, $2x \leq 7$ (sauf pour sept enfants, tous sont des triplés, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas des jumeaux) et $2x \geq 2$, puisque nous savons que le fils aîné est un jumeau, le roi a au moins une paire de jumeaux. Il résulte de l'équation $2x = 3y$ que $2x$ est divisible par 3. Le seul nombre divisible par 3 qui satisfasse les conditions ci-dessus est 6, donc $2x = 6$.
Le nombre des enfants est alors $7 + 2x = 7 + 6 = 13$, dans lequel il y a trois paires de jumeaux et deux groupes de triplés : $a - a$; $b - b$; $c - c$; $d - d - d$; $e - e - e$; f.
Réponse : Le roi a treize enfants.

19. Supposons que le nombre m soit le carré du nombre à deux chiffres x. Le nombre m se termine par le chiffre 5, et nous concluons donc qu'il s'agit d'un nombre impair divisible par 5. Comme $m = x \times x$, x doit aussi être un nombre impair et divisible par 5, ce qui signifie qu'il se termine par le chiffre 5. Alors $x = 10a + 5$, où a est un nombre à un chiffre.
I. Calculons les carrés de tous les nombres à deux chiffres en prenant la forme $(10a + 5)$ et vérifions le troisième chiffre à partir de la fin (antépénultième), on obtient : $15^2 = 225$, $25^2 = 625$, $35^2 = 1\,225$, $45^2 = 2\,025$, $55^2 = 3\,025$, $65^2 = 4\,225$, $75^2 = 5\,625$, $85^2 = 7\,225$, $95^2 = 9\,025$. Dans chaque cas, le chiffre est pair.
II. Nous avons $m = (10a + 5)^2 = (10a + 5)\,(10a + 5) = 10a \times 10a + 50a + 50a + 25 = 100\,(a^2 + a) + 25$, c'est-à-dire que l'antépénultième chiffre du nombre m est le même que le dernier chiffre du nombre $(a^2 + a)$. Si a est impair, a^2 est également impair, et donc le nombre $(a^2 + a)$ est pair. Si, d'autre part, a est pair, alors a^2 l'est également et le nombre $(a^2 + a)$ est pair.
Cela veut dire que le nombre $(a^2 + a)$ est toujours pair, et donc que l'antépénultième chiffre du nombre m le sera également.
Réponse : L'antépénultième chiffre du nombre *m* est toujours pair.

20. Philippe a proposé au moins cinq problèmes, si leur nombre avait été inférieur à 4, cela aurait signifié que le reste des élèves aurait proposé trois problèmes au plus (Philippe en avait proposé le plus). Dans une telle situation, il n'y aurait pas eu plus de $4 + 9 \times 3 = 31$ problèmes au total.
Il était alors possible pour Philippe de soumettre exactement cinq

problèmes, parce que $35 = 1 + 2 + 3 + 6 \times 4 + 5$ (à savoir, un élève a proposé un problème, un autre deux, un autre trois, six élèves quatre problèmes, et Philippe cinq).

Réponse : Philippe a proposé au moins cinq problèmes.

21. Voici quelques exemples de ces suites :

3, 6, 4, 1, 2, 7, 5	2, 6, 4, 1, 3, 7, 5	5, 7, 2, 1, 4, 3, 6
7, 3, 4, 1, 6, 2, 5	5, 1, 4, 2, 7, 6, 3	

Vérifions que les suites ci-dessus répondent aux conditions énoncées dans le problème en rayant tous les ensembles possibles de trois nombres (il y en a 35).

Lorsque nous biffons n'importe lequel des trois nombres, nous nous retrouvons avec une suite à quatre éléments qui n'est ni croissante ni décroissante.

Note : Il existe 882 suites remplissant les conditions définies dans le problème.

22. Si entre 1 et 6, se trouve un autre chiffre (par exemple, 4), nous obtenons, après avoir biffé les chiffres restants, une suite croissante ou décroissante comme : 1, 4, 6 ou 6, 4, 1, en fonction de l'ordre dans lequel les chiffres 1 et 6 ont été écrits. Dans le cas contraire, les chiffres 1 et 6 auraient dû être côte à côte.

Nous avons deux possibilités (non exclusives) :

a) Les nombres 1 et 6 sont suivis d'au moins deux nombres a, b (dans cet ordre). Si $a < b$, nous gardons la suite 1, a, b, et elle est croissante. Toutefois, si $a > b$, nous gardons les chiffres 6, a, b, qui forment une suite décroissante.

b) Avant les nombres 1 et 6 il y a au moins deux nombres a, b (dans cet ordre). Si $a < b$, on laisse dans la suite les nombres a, b, 6, de sorte que la suite soit croissante. Toutefois, si $a > b$, on garde les chiffres a, b, 1 qui forment une suite décroissante.

Dans chaque cas, il est possible de supprimer trois chiffres de manière que ceux qui restent forment une suite soit croissante soit décroissante.

Réponse : Agathe a raison. Il est possible de répondre aux conditions posées par le problème.

23. Réfléchissons un moment sur le nombre d'examens que l'étudiant pourrait avoir passé lors de sa première année. On sait que le nombre doit être divisible par 3.

a) Si l'étudiant avait passé six examens tout au plus, il aurait, dans les années suivantes, passé moins de six examens par an, et donc il aurait passé moins de $5 \times 6 = 30$ examens au total. Donc, l'étudiant doit avoir passé plus de six examens au cours de sa première année.

b) Si l'étudiant a passé au moins douze examens dans sa première année, il aurait passé, dans sa dernière année au moins $12 \div 3 = 4$ examens. Il aurait alors passé, au cours de sa quatrième année, au moins cinq examens, lors de la troisième au moins six, et pendant la deuxième au moins sept. Il aurait passé au moins $12 + 4 + 5 + 6 + 7 = 34$ examens donc l'étudiant a passé moins de douze examens au cours de sa première année.

Il s'ensuit d'après a) et b) que l'étudiant a passé neuf examens au cours de sa première année et trois dans sa dernière année. Il lui reste ensuite $33 - 9 - 3 = 21$ examens pendant la deuxième, troisième et quatrième année de ses études. D'autre part, au cours de sa deuxième année, l'étudiant n'a pas passé plus de huit examens, au cours de la troisième année sept au plus, et au cours de la quatrième année six, soit $8 + 7 + 6 = 21$ examens tout au plus. Cela signifie que l'étudiant doit avoir passé exactement huit, sept et six examens au cours de ses deuxième, troisième et quatrième années d'études.

Réponse : L'étudiant a passé sept examens au cours de sa troisième année.

24. Soient les nombres à trois chiffres sous la forme : *abc*, *def*, et *ghi*. La somme de leur dernier chiffre $(c + f + i)$ se termine par le chiffre 5. La somme de trois nombres à un chiffre non nuls et différents équivaut au moins à $1 + 2 + 3 = 6$ et au plus à $7 + 8 + 9 = 24$. C'est la raison pour laquelle la somme $(c + f + i)$ doit être égale à 15.

Compte tenu de ce qui précède, $ab0 + de0 + gh0 = 1\,665 - (c + f + i) = 1\,650$. Par conséquent, la somme des chiffres $(b + e + h)$ se termine par le chiffre 5, de sorte qu'elle doit aussi être égale à 15.

Enfin, $1\,650 = (a + d + g) \times 100 + (b + e + h) \times 10 + (c + f + i) = (a + d + g) \times 100 + 15 \times 10 + 15 = (a + d + g) \times 100 + 165$, donc $a + d + g = 15$.

En inversant le premier et le dernier chiffre des nombres donnés, on aura *cba*, *fed*, *ihg*, qui totalisent : $cba + fed + ihg = (100c + 10b + a) + (100f + 10e + d) +$

$(100i + 10h + g) = 100\ (c + f + i) + 10\ (b + e + h) + (a + d + g) = 100 \times 15 + 10 \times 15 + 15 = 1\ 665$.

Par exemple, nous aurions pu commencer avec ces trois chiffres : $823 + 697 + 145 = 1\ 665$, après inversion des chiffres, on obtiendrait : $328 + 796 + 541 = 1\ 665$.

Voici d'autres exemples : $469 + 375 + 821 = 1\ 665$ et $964 + 573 + 128 = 1\ 665$.

Réponse : La somme obtenue sera aussi 1 665.

25. Notons le code PIN du téléphone portable *abcd*. De l'énoncé on sait que : $b = c + d$ et $10a + b + 10c + d = 100$. En substituant $b = c + d$ dans la seconde équation, nous obtenons $10a + 11c + 2d = 100$. Ainsi, nous voyons que le chiffre c est impair (sinon le nombre $(10a + 11c + 2d)$ serait impair et ne pourrait être égal à 100).

En outre, $11c + 2d = 100 - 10a = 10\ (10 - 10a)$, d'où il s'ensuit que $(11c + 2d)$ est divisible par 10. Nous remplaçons c par des chiffres pairs consécutifs et on trouve d tel que :

a) $c = 0$, alors $d = 0$ ou $d = 5$;

b) $c = 2$, alors $d = 4$ ou $d = 9$;

c) $c = 4$, alors $d = 3$ ou $d = 8$;

d) $c = 6$, alors $d = 2$ ou $d = 7$;

e) $c = 8$, alors $d = 1$ ou $d = 6$.

Les solutions pour lesquelles $c + d \geq 10$ peuvent être rejetées d'emblée, car il résulte du problème que $c + d = b$ est un nombre à un chiffre. Nous rejetons également la solution $c = d = 0$, parce qu'il ne peut y avoir de quotient de c et d. Dans les exemples suivants, nous vérifions les nombres dans lesquels les deux premiers et les deux derniers chiffres constituent deux nombres à deux chiffres qui s'additionnent pour faire 100.

Nous obtenons :

a) le nombre 9 505 ne remplit pas la condition (9 n'est pas le quotient de 0 et 5) ;

b) le nombre 7 624 ne remplit pas la condition (7 n'est pas le quotient de 2 et 4) ;

c) le nombre 5 743 ne remplit pas la condition (5 n'est pas le quotient de 4 et 3) ;

d) le nombre 3 862 satisfait toutes les conditions ($8 = 6 + 2$, $3 = 6 \div 2$, $38 + 62 = 100$) ;

e) le nombre 1 981 ne remplit pas la condition (1 n'est pas le quotient de 8 et 1).

Réponse : Le code PIN du téléphone est 3862.

CHAPITRE 2

DIVISIBILITÉ ET NOMBRES PREMIERS

26. Si le dernier chiffre de l'année de naissance de M. Wilson était inférieur à 9, la somme des chiffres du mari et des années de naissance de sa femme aurait une différence de 1, donc au moins une des sommes ne serait pas divisible par 4. Donc, M. Wilson a dû naître une année se terminant par 9. Au XX^{e} siècle, seules les années 1919, 1959 et 1999 ont la somme de leurs chiffres divisible par 4. M^{me} Wilson aurait pu naître en 1920, 1960 ou 2000, dont seuls les deux premiers chiffres ont une somme divisible par 4.
Réponse : M. Wilson est né soit en 1919 soit en 1959.

27. L'âge de chaque fils est le diviseur du nombre 30. Énumérons tous les diviseurs du nombre 30 et nommons les d : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, et 30. Parmi les diviseurs, il faut en choisir trois (pas nécessairement différents, pour que M. Triangle puisse avoir des jumeaux), dont le produit est égal à 30 et la somme à 12. Considérons les valeurs possibles de d en commençant par le plus grand parmi les diviseurs choisis :
a) Si $d = 15$ ou $d = 30$, la somme des trois diviseurs serait égale au moins à 15 : c'est trop.
b) Si $d = 10$, alors nous devons supposer que les deux autres diviseurs sont 1 et 1 (de sorte que la somme soit égale à 12), mais $10 \times 1 \times 1 = 10 \neq 30$.
c) Si $d = 6$, la somme des deux diviseurs restants doit être égale à 6, soit 5 et 1, ou 3 et 3. Le produit ne sera égal à 30 que dans le premier cas : $6 \times 5 \times 1 = 30$.
d) Si $d = 5$, la somme des deux diviseurs restants doit être égale à 7, soit 5 et 2, mais $5 \times 5 \times 2 = 50 \neq 30$.
e) Si $d \leq 3$, le produit des trois diviseurs sera au plus égal à $3 \times 3 \times 3 = 27 < 30$.
Réponse : Les fils de M. Triangle ont donc un, cinq et six ans.

28. Notons $BBB = B \times 111 = B \times 3 \times 37$, le côté droit de notre équation est divisible par 37 et par 3. Alors, le côté gauche doit être aussi divisible par

37, ce qui n'est possible que lorsque 37 est le diviseur du nombre AB. Les deux possibilités sont : soit $AB = 37$ soit $AB = 74$. Avec $A = 3$ et $B = 7$, le côté gauche est égal à $37 \times 3 \times 7 = 111 \times 7 = 777$, donc égal à la partie droite de l'équation. Dans le second cas, le côté gauche de l'équation est égal à $74 \times 7 \times 4$, par conséquent, il n'est pas divisible par 3, et ne peut pas être égal à la partie droite de l'équation.
Réponse : $A = 3$ et $B = 7$.

29.

Si le dragon a plus de sept têtes, et après qu'il a eu sept têtes coupées, l'une repousse, le nombre total diminue de 6. En supposant que le chevalier coupe sept têtes à la fois, 16 fois de suite, le dragon se retrouvera avec $100 - (16 \times 6) = 4$ têtes. Alors, le chevalier peut couper une seule tête qui se traduira par la croissance de quatre nouvelles têtes et le dragon aura sept têtes. Comme il s'agit du nombre de têtes que le chevalier peut couper d'un coup, on voit qu'il peut tuer la bête.
Supposons maintenant que le dragon ait 99 têtes. Le chevalier peut augmenter le nombre de têtes du dragon par 3 (s'il coupe une seule tête) ou le diminuer de 6 (s'il coupe sept ou onze têtes). Comme le dragon a initialement 99 têtes, le nombre de têtes restant sera toujours divisible par 3 tant qu'il est vivant. En un coup d'épée, le chevalier ne peut pas couper un nombre de têtes divisible par 3 (car 1, 7 et 11 ne sont pas divisibles par 3), ce qui signifie qu'il ne peut pas tuer le dragon.
Réponse : Il est possible de tuer un dragon à 100 têtes, mais impossible avec un dragon à 99 têtes.

30.

Méthode I :
$376^2 = 141\,376$. 376^2 se termine par les chiffres 376. Pour nous assurer que 376^3 se termine également avec les trois mêmes chiffres, nous pouvons multiplier $376^2 = 141\,376$ par 376. Comme nous nous intéressons uniquement aux trois derniers chiffres du produit de $141\,376 \times 376$, il suffit de multiplier les trois derniers chiffres de 141 376 (soit 376) par 376, parce que seuls les trois derniers chiffres déterminent les trois derniers chiffres du produit. Nous avons déjà établi que $376 \times 376 = 141\,376$ avec les chiffres 376 à la fin, et donc 376^3 finira par les mêmes chiffres.
Par extension : $376^4 = 376^3 \times 376 = \ldots 376 \times 376$, et se termine toujours par 376.

Méthode II :
Dans une notation plus formelle, le nombre 376^3 prend la forme de $1\,000k + 376$. Nous avons donc $376^4 = 376^3 \times 376 = (1\,000k + 376) \times 376 = 1\,000 \times 376k + 141\,376 = 1\,000 \times 376k + 141\,000 + 376 = 1\,000 \times (376k + 141) + 376$, c'est-à-dire, 376^4 se termine aussi par les chiffres 376, etc.
Réponse : La proposition énoncée est vraie.

31. Quand les soldats sont rangés par colonnes de quatre, trois soldats restent dans la dernière ligne de la colonne, ce qui signifie que le nombre total de soldats est impair.
Les soldats ont été disposés dans colonnes de six et marchent donc en deux colonnes de trois côte à côte :

* * * * * *	Six soldats
* * * * * *	Six soldats
* * * * * *	Six soldats
* *	Dernière rangée (incomplète)

ou

* * * * * *	Six soldats
* * * * * *	Six soldats
* * * * * *	Six soldats
* * * * *	Dernière rangée (incomplète)

Quand des colonnes de trois étaient formées, il n'y avait que deux soldats dans la dernière rangée, par conséquent, lorsque nous décidons de former des colonnes de six, la dernière ligne comprendra deux soldats ou $2 + 3 = 5$ soldats. Comme nous savons que le nombre total des soldats est impair, on ne peut pas avoir deux soldats dans la dernière rangée.
Réponse : Lorsque nous formons des colonnes de six soldats, il restera cinq soldats.

32. Le premier des quatre chiffres est 1, ce qui signifie que le produit des trois autres est 12. Poursuivons avec la factorisation du nombre 12 en utilisant trois facteurs à un chiffre : $12 = 1 \times 2 \times 6$ ou $12 = 1 \times 3 \times 4$, ou $12 = 2 \times 2 \times 3$. Dans le premier cas, la somme de tous les quatre chiffres de l'année est égale à $1 + 1 + 2 + 6 = 10$ qui n'est pas divisible par 9, et donc encore moins par

$27 = 3 \times 9$. Rejetons cette solution. De même, dans le troisième exemple, la somme des chiffres $1 + 2 + 2 + 3 = 8$ n'est pas divisible par 9. L'année recherchée doit être un nombre constitué par les chiffres suivants : 1, 1, 3, et 4. Comme il s'agit d'un nombre impair commençant par 1, nous sommes confrontés à quatre combinaisons : 1 143, 1 341, 1 413, ou 1 431. Parmi les quatre, le seul divisible par 27 est 1 431.
Réponse : Jeanne d'Arc est morte sur le bûcher en 1431.

33. Nous pouvons trouver assez facilement trois chiffres avec la condition requise, par exemple, 1, 2 et 3 et leur somme est égale à 6 et est divisible par 1, 2 et 3. Nous voulons ajouter un quatrième chiffre A tel que les quatre chiffres vont satisfaire la condition énoncée.
La somme $1 + 2 + 3 + A = 6 + A$ doit être divisible par 1, 2 et 3, c'est-à-dire, par 6. Donc A doit également être divisible par 6. Par ailleurs, $(6 + A)$ doit être divisible par A, ce qui signifie que $6 = (6 + A) - A$ est aussi divisible par A. Pour cette raison, A doit être égal à 6.
Effectivement, les chiffres 1, 2, 3 et 6 répondent à la condition requise, à savoir que leur somme (égale à 12) est divisible par chacun de ces chiffres.
Comme prochaine étape, on ajoute à ces quatre chiffres un cinquième de telle sorte que tous les chiffres doivent satisfaire aux conditions requises. Avec le même raisonnement, nous devons ajouter le chiffre 12, etc.
Nous obtenons finalement dix chiffres : 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, et 384, dont la somme 768 est divisible par chacun des chiffres ci-dessus.
Réponse : Il est possible de trouver dix nombres satisfaisant les conditions de l'énoncé.

34. Si $n > 5$ est un nombre pair naturel, nous pouvons le représenter sous la forme de la somme : $n = 2 + (n - 2)$ où 2 est un nombre premier et $(n - 2)$ est un nombre pair supérieur à $5 - 2 = 3$, donc $(n - 2)$ est un nombre composé.
Toutefois, si $n > 5$ est un nombre entier naturel impair, nous pouvons l'écrire comme la somme de : $n = 3 + (n - 3)$ où 3 est un nombre premier et $(n - 3)$ est un nombre impair supérieur à $5 - 3 = 2$, donc $(n - 3)$ est un nombre composé.
Réponse : Oui, chaque nombre naturel supérieur à 5 peut être exprimé sous la forme d'une telle somme.

35. Supposons que d soit un diviseur commun des nombres a_1, a_2, a_3, …, et a_{49}. Dans ce cas, d est le diviseur de la somme $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{49}$, il divise donc $999 = 27 \times 37$. D'autre part, nous avons $a_1 \geq d$, $a_2 \geq d$, $a_3 \geq d$, …, $a_{49} \geq d$, donc $999 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{49} \geq 49d$,
et $d \leq \frac{999}{49} = 20 + \frac{19}{49}$.

Les seuls diviseurs du nombre 999 non supérieurs à 20 sont 1, 3, et 9, ce qui signifie que le plus grand diviseur commun des nombres a_1, a_2, a_3, …, a_{49} peut être égal à 1, 3 ou 9.
Considérons trois possibilités :
a) Si on prend $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{48} = 9$, alors $a_{49} = 999 - 48 \times 9 = 567$. Ainsi $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{49} = 999$ et les nombres a_1, a_2, a_3, …, a_{49} et ont un plus grand commun diviseur égal à 9.
b) Si nous supposons que $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{48} = 3$, alors $a_{49} = 999 - 48 \times 3 = 855$. Ainsi $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{49} = 999$ et le plus grand diviseur commun des nombres a_1, a_2, a_3, …, a_{49} est égal à 3.
c) Si nous supposons $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{48} = 1$, puis $a_{49} = 999 - 48 \times 1 = 851$, alors $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{49} = 999$ et les chiffres a_1, a_2, a_3, …, a_{49} ont un plus grand commun diviseur égal à 1.
Réponse : Le plus grand commun diviseur des nombres a_1, a_2, a_3, …, et a_{49} peut être égal à 1, 3 ou 9.

36. Supposons que a, b et c soient trois chiffres parmi les sept choisis. Par hypothèse, 7 est un diviseur du nombre $(a + b)$ et $(b + c)$, et, par conséquent, est aussi le diviseur de leur somme $(a + b) + (b + c) = (a + 2b + c)$. En outre, et par hypothèse, le nombre $(a + c)$ est divisible par 7, ce qui signifie aussi qu'il divise également la différence des chiffres : $(a + 2b + c) - (a + c)$, d'où $2b$ est divisible par 7. Comme 7 et 2 sont premiers, 7 est le diviseur du nombre b. Les nombres $(a + b)$ et b sont divisibles par 7, à savoir, leur différence a la même propriété $(a + b) - b = a$. De même, 7 est le diviseur des nombres $(b + c)$ et b, 7 est également le diviseur de
$(b + c) - b = c$.
Nous avons démontré que si a, b et c sont trois chiffres quelconques parmi les sept chiffres choisis, alors chacun des chiffres a, b, et c est divisible par 7. Donc chacun des sept chiffres choisis est divisible par 7.
Réponse : Tous les chiffres choisis sont divisibles par 7.

37.

Méthode I :

Notons une telle année $abcd$. Nous savons des conditions initiales que $ab + cd = bc$ et $ab \geq 20$. Ainsi nous obtenons $bc \geq 20$, soit $b \geq 2$, et par conséquent $ab \geq 22$. Puisque nous sommes à la recherche de l'année la plus proche de l'an 2006, remplaçons ab par 22 et essayons de trouver la solution. Nous avons alors $22 + cd = 20 + c$, ce qui est impossible car $22 + cd > 20 + cd \geq 20 + c$. Nous concluons donc que $ab \geq 23$. Nous allons maintenant prendre $ab = 23$, nous avons $23 + cd = 30 + c$. Nous recherchons les valeurs minimales répondant à la condition $\geq 2\,006$. Commençons à partir de la plus petite valeur possible soit $c = 0$.
Dans ce cas, $23 + d = 30$, donc $d = 7$, ce qui donne la réponse : 2 307.

Méthode II :

Un lecteur avec un esprit curieux pourrait poser une question sur le nombre total de toutes les années exceptionnelles et les lister. Répondre revient à trouver les chiffres a, b, c et d, tels que $10a + b + 10c + d = 10b + c$, soit $10a + d = 9\,(b - c)$. Le nombre $(10a + d)$ est positif, ce qui signifie que $b > c$, pour simplifier nous noterons ad au lieu de $(10a + d)$.

À ce stade, nous allons tester toutes les valeurs possibles de la différence $b - c$:

a) $b - c = 0$; $ad = 0$, ce qui est un cas impossible.
b) $b - c = 1$; $ad = 9$, ce qui est un cas impossible.
c) $b - c = 2$; $ad = 18$, soit huit résultats possibles : 1 208, 1 318, 1 428, 1 538, 1 648, 1 758, 1 868, 1 979.
d) $b - c = 3$; $ad = 27$, soit sept résultats possibles : 2 307, 2 417, 2 527 2 637, 2 747, 2 857, 2 967.
e) $b - c = 4$; $ad = 36$, soit six résultats possibles : 3 406, 3 516, 3 626, 3 736, 3 846, 3 956.
f) $b - c = 5$; $ad = 45$, soit cinq réponses possibles : 4 505, 4 615, 4 725, 4 835, 4 945.
g) $b - c = 6$; $ad = 54$, soit quatre réponses possibles : 5 604, 5 714, 5 824, 5 934.
h) $b - c = 7$; $ad = 63$, soit trois réponses possibles : 6 703, 6 813, 6 923.
i) $b - c = 8$; $ad = 72$, soit deux réponses possibles : 7 802, 7 912.
j) $b - c = 9$; $ad = 81$, soit une réponse possible : 8 901.

Le nombre de toutes les années exceptionnelles à quatre chiffres sera alors égal à la somme : $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$, et 2307 est l'année la plus proche recherchée.

Réponse : L'année exceptionnelle après 2006 est 2307.

38. On remarque que le carré du nombre entier naturel n lorsqu'il est divisé par 4 donne toujours un reste de 0 ou 1. Il y a donc quatre possibilités :
a) n donne un reste de 0 lorsque divisé par 4, il peut s'écrire $n = 4k$ avec k naturel. Dans ce cas, $n^2 = (4k)^2 = 4k \times 4k = 4 \times 4k^2$ donne un reste de 0 quand il est divisé par 4.
b) n donne un reste de 1 lorsqu'il est divisé par 4, c'est-à-dire : $n = 4k + 1$ pour k naturel. Dans ce cas, $n^2 = (4k +1)(4k + 1) = 4k \times 4k + 4k + 4k + 1 = 4 \times (4k^2 + 2k) + 1$ donne un reste de 1 lorsque divisé par 4.
c) n donne un reste de 2 lorsqu'il est divisé par 4, c'est-à-dire qu'il prend la forme $n = 4k + 2$ pour k naturel. Dans ce cas, $n^2 = (4k + 2)(4k + 2) = 4k \times 4k + 8k + 8k + 4 = 4 \times (4k^2 + 4k + 1)$ donne un reste de 0.
d) n donne un reste de 3 lorsqu'il est divisé par 4, d'où $n = 4k + 3$ pour k naturel. Dans ce cas, $n^2 = (4k + 3)(4k + 3) = 4k \times 4k + 12k + 12k + 9 = 4 \times (4k^2 + 6k + 2) + 1$ donne un reste de 1 lorsqu'il est divisé par 4.
Or $2\,006 = 4 \times 501 + 2$, soit $(a^2 + 2\,006)$ lorsque divisé par 4 donne toujours un reste égal à 2 ou 3, de sorte qu'il n'est pas le carré d'un nombre naturel.
Réponse : Il n'y a pas de nombre naturel *a* satisfaisant aux conditions énoncées.

39.

a) Mettons dans un tableau le reste de la division du nombre $(2a + 1)$ par 7 en fonction du reste de a divisé par 7 :

Reste de la division de a par 7	Reste de la division de $(2a + 1)$ par 7
0	1
1	3
2	5
3	0
4	2
5	4
6	6

Étudions l'une des lignes du tableau.
Si a a un reste de 5 après la division par 7, alors $a = 7k + 5$ avec k naturel, soit $2a + 1 = 2 \times (7k + 5) + 1 = 14k + 11 = 7 \times (2k + 1) + 4$ donne un reste de 4 lorsqu'il est divisé par 7.
Vérifions les six autres lignes de la même manière.
Il ressort de ce tableau que les restes de la division évoluent d'après le schéma suivant :

$0 \to 1 \to 3 \to 0$, $2 \to 5 \to 4 \to 2$ et $6 \to 6$.
Cela signifie que si nous commençons avec un nombre dont le reste après la division par 7 égale par exemple 1, nous allons obtenir pour les opérations suivantes les restes : 3, 0, 1, 3, 0, 1, 3, 0, 1, 3, …
Voyons maintenant par quel nombre, nous devrions commencer pour obtenir après cinq opérations un nombre divisible par 7 (à savoir, avec un reste de 0) :
$1 \to 3 \to 0 \to 1 \to 3 \to 0 \to 1 \to 3 \to 0 \to 1 \to 3 \to 0 \to \ldots$
Si nous commençons avec un nombre dont le reste est 1, nous devons effectuer cinq opérations pour obtenir un nombre divisible par 7.
($1 \to 3 \to 0 \to 1 \to 3 \to 0$).
Voici un exemple. Nous commençons par 1, et nous obtenons : 3, 7, 15, 31, et 63. 63, résultat après les cinq opérations, est divisible par 7.
b) Après chacune de ces opérations, on obtient un nombre impair, de sorte que le résultat n'est pas divisible par 12.
Réponse : Le résultat final peut être un nombre divisible par 7, mais ne peut pas être divisible par 12.

40. Remarquons que la somme $1 + 2 + 3 + \ldots + 110 = (1 + 2) + (3 + 4) + (5 + 6) + \ldots + (109 + 110)$ est un nombre impair, car elle est la somme de 55 termes impairs. Nous allons démontrer que si la somme des nombres est impaire, alors elle le restera quelque soit le prochain mouvement. Il y a deux possibilités :
a) La somme des deux nombres barrés est impaire. D'où l'un d'eux est pair, et l'autre est impair, à savoir, leur différence est impaire. Cela signifie que nous éliminons deux nombres dont la somme est impaire et on les remplace par un nombre impair, donc, la somme des nombres écrits sur le tableau restera impaire.
b) La somme des deux nombres barrés est paire. Alors ces deux nombres sont soit pairs soit impairs, de sorte que leur différence est paire. Au lieu de ces deux nombres, nous écrivons un nombre pair, par conséquent, la somme des nombres écrits sur le tableau restera impaire.
Au début, la somme des nombres écrits sur le tableau était impaire, et elle le restera à chaque tour. Si le nombre 10 était resté sur le tableau, alors la somme des nombres du tableau serait égale à 10, un nombre pair, ce qui est impossible.
Réponse : Le nombre restant sur le tableau ne peut pas être égal à 10.

CHAPITRE 3
ÉQUATIONS

41. Pour chaque lancer égal à 1, Simon reçoit 50 centimes avec lesquels il rembourse Tom pour 5 lancers où d'autres valeurs sortent. Ainsi, afin d'avoir une situation où ils restent à égalité, il faut que le 1 tombe tous les 6 lancers. En $30 = 5 \times 6$ lancers, le 1 a dû sortir 5 fois, et d'autres valeurs ont dû sortir 25 fois.
Réponse : Le 1 est sorti 5 fois.

42.
Méthode I :
Si chaque famille qui a trois vélos donne l'un de ses vélos à celles qui possèdent un seul vélo, alors chaque famille dans le village aura deux vélos. Donc il y a au total $29 \times 2 = 58$ vélos dans le village.

Méthode II :
Nous représentons par a le nombre de familles ayant un vélo et par b les familles qui en ont deux. Le nombre de familles avec trois vélos est également représenté par a. Nous avons donc : $a + b + a = 29$, et le nombre de vélos dans le village est : $1 \times a + 2 \times b + 3 \times a = 4a + 2b = 2\,(a + b + a) = 2 \times 29 = 58$.
Réponse : Il y a 58 vélos dans le village.

43. Guillaume est arrivé cinquième ou mieux et il a fini exactement au milieu, ce qui signifie qu'il y avait tout au plus neuf candidats. D'autre part, Paul a fini huitième ou plus, et c'était à la pénultième place, ce qui signifie qu'il y avait au moins neuf garçons participant.
Réponse : Neuf garçons ont pris part au saut en longueur.

44. Pendant 8 heures, le père aura retourné $\frac{8}{12}$, soit $\frac{2}{3}$, de la surface. Son fils, cependant, en huit heures aura labouré $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ et donc le fils travaille deux fois moins vite que son père. D'où la conclusion que le fils aura besoin de 2 x 12 heures pour retourner tout le terrain.
Réponse : Le fils mettra 24 heures pour retourner le terrain.

45. Notons d le temps de Rapido pour couvrir une distance d'un mètre. Rapido mettra $3d$ pour couvrir toute la distance, et Presto $\frac{1}{2}d + 1d + 2d$ soit $3{,}5d$. Cela signifie que Rapido va gagner. Lorsque le vainqueur franchit la ligne, Presto aura couvert les deux premières parties en $\frac{3}{2}d$ et une partie de la troisième partie de la course aussi en $\frac{3}{2}d$ à la vitesse de $\frac{1}{2}d$. Presto aura parcouru donc $\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ de la dernière partie. Presto devra donc parcourir une distance de $\frac{1}{4}$ mètre.
Réponse : Le vainqueur sera Rapido et son avance est de $\frac{1}{4}$ mètre soit 25 centimètres.

46. Étant donné que chaque enfant a reçu le même nombre de gâteaux identiques, les frères ont acheté le même nombre de gâteaux de chaque sorte. Le coût de trois gâteaux (gâteau à la crème + gâteau aux fruits + beignet) est de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ d'euro. Donc Jérémie et Roger ont acheté six ensembles de trois gâteaux chacun. Six ensembles de trois gâteaux peuvent être partagés par un, deux, trois ou six enfants.
Nous savons de façon certaine, toutefois, que parmi les enfants il y a deux garçons, Jérémie et Roger, ce qui signifie que le groupe a un minimum de deux filles. Il y a, par conséquent, au moins quatre enfants en plus de Jérémie et Roger.
Réponse : Le groupe compte six enfants.

47. Le montant de la contribution du premier garçon ne dépasse pas celle des deux autres garçons, donc il n'a pas donné plus de la moitié de la somme entière, soit au plus 22,50 euros. Si le deuxième garçon a payé a euros, alors les autres ont contribué au moins à $2a$, et donc les trois garçons ont donné au moins $3a$ euros au total. Cela signifie que 45 euros $\geq 3a$, donc le deuxième garçon a payé $45 \div 3 = 15$ euros au plus. De même, si le troisième garçon avait donné b, les deux autres auraient ajouté au moins $5b$ euros, donc tous les garçons ont donné au moins $6b$ euros. Il résulte de ce qui précède que $45 \geq 6a$, le troisième garçon aura mis $45 \div 6 = 7{,}50$ euros, au plus.
Vérifions : 22,50 euros + 15 euros + 7,50 euros = 45 euros, si le premier garçon avait donné moins de 22,50 euros, le deuxième moins de 15 euros et le troisième moins de 7,50 euros, ils n'auraient pas recueilli 45 euros au total.
Réponse : Le premier garçon a donné 22,50 euros, le deuxième 15 euros, et le troisième 7,50 euros.

48. Pierre court jusqu'à l'escalier roulant en sens inverse du mouvement de l'escalator, de sorte qu'il se déplace à la même vitesse que sa casquette sur l'escalator voisin. Cela signifie que Pierre sera en mesure de mettre la main sur sa casquette seulement quand il aura atteint le sommet de l'escalator, précisément au même moment que sa casquette. Pour l'attraper, Pierre doit parcourir la moitié de la longueur de l'escalier.
Jean, d'autre part, pour arriver au sommet, doit d'abord parcourir la moitié de la longueur de l'escalier (à une vitesse trois fois plus élevée que celle de Pierre parce qu'il court dans le même sens que l'escalator) puis remonter la totalité de la longueur de l'escalier voisin (dans le même sens que l'escalator, à nouveau trois fois plus vite que Pierre). Il doit donc parcourir trois fois plus de distance que son ami, mais il est trois fois plus rapide. Donc les garçons se retrouveront en haut de l'escalier, en même temps que la casquette.
Réponse : Les garçons atteindront la casquette en même temps.

49. En commençant à courir à partir de la nouvelle ligne, André doit couvrir une distance de 120 m. Il prend autant de temps pour courir 100 m que David 80 m. Donc André, en commençant 20 m plus tôt, sera au niveau de David en 100 m, et va le dépasser dans les 20 derniers mètres. Jean a donc tort.
Remarquons que courir 25 m demande à André autant de temps que pour David de courir 20 m. Cela signifie qu'André va couvrir la distance de 5×25 m = 125 = 100 + 25 m en même temps que David $5 \times 20 = 100$ m.
Réponse : Jean a tort. La nouvelle ligne doit être à 25 m derrière la ligne de départ officielle.

50.

Méthode I :
Il résulte de ce tableau que Sophie (S), Adam (A), Michel (M) et Guillaume (G) représentent $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ des élèves de la classe de 5B. La classe compte donc $4 \times 6 = 24$ élèves.

groupe 1		groupe 2			
	S	A	M	G	
$\frac{1}{3}$					$\frac{1}{2}$

Méthode II :
Soit x le nombre d'élèves dans le premier groupe. Il y a $3\,(x - 1)$ élèves dans la classe, parce que Sophie a quitté le groupe 1 pour le groupe 2. Dans le

premier groupe, il reste $\frac{1}{3}$ de la classe. Nous savons aussi qu'ensemble avec Adam, Michel et Guillaume, le groupe 1 représente la moitié de la classe. Donc, le nombre d'élèves dans la classe 5B est aussi égal à $2(x+3)$. Alors, $3(x-1) = 2(x+3)$, d'où $x = 9$. Le nombre des élèves est alors égal à $3(x-1) = 3 \times 8 = 24$.

Réponse : La classe de 5B compte 24 élèves.

51. La somme du numérateur et du dénominateur des fractions est égale à 2 008. Parmi les fractions, il y a aussi $\frac{1\,004}{1\,004} = 1$. Nous pouvons donc choisir trois fractions, par exemple, $\frac{2}{2\,006}$, $\frac{1\,004}{1\,004}$, $\frac{2\,006}{2}$ dont le produit est 1.

Réponse : Oui, il est possible de trouver trois fractions conformes à l'ensemble des conditions.

52. Nous pouvons calculer :

$$\frac{124\,124}{421\,421} = \frac{124 \times 1\,000 + 124}{421 \times 1\,000 + 421} = \frac{124 \times 1\,001}{421 \times 1\,001} = \frac{124}{421},$$

$$\frac{1\,240\,124}{4\,210\,421} = \frac{124 \times 10\,000 + 124}{421 \times 10\,000 + 421} = \frac{124 \times 10\,001}{421 \times 10\,001} = \frac{124}{421}.$$

Réponse : Les nombres listés ci-dessus sont égaux.

53. Nous avons :

$$\frac{1}{(10 \times 11)} = \frac{(11-10)}{(10 \times 11)} = \frac{1}{10} - \frac{1}{11}, \frac{1}{(11 \times 12)} = \frac{(12-11)}{(11 \times 12)} = \frac{1}{11} - \frac{1}{12}, \dots, \frac{1}{(19 \times 20)} =$$
$$= \frac{(20-19)}{(19 \times 20)} = \frac{1}{19} - \frac{1}{20}.$$

D'où :

$$\frac{1}{(10 \times 11)} + \frac{1}{(11 \times 12)} + \dots + \frac{1}{(19 \times 20)} = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{13}\right) + \dots + \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{19}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{10} + \left(-\frac{1}{11} + \frac{1}{11}\right) + \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{19} + \frac{1}{19}\right) - \frac{1}{20} = \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{20}.$$

Réponse : Le résultat est $\frac{1}{20}$.

54. Quel est le nombre de pastèques juste avant la dernière vente ? Si Mme Gourmande avait acheté la moitié seulement des pastèques restantes, Catherine serait restée avec une pastèque et demie. Donc Catherine avait 3 pastèques avant que Mme Gourmande n'arrive. De même, avant l'arrivée de Mme Gourmet, elle avait $2 \times (3 + 0{,}5) = 7$ pastèques, et avant Mme Friande

$2 \times (7 + 0{,}5) = 15$ pastèques. Catherine a vendu 14 pastèques et donc gagné $14 \times 2 = 28$ euros.

Réponse : La recette de Catherine s'élève à 28 euros.

55. Soit x le nombre initial de lapins. Le premier client a acheté $(\frac{1}{6}x + 1)$ lapins, donc il reste à l'éleveur $(\frac{5}{6}x - 1)$. Le deuxième client a acheté $\frac{1}{6} \times (\frac{5}{6}x - 1) + 2$ des lapins, mais nous savons qu'il en a achetés autant que l'acheteur précédent. Donc : $\frac{1}{6} \times (\frac{5}{6}x - 1) + 2 = \frac{1}{6}x + 1$ d'où $(\frac{5}{6}x - 1) + 12 = x + 6$ soit $5 = \frac{1}{6}x$. Au début, l'éleveur avait 30 lapins.

Vérifions que tous les clients ont acheté le même nombre de lapins.

Le premier client a acheté $\frac{1}{6} \times 30 + 1 = 6$ lapins – restent 24 animaux.

Le second client a acheté $\frac{1}{6} \times 24 + 2 = 6$ lapins – restent 18 animaux.

Le troisième client a acheté $\frac{1}{6} \times 18 + 3 = 6$ lapins – restent 12 animaux.

Le quatrième client a acheté $\frac{1}{6} \times 12 + 4 = 6$ lapins – restent 6 animaux.

Le cinquième client a acheté $\frac{1}{6} \times 6 + 5 = 6$ lapins – reste 0 animal.

Nous voyons donc que chaque client a acheté le même nombre de lapins : 6.

Réponse : L'éleveur de lapins avait mis sur le marché 30 lapins et a eu 5 clients.

56. Chacun des moutons mange le foin ainsi 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{8}$ du total. Les deux premiers moutons mangent $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ du total par jour, tandis que les six autres mangent $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$ du total. Nous avons donc : $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = (\frac{1}{3} + \frac{1}{6}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) < \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{3}{2}$ (note : nous avons utilisé les inégalités évidentes : $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{7} < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$). Cela signifie que les six derniers moutons mangent le foin moins vite que les deux premiers.

Réponse : Les deux premiers moutons vont manger leur foin plus vite.

57. Supposons qu'au début Michel avait e euros et c centimes sur lui, soit $100e + c$ centimes. Il résulte de ce problème que c est un nombre pair, et $c < 100$. Après un quart d'heure, Michel avait $100 \times \frac{c}{2} + e$ centimes, ce qui équivaut à la moitié de la somme initiale. Donc $100 \times \frac{c}{2} + e = \frac{100e + c}{2}$, soit $99c = 98e$.

Étant donné que 99 et 98 sont des nombres indivisibles entre eux, 99 est un diviseur de e et 98 est un diviseur de c. Nous savons que c est un nombre

naturel inférieur à 100, donc $c = 0$ ou $c = 98$. Pour $c = 0$, on obtient $e = 0$ aussi. Nous savons, toutefois, que Michel avait un peu d'argent sur lui car il en a dépensé la moitié. Ce cas est donc impossible.
Il reste donc $c = 98$, puis à partir de l'équation $99c = 98e$, on obtient $e = 99$. Vérifions : Michel est venu au marché avec 99,98 euros, puis après un quart d'heure, il lui restait la moitié, soit 49,99 euros. Effectivement, en un quart d'heure, le nombre de centimes (99) est égal au nombre d'euros du début, et le nombre d'euros (49) est maintenant la moitié du nombre initial de centimes (98).
Réponse : Au début, Michel avait 99,98 euros.

58. Si nous exprimons par D, M, J et P le nombre d'années de David, Marc, Jacques, et Paul respectivement, nous aurons les égalités : $J = M + 4 = D + 8$, et $M \times P = J \times D + 16$.
De la première égalité, nous avons $J = M + 4$ et $D = M - 4$. En remplaçant dans l'équation $M \times P = J \times D + 16$, on obtient $M \times P = (M + 4) \times (M - 4) + 16$, à savoir $M \times P = M^2$. Nous obtenons l'égalité $M \times (P - M) = 0$, d'où $P = M$, parce que M peut ne pas être égal à zéro. Donc les jumeaux sont Marc et Paul. Aucune autre paire de garçons ne peut être des jumeaux et on a $J > M > D$, $J > P$ (car $P = M$), et $P > D$.
Réponse : Dans le groupe de quatre, les jumeaux sont Marc et Paul.

59. Exprimons la somme écrite sur le chèque par e pour les euros et c pour les centimes, où c est un nombre entier naturel plus petit que 100. Écrivons le montant du chèque en centimes comme suit : $(100e + c)$. Mais le caissier a versé à la place $(100c + e)$. Il résulte de l'énoncé que e est également un nombre entier naturel plus petit que 100. Nous savons que la somme versée, diminuée de 5 centimes, est égale à $2 \times (100e + c)$. On obtient alors l'équation $100c + e - 5 = 2 \times (100e + c)$, et $98c - 5 = 199e$, ou $98 \times (c - 2e) = 5 + 3e$. Le côté gauche de la dernière équation est divisible par 98, ce qui signifie que le côté droit doit l'être aussi. Comme $e \leq 99$, $5 + 3e \leq 302$, les seules solutions possibles sont : $5 + 3e = 0$ ou $5 + 3e = 98$ ou $5 + 3e = 2 \times 98$, ou $5 + 3e = 3 \times 98$. Résolvant ces équations, on voit que nous obtenons une valeur non finie de e dans tous les cas, sauf le deuxième. La seule solution correcte est le deuxième cas, $5 + 3e = 98$, et $e = 31$. Sur cette base, et à partir de l'équation $98 \times (c - 2e) = 5 + 3e$, nous avons $c = 63$.
Réponse : Le chèque de Michel s'élève à 31,63 euros.

60. Le nombre de paires est pair, donc le nombre total d'élèves est divisible par 4. Le nombre de filles peut être égal à 2, 6 ou 10. Le nombre de duos composés d'un garçon et d'une fille est égal au nombre de tous les élèves divisé par 4, c'est-à-dire 4, 5 ou 6.

a) S'il n'y avait que deux filles, nous ne pourrions pas avoir 4 paires mixtes.

b) S'il y avait six filles, nous aurions alors cinq de ces paires, ce qui signifie que la sixième fille devrait aussi former une paire avec un garçon ce qui ferait six paires mixtes, soit plus que toutes les autres paires restantes.

c) S'il y avait dix filles, alors il y aurait six paires mixtes.

Les six groupes restants comprendraient deux paires de filles et quatre paires de garçons.

Réponse : La classe de 5A compte 24 élèves.

61. Soit x l'âge d'Anne en années. Comme $24 = 2 \times 12$, Anne avait 12 ans lorsque Marie avait l'âge d'Anne aujourd'hui. Cela signifie aussi qu'Anne avait 12 ans quand Marie en avait x. Maintenant, Anne a x ans et Marie 24. Comme la différence reste constante, $12 - x = x - 24$, d'où $x = 18$.

Réponse : Anne a 18 ans.

62. Soit x l'âge actuel de Mamie et y l'âge de Papy. Nous savons que : il y a $(y - x)$ ans Papy était aussi vieux que Mamie aujourd'hui. Il y a $(y - x)$ ans, Mamie avait $x - (y - x)$ ans. Papy est maintenant deux fois plus vieux que Mamie donc l'âge actuel de Papy est $2 \times (x - (y - x))$. $y = 2 \times (x - (y - x)) = 2 \times (2x - y) = 4x - 2y$, soit $3y = 4x$. Nous savons aussi que la somme de leur âge est de 140, soit $x + y = 140$, et donc $y = 140 - x$. En remplaçant dans l'équation $3y = 4x$, nous avons $3 \times (140 - x) = 4x$, donc $3 \times 140 = 7x$, soit $x = 3 \times 20 = 60$.

Réponse : Mamie a 60 ans.

63. Supposons que j, a et f désignent le nombre de champignons cueillis par Jean, Alex et Frank, respectivement. Nous avons $j + a = 3f$ et $a + f = 5j$. En ajoutant les deux côtés, nous obtenons $f + j + 2a = 3f + 5j$, et $2a = 2f + 4j$, d'où $a = f + 2j$. Nous supposons en même temps que $j > 0$, car sinon à cause de l'équation $a + f = 5j$, personne n'aurait trouvé un seul champignon. Donc, $a = f + 2j > f + j$.

Réponse : Alex a trouvé plus de champignons que Jean et Frank réunis.

64. Lorsque Louis perd, on multiplie la somme d'argent qu'il a par $\frac{1}{2}$, quand il gagne par $\frac{3}{2}$. Puisque la multiplication est à la fois commutative et associative, la séquence des victoires et des défaites de Louis n'a pas d'importance. Après quatre victoires et trois défaites, il lui restera une somme d'argent correspondant à la quantité initiale multipliée par $(\frac{3}{2})^4$ et $(\frac{1}{2})^3$ soit $32 \times (\frac{3}{2})^4 \times (\frac{1}{2})^3 = 32 \times \frac{81}{128} = \frac{81}{4} = 20\,\frac{1}{4}$.

Réponse : Louis a 20 euros et 25 centimes.

65. Supposons que chaque chiffre soit présent p fois dans ce nombre. La somme des chiffres de ce nombre est égale à $(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \times p = 45p$. Elle est divisible par 3. Un nombre divisible par 3 ne peut pas être une puissance de deux.

Réponse : Le nombre en question ne peut pas être une puissance de 2.

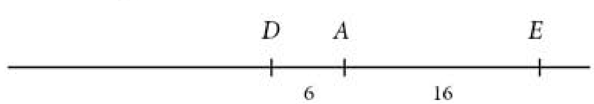
66. Supposons que le rayon du trou au milieu du disque soit notre unité de mesure, $j = \frac{11}{7}$ de pouces. Donc le rayon du disque est $11 = 7 \times \frac{11}{7}$, soit $7j$. La surface du disque ayant un rayon de $7j$ et un trou découpé dans le centre avec un rayon de j est égale à $\pi \times 7^2 - \pi \times 1^2 = 48\pi\ (j^2)$. Appelons r le nouveau rayon du disque exprimé en unités j lorsque la meule est remise à Michel. La surface du disque de rayon r qui présente une ouverture de rayon 1 découpée dans son centre est égale à la moitié de $48\pi \times (j^2)$, soit $\pi \times (r^2 - 1) = 24\pi \times (j^2)$, d'où $r^2 = 25 \times (j^2)$, donc $r = 5j$. Ainsi, le diamètre du disque que reçoit Michel sera égal à $2 \times 5j = 2 \times 5 \times \frac{11}{7} = \frac{110}{7} = 15 \times \frac{5}{7}$ pouces.

Réponse : Le diamètre du disque est égal à $15 \times \frac{5}{7}$ pouces.

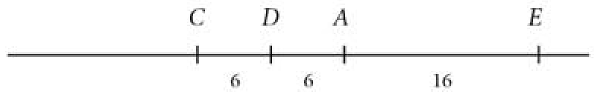
CHAPITRE 4

GÉOMÉTRIE

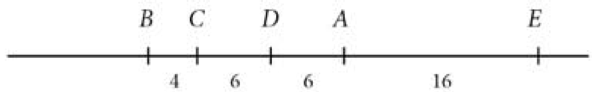
67. Étant donné que la distance entre D et E est la même que la somme des distances entre D et A, et entre A et E, on en déduit que A se trouve entre D et E. Mettons les trois points sur une droite.



Entre *D* et *C* il y a 6 km comme entre *D* et *A*, donc *C* et *A* doivent se trouver de part et d'autre de *D*.



Enfin, la distance entre *A* et *B* est de 16 km, soit la même qu'entre *A* et *E*. On en déduit que *B* et *E* sont de part et d'autre de *A*, alors que *B* et *C* sont à 16 – 12 = 4 km de distance.

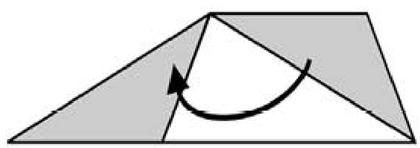


Maintenant, la réponse se voit sur le graphique.

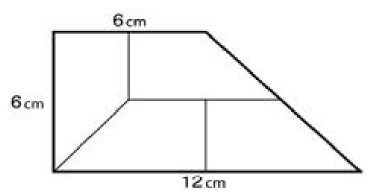
Réponse : Les villages sont situés dans la séquence : *BCDAE*, ou en venant de la direction opposée : *EADCB*.

68.

Nous divisons le trapèze le long de l'une de ses diagonales – voir la figure ci-dessous.

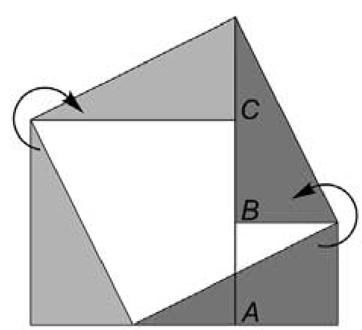


69.



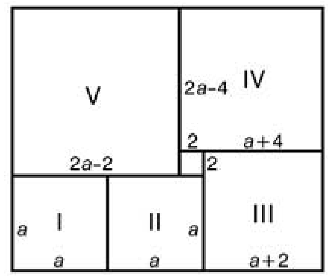
70.

La décomposition de la figure est montrée sur le dessin. Il serait utile de calculer la longueur d'un côté du nouveau carré. Si la longueur du côté du petit carré est égale à 1, alors la longueur du côté du grand carré est 2 ce qui veut dire que la superficie totale est égale à 5. D'où on peut calculer la longueur du côté



du carré en mettant les trois formes ensembles de la figure $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$, c'est-à-dire, la même que l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés mesureraient 1 et 2.

71. Soit a la longueur du côté du carré I (voir la figure ci-contre). La longueur du côté du carré II est aussi égale à a donc la longueur de côté du carré III est $a + 2$ et celle du carré IV est $a + 4$. Nous savons également que la longueur du côté du carré V est égale à $2a - 2$, d'où la longueur du côté du carré IV est égale à $2a - 4$. On a alors la longueur du côté du carré IV calculée de deux façons, et on obtient $a + 4 = 2a - 4$, donc $a = 8$.

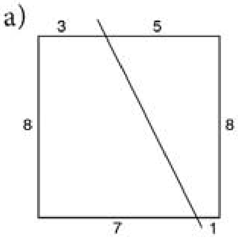


Ainsi, les longueurs des côtés de l'ensemble du rectangle sont $3a + 2$ et $3a - 2$. Sa superficie est donc $(3a + 2) \times (3a - 2) = 9a^2 - 4 = 9 \times 64 - 4 = 572$.
Réponse : La superficie du rectangle est de 572 cm².

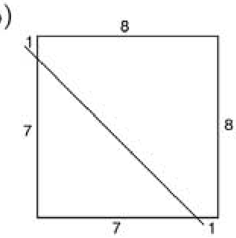
72. Le pentagone *BCD'EF* formé à partir d'une feuille de papier pliée a été peint des deux côtés, à savoir 24 cm² au total. Après avoir déplié le papier, sa superficie est de 40 cm² (deux côtés mesurant 20 cm² chacun), donc la partie non peinte mesure : 40 – 24 = 16 cm².
Réponse : La superficie de la partie blanche du rectangle est égale à 16 cm².

73. La droite divisant le périmètre du carré dans le rapport de 9/7 et l'un des côtés (appelons-le côté *AB*) dans le rapport de 7/1, peut couper le carré de deux façons, selon que le segment le plus long du côté *AB* appartient à la partie la plus longue (a) ou à la partie la plus petite (b) du périmètre du carré (voir les figures).
Dans le cas (b), la droite coupe le second côté (gauche vertical) dans le rapport de 7/1, et non 5/3. Cela signifie que la droite doit être comme dans la figure (a).
La superficie du trapèze du côté gauche de la droite est de $(8 \times (3 + 7)) \div 2 = 40$, et la superficie du trapèze à droite $(8 \times (5 + 1)) \div 2 = 24$, donc la droite divise la superficie du carré dans le rapport de 40/24 soit encore 5/3.
Réponse : La droite partage la superficie du carré dans le rapport de 5/3.

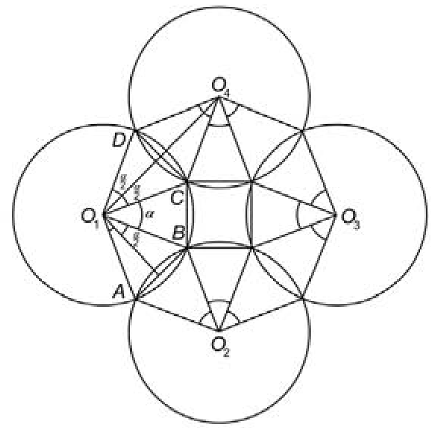
a)



b)



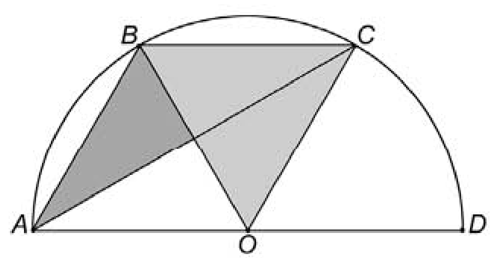
74. Nommons les centres des cercles O_1, O_2, O_3, O_4, et les points d'intersection du cercle de centre O_1, avec ceux O_2 et O_4 par A, B, C, D (voir la figure). Désignons par α la mesure de l'angle $\widehat{AO_1B}$. Les angles $\widehat{BO_1C}$ et $\widehat{CO_1D}$ ont la même mesure α car ce sont des angles au centre d'un même cercle, sous-tendant un arc de cercle de même longueur (3 cm). Comme les cercles sont égaux, et leurs arcs les plus courts sont de même longueur, les neuf autres angles de la figure ont la même mesure α.



Le quadrilatère O_1AO_2B est un losange (la longueur de chacun de ses côtés est égale aux rayons des cercles), donc sa diagonale O_1O_2 divise $\widehat{AO_1B}$ en deux angles de mesure identique égale à $\frac{\alpha}{2}$, comme dans le cas du losange O_4DO_1C et des deux autres. Examinons le quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$. L'angle au sommet O_1 a une mesure égale à $\frac{\alpha}{2} + \alpha + \frac{\alpha}{2} = 2\alpha$, de même que le reste des angles des sommets du quadrilatère. Le quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$ est donc un carré, car $2\alpha = 90°$. La circonférence de chaque cercle est égale à $3 \times (\frac{360°}{\alpha}) = 3 \times (\frac{360°}{45°}) = 3 \times 8 = 24$.

Réponse : La circonférence de chaque cercle est égale à 24 cm.

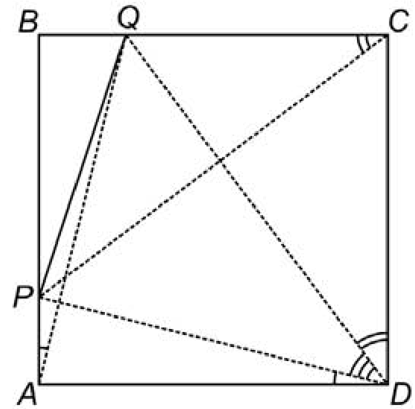
75. Les arcs AB et BC sont de même longueur, donc B et C sont équidistants du diamètre AD. Et les segments BC et AD sont parallèles. Soit O le milieu du segment AD. Les triangles BCA et BCO ont un côté commun : BC, les hauteurs de ces triangles sur BC sont de même longueur (parce que AD et BC sont parallèles). Ce qui signifie que la superficie de ces triangles est la même (voir la figure ci-contre).



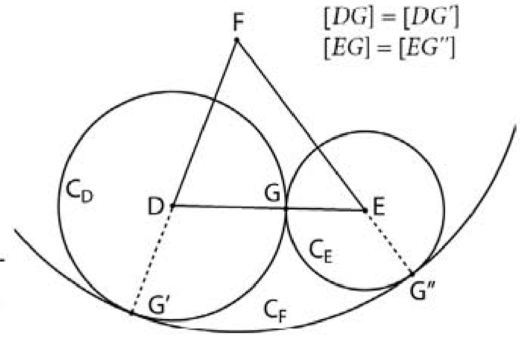
La superficie est alors égale à celle du secteur circulaire BCO, soit : $\frac{1}{6}$ de celle du cercle entier. Calculons : $\frac{1}{6} \times 10^2 \pi = \frac{50\pi}{3}$ (cm²).

Réponse : La superficie du triangle ABC est égale à $\frac{50\pi}{3}$ cm².

76. Comme les segments $[PB] + [BQ] = [AB] = [PB] + [AP]$, donc $[BQ] = [AP]$. Cela signifie que les triangles rectangles QBA et PAD ont les côtés de même longueur : $[BQ] = [AP]$ et $[AB] = [AD]$, donc ils sont égaux, et par conséquent les angles $\widehat{PAQ}$ et $\widehat{ADP}$sont égaux. De même les triangles PBC et QCD sont égaux, et les angles $\widehat{PCQ}$ et $\widehat{QDC}$ sont égaux. Donc on peut écrire : $\widehat{PAQ} + \widehat{PDQ} + \widehat{PCQ} = \widehat{ADP} + \widehat{PDQ} + \widehat{QDC} = \widehat{ADC} = 90°$.



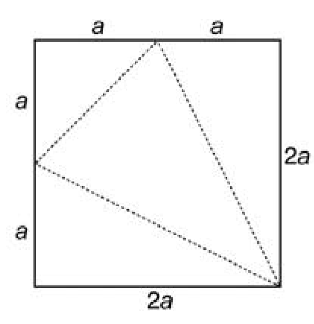
77. Appelons G le point d'intersection des deux cercles C_D et C_E (voir la figure). Nous voyons que le rayon r du cercle C_F est égal à $r = [FD] + [DG]$, et de l'autre côté, $r = [FE] + [EG]$. Donc $2r = [FD] + [DG] + [FE] + [EG] = [FD] + ([DG] + [EG]) + [FE] = 30$ cm, d'où $r = 15$ cm.



Réponse : La longueur du rayon du cercle C_F est de 15 cm.

78. Désignons par α, β, γ les angles de ce triangle. Nous avons $\alpha < \beta + \gamma$, d'où $2\alpha < \alpha + \beta + \gamma = 180°$ donc $\alpha < 90°$. De la même façon, nous démontrons que $\beta < 90°$ et $\gamma < 90°$, et concluons donc que le triangle est aigu. Si le triangle est aigu, chacun de ses angles est inférieur à 90°, et la somme de deux angles est alors supérieure à 90°. Tout triangle aigu satisfait aux conditions du problème. Ce qui veut aussi dire que pour un triangle satisfaisant à la condition du problème, nous ne pouvons pas dire autre chose qu'il est aigu.

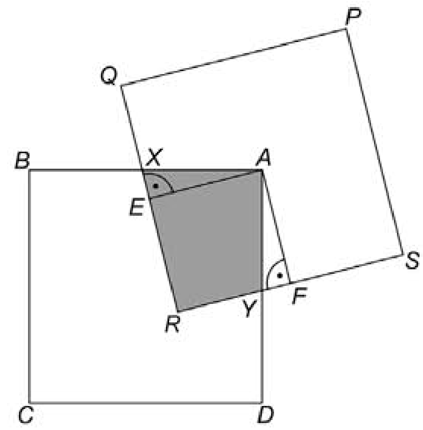
Réponse : Le triangle est aigu.



79. Oui, il est possible d'obtenir un tétraèdre par pliage d'une feuille de papier carrée le long des pointillés (voir la figure ci-contre).

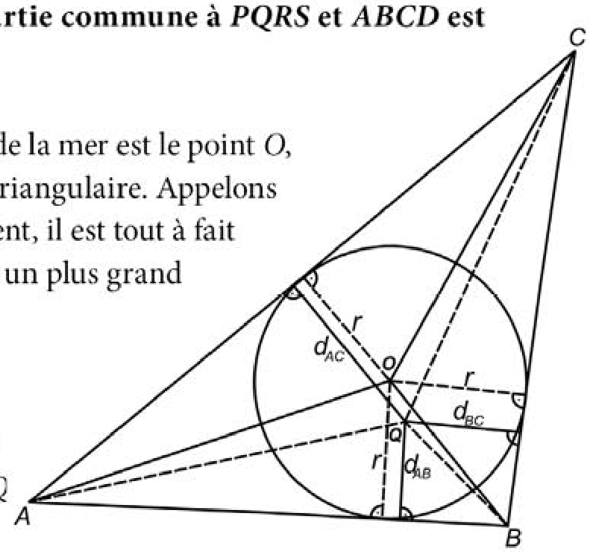
Réponse : Oui, la figure en question peut être un carré.

80. Nommons E et F les milieux des côtés du carré $PQRS$ qui coupe le carré $ABCD$ en X et Y (voir la figure). Les angles $\widehat{XEA}$ et $\widehat{YFA}$ sont droits et les angles $\widehat{XAE}$ et $\widehat{YAF}$ sont égaux, car $\widehat{XEA} = 90° - \widehat{EAY} = \widehat{YAF}$. En outre, les segments [AE] et [AF] sont égaux. Les triangles XAE et YFA sont donc égaux et ont la même superficie.
Ainsi, la superficie de la partie grisée est égale à la superficie du carré $ERFA$, et au $\frac{1}{4}$ de la superficie du carré $PQRS$, c'est-à-dire, $\frac{1}{4} \times 100\ cm^2 = 25\ cm^2$.



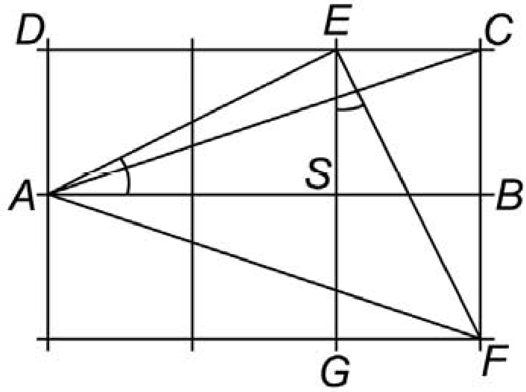
Réponse : La superficie de la partie commune à *PQRS* et *ABCD* est de 25 cm².

81. Le point le plus éloigné de la mer est le point O, centre du cercle inscrit dans l'île triangulaire. Appelons r le rayon de ce cercle. Intuitivement, il est tout à fait évident qu'on ne peut pas inscrire un plus grand cercle dans ce triangle.
En voici la preuve :
Supposons qu'un point Q dans le triangle se trouve plus loin que O.
Soit d_{AB}, d_{BC}, d_{AC} les distances de Q aux côtés AB, BC et CA.



Par hypothèse, $d_{AB} > r$, $d_{BC} > r$, $d_{AC} > r$. Donc, $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} = \frac{([AB] \times r + [BC] \times r + [CA] \times r)}{2} = \frac{(r \times ([AB] + [BC] + [CA]))}{2}$.
D'un autre côté, nous avons également : $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AQB} + S_{\Delta BQC} + S_{\Delta AQC} = \frac{([AB] \times d_{AB} + [BC] \times d_{BC} + [CA] \times d_{AC})}{2} > \frac{([AB] \times r + [BC] \times r + [CA] \times r)}{2} = \frac{r \times ([AB] + [BC] + [CA]}{2}$. Ce qui est en contradiction avec l'égalité précédente. En conséquence de l'hypothèse, on peut dire que dans le triangle ABC, il existe un point Q distant de chaque côté d'une distance supérieure à r.
Réponse : Le point le plus éloigné de la mer est le centre du cercle inscrit dans le triangle qui représente l'île.

82. Soient F, G et S des points d'intersection (voir la figure). Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BAF}$ sont égaux, donc $\widehat{BAC} + \widehat{BAE} = \widehat{BAF} + \widehat{BAE} = \widehat{EAF}$.
Les triangles ASE et EGF sont égaux. (Ils sont rectangles, et les longueurs des côtés adjacents sont 1 et 2), ainsi $\widehat{AEF} = \widehat{AES} + \widehat{GEF} = \widehat{AES} + \widehat{SAE} = 180° - \widehat{ASE} = 90°$. En outre, $[AE] = [EF]$, et le triangle AEF est isocèle, et l'angle de son sommet E est droit. Donc l'angle $\widehat{AEF} = 45°$.
Réponse : La somme des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BAE}$ est égale à 45°.



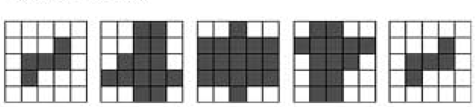
CHAPITRE 5

JEUX, TESTS DE LOGIQUE ET AUTRES

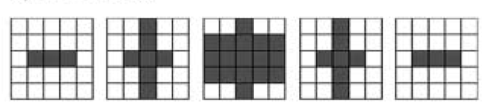
83. C'est possible, et en voici un exemple : Anne Dupont (une brune), Marie Dupont (une blonde), Anne Dubois (une blonde) et Marie Dubois (une brune).
Réponse : Il est possible de satisfaire aux conditions fixées.

84. Une fois que les couches successives des hexaèdres sont dessinées couche par couche, (à partir de la couche à la base), comptons les cubes – voir la figure ci-dessous.

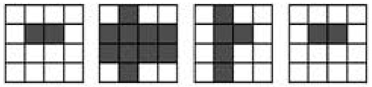
a) 88 cubes



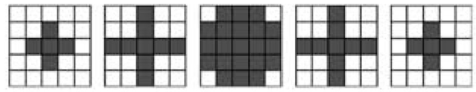
b) 70 cubes



c) 45 cubes

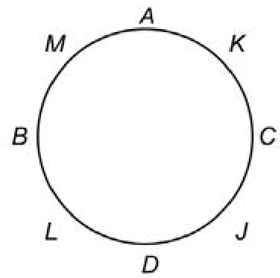


d) 76 cubes

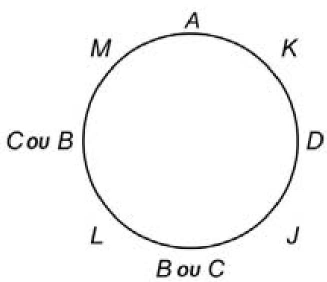


Réponse : Les hexaèdres se composent de :
a) 88 cubes, b) 70 cubes, c) 45 cubes et d) 76 cubes.

85. Mathieu est assis à la droite d'Agathe, donc Kevin doit être assis à sa gauche. À la gauche de Kevin aurait pu être assise soit Céline soit Daphné (pas Barbara car elle est l'épouse de Mathieu).



Prenons deux cas :
a) Si Céline était assise à la gauche de Kevin, alors à sa gauche il y aurait Jean (Kevin et Mathieu sont déjà assis ailleurs, et Léon est le mari de Céline). Nous savons aussi que Daphné est assise à côté de Jean, alors elle doit avoir pris un siège à sa gauche. Reste deux sièges occupés par Léon et Barbara (voir la figure ci-contre), ce qui signifie que, à la droite de Barbara se trouve Léon.



b) Si Daphné était assise à la gauche de Kevin, alors selon l'énoncé du problème, à sa gauche serait assis Jean. Les trois sièges suivants seraient occupés par : Barbara, Céline et Léon, avec Léon assis entre Barbara et Céline (sinon les deux dames auraient été assises côte à côte) – voir la figure sur la gauche. Dans ce cas, toutefois, Céline serait la voisine de son mari, Léon. Ce qui, par définition est impossible.
Réponse : Léon est assis à la droite de Barbara.

86. Nous devons laisser les graduations 0 et 11 cm, sinon il ne serait pas possible de mesurer 11 cm avec la règle. En laissant seulement les autres graduations, par exemple, a, b, et c, où $a < b < c$, nous pourrions mesurer les distances a, b, c, 11, $b - a$, $c - a$, $11 - a$, $c - b$, $11 - b$, et $11 - c$ (certaines de ces mesures peuvent être égales). Donc nous avons pu mesurer dix distances de 1 à 11, au plus. Parmi elles, il y aurait au moins une mesure de type entier entre 1 à 11 cm, qui n'a pas pu être mesurée. C'est la raison pour laquelle nous devons laisser au moins quatre graduations, en plus des deux 1 et 11 cm. Une telle règle peut facilement être dessinée en utilisant une méthode d'essai erreur.

Réponse : On peut retirer six graduations au plus.

87. Supposons que Dorothée mente. Alors, les autres filles disent la vérité et aucune d'entre elles ne serait la plus jeune, ce qui est bien sûr impossible. Donc Dorothée dit la vérité, et elle est vraiment la plus jeune. Si Annie dit la vérité, alors elle est l'aînée, mais cela signifierait que toutes les filles disent la vérité, ce qui est en contradiction avec l'énoncé du problème. C'est donc Annie qui ment, et les autres filles disent la vérité. Par conséquent, nous concluons que l'aînée est Céline.
Réponse : Dorothée est la plus jeune et Céline est l'aînée.

88. Comme les habitants d'un village donné commencent la conversation avec une phrase vraie, l'information à la brigade est vraie. Vérifions tous les cas possibles :
a) Si l'appelant était d'Aden, alors toutes ses réponses sont vraies. Il aurait dit dans la deuxième phrase que le feu avait éclaté à Aden, et dans la troisième, que le village de Caden était en feu. Cela est bien sûr impossible, parce qu'il y a le feu dans un seul village.
b) Si l'appel venait de Baden, la deuxième réponse, serait qu'aucun feu n'avait éclaté soit à Baden soit à Caden (Réponse 3). Ainsi, le feu serait à Aden.
c) Si l'appel a été passé par un habitant de Caden, alors nous savons de la deuxième phrase que le feu serait dans un autre village que Caden, mais la troisième phrase dit que Caden était en feu, ce qui est une contradiction flagrante.
Réponse : Le feu a été signalé par un habitant de Baden. Le pompier de garde devrait envoyer le camion de pompiers à Aden.

89. Le chef du gang n'est pas debout à côté de Julien. Si tel était le cas, Julien aurait menti une seule fois, tout en répondant aux questions 2 ou 3. De même, ni Jean ni Igor ne peuvent être le chef du gang. Julien n'est pas le patron

non plus, s'il l'était il aurait alors donné quatre réponses fausses. Jacques non plus n'est pas le chef de gang, car si c'était le cas, il n'aurait pas dit une seule fois un mensonge. Enfin, Pierre ne peut pas être le patron non plus, parce que s'il l'était, il aurait donné de fausses réponses aux trois premières questions. Toutefois, si David n'est pas le chef, parmi les six criminels capturés, il n'y aurait pas de chef, mais dans ce cas Julien aurait donné de fausses réponses aux trois dernières questions, ce qui ne peut arriver. Il est donc clair que David est le chef.
Réponse : David est le chef du gang.

90. Ce n'est pas vrai. Par exemple, dans la série 1, 2, 3, 4, 5, et 10, il n'existe pas deux nombres dont la somme ou la différence soit divisible par 10.
Remarque : S'il y avait sept nombres, la réponse serait affirmative. En fait, si parmi eux il y avait deux nombres se terminant par le même chiffre, alors, leur différence se terminerait par 0, et serait divisible par 10. Supposons que ces nombres se terminent par différents chiffres. Tout au plus, deux d'entre eux peuvent se terminer avec les chiffres 0 ou 5, donc au moins cinq nombres finissent avec un chiffre compris dans l'ensemble {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, et 9}. Divisons cet ensemble de chiffres en quatre sous-ensembles : {1, 9}, {2, 8}, {3, 7} et {4, 6}. Comme il y a au moins cinq nombres et qu'ils finissent avec différents chiffres, cela signifie que deux nombres finissent avec des chiffres appartenant au même sous-ensemble de nombres (à deux éléments). La somme de ces deux nombres se termine par un zéro, et est donc divisible par 10.
Réponse : Non, dans un ensemble de six nombres positifs, il n'existe pas deux nombres dont la somme ou la différence soit divisible par 10.

91. Il suffit de prendre une bille dans la boîte (B, V). Dans cette boîte, en raison de la négligence d'Anne, il y a des billes de la même couleur. Deux possibilités s'offrent alors :
a) Dans la boîte marquée (B, V), il y a deux billes blanches. Dans ce cas, la paire de billes vertes est dans la boîte (B, B), elle ne peut pas être dans la boîte (V, V), parce qu'elle serait à sa place, et les deux de couleurs différentes dans la boîte (V, V).
b) Dans la boîte marquée (B, V), il y a deux billes vertes. Dans ce cas, la paire de billes blanches est dans la boîte (V, V), tandis que les billes blanche et verte sont dans la boîte (B, B).

92. Représentons les nombres comme la somme de composants à 3 éléments :

$300 = 100 + 100 + 100 = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{50}) + (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{50}) + (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{50}) = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \dots + (a_{46} + a_{47} + a_{48}) + (a_{49} + a_{50} + a_1) + (a_2 + a_3 + a_4) + \dots + (a_{47} + a_{48} + a_{49}) + (a_{50} + a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + \dots + (a_{48} + a_{49} + a_{50})$.

Du côté droit de cette somme, il y a 50 éléments (chacun d'entre eux étant la somme de 3 nombres). Si chacun des éléments est inférieur à 6, leur somme serait inférieure à $50 \times 6 = 300$, de sorte qu'elle ne serait pas égale à 300. Donc, un des éléments est égal au moins à 6. Cet élément est évidemment la somme de 3 nombres parmi $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{50}$.

Réponse : Oui, il doit y avoir trois chiffres dont la somme est égale à 6.

93. Dans le panier, il ne peut pas y avoir 12 champignons autres que des cèpes. En choisissant 12 champignons, nous n'aurions pas trouvé un cèpe. Donc, il ne peut y avoir pas plus de 11 champignons autres que des cèpes dans le panier. Par conséquent, nous concluons qu'il y a au moins 30 – 11 = 19 cèpes.

De même, le panier ne peut contenir 20 autres champignons que les girolles et en choisissant 20 champignons, nous devrions trouver au moins une girolle. Donc, il y a tout au plus 19 champignons autres que des girolles dans le panier, d'où la conclusion qu'il y a au moins 30 – 19 = 11 girolles.

Il y a 30 champignons au total. Parmi eux, il y a au moins 19 cèpes et au moins 11 girolles.

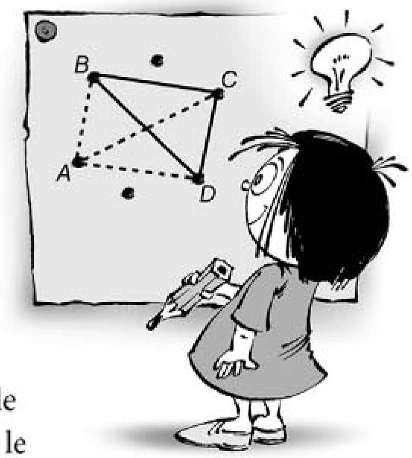
Réponse : Il y a 19 cèpes dans le panier.

94. Après avoir choisi 25 boules, il restera 5 boules dans la boîte. Si on prend 25 boules dans la boîte de telle manière que toutes celles qui restent soient blanches, parmi ces 25 il y aura au moins 3 boules blanches. Donc, il y a au moins 5 + 3 = 8 boules blanches. (Il est bien sûr possible de prendre 25 boules de telle façon à n'avoir que des blanches restant dans la boîte, car s'il y avait moins de 5 boules blanches, elles resteraient toutes dans la boîte, et, parmi les 25 boules tirées, il n'y aurait pas une seule blanche).

De même, il y a au moins 5 + 5 = 10 boules bleues et 5 + 7 = 12 noires. Comme 8 + 10 + 12 = 30, cela signifie qu'il y a 8 boules blanches, 10 bleues et 12 noires.

Réponse : Il y a 8 boules blanches, 10 bleues, et 12 noires.

95. D'un point A partent cinq segments. Parmi eux, il y en a au moins trois ayant la même couleur, par exemple, bleu. Marquons les extrémités de ces segments par B, C et D. Si l'un des segments $[BC]$, $[CD]$ ou $[DB]$ est bleu (par exemple, $[BC]$), nous obtiendrons un triangle avec des côtés bleus (dans notre exemple, ce sera le triangle ABC). Toutefois, si les trois segments $[BC]$, $[CD]$ et $[DB]$ sont rouges, alors le triangle BCD a tous ses côtés rouges. Cela signifie que le triangle nouvellement formé aura ses côtés de la même couleur.



Réponse : Sophie n'a pu accomplir sa tâche et n'a pas reçu le chocolat.

96. Représentons les verres avec des flèches : ↑ désignera un verre avec le pied en haut, tandis que ↓ représentera un verre le pied en bas. Le dessin initial était le suivant : ↑↓↑↓↑. Le premier joueur gagnera s'il retourne le verre n° 5. La disposition sera alors : ↑↓↑↓↓. Maintenant, le second joueur dispose de trois coups possibles :

a) et b) Retourner l'un des deux verres ↑, mais alors l'autre joueur gagne instantanément, en retournant le verre ↑ restant.

c) En retournant les verres n^os 2 et 3, ce qui conduit à l'arrangement suivant : ↑↑↓↓↓. Encore une fois le premier joueur gagne en retournant les verres n^os 1 et 2.

Réponse : Oui, la personne qui commence le jeu peut toujours gagner.

97. En écrivant le chiffre 8, le premier joueur oblige le second à écrire le chiffre 9. Puis, le premier joueur continue à écrire un 8, obligeant le second à écrire un 9. En conséquence, les joueurs formeront le nombre 898 989 898 989. La somme des chiffres du nombre est égale à $6 \times 8 + 6 \times 9 = 6 \times 17$ et est divisible par 3 et donc le nombre est aussi divisible par 3. Donc, la personne qui commence le jeu gagne toujours en écrivant un 8.

Remarque : On peut de même prouver que le joueur qui commence le jeu avec un chiffre autre qu'un 8 perdra toujours (si bien sûr son adversaire utilise cet avantage).

Réponse : La personne qui commence le jeu a une stratégie gagnante.

98. Il serait utile d'envisager la fin de la partie. Lorsque l'un des joueurs écrit un nombre entre 90 et 99, le second gagne en écrivant 100. Mais, si l'un des joueurs écrit 89, son adversaire doit ajouter un nombre qui se trouve entre 90 et 99, et alors le premier concurrent va gagner. Donc en écrivant le nombre $89 = 100 - 11$, cela garantit la victoire.

De même, si un joueur choisit le nombre $78 = 89 - 11$, il oblige son adversaire à choisir un nombre entre 79 et 88, et, ce faisant, gagne en mettant 89. En d'autres termes, le choix du nombre 78 assure la victoire.

Pour gagner, il suffit de toujours écrire des nombres différents de 100 par un multiple quelconque de 11. C'est la raison pour laquelle Adam, qui commence, va gagner, si dans son premier mouvement il écrit le nombre 1 ($= 100 - 9 \times 11$), et ensuite, il choisit les nombres 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, et finalement 100. Il pourra toujours les écrire, quoique son adversaire puisse faire.

Réponse : Le premier joueur a toujours une stratégie gagnante. Pour gagner, il doit commencer par le chiffre 1, puis successivement 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, et 100.

99. Apparemment, le jeu se termine avec la victoire de l'un des joueurs, car le nombre d'allumettes dans la boîte diminue à chaque mouvement.

Appelons D l'hypothèse selon laquelle le nombre d'allumettes dans la boîte est divisible par 3. Tous les autres cas seront notés I. Remarquons que dans une situation de type D, il est impossible de gagner en une seule fois, car on ne peut pas sortir de la boîte un nombre d'allumettes divisible par 3.

Chaque mouvement dans le jeu dans l'hypothèse D, conduit à une situation de type I. Par contre, à partir de la situation I, on peut atteindre D en une seule fois, en prenant une ou deux allumettes et en laissant dans la boîte un nombre d'allumettes divisible par 3.

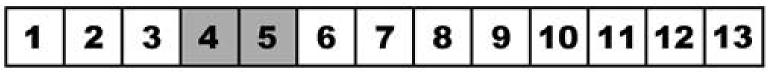
a) Si le nombre initial d'allumettes de la boîte est de 48, le joueur 2 a une stratégie gagnante. La situation initiale est de type D, et le joueur 1 la transforme en I. Puis le joueur 2 rétablit D, etc. Le joueur 1 doit, à chaque mouvement qu'il fait, rétablir la position I, à laquelle le joueur 2 répond en revenant à D. Avec une telle stratégie adoptée par le joueur 2, le premier joueur ne gagnera jamais, parce qu'il est toujours en D, et comme nous l'avons déjà établi, on ne peut gagner en une seule fois depuis la situation D. Comme le jeu se termine par la victoire d'un des concurrents, le gagnant sera le joueur 2.

b) Si la boîte contenait initialement 49 allumettes, le joueur 1 pourrait gagner en prenant une allumette et en utilisant la stratégie définie au point a), car le joueur 2 commencerait avec 48 allumettes dans la boîte et on sait qu'il s'agit d'une situation perdante.

Réponse : S'il y a 48 allumettes dans la boîte, le joueur 1 n'a pas de stratégie gagnante. Si, toutefois, la boîte contient 49 allumettes, le joueur 1 a une stratégie gagnante : il devrait prendre une allumette mais une seule.

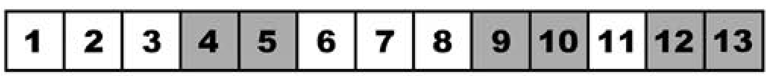
100.

Marc va gagner s'il met le premier domino sur les carrés 4 et 5 (ou de manière symétrique sur les carrés 9 et 10). Ainsi le ruban sera divisé en deux parties – la gauche correspondra à exactement un domino quelque soit le jeu.

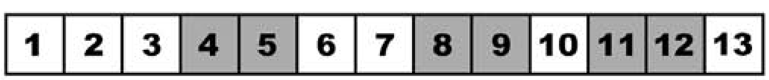


Ensuite, Marc doit s'assurer que seulement trois dominos peuvent rester à droite. Alors il va gagner. Il peut procéder comme suit :

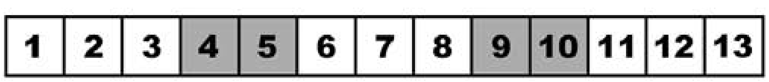
a) Si Daniel laisse les places 9 et 10 libres (par exemple, en occupant les places 12 et 13), Marc mettra le domino sur les places 9 et 10. Il restera deux emplacements pour deux dominos : l'un sera pris par Daniel, et l'autre, par Marc, qui ainsi va gagner.



b) Si Daniel met le domino en 8 et 9 (ou 10 et 11), Marc couvrira les cases 11 et 12 (ou 7 et 8). Encore une fois il ne restera que deux espaces vides pour deux dominos, de sorte que Marc va gagner une fois de plus.



c) Si Daniel utilise les carrés 9 et 10, il restera alors assez de place pour trois dominos.



Marc peut maintenant mettre un domino sur n'importe quelle case libre et il va gagner quoi que Daniel fasse.
Si la bande avait 14 carrés, Marc aurait également une stratégie gagnante. Il aurait suffi de mettre un domino sur les deux places centrales,

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

puis, de placer les dominos de façon symétrique aux mouvements de Daniel. Par exemple, si Daniel devait mettre un domino sur les places 2 et 3, Marc en mettrait un en 12 et 13.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

En jouant de cette façon, Marc pourra toujours répondre à toute action de Daniel afin de ne pas perdre. Puisque le jeu se termine lorsque tous les espaces vides ont été couverts, quelqu'un doit perdre, ce sera Daniel.
Réponse : Dans les deux cas, Marc, qui commence le jeu, a une stratégie gagnante.

Dr. Zbigniew Romanowicz, a été un professeur reconnu et un fervent promoteur des mathématiques auprès des jeunes. Il a appartenu à la très reconnue Ecole polono-russe des mathématiques et a été directeur de l'Institut de mathématiques de la Faculté de technologie de l'Université de Wroclaw en Pologne. Dans les années 1992–2004, il a présidé le jury du Championnat polonais de mathématiques et des jeux de logique qui fait partie du Comité International des jeux mathématiques basé à Paris. Il a dirigé un club de mathématiques interscolaire très populaire et fut le président du Comité des Olympiades régionales de mathématiques. Il fut un membre actif de la Société polonaise des mathématiques.

Ing. Dr. Bartholomew Dyda, diplômé de la Faculté des problèmes fondamentaux de technologie de l'Université de Wroclaw en Pologne, travaille à l'Institut de mathématiques et d'informatique à la Faculté de technologie de l'Université de Wroclaw. Depuis 1992, il participe, avec succès, à des championnats de mathématiques et des jeux de logique, ayant remporté par 2 fois la médaille de bronze des Championnats Internationnaux de mathématiques et de jeux de logique à Paris.

Couverture
Pawel Kucfir

Illustrateur
Jacques Skrzydlewski

Mise en page et mise en couleurs
Blake Bendezar

Edition
Virginie Little

Correction des épreuves
Benoit Baloge

ISBN 978-1-62321-098-4

www.rosedelafontaine.fr

Breslau 2014