



# Mathématiques

CLASSE DE **6<sup>e</sup>**

---

Pour ceux  
qui veulent comprendre

Jean-Louis FROT



# Mathématiques

CLASSE DE **6<sup>e</sup>**

---

Pour ceux  
qui veulent comprendre

Jean-Louis FROT



# Avant-propos

Les années passées jadis au milieu de mes élèves de collège m'ont conduit à penser que dans les petites classes, il faut essayer de donner aux enfants :

## le goût et l'émerveillement des nombres, des figures et des jolis calculs.

J'ai enseigné les mathématiques dans toutes les classes du collège et du lycée, mais surtout (dans des conditions très privilégiées, au lycée Henri IV, à Paris) en classes de première S et terminale S. Je sais que la principale difficulté pour enseigner les mathématiques est de les rendre humaines, attractives et intéressantes, ce qui ne veut pas dire ludiques ou amusantes car les mathématiques sont une chose sérieuse.

Bien souvent, les mathématiques sont enseignées de façon rébarbative et ennuyeuse. Pourtant, et j'ai pu le constater tout au long de ma carrière, la curiosité et l'intelligence des enfants et des jeunes ne demandent qu'à croître et à se fortifier. Il leur faut donc une **nourriture intellectuelle vivifiante**.

C'est ce qui m'a décidé à prendre la plume, avec l'intention d'écrire un livre de mathématiques de niveau collège qui contribuât à la formation des enfants, du point de vue intellectuel, humain, spirituel, et qui exaltât aussi le sens de la **beauté** et du **courage**, conscient que ces grands mots vont contre l'air du temps.

L'origine des mathématiques se perd dans la nuit des temps. On connaît le **papyrus de Rhindt**, découvert sur un site archéologique de Thèbes, en Égypte, qui date du XVI<sup>e</sup> siècle avant Jésus-Christ. Il contient des problèmes résolus d'arithmétique et d'arpentage.

On doit aux Grecs de l'Antiquité, à partir du V<sup>e</sup> siècle avant Jésus-Christ, les plus anciennes **démonstrations** écrites et rigoureuses qui nous soient parvenues. Elles portent sur la géométrie et l'arithmétique. Les grands mathématiciens de la Grèce antique sont Thalès, Euclide, Pythagore, Archimède, Diophante, etc.

Il semble que les mathématiques soient entrées en sommeil après le déclin et la chute de Rome (476), et qu'elles ne se soient réveillées que sous Charlemagne (800). Mais au cours de cette période de latence, des mathématiques venant de l'Inde et de la Chine ont été transmises et enrichies par des **mathématiciens chrétiens ou perses** du bassin méditerranéen qui écrivaient en latin, ou en arabe du fait des conquêtes musulmanes commencées au VII<sup>e</sup> siècle et poursuivies bien au-delà. On connaît ainsi un écrit de quelques pages, datant du IX<sup>e</sup> siècle, et qui a pour titre "*al jabr*" (algèbre). Le savant moine bénédictin Gerbert, de l'abbaye d'Aurillac, élu pape en 999 sous le nom de Sylvestre II, a introduit l'algèbre en Europe.

Le développement ultérieur des sciences est en grande partie dû aux progrès accomplis en mathématiques dans le formalisme et les notations, à partir du XV<sup>e</sup> siècle (Chuquet, Viète) et à l'intrépidité de quelques expérimentateurs et géomètres (Cardan, Bombielli, Toricelli, Galilée, Descartes, Pascal, Fermat etc.). C'est le nouvel essor des mathématiques qui s'est produit dans l'Europe chrétienne qui a permis le développement spectaculaire de la physique à partir du XVII<sup>e</sup> siècle.

Depuis cette époque, on ne peut plus **rien faire de sérieux** en sciences sans une formation de base solide en mathématiques. « La nature est un livre écrit en langage mathématique » disait Galilée au XVI<sup>e</sup> siècle.

Les mathématiques sont le lieu privilégié des certitudes rationnelles, des notions abstraites et des démonstrations rigoureuses. Elles ont contribué au développement intellectuel de l'homme au cours des siècles, elles sont une de ses conquêtes, laborieusement acquise, elles constituent une composante majeure de la **culture universelle**.

Nombre de prélats et de princes chrétiens, depuis le Moyen Âge, n'ont pas hésité à se frotter aux sciences de leur époque, à les maintenir, à les protéger et à s'entourer de savants. On a déjà cité le pape de l'an mil, Gerbert d'Aurillac (Sylvestre II). Plus avant, on peut évoquer Saint Augustin (mort en 430) qui relate quelques faits de ses années d'apprentissage dans ses *Confessions* (Liv. 4, chap. 16) :

« J'ai compris sans beaucoup de peine, et sans être aidé d'aucun homme tout ce que j'ai pu lire touchant l'art de l'Éloquence, la Dialectique, la Géométrie, la Musique et l'Arithmétique. »

En France, depuis le milieu des années 1980, les programmes de mathématiques du collège et du lycée ont été progressivement **bouleversés** et **saccagés**. Ayant déjà évoqué ce sujet dans l'épilogue du livre référencé en note <sup>1</sup>, je ne dirai rien ici des partis pris idéologiques qui ont conduit à ces bouleversements et à ce saccage. Mais je dirai quelques mots des conséquences : il ne subsiste plus dans l'enseignement qui est dispensé aux élèves aujourd'hui, qu'une caricature grimaçante des mathématiques. Les mathématiques n'ont plus d'attrait pour les élèves, et la plupart d'entre eux en sont justement dégoûtés. Certains parviennent cependant à échapper au massacre, grâce à leurs parents qui ont les moyens de leur fournir une bonne instruction.

Je ne dis pas que les programmes de mathématiques des années 1950 à 1980 n'avaient pas de défauts, mais je dis que les programmes actuels ne sont plus des mathématiques. Et quand on feuillette la plupart des manuels français de mathématiques destinés à l'enseignement d'aujourd'hui, on est consterné, saisi de colère. Et on se dit :

Quel gâchis ! Quelle décadence ! Pauvres élèves !

Prenant la plume, disais-je, je me suis attaché, dans mes livres destinés au collège, à exposer et expliquer de mon mieux les bases de ce que doit être un enseignement de qualité. La matière abordée est accessible à un élève de niveau moyen, aidé d'un professeur qui choisira ce qui l'intéresse pour faire son cours. Mes livres ne sont qu'un outil entre les mains du professeur et de ses élèves. Le rôle du professeur est déterminant, c'est lui qui détient le savoir, c'est la référence, le modèle que l'enfant doit d'abord tâcher d'imiter lors de son initiation. Un bon professeur sait transmettre son enthousiasme. Il fait preuve de bienveillance, de patience et d'ingéniosité pour faire comprendre les mathématiques et les rendre familières. Tout un savoir non écrit passe par le professeur. Mais je ne voudrais pas laisser croire que je détiens une formule miracle pour enseigner les mathématiques, ou que les mathématiques sont une discipline facile, que l'on peut maîtriser sans efforts.

Pour bien faire comprendre les notions nouvelles, les livres comportent des explications concrètes et, aux niveaux 6<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, ils sont parsemés de **petites questions** posées à l'élève, et qui sont résolues un peu plus loin.

Une série d'exercices clôt chaque chapitre, la plupart originaux. Ils sont **corrigés** entièrement pour montrer aux élèves les méthodes de raisonnement. Presque tous de niveau facile ou moyen, ils ont pour ambition première de faciliter l'assimilation du cours et d'entraîner l'élève à la pratique aisée des techniques de base, un peu comme les gammes et les exercices d'assouplissement des doigts pour le piano. Mais l'auteur n'a pas pu s'empêcher de glisser quand même quelques **exercices plus relevés**, intéressants et instructifs,

---

1. J.-L. Frot : *Mathématiques - Cours de haut niveau pour les élèves de Première et Terminale S qui envisagent une prépa - 2<sup>e</sup> édition révisée*, Ellipses (2018).

destinés à faire **aimer les mathématiques**, et à donner aux enfants suffisamment de satisfaction pour justifier les efforts qu'ils auront consentis pour les comprendre et les résoudre. (Pour les élèves qui veulent aller plus loin, il y a des exercices de niveau plus ambitieux dans le livre référencé en note<sup>2</sup>).

Il ne faut pas se précipiter sur les corrections d'exercices. Il faut se donner la peine de chercher pour avoir la **satisfaction de trouver** par soi-même. Si on parvient sans aide à résoudre ne serait-ce qu'une petite partie des questions, c'est déjà bien. Et puis, rien n'empêche de laisser de côté un exercice qui paraît hors d'atteinte à un moment donné, et d'y revenir un autre jour, lorsqu'on aura acquis plus de connaissances et d'aisance.

Un exercice doit toujours être d'abord cherché au brouillon. Quand on a résolu la première question au brouillon, on peut rédiger la solution de cette première question au propre. On passe ensuite à la deuxième question, et on continue de la même façon. Si on bute sur une question, on peut souvent l'admettre, et passer à la suivante sans dommage.

Un cours de mathématique introduit et explique des notions nouvelles. Si on veut en tirer profit, ces notions doivent être **étudiées** avec soin pour pouvoir les comprendre, et doivent ensuite être **apprises** par cœur, jusqu'à pouvoir **réciter** définitions, règles et théorèmes (*voir* ci-après). C'est un bon entraînement pour les élèves de **travailler à deux**, de réciter et de s'interroger à tour de rôle. Le livre de mathématiques doit devenir un compagnon familier auquel on pourra même avoir recours l'année suivante. L'idéal étant de conserver précieusement ses livres de mathématiques des quatre années du collège.

## Le style mathématique

On verra apparaître, au fil des pages de ce livre, les mots suivants :

- **définition** (abrégé parfois en **déf.**) dit ce que signifie un mot mathématique nouveau,
- **proposition** (abrégé parfois en **prop.**) = propriété,
- **théorème** (abrégé parfois en **th.**) = propriété importante,
- **corollaire** (abrégé parfois en **cor.**) = conséquence.

On donne dans le livre (lorsque c'est possible) des définitions rigoureuses des termes que l'on utilise. Ensuite, on énonce (et démontre parfois) des propositions et des théorèmes. Pour formaliser les énoncés, on utilise des symboles  $\in$  (*voir* p. 55),  $\neq$  (*voir* p. 56),  $\Rightarrow$  (*voir* p. 106),  $\perp$  et  $\parallel$  (*voir* p. 38), etc. Leur définition précise et leur emploi sont donnés dans le livre aux pages que l'on vient d'indiquer. Faisons ici un survol :

symbole	lecture	exemple	traduction
$\in$	appartient	$A \in d$	$A$ est un point de $d$
$\neq$	différent	$1 \neq 0$	1 n'est pas nul
$\Rightarrow$	implique, alors	$x = 1 \Rightarrow x \neq 0$	si $x = 1$ alors il n'est pas nul
$\perp$	perpendiculaire	$d_1 \perp d_2$	$d_1$ et $d_2$ sont perpendiculaires
$\parallel$	parallèle	$d_1 \parallel d_2$	$d_1$ et $d_2$ sont parallèles

---

2. J.-L. Frot : *Mathématiques, exercices avec corrigés et rappels de cours pour ceux qui veulent s'initier pour de bon, 6<sup>e</sup> à 3<sup>e</sup>, 2<sup>e</sup> édition révisée*, Clovis (2020).

Prenons pour exemple l'énoncé suivant :

**Théorème 1.** (théorème des perpendiculaires) *Si deux droites **du plan** sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles.*

Il peut se formuler ainsi, les symboles  $d_1, d_2, d$  désignant des droites du plan :

$$(d_1 \perp d \text{ et } d_2 \perp d) \Rightarrow d_1 \parallel d_2$$

Les textes mathématiques comportent parfois un vocabulaire lourd, pénible à écrire et à lire pour le débutant. Quand quelques abréviations et symboles peuvent alléger le style et mieux faire **comprendre l'essentiel**, on les utilise. Comparer :

“ Les droites  $d_1$  et  $d_2$  sont parallèles d'après le théorème des perpendiculaires (*voir* théorème 1) ”

“  $d_1 \parallel d_2$  d'après le th. des perpendiculaires (*voir* th. 1) ”

On verra dans tout le livre, qu'abréviations et symboles mettent l'accent sur les **propriétés**, les **raisonnements**, et les **points importants**. Ils rendent le texte plus fluide, plus court, et donc plus facile à appréhender.

Ceci ne veut pas dire que l'auteur soit hostile ou indifférent au **beau style**. Ce qu'il veut ici, c'est donner au lecteur des modèles simples pour lui apprendre à réfléchir, raisonner et rédiger clairement.

## Le livre de sixième

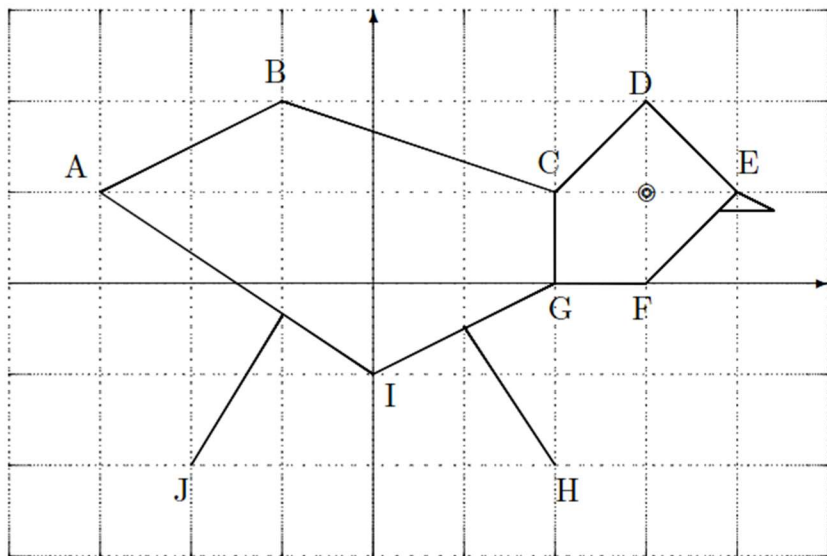
La première partie est consacrée à des révisions de cours moyen. On y trouvera les **définitions** précises des notions de base, les **propriétés** à connaître portant sur les nombres et sur les objets géométriques, de nombreuses figures (toutes originales). Il y a aussi un chapitre récapitulatif portant sur les symboles  $\in, <, >$ , etc. Pour s'entraîner ou se mettre à niveau, il y a une vingtaine d'exercices à chercher, et qui sont corrigés.

La seconde partie aborde le niveau de la classe de sixième. On commence par un peu d'arithmétique : diviseurs d'un entier  $a$ , division euclidienne de  $a$  par  $b$ . Ensuite viennent les équations. On introduit progressivement, pour ne pas effrayer le lecteur, quelques rudiments de calcul algébrique.

En géométrie, on définit les repères du plan. Les coordonnées, positives ou négatives, permettent de construire des figures très variées et d'aborder des exercices assez abstraits. On énonce et on pratique les **cinq théorèmes principaux** de la géométrie plane (§ 2, p. 107). Les propriétés de la **médiatrice** et des **triangles isocèles** sont utilisées pour justifier la construction “à la règle et au compas” de la médiatrice, de la bissectrice et de la hauteur. Nous étudions les symétries axiales, et nous introduisons la notation  $s(M)$  pour désigner le point symétrique de  $M$  par la symétrie  $s$ .

En géométrie dans l'espace, nous étudions le prisme droit. Nous définissons les angles de latitude et de longitude sur une sphère.

**Alors, hardi petits !**



# Table des matières

<b>Révisions de cours moyen</b>	<b>13</b>
<b>1 Les nombres</b>	<b>15</b>
1 Entiers . . . . .	15
2 Décimaux . . . . .	18
3 Fractions . . . . .	19
4 Exercices de révision sur les nombres . . . . .	21
5 Correction des exercices . . . . .	25
<b>2 Un peu d'algèbre</b>	<b>29</b>
1 Petites équations . . . . .	29
2 Nombres proportionnels . . . . .	30
3 Vitesse, distance, temps . . . . .	30
<b>3 Géométrie plane</b>	<b>33</b>
1 Points, droites, cercles . . . . .	33
2 Angles . . . . .	34
3 Triangles et polygones . . . . .	35
4 Droites parallèles, droites perpendiculaires . . . . .	38
<b>4 Les mesures géométriques</b>	<b>39</b>
1 Périmètres . . . . .	39
2 Aires . . . . .	40
3 Volumes . . . . .	42
4 Exercices pour réviser la géométrie . . . . .	45
5 Correction des exercices . . . . .	49
<b>5 Ensembles et relations</b>	<b>55</b>
1 Le symbole $\in$ . . . . .	55
2 Les symboles $=$ $\neq$ $<$ $>$ $\leq$ $\geq$ . . . . .	56
3 Exercices . . . . .	57
4 Correction des exercices . . . . .	58

<b>Classe de sixième</b>	<b>59</b>
<b>1 Arithmétique</b>	<b>61</b>
1 La division euclidienne . . . . .	61
2 Diviseurs d'un entier . . . . .	62
3 Nombres premiers . . . . .	64
4 Priorité des opérations . . . . .	66
5 Exercices . . . . .	67
6 Correction des questions . . . . .	70
7 Correction des exercices . . . . .	71
<b>2 Algèbre</b>	<b>73</b>
1 Équations avec multiplication ou division . . . . .	73
2 Équations avec addition ou soustraction . . . . .	74
3 Calcul algébrique . . . . .	76
4 Complément sur les fractions . . . . .	77
5 Utilisation des équations . . . . .	79
6 Exercices . . . . .	80
7 Correction des questions . . . . .	87
8 Correction des exercices . . . . .	89
<b>3 Coordonnées dans le plan</b>	<b>97</b>
1 Abscisse et ordonnée . . . . .	97
2 Calculs de distances particulières . . . . .	99
3 Exercices . . . . .	99
4 Correction des exercices . . . . .	101
<b>4 Géométrie plane</b>	<b>105</b>
1 Addition des distances et des angles . . . . .	105
2 Les cinq théorèmes principaux . . . . .	107
3 Losange . . . . .	108
4 Médiatrice d'un segment . . . . .	109
5 Bissectrice d'un angle . . . . .	111
6 Droites remarquables d'un triangle . . . . .	112
7 Triangle isocèle . . . . .	112
8 Symétrie axiale . . . . .	113
9 Exercices . . . . .	117
10 Correction des questions . . . . .	128
11 Correction des exercices . . . . .	131
<b>5 Géométrie dans l'espace</b>	<b>151</b>
1 Prisme droit et cylindre . . . . .	151
2 Volumes . . . . .	152
3 La sphère . . . . .	152
4 Latitude et longitude sur la Terre . . . . .	153
5 Exercices . . . . .	154
6 Correction des exercices . . . . .	157

# Révisions de cours moyen

# Chapitre 1

## Les nombres

### 1 Entiers

#### Addition et multiplication

• L'**addition** permet de savoir combien on obtient quand on **réunit** deux quantités séparées. Si j'avais 7 billes, et que j'en ai gagné 3, j'en ai maintenant

$$7 + 3 = 10$$

• La **multiplication** permet de savoir combien on obtient quand on **ajoute plusieurs fois** le même nombre. Si j'ai 3 sacs contenant chacun 7 billes, mon nombre de billes est

$$7 + 7 + 7 = 3 \times 7 = 21$$

- Ne pas confondre

$$7 + 0 = 0 + 7 = 7 \quad 7 \times 0 = 0 \times 7 = 0 \quad 7 + 1 = 1 + 7 = 8 \quad 7 \times 1 = 1 \times 7 = 7$$

- Pour n'importe quel nombre  $a$ , on a toujours :

$$a + 0 = a$$

$$0 + a = a$$

autrement dit, **ajouter 0 ne change pas** la valeur.

- Pour n'importe quel nombre  $a$ , on a toujours :

$$a \times 1 = a$$

$$1 \times a = a$$

autrement dit, **multiplier par 1 ne change pas** la valeur.

## Multiplications par 10 ou 100

- On veut faire une **multiplication par 10**, par exemple, multiplier 3 par 10 ou 10 par 3. On procède ainsi :

$$\begin{aligned} 3 \times 10 &= 10 + 10 + 10 \\ &= 30 \end{aligned}$$

Pour multiplier un entier par 10 **on met un 0 à sa droite**

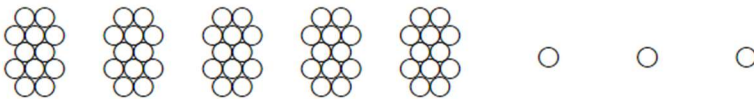
- Pour faire maintenant une **multiplication par 100**, par exemple, multiplier 5 par 100 ou 100 par 5, on fait :

$$\begin{aligned} 5 \times 100 &= 100 + 100 + 100 + 100 + 100 \\ &= 500 \end{aligned}$$

Pour multiplier un entier par 100 **on met deux 0 à sa droite**

## Division

- Quand on divise 63 par 5, la division ne tombe pas juste : le quotient est 12 et il reste 3. Ce qui revient à dire que l'on ne peut pas partager exactement 63 en 5 parts égales : on peut faire **5 parts égales**, mais il y a **en plus un reste** qui vaut **3** :



$$\begin{array}{r|l} 63 & 5 \\ 13 & 12 \\ 3 & \end{array}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} 63 &= 5 \times 12 + 3 \\ &= 60 + 3 \end{aligned}$$

- Dans le cas général, si la **division** de  $a$  par  $b$  donne un **quotient**  $q$  et un **reste**  $r$  qui peut être nul ou pas, on a toujours l'**égalité de division** suivante :

$$a = b \times q + r$$

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ r & q \end{array}$$

ce qui signifie (voir § 4, p. 66) qu'on obtient  $a$  en faisant :

- d'abord la multiplication  $b \times q$
- puis l'addition  $+ r$

## Diviseurs d'un entier

On peut partager l'entier 10 en parts égales de quatre façons possibles :

$$\begin{aligned}
 10 &= \boxed{*****} = 1 \times 10 \\
 &= \boxed{*****} \boxed{*****} = 2 \times 5 \\
 &= \boxed{**} \boxed{**} \boxed{**} \boxed{**} \boxed{**} = 5 \times 2 \\
 &= \boxed{*} \boxed{*} \boxed{*} \boxed{*} \boxed{*} \boxed{*} \boxed{*} \boxed{*} \boxed{*} \boxed{*} = 10 \times 1
 \end{aligned}$$

On dit que les nombres : 1 2 5 10 sont les **diviseurs** de 10. On dit aussi que 10 est **divisible** par 1, 2, 5, 10.

**Définition 2.** On dit qu'un entier  $a$  est **divisible** par un entier  $b$  si la division de  $a$  par  $b$  tombe juste, ce qui revient à dire qu'il existe un entier  $q$  tel que :

$$a = b \times q$$

ce qui correspond à la division suivante :

$$\begin{array}{r}
 a \quad | \quad b \\
 0 \quad | \quad q
 \end{array}$$

**Définition 3.** Si  $a$  est divisible par  $b$ , on dit que  $b$  est un **diviseur** de  $a$ , et que  $a$  est un **multiple** de  $b$ .

**Proposition 4.** Les multiples de  $b$  sont :  $b \quad 2b \quad 3b \quad 4b \quad 5b \quad 6b \quad \dots$

**Proposition 5.** (critères de divisibilité)

- Un entier est divisible par 2 **si et seulement si**, son chiffre des unités est 0 ou 2 ou 4 ou 6 ou 8.
- Un entier est divisible par 3, **si et seulement si**, la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un entier est divisible par 5, **si et seulement si**, son chiffre des unités est 0 ou 5.

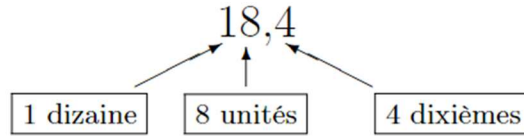
Par exemple, le nombre 226 est divisible par 2, mais il n'est divisible ni par 3 ni par 5.

**Définition 6.** Un entier qui est divisible par 2 est appelé **nombre pair**. Les autres entiers sont dits **impairs**.

Les nombres pairs sont donc : 0 2 4 6 8 10 12 etc. Il y en a une **infinité**. Les impairs sont : 1 3 5 7 9 11 13 etc. Il y en a aussi une infinité.

## 2 Décimaux

Le nombre  $\frac{1}{2} = 0,5$  est décimal, mais  $\frac{1}{3} = 0,333\dots$  n'est pas décimal car la **division de 1 par 3 ne s'arrête pas**.



### Ajouter ou retrancher 1, 10, 100

Pour ajouter 1 à un décimal on ajoute 1 à son chiffre des **unités**

Pour retrancher 1 à un décimal on retranche 1 à son chiffre des **unités**

$$4,2 + 1 = 5,2 \quad \text{et} \quad 4,2 - 1 = 3,2$$

Pour ajouter 10 à un décimal on ajoute 1 à son chiffre des **dizaines**

Pour retrancher 10 à un décimal on retranche 1 à son chiffre des **dizaines**

$$34,2 + 10 = 44,2 \quad 27,3 - 10 = 17,3$$

Le décimal 3,6 n'a pas de chiffre des dizaines : c'est comme si il avait 0 dizaine. On écrit :

$$3,6 = 03,6 \quad \text{et donc} \quad 3,6 + 10 = 03,6 + 10 = 13,6$$

Pour ajouter 100 à un décimal on ajoute 1 à son chiffre des **centaines**

Pour retrancher 100 à un décimal on retranche 1 à son chiffre des **centaines**

$$310,5 + 100 = 410,5 \quad 453,9 - 100 = 353,9 \quad 195,8 - 100 = 95,8$$

### Multiplier ou diviser par 10, 100, 1000

**Proposition 1.** Pour **multiplier** un décimal par 10, on déplace sa virgule de 1 cran vers la **droite**.

Pour **diviser** un décimal par 10, on déplace sa virgule de 1 cran vers la **gauche**.

**Proposition 2.** Pour **multiplier** un décimal par 100, on déplace sa virgule de 2 crans vers la **droite**. Pour **diviser** un décimal par 100, on déplace sa virgule de 2 crans vers la **gauche**.

**Proposition 3.** Pour **multiplier** un décimal par 1000, on déplace sa virgule de 3 crans vers la **droite**. Pour **diviser** un décimal par 1000, on déplace sa virgule de 3 crans vers la **gauche**.

### 3 Fractions

Dans la **fraction**  $\frac{a}{b}$ , le nombre  $a$  est appelé numérateur, le nombre  $b$  est appelé dénominateur. Une fraction est un **nombre** qui peut être :

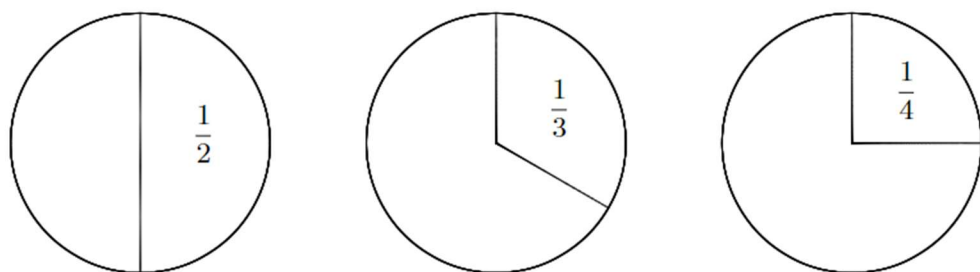
entier :  $\frac{4}{2} = 2$

décimal :  $\frac{3}{2} = 1,5$

ni entier ni décimal :  $\frac{2}{3} = 0,666\dots$

#### Exemples

Suivant que l'on coupe un gâteau en 2, en 3 ou en 4, on obtient des parts **de plus en plus petites** comme on le voit sur la figure :



On a donc la relation suivante :

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

plus le dénominateur est grand, plus la fraction est petite

#### Calcul sur les fractions

**Proposition 1.**

$$a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

$$a \times \frac{c}{b} = \frac{a \times c}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

#### Simplification des fractions

**Proposition 2.**

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

$$\frac{c \times a}{c \times b} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{a} = 1$$

$$\frac{a}{1} = a$$

Simplifier une fraction c'est donc l'écrire avec des nombres plus petits :

$$\frac{3}{6} = \frac{3 \times 1}{3 \times 2} = \frac{\cancel{3} \times 1}{\cancel{3} \times 2} = \frac{1}{2}$$

### Exemples de calculs et de simplifications :

$$2 \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5} \quad 2 \times \frac{3}{8} = \frac{2 \times 3}{8} = \frac{2 \times 3}{2 \times 4} = \frac{\cancel{2} \times 3}{\cancel{2} \times 4} = \frac{3}{4}$$

$$3 \times \frac{4}{9} = \frac{3 \times 4}{9} = \frac{3 \times 4}{3 \times 3} = \frac{\cancel{3} \times 4}{\cancel{3} \times 3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{15}{2} \times \frac{7}{5} = \frac{15 \times 7}{2 \times 5} = \frac{3 \times 5 \times 7}{2 \times 5} = \frac{3 \times 7}{2} = \frac{21}{2} \quad \frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{3+7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{2 \times 5}{2 \times 4} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{3} \times 4 = \frac{1 \times 4}{3} = \frac{4}{3} \quad 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4 \times 1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3} = 1,33333... \approx 1,3 \quad \frac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4} = 3,75$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{3 \times 2}{2 \times 2 \times 5} = \frac{3}{2 \times 5} = \frac{3}{10} = 0,3$$

### Comparaison des fractions et des décimaux

- Les règles de calculs sur les fractions sont commodes pour faire des produits. Ainsi :

$$\frac{1}{5} \times \frac{35}{3} = \frac{35}{5 \times 3} = \frac{5 \times 7}{5 \times 3} = \frac{7}{3}$$

qui peut aussi se calculer par :

$$\frac{1}{5} \times \frac{35}{3} = 0,2 \times \frac{35}{3} = \frac{0,2 \times 35}{3} = \frac{7}{3}$$

- Par contre, le calcul suivant :

$$\frac{1}{7} \times \frac{35}{3} = \frac{35}{7 \times 3} = \frac{7 \times 5}{7 \times 3} = \frac{5}{3}$$

qui se fait aisément avec les règles de calcul sur les fractions, **ne peut pas se faire directement et exactement avec des décimaux** car ni  $\frac{1}{7}$  ni  $\frac{35}{3}$  ne sont décimaux :

$$\frac{1}{7} = 0, \boxed{142857} 142857142857... \quad \frac{35}{3} = 12, \boxed{3} 33...$$

où on a encadré la partie des décimales qui se répètent ; la division ne s'arrête jamais.

- Les décimaux sont commodes pour faire des **sommes** ou calculer des **valeurs approchées**. Ils sont généralement peu commodes pour faire des multiplications.

Dans la vie courante, quand on veut tracer des figures de façon précise avec un double décimètre, ou découper du papier, du tissu, du bois, etc. on utilise les **nombres décimaux**.

## 4 Exercices de révision sur les nombres

### Exercice 1.

Effectuez les opérations suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad 709,86 + 34 = & 2. \quad 128,4 + 72,95 = & 3. \quad 30 + 148,75 = \\
 \quad \quad 576 + 57,6 = & \quad \quad 32,5 - 0,01 = & \quad \quad 1,0007 - 0,1089 = \\
 \quad \quad 1\,591 - 17,92 = & \quad \quad 1,07 - 0,109 = & \quad \quad 46,78 - 3,9 = \\
 \quad \quad 634,63 - 192 = & \quad \quad 23,02 + 30,2 = & \quad \quad 46,08 - 3,009 =
 \end{array}$$

### Exercice 2.

Effectuez les opérations suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad 3,5 \times 2,05 = & 2. \quad 38,5 \times 0,056 = & 3. \quad 0,5 \times 0,05 = \\
 \quad \quad 53,8 \times 20,5 = & \quad \quad 50,8 \times 20,5 = & \quad \quad 3,8 \times 0,25 = \\
 \quad \quad 3,5 \times 7\,000 = & \quad \quad 30,5 \times 70 = & \quad \quad 3,51 \times 70 = \\
 \quad \quad 3,57 \times 0,7 = & \quad \quad 3,2 \times 60,5 = & \quad \quad 30,07 \times 0,07 =
 \end{array}$$

### Exercice 3.

Effectuez les divisions suivantes : poussez **deux chiffres après la virgule** celles qui ne tombent pas juste :

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \frac{156}{25} = & 2. \quad \frac{343}{27} = & 3. \quad \frac{525}{54} = \\
 \quad \quad \frac{192}{11} = & \quad \quad \frac{102}{31} = & \quad \quad \frac{249}{16} = \\
 \quad \quad \frac{166}{29} = & \quad \quad \frac{209}{56} = & \quad \quad \frac{307}{52} = \\
 \quad \quad \frac{288}{9} = & \quad \quad \frac{317}{27} = & \quad \quad \frac{485}{9} =
 \end{array}$$

### Exercice 4.

Effectuez les divisions suivantes au-delà de la virgule jusqu'à ce qu'elles **tombent juste** ou jusqu'à ce que vous trouviez un **reste identique** à un reste précédent :

$$\frac{1}{10} = \quad \quad \frac{1}{11} = \quad \quad \frac{1}{12} = \quad \quad \frac{1}{13} =$$

**Exercice 5** (résolu partiellement).

On considère les nombres suivants :

$$a = 0,9 \times 51,3$$

$$b = 5,02 \times 19,9$$

$$c = 10,09 \times 95,12$$

$$d = 1,9 + 5,89$$

$$e = 15,02 - 8,9$$

$$f = 100,09 + 98,12$$

Sans les calculer exactement, déterminez pour chacun d'eux une valeur approchée.

**Solution :** On utilise le symbole  $\approx$  qui signifie "égal environ". On a :

$$0,9 \approx 1 \quad \text{et} \quad 51,3 \approx 50$$

Donc  $a \approx 1 \times 50 = 50$ . Procéder de même pour  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  et  $f$ .

**Exercice 6** (résolu partiellement).

Simplifiez le plus possible les nombres suivants :

$$x = \frac{250 \times 12}{8} \quad y = \frac{50 \times 3}{25} \quad z = \frac{8 \times 7}{4} \quad t = \frac{56 \times 45}{18}$$

**Solution partielle :** On peut écrire :

$$\begin{aligned} x &= \frac{(125 \times 2) \times (4 \times 3)}{2 \times 4} \\ &= \frac{125 \times \cancel{2} \times \cancel{4} \times 3}{\cancel{2} \times \cancel{4}} \\ &= 125 \times 3 \\ &= 375 \end{aligned}$$

Procédez de façon analogue pour  $y$ ,  $z$  et  $t$ .

**Exercice 7** (résolu partiellement).

Écrivez sous forme de fractions irréductibles les nombres suivants :

$$a = \frac{4,5}{6} \quad b = \frac{18}{24} \quad c = \frac{3,5}{6} \quad d = \frac{5}{6,5} \quad e = \frac{2,5}{10} \quad f = \frac{12}{42}$$

**Solution partielle :** On multiplie par 2 numérateur et dénominateur de  $a$  pour obtenir une fraction, puis on simplifie :

$$a = \frac{4,5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{9}{12} = \frac{3 \times 3}{3 \times 4} = \frac{3}{4}$$

On a aussi :

$$b = \frac{6 \times 3}{6 \times 4} = \frac{3}{4}$$

Faites de même pour  $c$ ,  $d$ ,  $e$  et  $f$ .

**Exercice 8** (résolu partiellement).

Calculez les produits puis simplifiez-les :

1.  $2 \times \frac{3}{8} =$

2.  $\frac{3}{14} \times 7 =$

3.  $8 \times \frac{5}{4} =$

$3 \times \frac{4}{9} =$

$\frac{2}{5} \times 10 =$

$15 \times \frac{3}{20} =$

$6 \times \frac{5}{18} =$

$\frac{7}{27} \times 9 =$

$6 \times \frac{2}{9} =$

**Solution partielle : 1.** On a :

$$2 \times \frac{3}{8} = \frac{2 \times 3}{8} = \frac{2 \times 3}{2 \times 4} = \frac{\cancel{2} \times 3}{\cancel{2} \times 4} = \frac{3}{4}$$

$$3 \times \frac{4}{9} = \frac{3 \times 4}{9} = \frac{3 \times 4}{3 \times 3} = \frac{\cancel{3} \times 4}{\cancel{3} \times 3} = \frac{4}{3}$$

$$6 \times \frac{5}{18} = \frac{6 \times 5}{18} = \frac{6 \times 5}{6 \times 3} = \frac{\cancel{6} \times 5}{\cancel{6} \times 3} = \frac{5}{3}$$

Les questions 2. et 3. se traitent sur ce modèle.

**Exercice 9** (résolu partiellement).

Calculez et simplifiez le plus possible les produits suivants :

$$a = \frac{3}{14} \times 21 \quad b = 30 \times \frac{7}{45} \quad c = 60 \times \frac{5}{54} \quad d = 12 \times \frac{3}{8} \quad e = 12 \times \frac{5}{6}$$

**Solution partielle :** On applique la règle de multiplication d'une fraction par un entier, et on obtient :

$$a = \frac{3 \times 21}{14} = \frac{3 \times 3 \times 7}{2 \times 7} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$$

Faites de même pour  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et  $e$ .

**Exercice 10.**

Simplifiez le plus possible les nombres suivants :

$$a = \frac{7,8}{3,9} \quad b = \frac{4,2}{70} \quad c = \frac{5,12}{1,28} \quad d = \frac{8,1}{72,9} \quad e = \frac{4,5}{18} \quad f = \frac{2,25}{7,25}$$

**Exercice 11.**

Calculez et écrivez sous forme de fractions irréductibles les produits suivants :

$$a = \frac{2}{5} \times \frac{100}{3} \quad b = \frac{7}{4} \times \frac{16}{3} \quad c = \frac{6}{5} \times \frac{25}{3} \quad d = \frac{8}{7} \times \frac{56}{4} \quad e = \frac{13}{2} \times \frac{8}{39}$$

**Exercice 12** (résolu partiellement).

Écrivez les décimaux suivants sous forme de fractions d'entiers :

1. 0,4 =	2. 0,1 =	3. 0,04 =
0,76 =	0,01 =	0,24 =
0,05 =	0,025 =	0,15 =
0,75 =	0,7 =	0,8 =

**Solution partielle : 1.** On écrit :

$$0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \qquad 0,05 = \frac{5}{100} = \frac{5}{5 \times 20} = \frac{1}{20}$$

$$0,76 = \frac{76}{100} = \frac{4 \times 19}{4 \times 25} = \frac{19}{25} \qquad 0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{3}{4}$$

Les questions **2.** et **3.** se résolvent sur ce modèle.

**Exercice 13** (*les inverses*).

1. Effectuez les divisions de 1 par 2, de 1 par 4 et de 1 par 5.
2. Effectuez les divisions de 1 par 3 et de 1 par 6.
3. Effectuez la division de 1 par 7, en poussant jusqu'à huit chiffres après la virgule.

**Commentaire :** Le but de cet exercice est de calculer les écritures décimales des nombres :

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7}$$

Pour cela, on effectue les divisions correspondantes, et on les pousse, après la virgule, jusqu'au point où l'on pourra savoir dans lequel des deux cas suivants on se trouve :

1. le reste partiel finit par devenir nul,
2. le reste partiel **ne peut pas** devenir nul.

On verra que pour les trois premières divisions, on est dans le premier cas, alors que pour les trois dernières, on est dans le second.

## 5 Correction des exercices

### Ex. 1, p. 21.

Dans les additions et soustractions de décimaux, si les décimaux n'ont pas le même nombre de décimales, il faut transformer l'écriture et compléter par des zéros.

1. On écrit :

$$\begin{array}{rcl}
 709,86 + 34 & = & 709,86 + 34,00 = 743,86 \\
 576 + 57,6 & = & 576,0 + 57,6 = 633,6 \\
 1\,591 - 17,92 & = & 1\,591,00 - 17,92 = 1\,573,08 \\
 634,63 - 192 & = & 634,63 - 192,00 = 442,63
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 709,86 \\
 + 34,00 \\
 \hline
 743,86
 \end{array}$$

2. On a de même :

$$\begin{array}{rcl}
 128,4 + 72,95 & = & 128,40 + 72,95 = 201,35 \\
 32,5 - 0,01 & = & 32,50 - 0,01 = 32,49 \\
 1,07 - 0,109 & = & 1,070 - 0,109 = 0,961 \\
 23,02 + 30,2 & = & 23,02 + 30,20 = 53,22
 \end{array}$$

3. ainsi que :

$$\begin{array}{rcl}
 30 + 148,75 & = & 30,00 + 148,75 = 178,75 \\
 1,0007 - 0,1089 & = & 0,8918 \\
 46,78 - 3,9 & = & 46,78 - 3,90 = 42,88 \\
 46,08 - 3,009 & = & 46,080 - 3,009 = 43,071
 \end{array}$$

### Ex. 2, p. 21.

1.

$$\begin{array}{r}
 3,5 \\
 \times 2,05 \\
 \hline
 175 \\
 70 \dots \\
 \hline
 7,175
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 53,8 \\
 \times 20,5 \\
 \hline
 2690 \\
 1076 \dots \\
 \hline
 1102,90
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3,5 \\
 \times 7000 \\
 \hline
 24500,0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3,57 \\
 \times 0,7 \\
 \hline
 2,499
 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{r}
 38,5 \\
 \times 0,056 \\
 \hline
 2310 \\
 1925 \dots \\
 \hline
 2,1560
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 50,8 \\
 \times 20,5 \\
 \hline
 2540 \\
 1016 \dots \\
 \hline
 1041,40
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 30,5 \\
 \times 70 \\
 \hline
 2135,0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3,2 \\
 \times 60,5 \\
 \hline
 160 \\
 192 \dots \\
 \hline
 193,60
 \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{r} 0,5 \\ \times 0,05 \\ \hline 0,025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,8 \\ \times 0,25 \\ \hline 190 \\ 76 \cdot \\ \hline 0,950 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,51 \\ \times 70 \\ \hline 245,70 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30,07 \\ \times 0,07 \\ \hline 2,1049 \end{array}$$

Ex. 3, p. 21.

$$1. \quad \begin{array}{r} \widehat{156} \\ 060 \\ 100 \\ 0 \end{array} \left| \begin{array}{r} 25 \\ \hline 6,24 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \widehat{192} \\ 82 \\ 50 \\ 60 \\ 5 \end{array} \left| \begin{array}{r} 11 \\ \hline 17,45 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \widehat{166} \\ 210 \\ 070 \\ 12 \end{array} \left| \begin{array}{r} 29 \\ \hline 5,72 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \widehat{288} \\ 18 \\ 0 \end{array} \left| \begin{array}{r} 9 \\ \hline 32 \end{array} \right.$$

$$2. \quad \begin{array}{r} \widehat{343} \\ 73 \\ 190 \\ 010 \end{array} \left| \begin{array}{r} 27 \\ \hline 12,70 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \widehat{102} \\ 090 \\ 280 \\ 01 \end{array} \left| \begin{array}{r} 31 \\ \hline 3,29 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \widehat{209} \\ 410 \\ 180 \\ 12 \end{array} \left| \begin{array}{r} 56 \\ \hline 3,73 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \widehat{317} \\ 47 \\ 200 \\ 110 \\ 02 \end{array} \left| \begin{array}{r} 27 \\ \hline 11,74 \end{array} \right.$$

$$3. \quad \begin{array}{r} \widehat{525} \\ 390 \\ 120 \\ 12 \end{array} \left| \begin{array}{r} 54 \\ \hline 9,72 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \widehat{249} \\ 89 \\ 90 \\ 100 \\ 04 \end{array} \left| \begin{array}{r} 16 \\ \hline 15,56 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \widehat{307} \\ 470 \\ 020 \end{array} \left| \begin{array}{r} 52 \\ \hline 5,90 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \widehat{485} \\ 35 \\ 80 \\ 80 \\ 8 \end{array} \left| \begin{array}{r} 9 \\ \hline 53,88 \end{array} \right.$$

Ex. 4, p. 21. On a :

$$\begin{array}{r} 10 \\ 0 \end{array} \left| \begin{array}{r} \mathbf{10} \\ \hline 0,1 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ 0100 \\ 01 \end{array} \left| \begin{array}{r} \mathbf{11} \\ \hline 0,0909 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ 040 \\ 4 \end{array} \left| \begin{array}{r} \mathbf{12} \\ \hline 0,083 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ 090 \\ 120 \\ 030 \\ 40 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{r} \mathbf{13} \\ \hline 0,076923 \end{array} \right.$$

On trouve donc les écritures décimales suivantes :

$$\frac{1}{10} = 0,1 \quad \frac{1}{11} = 0, \boxed{09} 09 \dots \quad \frac{1}{12} = 0,08 \boxed{3} 3 \dots \quad \frac{1}{13} = 0, \boxed{076923} 076923 \dots$$

où on a entouré la partie des décimales qui se répètent.

**Ex. 5, p. 22.**

$$a = 0,9 \times 51,3 \approx 1 \times 50 = 50$$

$$d = 1,9 + 5,89 \approx 2 + 6 = 8$$

$$b = 5,02 \times 19,9 \approx 5 \times 20 = 100$$

$$e = 15,02 - 8,9 \approx 15 - 9 = 6$$

$$c = 10,09 \times 95,12 \approx 10 \times 100 = 1000$$

$$f = 100,09 + 98,12 \approx 100 + 100 = 200$$

**Ex. 6, p. 22.**

$$x = \frac{250 \times 12}{8} = \frac{2 \times 125 \times 4 \times 3}{8} = \frac{\cancel{2} \times 125 \times \cancel{4} \times 3}{\cancel{8}} = 125 \times 3 = 375$$

$$y = \frac{50 \times 3}{25} = \frac{2 \times 25 \times 3}{25} = \frac{2 \times \cancel{25} \times 3}{\cancel{25}} = 2 \times 3 = 6$$

$$z = \frac{8 \times 7}{4} = \frac{8}{4} \times 7 = 2 \times 7 = 14$$

$$t = \frac{56 \times 45}{18} = \frac{2 \times 28 \times 9 \times 5}{2 \times 9} = \frac{\cancel{2} \times 28 \times \cancel{9} \times 5}{\cancel{2} \times \cancel{9}} = 28 \times 5 = 90$$

**Ex. 7, p. 22.**

$$a = \frac{4,5}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3 \times 3}{3 \times 4} = \frac{3}{4}$$

$$d = \frac{5}{6,5} = \frac{10}{13}$$

$$b = \frac{18}{24} = \frac{6 \times 3}{6 \times 4} = \frac{3}{4}$$

$$e = \frac{2,5}{10} = \frac{5}{20} = \frac{5}{5 \times 4} = \frac{1}{4}$$

$$c = \frac{3,5}{6} = \frac{7}{12}$$

$$f = \frac{12}{42} = \frac{6 \times 2}{6 \times 7} = \frac{2}{7}$$

**Ex. 8, p. 23.** On trouve :

$$2. \quad \frac{3}{14} \times 7 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{2}{5} \times 10 = 4$$

$$\frac{7}{27} \times 9 = \frac{7}{3}$$

$$3. \quad 8 \times \frac{5}{4} = 10$$

$$15 \times \frac{3}{20} = \frac{9}{4}$$

$$6 \times \frac{2}{9} = \frac{4}{3}$$

**Ex. 9, p. 23.**

$$a = \frac{3}{14} \times 21 = \frac{3 \times 21}{14} = \frac{3 \times 7 \times 3}{7 \times 2} = \frac{3 \times \cancel{7} \times 3}{\cancel{7} \times 2} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$b = 30 \times \frac{7}{45} = \frac{30 \times 7}{45} = \frac{2 \times 15 \times 7}{3 \times 15} = \frac{2 \times 7}{3} = \frac{2 \times \cancel{15} \times 7}{3 \times \cancel{15}} = \frac{2 \times 7}{3} = \frac{14}{3}$$

$$c = 60 \times \frac{5}{54} = \frac{60 \times 5}{54} = \frac{6 \times 10 \times 5}{6 \times 9} = \frac{\cancel{6} \times 10 \times 5}{\cancel{6} \times 9} = \frac{10 \times 5}{9} = \frac{50}{9}$$

$$d = 12 \times \frac{3}{8} = \frac{12 \times 3}{8} = \frac{4 \times 3 \times 3}{4 \times 2} = \frac{\cancel{4} \times 3 \times 3}{\cancel{4} \times 2} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$e = 12 \times \frac{5}{6} = \frac{12 \times 5}{6} = \frac{12}{6} \times 5 = 2 \times 5 = 10$$

**Ex. 10, p. 23** On trouve :

$$a = 2 \quad b = \frac{3}{50} \quad c = 4 \quad d = \frac{1}{9} \quad e = \frac{1}{9} \quad f = \frac{9}{29}$$

**Ex. 11, p. 23** On trouve :

$$a = \frac{40}{3} \quad b = \frac{28}{3} \quad c = 10 \quad d = \frac{7}{2} \quad e = \frac{4}{3}$$

**Ex. 12, p. 24** On trouve :

$$2. \quad 0,1 = \frac{1}{10} \quad 0,01 = \frac{1}{100} \quad 0,025 = \frac{1}{40} \quad 0,7 = \frac{7}{10}$$

$$3. \quad 0,04 = \frac{1}{25} \quad 0,24 = \frac{6}{25} \quad 0,15 = \frac{3}{20} \quad 0,8 = \frac{4}{5}$$

**Ex. 13, p. 24.**

$$1. \quad \begin{array}{r|l} 10 & \mathbf{2} \\ 0 & 0,5 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 10 & \mathbf{4} \\ 20 & 0,25 \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 10 & \mathbf{5} \\ 0 & 0,2 \end{array}$$

$$2. \quad \begin{array}{r|l} 10 & \mathbf{3} \\ 10 & 0,33\dots \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 10 & \mathbf{6} \\ 40 & 0,166\dots \\ 40 & \end{array}$$

$$3. \quad \begin{array}{r} 10 \\ 30 \\ 20 \\ 60 \\ 40 \\ 50 \\ \boxed{10} \\ 30 \\ 20 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} \mathbf{7} \\ \hline 0,14285714\dots \end{array}$$

On a donc trois inverses qui sont des décimaux :

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{1}{4} = 0,25 \quad \frac{1}{5} = 0,2$$

et trois inverses qui ne sont pas des décimaux :

$$\frac{1}{3} = 0,\boxed{3}3\dots \quad \frac{1}{6} = 0,1\boxed{6}6\dots \quad \frac{1}{7} = 0,\boxed{142857}142857\dots$$

## Chapitre 2

# Un peu d'algèbre

### 1 Petites équations

- Donnons un premier exemple. On cherche un nombre **inconnu**  $x$  tel que :

$$6x = 25 \tag{1}$$

L'égalité précédente est appelée **équation**. Résoudre l'équation (1), c'est trouver la valeur de l'inconnue  $x$  pour laquelle l'égalité (1) est vraie.

Pour trouver  $x$ , on divise par 6 les deux côtés de l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{6x}{6} &= \frac{25}{6} \\ \cancel{6}x &= \frac{25}{6} \\ x &= \frac{25}{6} \end{aligned}$$

On a donc trouvé la valeur de  $x$  que l'on cherchait. La règle générale est la suivante : pour résoudre  $a \times x = b$  **je divise par  $a$**  des deux côtés de l'équation :

$$a \times x = b \quad \text{équivalent à} \quad x = \frac{b}{a}$$

- Deuxième exemple. On cherche un nombre  $x$  tel que :

$$\frac{x}{4} = 7 \tag{2}$$

Pour trouver  $x$ , on multiplie par 4 les deux côtés de l'équation (2) :

$$\begin{aligned} \frac{4x}{4} &= 4 \times 7 \\ \cancel{4}x &= 28 \\ x &= 28 \end{aligned}$$

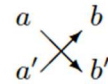
On a donc trouvé la valeur de  $x$  que l'on cherchait. La règle générale est la suivante :  
 pour résoudre  $\frac{x}{a} = b$  je multiplie par  $a$  des deux côtés de l'équation :

$$\frac{x}{a} = b \quad \text{équivaut à} \quad x = a \times b$$

## 2 Nombres proportionnels

**Définition 1.** Deux suites de nombres  $(a; b)$  et  $(a'; b')$  sont dites **proportionnelles** si les **produits en croix** sont égaux :

$$a \times b' = a' \times b$$



Ce qui revient à dire, par exemple, que :

- si  $b$  est **deux fois plus grand** que  $a$  alors  $b'$  est **deux fois plus grand** que  $a'$ ,
- si  $b$  est **trois fois plus petit** que  $a$  alors  $b'$  est **trois fois plus petit** que  $a'$ ,

Voici un exemple : sur une carte routière de France, la distance de 250 km entre deux villes est représentée par un trait de 1 m. Notons  $t$  une distance arbitraire sur le terrain, et  $c$  la distance correspondante sur la carte, les nombres  $t$  et  $c$  étant exprimés en mètres.

On a le tableau de proportionnalité suivant :

carte	1	$c$
terrain	250 000	$t$

On égale les produits en croix :

$$250\,000 \times c = 1 \times t \tag{1}$$

Si on divise les deux côtés de l'équation (1) par 250 000, on obtient :

$$c = \frac{1}{250\,000} \times t$$

On dit que l'échelle de la carte est  $\frac{1}{250\,000}$

## 3 Vitesse, distance, temps

• On dit qu'une vitesse est constante si elle ne change pas. Un mobile parcourt à **vitesse constante** une distance  $d$  (en km) en un temps  $t$  (en heures). Sa vitesse  $v$  (en km/h) est donnée par la **formule de la vitesse** :

$$v = \frac{d}{t} \tag{1}$$

**Exemple 1** : un train parcourt un trajet de 460 km en 2 h19. On veut calculer sa vitesse  $v$ . On convertit d'abord le temps en heures : puisque 1 h = 60 min alors

$$1 \text{ min} = \frac{1}{60} \text{ h}$$

et donc :

$$19 \text{ min} = 19 \times \frac{1}{60} \text{ h} = \frac{19}{60} \text{ h} \approx 0,317 \text{ h}$$

(le symbole  $\approx$  se lit "égal environ"). Donc  $2 \text{ h } 19 \text{ min} = 2 + 0,317 = 2,317 \text{ h}$ , et la vitesse du train est :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{460}{2,317} \approx 198,6 \text{ km/h}$$

- Si on multiplie les deux côtés de la formule (1) par  $t$ , on obtient :

$$v \times t = d$$

ou encore :

$$d = v \times t \quad (2)$$

C'est la **formule de la distance** qui calcule la distance  $d$  parcourue par le mobile animé d'une **vitesse constante**  $v$  pendant le temps  $t$ .

**Exemple 2** : une voiture roule pendant 1 h 35 à 120 km/h. On veut calculer la distance  $d$  qu'elle a parcourue. On convertit le temps en heures :

$$35 \text{ min} = 35 \times \frac{1}{60} \text{ h} = \frac{35}{60} \approx 0,583 \text{ h}$$

Donc  $1 \text{ h } 35 = 1 + 0,583 = 1,583 \text{ h}$ , et la distance cherchée vaut :

$$d = v \times t = 120 \times 1,583 = 190 \text{ km}$$

- Si on divise par  $v$  les deux côtés de la formule (2), on obtient :

$$\frac{d}{v} = t$$

ou encore :

$$t = \frac{d}{v} \quad (3)$$

C'est la **formule du temps** qui calcule le temps  $t$  que met le mobile pour parcourir la distance  $d$  à la **vitesse constante**  $v$ .

**Exemple 3** : une voiture a parcouru un trajet de 155 km en roulant à la vitesse de 120 km/h. On veut calculer le temps  $t$  du trajet. On a donc :

$$t = \frac{d}{v} = \frac{155}{120} = \frac{31}{24} \text{ h}$$

Comme on souhaite un temps effectif en **heures, minutes et secondes**, on pose la division de 31 par 24. L'**égalité de division** est  $31 = 24 \times 1 + 7$  (voir p. 16). On en déduit :

$$\frac{31}{24} = 1 + \frac{7}{24}$$

ensuite :

$$\frac{7}{24} \text{ h} = \frac{7}{24} \times 60 \text{ min} = \frac{7 \times 60}{24} = \frac{7 \times 12 \times 5}{12 \times 2} = \frac{35}{2} = 17,5 \text{ min}$$

On remarque que  $17,5 \text{ min} = 17 \text{ min} + 0,5 \text{ min}$ . Or  $0,5 \text{ min} = \frac{1}{2} \text{ min} = 30 \text{ s}$ . Finalement, le temps du trajet est donc :  $t = 1 \text{ h } 17 \text{ min } 30 \text{ s}$ .

# Chapitre 3

## Géométrie plane

### 1 Points, droites, cercles

**Proposition 1.** (un axiome d'Euclide) *Il existe une droite unique qui passe par deux points distincts.*

Une droite est **illimitée** des deux côtés, elle n'a pas d'extrémités.

- On note  $(AB)$  la **droite** unique qui passe par  $A$  et  $B$ .

Un segment est un morceau de droite. Il a deux extrémités.

- On note  $[AB]$  le **segment** d'extrémités  $A$  et  $B$ .

- On note  $AB$  la **distance** séparant les points  $A$  et  $B$ . C'est aussi la **longueur** du segment  $[AB]$ .

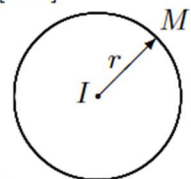
**Définition 2.** *Soient  $A$  et  $B$  des points. On appelle **milieu** du segment  $[AB]$  le point  $I$  qui **appartient** à  $[AB]$  et qui vérifie  $IA = IB$ .*

La propriété " $I$  appartient à  $[AB]$ " peut se noter  $I \in [AB]$ . Le symbole  $\in$  se lit "appartient à" (voir p. 55, § 1). Dire que  $I$  est le milieu de  $[AB]$  équivaut à :

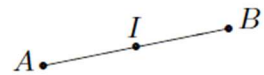
$$I \in [AB] \quad \text{et} \quad AI = \frac{AB}{2}$$

Ces deux propriétés permettent de **construire facilement** le milieu de  $[AB]$ .

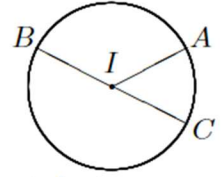
**Définition 3.** *Soit  $I$  un point, et soit  $r$  un nombre qui n'est pas zéro. Le **cercle** de **centre**  $I$  et de **rayon**  $r$ , est la **ligne** formée de tous les points  $M$  tels que  $IM = r$ .*



Par exemple, le cercle de centre  $I$  et de rayon 2 cm est **la ligne** formée de tous les points qui sont situés à 2 cm du point  $I$ .



**Définition 4.** Notons  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $I$  et de rayon  $r$ . Si  $A \in \mathcal{C}$ , on dit que  $[IA]$  est un **rayon** de  $\mathcal{C}$ . Si  $B, C \in \mathcal{C}$  et si  $I \in [BC]$ , on dit que  $[BC]$  est un **diamètre** de  $\mathcal{C}$ .



Un diamètre d'un cercle est donc un **segment qui passe par le centre** et dont les deux extrémités sont sur le cercle.

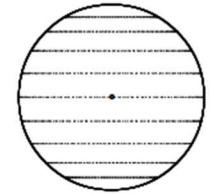
Le mot rayon a **deux sens** : il désigne la **longueur**  $IA$  mais aussi le **segment**  $[IA]$ . Le mot diamètre a aussi deux sens : la longueur  $BC$  mais aussi le segment  $[BC]$ . On a :

$$\text{diamètre} = 2 \times \text{rayon}$$

et

$$\text{rayon} = \frac{\text{diamètre}}{2}$$

**Définition 5.** Soit  $I$  un point, et soit  $r$  un nombre qui n'est pas zéro. Le **disque** de centre  $I$  et de rayon  $r$ , est la **surface** formée de tous les points qui sont **sur le cercle** et de ceux qui sont **à l'intérieur du cercle** de centre  $I$  et de rayon  $r$ .

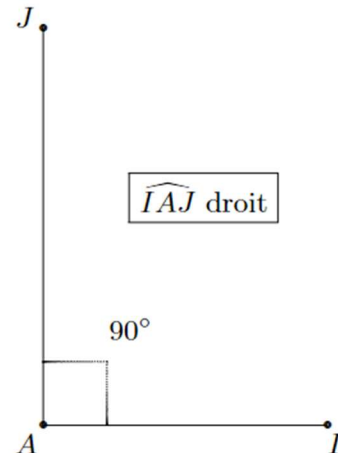
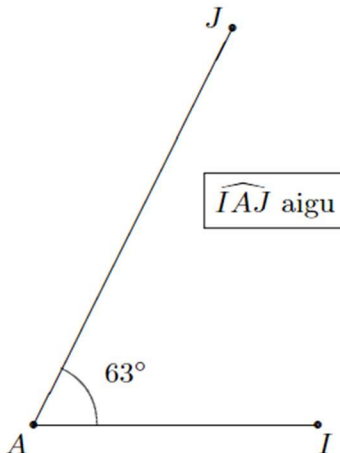


Un disque est une surface, le **bord** de cette surface est le cercle.

## 2 Angles

**Définition 1.** Soient  $I, J, A$  des points. L'**angle** situé entre les segments  $[AI]$  et  $[AJ]$  représente l'**écart** qui existe entre eux. On le note  $\widehat{IAJ}$ . Le point  $A$  est le **sommet**, les segments  $[AI]$  et  $[AJ]$  sont les **côtés** de l'angle.

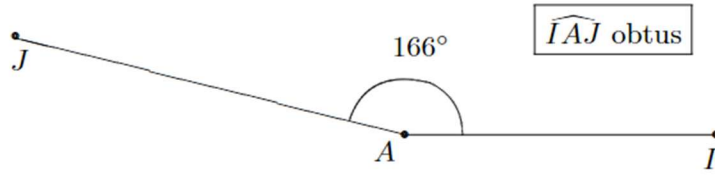
On mesure les angles en degrés avec un **rapporteur**.



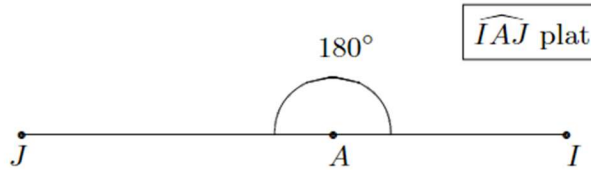
- Si  $\widehat{IAJ} = 90^\circ$ , on dit que  $\widehat{IAJ}$  est un **angle droit** et que les droites  $(AI)$  et  $(AJ)$  sont **perpendiculaires**, ce que l'on note :

$$(AI) \perp (AJ)$$

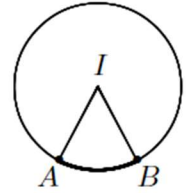
On construit les angles droits avec une **équerre**.



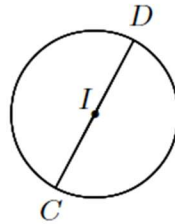
- Si  $I$ ,  $A$  et  $J$  sont alignés, et si  $A$  est entre  $I$  et  $J$ , alors  $\widehat{IAJ} = 180^\circ$ . On dit que  $\widehat{IAJ}$  est un **angle plat** :



**Définition 2.** Soit un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $I$ , et soient  $A$  et  $B$  deux points de  $\mathcal{C}$ , distincts. On dit que  $\widehat{AIB}$  est l'**angle au centre** qui **intercepte l'arc  $\widehat{AB}$** .



Si  $[CD]$  est un diamètre de  $\mathcal{C}$ , l'angle  $\widehat{CID}$  mesure  $180^\circ$ . Il intercepte un **demi-cercle** :

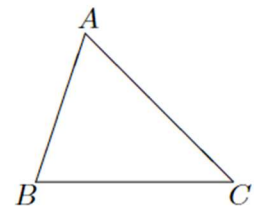


**Proposition 3.** Sur un cercle, les longueurs des arcs sont **proportionnelles** aux angles qui les interceptent.

### 3 Triangles et polygones

**Définition 1.** Un triangle est une ligne fermée composée de **trois segments** qui sont les **côtés** du triangle. Les extrémités des côtés sont les **sommets** du triangle. Un triangle de sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$  est désigné par  $ABC$ .

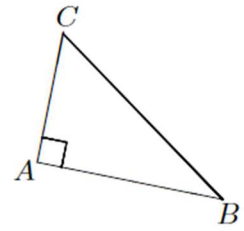
**Définition 2.** Les **angles** d'un triangle  $ABC$  sont  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{BCA}$ ,  $\widehat{CAB}$ .



**Définition 3.** Un *triangle rectangle* est un triangle qui a un angle droit.

Plus précisément, un triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$  si

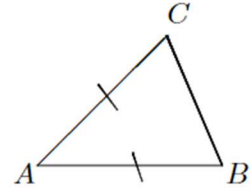
$\widehat{CAB}$  est un angle droit



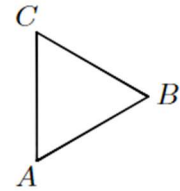
**Définition 4.** Un *triangle isocèle* est un triangle qui a deux côtés de même longueur.

Plus précisément, un triangle  $ABC$  est *isocèle en A* si

$$AB = AC$$

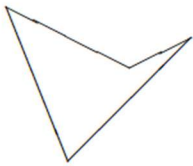


**Définition 5.** Un *triangle équilatéral* est un triangle dont les trois côtés ont même longueur.

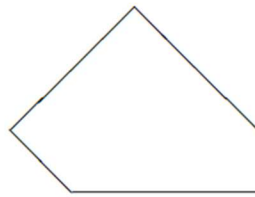


**Définition 6.** Un *polygone (non croisé)* est une **ligne brisée fermée** qui ne se recoupe pas, et qui est composée d'un nombre fini de segments. Ces segments sont les **côtés** du polygone, leurs extrémités sont les **sommets** du polygone.

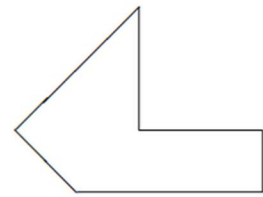
**Définition 7.** Un *quadrilatère* est un polygone à quatre côtés, un *pentagone* est un polygone à cinq côtés, un *hexagone* est un polygone à six côtés.



quadrilatère

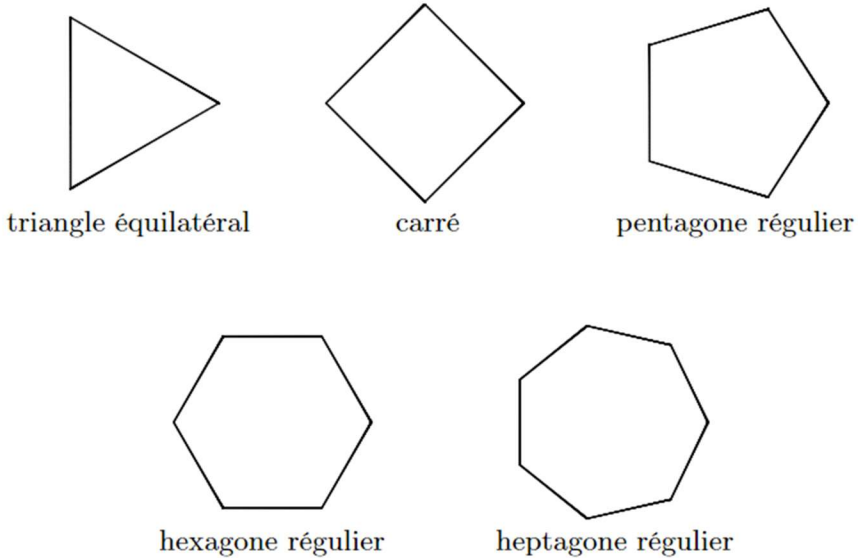


pentagone



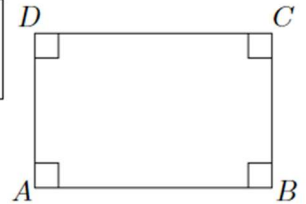
hexagone

**Définition 8.** *Un polygone est dit **régulier** si tous ses côtés ont même longueur et si tous ses angles sont égaux.*



**Définition 9.** *Un **rectangle** est un quadrilatère ayant ses **quatre angles droits**.*

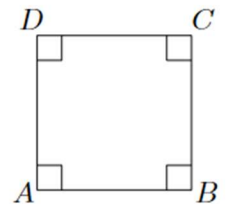
**Proposition 10.** *Dans un rectangle, les **côtés opposés** ont même longueur.*



Le nombre qui mesure la longueur des grands côtés est appelé **longueur** du rectangle. On le note  $L$ . Le nombre qui mesure la longueur des petits côtés est appelé **largeur** du rectangle. On le note  $\ell$ .

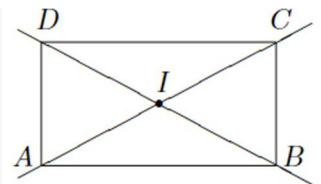
Un carré est un rectangle qui vérifie  $L = \ell$ . On a donc la définition suivante :

**Définition 11.** *Un **carré** un quadrilatère qui a ses **quatre angles droits** et ses **quatre côtés égaux**. La longueur commune des côtés est appelée **côté** du carré.*



Un carré est donc un rectangle particulier, de même qu'un pommier est un arbre particulier.

**Définition 12.** *Dans un rectangle (ou un carré), les droites (AC) et (BD) qui joignent les **sommets opposés** sont appelées **diagonales**. Elles se coupent en un point appelé **centre** du rectangle (ou du carré).*



**Proposition 13.** *Le centre  $I$  du rectangle est le **milieu** des segments [AC] et [BD].*

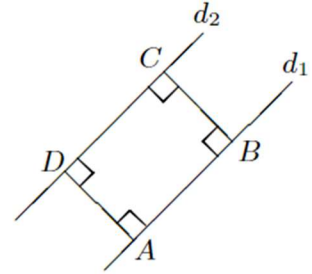
## 4 Droites parallèles, droites perpendiculaires

**Définition 1.** Deux droites  $d_1$  et  $d_2$  sont **parallèles**, et on écrit :

$$d_1 \parallel d_2$$

s'il existe un **rectangle**  $ABCD$ , tel que

$$d_1 = (AB) \quad \text{et} \quad d_2 = (CD)$$



Ce qui revient à dire que l'**écart** entre les deux droites est partout le même :

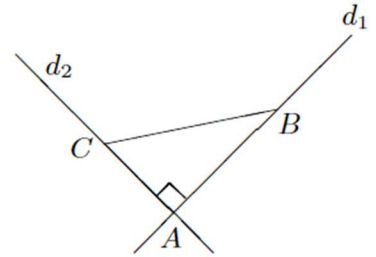
$$AD = BC$$

**Définition 2.** Deux droites  $d_1$  et  $d_2$  sont **perpendiculaires** et on écrit :

$$d_1 \perp d_2$$

s'il existe un triangle  $ABC$ , **rectangle en A**, et tel que

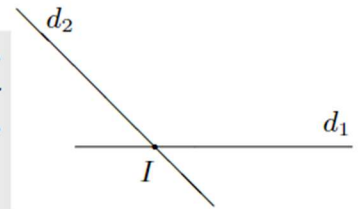
$$d_1 = (AB) \quad \text{et} \quad d_2 = (AC)$$



Ce qui revient à dire que l'on peut placer une **équerre**  $ABC$  qui s'ajuste entre les deux droites.

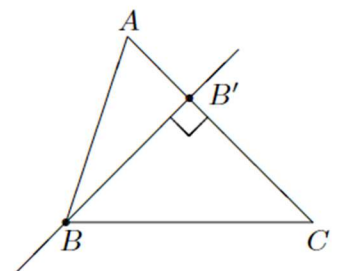
**Proposition 3.** Si les droites  $d_1$  et  $d_2$  ne sont pas parallèles, elles se coupent en **un point appelé intersection** de  $d_1$  et  $d_2$ . Si on note  $I$  ce point, on a :

$$I \in d_1 \quad \text{et} \quad I \in d_2$$



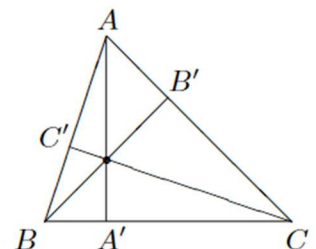
**Définition 4.** On appelle **hauteur** d'un triangle une **droite** issue d'un sommet et **perpendiculaire** au côté opposé.

Sur la figure ci-contre, on a dessiné la **hauteur issue de B**. Elle coupe la droite  $(AC)$  en un point  $B'$ . On dit que le côté  $[AC]$  est la **base** associée à la hauteur  $(BB')$ . On dit aussi que le **segment**  $[BB']$  est une hauteur.



Une hauteur peut se construire avec une **équerre**

Sur la figure ci-contre, on a tracé les **trois hauteurs** du triangle  $ABC$  : celle issue de  $A$ , celle issue de  $B$ , celle issue de  $C$ .



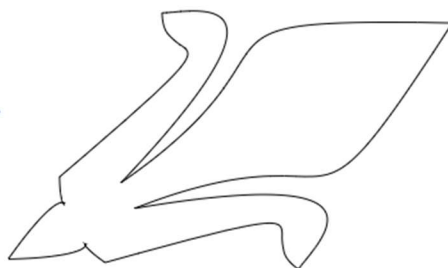
## Chapitre 4

# Les mesures géométriques

### 1 Périmètres

**Définition 1.** Soit  $\mathcal{F}$  une figure de géométrie, par exemple un triangle, un rectangle, un cercle. Le **périmètre** de  $\mathcal{F}$  est la longueur de la ligne qui entoure  $\mathcal{F}$ . Le périmètre est noté  $p$ .

Ci-contre, la figure  $\mathcal{F}$  est entourée d'une ligne représentant une fleur de lys :



**Proposition 2.** Le périmètre d'un rectangle de longueur  $L$  et de largeur  $\ell$  est

$$p = 2 \times (L + \ell)$$

**Proposition 3.** Le périmètre d'un carré de côté  $a$  est

$$p = 4 \times a$$

**Proposition 4.** Le périmètre d'un triangle  $ABC$  est

$$p = AB + BC + CA$$

**Proposition 5.** Le périmètre d'un cercle de rayon  $r$  est

$$p = 2\pi r$$

Le résultat précédent utilise le **symbole**  $\pi$  qui est une lettre grecque qui se lit "pi". On a  $\pi = 3,1415926\dots$ . Le nombre  $\pi$  est un nombre **mystérieux**. Ce n'est pas un nombre décimal. Dans les calculs, on peut utiliser les valeurs approchées suivantes :

$$\pi \approx 3$$

$$\pi \approx 3,1$$

$$\pi \approx 3,14$$

$$\pi \approx \frac{22}{7} = 3,1428\dots$$

Le symbole  $\approx$  se lit "égal environ".

## Mesures de longueurs

Pour mesurer les longueurs, on utilise diverses unités. Les principales sont :

- le **mètre** (symbole m) dont l'usage est universel,
- le kilomètre (km), pour mesurer les distances sur la route, entre les villes,
- le centimètre (cm) et le millimètre (mm), pour mesurer les étoffes, les petites planches de bois, les maquettes, les figures de géométrie.

On a les relations suivantes que l'on peut retrouver dans un tableau de conversions :

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$$

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1	0	0	0			
			1	0	0	
					1	0

hm se lit hectomètre  
dam se lit décamètre  
dm se lit décimètre

$$\text{kilo} = 1000 \quad \text{hecto} = 100 \quad \text{déca} = 10 \quad \text{déci} = \frac{1}{10} \quad \text{centi} = \frac{1}{100} \quad \text{milli} = \frac{1}{1000}$$

## 2 Aires

**Définition 1.** Soit  $\mathcal{F}$  une figure de géométrie, par exemple un triangle, un rectangle, un cercle. L'**aire** de  $\mathcal{F}$  est la **mesure de la surface** qui est à l'intérieur de  $\mathcal{F}$ . L'aire est notée  $S$ .

Ci-contre, la figure  $\mathcal{F}$  est une fleur de lys, dont la surface est grisée :



**Proposition 2.** L'aire d'un **rectangle** de longueur  $L$  et de largeur  $\ell$  est

$$S = L \times \ell$$

**Corollaire 3.** L'aire d'un **carré** de côté  $a$  est

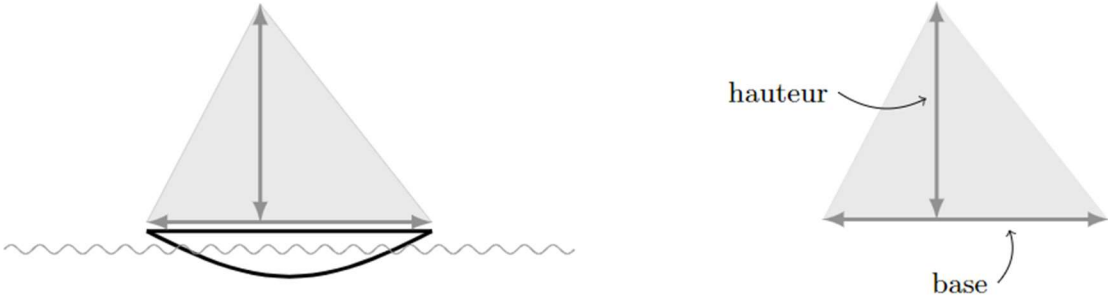
$$S = a \times a$$

**Corollaire 4.** L'aire d'un **triangle rectangle** dont les côtés de l'angle droit sont  $b$  et  $c$  est

$$S = \frac{b \times c}{2}$$

**Proposition 5.** *L'aire d'un triangle est*

$$S = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur}$$



Quand j'étais enfant, cette formule de **l'aire d'un triangle** m'évoquait un **voilier** dont les voiles forment un grand triangle. Le mât est la **hauteur** et le pont est la **base**.

**Proposition 6.** *L'aire d'un disque de rayon  $r$  est*

$$S = \pi r^2$$

Le symbole  $r^2$  se lit "  $r$  deux " et signifie  $r \times r$ . L'expression  $\pi r^2$  se calcule donc par :

$$\pi r^2 = \pi \times r \times r$$

Une petite comptine peut servir à retrouver les formules pour le cercle et le disque :

- Le **cercle** est fier d'être égal à deux pi-erres :  $p = 2\pi r$
- Le **disque** est heureux d'être égal à Pi-erre ii :  $S = \pi r^2$

## Mesures d'aires

Pour mesurer les aires, on utilise diverses unités. Les principales sont :

- le millimètre carré ( $\text{mm}^2$ ) est l'aire d'un carré de côté 1 mm,
- le centimètre carré ( $\text{cm}^2$ ) est l'aire d'un carré de côté 1 cm,
- le mètre carré ( $\text{m}^2$ ) est l'aire d'un carré de côté 1 m,
- le kilomètre carré ( $\text{km}^2$ ) est l'aire d'un carré de côté 1 km.

Le  $\text{mm}^2$  est une unité minuscule. Le  $\text{cm}^2$  est très utile en **géométrie** pour mesurer les aires des figures dessinées sur les cahiers d'écoliers. Le  $\text{m}^2$  est d'usage courant pour mesurer les surfaces des murs ou des sols dans les maisons, pour mesurer les jardins, etc. Le  $\text{km}^2$  sert surtout en **géographie** pour mesurer les très grandes surfaces comme les pays, les mers, les lacs, etc.

Pour comparer ces unités, remarquons d'abord que puisque  $1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$  on a :

$$1 \text{ cm}^2 = 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm} = 10 \times 10 \times \text{mm} \times \text{mm} = 100 \text{ mm}^2$$

Ce calcul fait comprendre pourquoi les unités d'aires vont de 100 en 100 alors que les unités correspondantes de longueurs vont de 10 en 10. On a le tableau de conversions :

$\text{km}^2$	$\text{hm}^2$	$\text{dam}^2$	$\text{m}^2$	$\text{dm}^2$	$\text{cm}^2$	$\text{mm}^2$
	1	0	0	0	0	0
				1	0	0
					1	0
						1

où on voit que :

$$1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

**Remarque :** si les longueurs sont mesurées en cm, les aires  $S$  calculées par les formules des propositions précédentes sont en  $\text{cm}^2$ . Si les longueurs sont mesurées en m, les aires sont en  $\text{m}^2$ , etc.

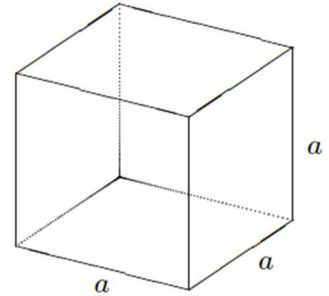
### 3 Volumes

**Définition 1.** *Un cube est un solide ayant six faces qui sont des carrés.*

Les côtés des faces sont appelés **arêtes** du cube. Les extrémités des arêtes sont appelés **sommets** du cube. L'expression "arête du cube" désigne aussi la **longueur**  $a$  de chaque arête.

Sur la figure ci-contre le cube est vu en **perspective**. On a dessiné en traits forts les 9 arêtes visibles, et en pointillés les 3 arêtes situées derrière.

Le cube a 8 sommets, 12 arêtes, 6 faces.



**Définition 2.** *Un pavé droit est un solide ayant six faces qui sont toutes des rectangles. Un pavé droit a trois dimensions, appelées longueur ( $a$ ), largeur ou profondeur ( $b$ ), hauteur ( $h$ ).*

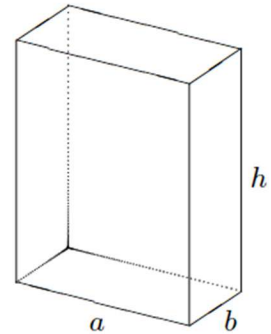
**Définition 3.** *Le volume d'un pavé droit est la mesure de l'espace qui est à l'intérieur.*

**Proposition 4.** *Le volume  $V$  d'un pavé droit est égal au produit de ses trois dimensions :*

$$V = a \times b \times h$$

*et le volume  $V$  d'un cube d'arête  $a$  est :*

$$V = a \times a \times a = a^3$$



### Mesures de volumes

Les volumes se mesurent en **centimètre cube** qui s'écrit  $\text{cm}^3$ , **décimètre cube** qui s'écrit  $\text{dm}^3$ , **mètre cube** qui s'écrit  $\text{m}^3$ . Le  $\text{dm}^3$  est aussi appelé **litre**, de symbole  $\ell$ .

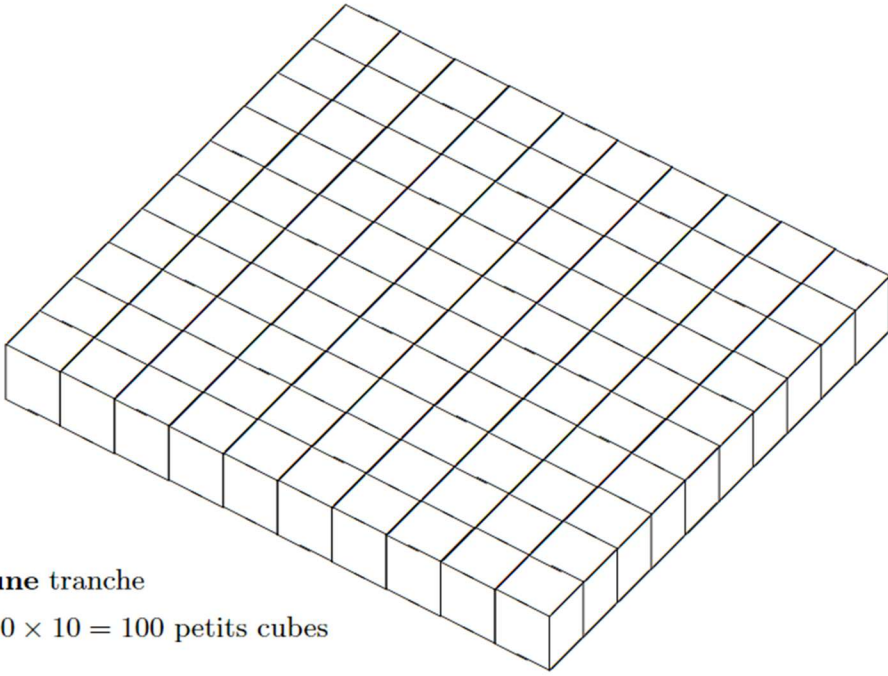
**Définition 5.** *Le  $\text{cm}^3$  est le volume d'un cube d'arête 1 cm. Le  $\text{dm}^3$  est le volume d'un cube d'arête 1 dm. Le  $\text{m}^3$  est le volume d'un cube d'arête 1 m.*

**Remarque :** si les arêtes sont mesurées en cm, le volume calculé par les formules de la prop. 4 est en  $\text{cm}^3$ . Si les arêtes sont mesurées en dm, le volume est en  $\text{dm}^3$ , etc.

On a la formule :

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

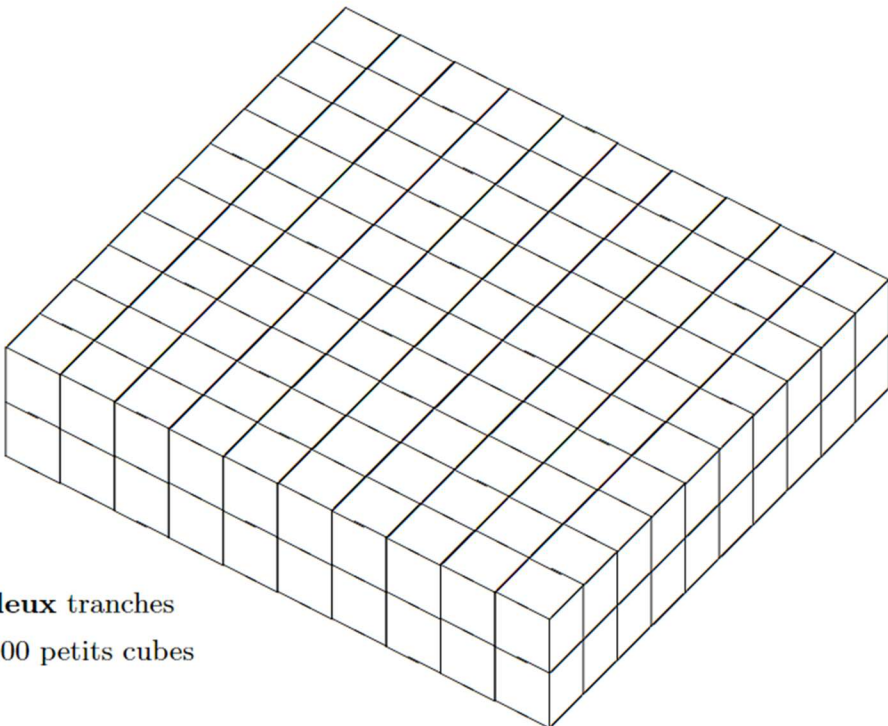
Pour démontrer cette formule, on utilise la relation  $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$ . On considère un **grand cube** de 1 dm d'arête, et des **petits cubes** de 1 cm d'arête. Pour remplir le grand cube, on place au fond une première tranche de 100 petits cubes formant un carré :



**une** tranche

$$10 \times 10 = 100 \text{ petits cubes}$$

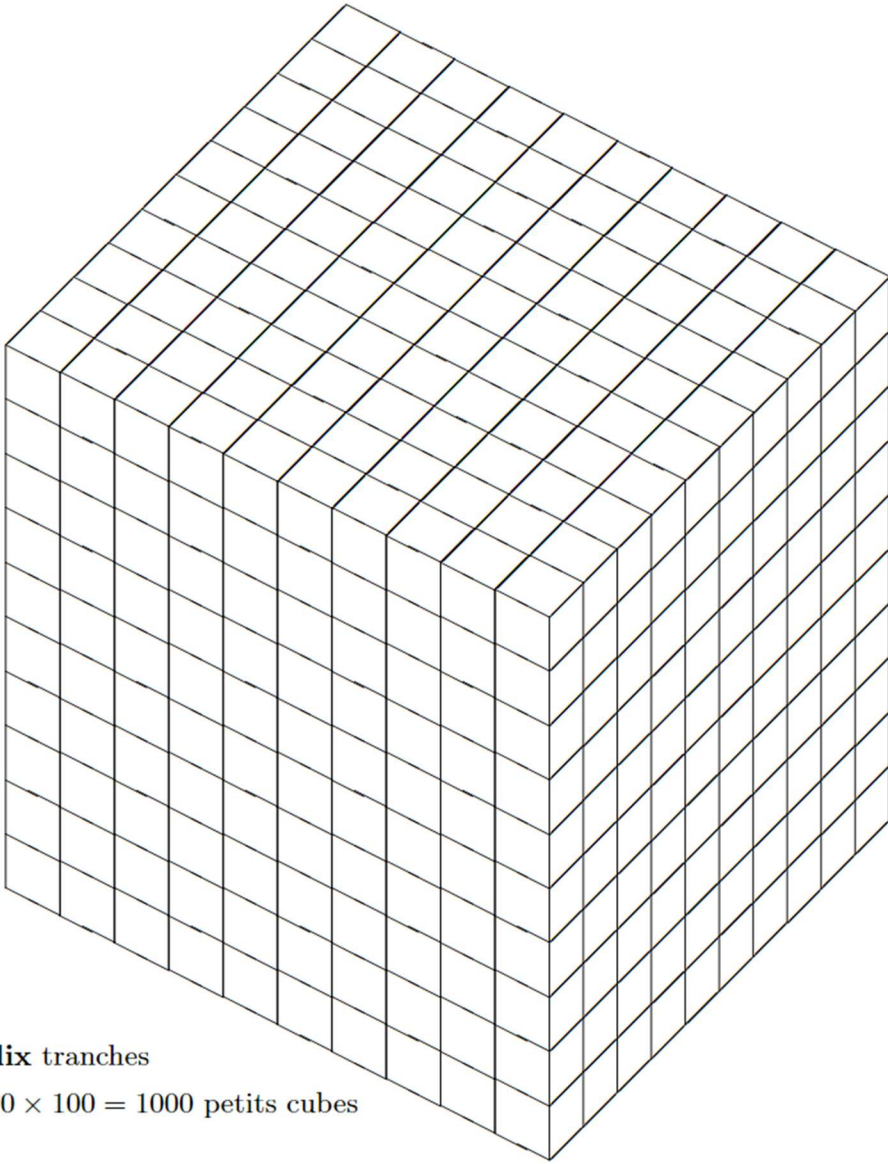
puis **par-dessus**, une deuxième tranche de 100 petits cubes :



**deux** tranches

$$200 \text{ petits cubes}$$

puis une troisième tranche, etc. Enfin une dixième tranche. Le grand cube est alors **rempli** par 1000 petits cubes :



**dix** tranches

$$10 \times 100 = 1000 \text{ petits cubes}$$

On a bien prouvé que  $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$ . On prouverait pareillement la formule suivante :

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 = 1000 \ell$$

## 4 Exercices pour réviser la géométrie

### Exercice 1 (*pentagone régulier*).

1. Au centre de la feuille, marquez un point  $O$ , puis tracez le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon 3 cm. Marquez la lettre  $\mathcal{C}$  en haut à droite du cercle pour indiquer son nom.
2. Tracez le diamètre horizontal  $[AB]$  avec  $A$  à gauche et  $B$  à droite.
3. Tracez le diamètre vertical  $[CD]$  avec  $C$  en bas et  $D$  en haut.
4. Placez le point  $I$  milieu de  $[AO]$ . Tracez le cercle  $\mathcal{C}'$  de centre  $I$  et passant par  $O$ .
5. Tracez la droite  $(CI)$ . Cette droite coupe  $\mathcal{C}'$  en deux points  $E$  et  $F$ , le point  $E$  étant situé entre  $I$  et  $C$ . Marquez les points  $E$  et  $F$ .
6. Le cercle de centre  $C$  et passant par  $E$  coupe le cercle  $\mathcal{C}$  en deux points  $J$  et  $K$ , le point  $J$  étant à gauche. Marquez les points  $J$  et  $K$ .
7. Le cercle de centre  $C$  et passant par  $F$  coupe le cercle  $\mathcal{C}$  en deux points  $L$  et  $M$ , le point  $L$  étant à gauche. Marquez les points  $L$  et  $M$ .
8. Tracez les cinq côtés du pentagone  $DLJKM$ . Vérifiez avec le double décimètre que ses côtés sont tous égaux.
9. Vérifiez qu'on a :

$$\widehat{MDL} = \widehat{DLJ} = \widehat{LJK} = \widehat{JKM} = \widehat{KMD} = 108^\circ$$

### Exercice 2.

(Longueurs en cm, aires en  $\text{cm}^2$ ). On considère un rectangle  $ABCD$ .

1. Tracez le côté  $[AB]$  horizontal, de longueur 10, puis le côté  $[BC]$  vertical, de longueur 7.
2. Placez le sommet  $D$  et tracez les côtés  $[DA]$  et  $[DC]$ .
3. Marquez les points  $E \in [AB]$  et  $F \in [BC]$ , tels que :

$$BE = 6 \quad \text{et} \quad BF = 2$$

4. Calculez l'aire du triangle rectangle  $DAE$ .
5. Calculez de même les aires des triangles rectangles  $EBF$  et  $FCD$ .
6. Calculez l'aire du triangle  $DEF$  par différence.
7. Vérifiez que  $DEF$  et  $FCD$  ont des aires égales.
8. Mesurez au rapporteur les trois angles du triangle  $DEF$ . En déduire que ce n'est pas un triangle rectangle.
9. a/ Tracez la hauteur de  $DEF$  relative à  $E$ .  
b/ Tracez la hauteur de  $FCD$  relative à  $C$ .  
c/ Mesurez ces deux hauteurs avec un double décimètre. Que constate-t-on ?  
Pouvait-on le prévoir sans mesurer ?

**Exercice 3.**(Longueurs en cm, aires en  $\text{cm}^2$ )

1. Tracez un segment  $[AB]$  horizontal et un segment  $[AC]$  vertical, tous deux de longueur 6.
2. Tracez le quart de cercle  $\mathcal{C}$ , de centre  $A$ , de rayon 6, et dont les extrémités sont  $B$  et  $C$ .
3. Soit  $\mathcal{L}$  la ligne composée des segments  $[AB]$  et  $[AC]$  et du quart de cercle  $\mathcal{C}$ . Repassez  $\mathcal{L}$  en bleu.
4. Calculez la longueur  $\ell$  de  $\mathcal{L}$ . Vérifiez qu'on trouve :

$$\ell = 3\pi + 12$$

5. On note  $S$  l'aire de la partie du plan entourée par  $\mathcal{L}$ . Calculez  $S$  et vérifiez qu'on trouve :

$$S = 9\pi$$

6. Calculez les valeurs approchées de  $\ell$  et  $S$  en prenant  $\pi \approx 3,14$ .

**Exercice 4.**(Longueurs en cm, aires en  $\text{cm}^2$ )

1. Tracez un segment  $[AB]$  horizontal, de longueur 3, le point  $B$  étant placé à droite de  $A$ .
2. Sur la droite issue de  $B$  et perpendiculaire à  $(AB)$ , placez le point  $C$ , au-dessus de  $(AB)$ , et tel que  $BC = 6$ .
3. Tracez le demi-cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[BC]$ , d'extrémités  $B$  et  $C$ , situé à droite de  $(BC)$ .
4. Soit  $\mathcal{L}$  la ligne constituée des segments  $[AB]$  et  $[AC]$  et du demi-cercle  $\mathcal{C}$ . Repassez  $\mathcal{L}$  en bleu.
5. Calculez l'aire  $S$  de la partie du plan entourée par  $\mathcal{L}$ . Vérifiez qu'on trouve :

$$S = \frac{9}{2}\pi + 9$$

6. Calculez la valeur approchée de  $S$  en prenant  $\pi \approx 3,14$ .

**Exercice 5.**(Longueurs en cm, aires en  $\text{cm}^2$ ). On considère un rectangle  $ABCD$ , le côté  $[AB]$  horizontal, le côté  $[BC]$  vertical, et tels qu'on ait :

$$AB = 4 \quad BC = 3$$

1. Tracez ce rectangle et calculez son aire.
2. Tracez ses diagonales et marquez leur point d'intersection qu'on notera  $I$ .
3. Mesurez la diagonale  $[AC]$ . Vérifiez qu'on trouve  $AC = 5$ .
4. Tracez le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $I$ , et qui passe par  $A$ .

- Montrez que le rayon de ce cercle vaut 2,5
- Calculez l'aire  $S$  du disque  $\mathcal{D}$  dont le bord est le cercle  $\mathcal{C}$ . Donnez la valeur exacte de cette aire, puis sa valeur approchée en prenant :

$$\pi \approx 3,14$$

- Vérifiez numériquement que l'aire du disque  $\mathcal{D}$  est plus grande que celle du rectangle  $ABCD$ . Pouvaient-on prévoir ce résultat sans calcul? Expliquez.

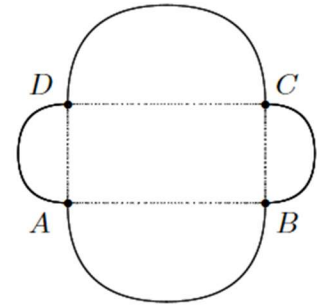
### Exercice 6 (le triangle égyptien).

(Longueurs en cm, aires en  $\text{cm}^2$ ). Tracez à la règle et au compas un triangle dont les côtés valent 3, 4, 5.

- Vérifiez que c'est un triangle rectangle.
- Calculez son aire  $S$ .

### Exercice 7.

(Longueurs en cm, aires en  $\text{cm}^2$ ) On considère une figure  $\mathcal{F}$  composée d'une surface rectangulaire  $ABCD$  de dimensions 4 et 6, autour de laquelle sont disposés deux demi-disques de diamètre 4 à gauche et à droite, et deux demi-disques de diamètre 6 en haut et en bas. On a représenté  $\mathcal{F}$  ci-contre à **échelle réduite**.



- Calculez le périmètre  $p$  de  $\mathcal{F}$ . Vérifier qu'on trouve :

$$p = 10\pi$$

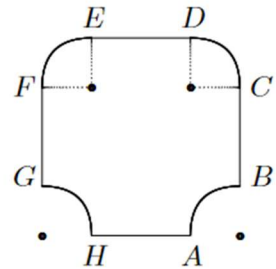
- Calculez l'aire  $S$  de  $\mathcal{F}$ . Vérifier qu'on trouve :

$$S = 13\pi + 24$$

- Calculez les valeurs approchées de  $p$  et  $S$  en prenant  $\pi \approx 3,14$ .
- Calculez les dimensions du plus petit rectangle contenant  $\mathcal{F}$  et dont les côtés sont parallèles à  $(AB)$  et  $(BC)$ .
- Reproduisez  $\mathcal{F}$  sur une feuille de papier en respectant les dimensions, mais sans marquer le nom des points. Découpez ensuite le contour de  $\mathcal{F}$ .

### Exercice 8.

(Longueurs en cm, aires en  $\text{cm}^2$ ). Dans une plaque carrée de côté 7, on arrondit les coins supérieurs en quarts de cercles de rayon 2, et on échancre les coins inférieurs en quarts de cercles de rayon 2 aussi. Sur la figure ci-contre à **échelle réduite**, on a marqué par des ronds ( $\bullet$ ) les centres des quarts de cercles.



- Calculez le périmètre  $p$  de la figure. Vérifiez qu'on trouve :

$$p = 12 + 4\pi$$

- Calculez l'aire  $S$  de la figure. Vérifiez que  $S = 41$ .
- Reproduisez le contour de la figure en vraie grandeur et découpez-le.

**Exercice 9.**

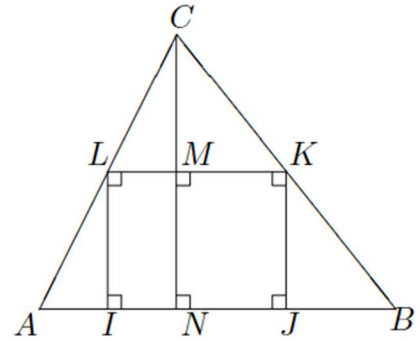
(unités cm et  $\text{cm}^2$ ) Sur la figure ci-contre, représentée en dimension réduite, on a marqué six **angles droits**. On voit donc que :

$IJKL$  est un rectangle.

On suppose que les dimensions sont les suivantes :

$$AI = 2,5 \quad IJ = 6,5 \quad JB = 4$$

$$LI = MN = MC = 5$$



1. Tracez la figure en vraie grandeur : d'abord  $[AB]$  horizontal, de longueur 13, puis les points  $I$  et  $J$ , puis les segments verticaux  $[IL]$  et  $[JK]$  de longueur 5. Ensuite, les droites  $(AL)$  et  $(BK)$  qui donnent le point  $C$ . Puis la **hauteur**  $[CN]$  du triangle  $ABC$ . Cette hauteur coupe le segment  $[LK]$  en  $M$ .
2. Calculez les aires des triangles rectangles  $AIL$  et  $BJK$ .
3. Calculez l'aire du triangle  $CLK$ .
4. Calculez l'aire du rectangle  $IJKL$ .
5. Calculez l'aire du triangle  $ABC$  de **deux façons différentes**.

**Exercice 10.**

1. Tracez un segment  $[AB]$  horizontal, de longueur 8 cm, puis un segment  $[AC]$  vertical, de longueur 6 cm.
2. Tracez le segment  $[BC]$ . Vérifiez que  $BC = 10$  cm.
3. Vérifiez que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .
4. Calculez l'aire  $S$  du triangle  $ABC$ . Vérifiez qu'on trouve :

$$S = 24 \text{ cm}^2$$

5. Tracez la hauteur du triangle  $ABC$  relative à  $A$ .
6. Cette hauteur coupe  $(BC)$  en un point qu'on note  $H$ . Marquez le point  $H$ .
7. Mesurez  $AH$  et vérifiez qu'on trouve :

$$AH = 4,8 \text{ cm}$$

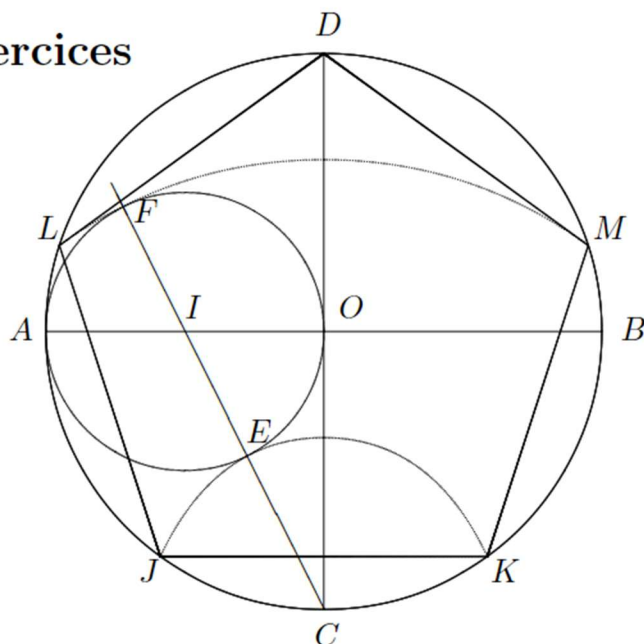
8. Écrivez la formule générale donnant l'aire  $S$  d'un triangle, connaissant une hauteur et la base correspondante.
9. Calculez l'aire  $S$  du triangle  $ABC$  en utilisant la hauteur  $[AH]$ .
10. Vérifiez qu'on retrouve la même valeur qu'à la question 4.

## 5 Correction des exercices

### Ex. 1, p. 45.

8. On trouve que les cinq côtés font 3,5 cm.

9. Pour pouvoir utiliser le rapporteur, il faudra prolonger un peu de part et d'autre les cinq côtés du pentagone. Les angles sont égaux et valent  $108^\circ$ .



### Ex. 2, p. 45.

La figure ci-contre est dessinée à échelle réduite.

4. On a  $AE = 10 - 6 = 4$  et  $AD = 7$ . On sait que l'aire d'un triangle rectangle vaut de demi-produit des deux côtés de son angle droit. Donc :

$$\text{aire } DAE = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 = 2 \times 7 = 14$$

5. On trouve semblablement :

$$\text{aire } EBF = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$$

$$\text{aire } FCD = \frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 25$$

6. Le rectangle  $ABCD$  est recouvert par les quatre triangles  $DAE$ ,  $EBF$ ,  $FCD$  et  $DEF$ . On en déduit que la somme des aires de ces quatre triangles égale celle du rectangle. On a donc :

$$14 + 6 + 25 + \text{aire } DEF = 10 \times 7$$

$$45 + \text{aire } DEF = 70$$

$$\text{aire } DEF = 70 - 45$$

$$= 25$$

7. On constate que  $DEF$  et  $FCD$  ont tous deux pour aire 25.

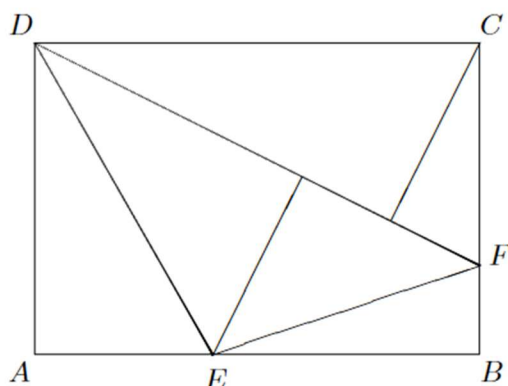
8. On trouve en mesurant :

$$\widehat{DEF} = 101^\circ$$

$$\widehat{EFD} = 45^\circ$$

$$\widehat{FDE} = 34^\circ$$

Donc, aucun de ces angles ne vaut  $90^\circ$ . On en déduit que le triangle  $DEF$  n'est pas rectangle.



9. En mesurant, on constate que les deux hauteurs ont chacune pour longueur 4,5. On pouvait prévoir que ces deux hauteurs seraient égales en raisonnant ainsi : notons provisoirement  $h$  et  $k$  les deux hauteurs, et notons  $b = DF$  la base commune des triangles  $DEF$  et  $FCD$ . Comme les aires des deux triangles sont égales, on peut écrire :

$$25 = \frac{1}{2} \times b \times h = \frac{1}{2} \times b \times k$$

D'où :

$$\begin{aligned} b \times h &= b \times k \\ h &= k \end{aligned}$$

**Ex. 3, p. 46.**

4. La longueur du quart de cercle  $\mathcal{C}$  vaut :

$$\frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{1}{4} \times 2\pi \times 6 = 3\pi$$

Et comme  $AB + AC = 6 + 6 = 12$ , on en déduit bien la formule demandée :

$$\ell = 3\pi + 12$$

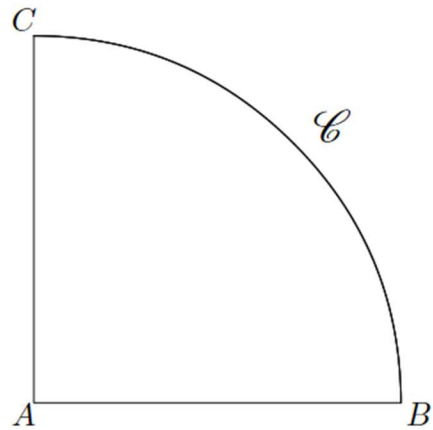
5. La partie du plan entourée par  $\mathcal{L}$  est un quart de disque. Son aire est donc :

$$S = \frac{1}{4} \times \pi r^2 = \frac{1}{4} \times \pi \times 6^2 = 9\pi$$

6. On a :

$$\ell \approx 3 \times 3,14 + 12 = 9,42 + 12 = 21,42 \text{ cm}$$

$$S \approx 9 \times 3,14 \approx 28,26 \text{ cm}^2$$



**Ex. 4, p. 46.**

Les tracés demandés en 1., 2., 4. sont effectués ci-contre.

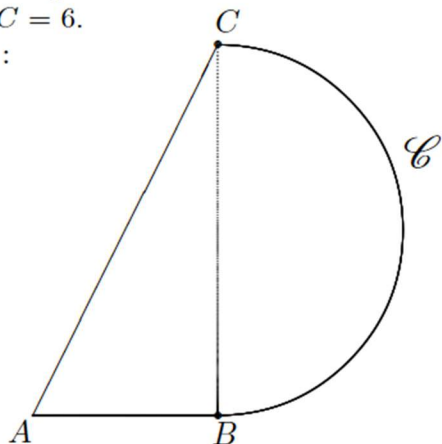
5. On voit que la figure dont on veut calculer l'aire se compose d'un triangle rectangle et d'un demi-disque. Le triangle rectangle a pour côtés de l'angle droit  $BA = 3$  et  $BC = 6$ . Le demi-disque a pour diamètre  $BC = 6$ . On a donc :

- aire de  $ABC = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9$
- aire du demi-disque  $= \frac{1}{2} \times \pi \times 3^2 = \frac{9}{2}\pi$

d'où le résultat souhaité.

6. On remplace  $\pi$  par 3,14 et on obtient :

$$S \approx \frac{9}{2} \times 3,14 + 9 \approx 23,13 \text{ cm}^2$$



**Ex. 5, p. 46.**

1. On sait qu'un rectangle de dimensions  $L$  et  $\ell$  a pour aire  $L \times \ell$ . L'aire de  $ABCD$  est donc :

$$4 \times 3 = 12 \text{ cm}^2$$

5. On sait que le point d'intersection des diagonales d'un rectangle est le milieu de chacune de ces diagonales, donc :

$$IA = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2} = 2,5$$

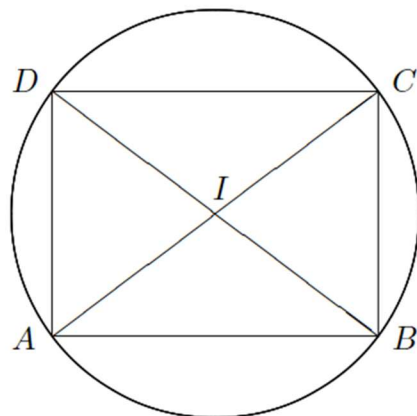
6. L'aire  $S$  de  $\mathcal{D}$  est donc :

$$S = \pi r^2 = \pi \times 2,5^2 = \pi \times 6,25$$

et sa valeur approchée est :

$$S \approx 3,14 \times 6,25 \approx 19,63 \text{ cm}^2$$

7. On a bien  $19,63 > 12$ . Ceci se comprend bien car le disque  $\mathcal{D}$  contenant entièrement le rectangle  $ABCD$ , son aire est plus grande.

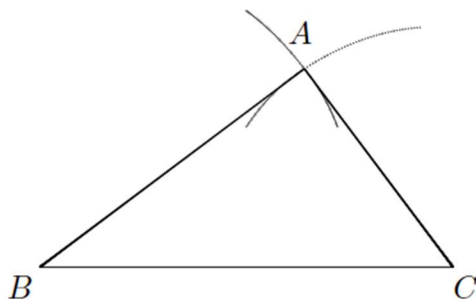
**Ex. 6, p. 47.**

On trace d'abord  $[BC]$  horizontal et de longueur 5. On trace ensuite un arc de cercle centré en  $B$  et de rayon 4, vers le haut, et un arc de cercle centré en  $C$  et de rayon 3. On prolonge éventuellement ces deux arcs jusqu'à ce qu'ils se coupent. Le point d'intersection donne le point  $A$  cherché.

a/ On le constate avec l'équerre.

b/ Le triangle  $ABC$  étant rectangle, on a :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times AB \times AC \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \\ &= 6 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

**Ex. 7, p. 47.**

Les dessins de cet exercice sont faits à **échelle réduite**.

1. On a  $DA = 4$  et  $DC = 6$ . La **ligne** qui entoure  $\mathcal{F}$  est donc composée de deux demi-cercles de rayon 2 et de deux demi-cercles de rayon 3. La longueur de cette ligne est donc la somme des périmètres de deux cercles de rayons 2 et 3. Donc :

$$p = 2\pi \times 2 + 2\pi \times 3 = 4\pi + 6\pi = 10\pi$$

2. La figure  $\mathcal{F}$  est une **surface** composée du rectangle de dimensions 4 et 6, de deux demi-disques de rayon 2 et de deux demi-disques de rayon 3. Si on regroupe les demi-disques, ils forment deux disques entiers, l'un de rayon 2 et l'autre de rayon 3. On en déduit :

$$\begin{aligned} S &= 4 \times 6 + \pi \times 2^2 + \pi \times 3^2 \\ &= 24 + 4\pi + 9\pi \\ &= 13\pi + 24 \end{aligned}$$

3. Les valeurs approchées sont :

$$p \approx 10 \times 3,14 = 31,4 \text{ cm}$$

$$S \approx 13 \times 3,14 + 24 = 64,82 \text{ cm}^2$$

4. La largeur du plus petit rectangle contenant  $\mathcal{F}$  est la distance qui sépare le point de  $\mathcal{F}$  qui est le plus à gauche et le point de  $\mathcal{F}$  qui est le plus à droite. Cette largeur vaut donc :

$$2 + DC + 2 = 4 + DC = DA + DC$$

La hauteur du plus petit rectangle contenant  $\mathcal{F}$  est la distance qui sépare le point de  $\mathcal{F}$  qui est le plus haut et le point de  $\mathcal{F}$  qui est le plus bas. Cette hauteur vaut donc :

$$3 + DA + 3 = 6 + DA = DC + DA$$

Finalement, ce rectangle est donc un carré de côté  $DC + DA = 6 + 4 = 10 \text{ cm}$

**Ex. 8, p. 47.** 1. Le pourtour de la figure est constitué de quatre quarts de cercle et de quatre segments de droite. Chaque quart de cercle a pour longueur :

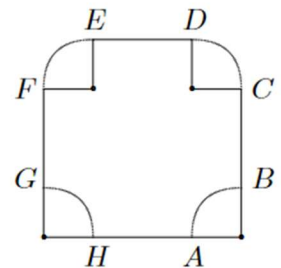
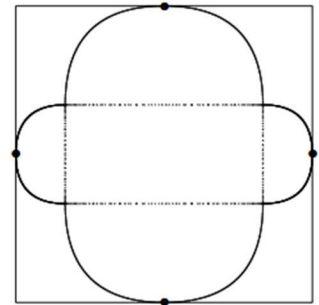
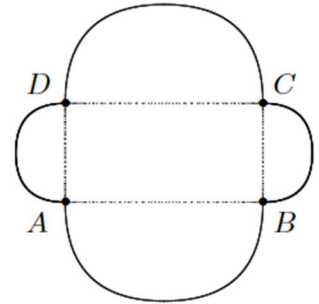
$$\frac{1}{4} \times 2\pi \times 2 = \pi$$

et chaque segment de droite a pour longueur  $7 - 4 = 3$ . On en déduit :

$$p = 4(3 + \pi) = 12 + 4\pi$$

2. Si on découpe les quarts de disques supérieurs et qu'on les place dans les deux échancrures inférieures, **on ne modifie pas l'aire** de la figure initiale. La figure obtenue est représentée ci-contre, c'est un octogone (octo = 8). On peut le décomposer en deux rectangles de dimensions faciles à calculer. On en déduit :

$$S = 7 \times 5 + 3 \times 2 = 41$$



**Ex. 9, p. 48.** 2. On applique la formule donnant l'aire d'un **triangle rectangle** et on obtient :

$$\text{aire } AIL = \frac{1}{2} \times IA \times IL = \frac{1}{2} \times 2,5 \times 5 = \frac{2,5 \times 5}{2} = \frac{12,5}{2} = 6,25 \text{ cm}^2$$

de même :

$$\text{aire } BJK = \frac{1}{2} \times JB \times JK = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = \frac{4 \times 5}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}^2$$

3. Le triangle  $CLK$  n'est pas un triangle rectangle. On lui applique la formule générale donnant l'aire  $S$  d'un triangle quelconque :

$$S = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur}$$

En prenant comme base  $[LK]$  et comme hauteur correspondante  $[CM]$ , on obtient :

$$\text{aire } CLK = \frac{1}{2} \times LK \times CM = \frac{1}{2} \times 6,5 \times 5 = \frac{6,5 \times 5}{2} = \frac{32,5}{2} = 16,25 \text{ cm}^2$$

4. On connaît bien l'aire d'un rectangle. On a donc :

$$\text{aire } IJKL = IJ \times LI = 6,5 \times 5 = 32,5 \text{ cm}^2$$

5. • On voit que le triangle  $ABC$  est partagé en trois triangles et un rectangle. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \text{aire } ABC &= \text{aire } AIL + \text{aire } BJK + \text{aire } CLK + \text{aire } IJKL \\ &= 6,25 + 10 + 16,25 + 32,5 \\ &= 65 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

• On peut aussi calculer l'aire du triangle  $ABC$  en appliquant directement la formule générale, avec comme base  $[AB]$  et comme hauteur correspondante  $[CN]$ . On obtient :

$$\text{aire } ABC = \frac{1}{2} \times AB \times CN = \frac{1}{2} \times 13 \times 10 = 13 \times \frac{10}{2} = 13 \times 5 = 65 \text{ cm}^2$$

### Ex. 10, p. 48.

1. et 2. Voir le schéma réduit ci-contre.

3. Le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$  car une verticale est perpendiculaire à une horizontale.

4. Par la formule de l'aire d'un triangle rectangle, il vient :

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$$

8. La formule de l'aire d'un triangle est :

$$S = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur}$$

9. On en déduit :

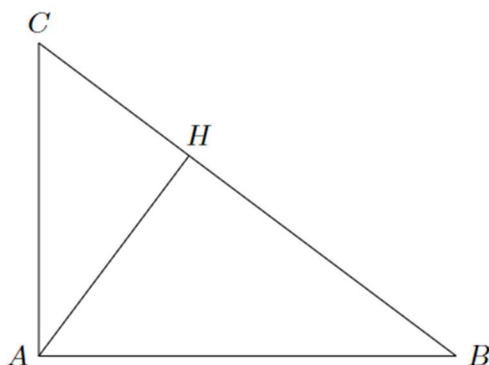
$$S = \frac{1}{2} \times BC \times AH = 5 \times AH$$

10. On égale les deux expressions de  $S$  :

$$5 \times AH = 24$$

et il vient :

$$AH = \frac{24}{5} = 4,8$$



## Chapitre 5

# Ensembles et relations

### 1 Le symbole $\in$

Un ensemble est une **réunion d'éléments**. Si j'écris :

$$E = \{a, e, i, o, u, y\}$$

alors  $E$  est l'ensemble des voyelles de l'alphabet français. Les **éléments** de  $E$  sont  $a, e, i, o, u, y$ .

Le symbole  $\in$  se lit "**appartient à**". L'énoncé suivant :

$$i \in E$$

se lit " **$i$  appartient à  $E$** ". Il signifie que  $i$  est un **élément de  $E$** . L'énoncé suivant :

$$b \notin E$$

se lit " **$b$  n'appartient pas à  $E$** ". Il signifie que  $b$  n'est pas un **élément de  $E$** ,

En géométrie, droites, segments, cercles, triangles, carrés, cubes, etc. sont des **ensembles de points**.

Imaginons un **cercle**  $\mathcal{C}$  de centre  $I$  et de rayon 2 cm. Considérons deux points  $A$  et  $B$  qui sont sur le cercle. On peut écrire :

$$A \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad B \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad I \notin \mathcal{C}$$

car  $A$  et  $B$  appartiennent à  $\mathcal{C}$  mais pas  $I$ . En effet, **le cercle  $\mathcal{C}$  est une ligne**, et cette ligne ne passe pas par  $I$ .

Par contre, si  $\mathcal{D}$  est le **disque** de centre  $I$  et de rayon 2 cm, on a :

$$I \in \mathcal{D}$$

## 2 Les symboles $=$ $\neq$ $<$ $>$ $\leq$ $\geq$

- La relation suivante :

$$a = b$$

se lit “  $a$  égale  $b$  ”. Elle signifie que  $a$  et  $b$  valent la même chose. Par exemple :

$$1 + 1 = 2$$

- La relation suivante, obtenue avec le signe “=” barré :

$$2 + 2 \neq 5$$

se lit “  $2 + 2$  différent de  $5$  ” ou encore “  $2 + 2$  non égal à  $5$  ”

- La relation suivante :

$$a < b$$

se lit “  $a$  inférieur à  $b$  ”. Elle signifie que  $a$  est **plus petit** que  $b$ . Par exemple :

$$1 < 20$$

- La relation suivante :

$$a > b$$

se lit “  $a$  supérieur à  $b$  ”. Elle signifie que  $a$  est **plus grand** que  $b$ . Par exemple :

$$5 > 0$$

Dans les symboles  $<$  et  $>$  **la pointe** est dirigée vers le **petit** nombre, **l'ouverture** vers le **grand** :



- La relation suivante :

$$a \leq b$$

se lit “  $a$  inférieur ou égal à  $b$  ”. Par exemple, dire que  $x$  est un **entier** et que :

$$x \leq 4$$

signifie que  $x$  est égal à l'un des nombres suivants :

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

- La relation suivante :

$$a \geq b$$

se lit “  $a$  supérieur ou égal à  $b$  ”. Par exemple, dire que  $x$  est un **entier** et que :

$$(x \geq 2) \quad \text{et} \quad (x \leq 7)$$

signifie que  $x$  est **à la fois**  $\geq 2$  et  $\leq 7$ . C'est donc un des nombres suivants :

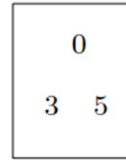
$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$$

### 3 Exercices

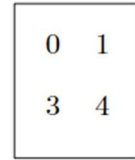
**Exercice 1** (résolu partiellement).

Les ensembles  $E$  et  $F$  étant représentés ci-contre, écrivez toutes les **relations** qu'il y a entre un élément de  $E$  et un élément de  $F$

- d'abord en utilisant les deux symboles  $=$  <
- ensuite en utilisant les deux symboles  $=$  >



$E$



$F$

**Solution partielle :** 1. Les relations demandées sont :

$$0 = 0 \quad 0 < 1 \quad 0 < 3 \quad 0 < 4 \quad 3 = 3 \quad 3 < 4$$

La question 2. se résout sur ce même modèle.

**Exercice 2** (résolu partiellement).

- Écrivez la liste des entiers  $x$  qui vérifient **à la fois** les trois conditions suivantes :

$$(x \text{ est pair}) \quad \text{et} \quad (x \geq 6) \quad \text{et} \quad (x \leq 20)$$

- Écrivez la liste des entiers  $x$  qui vérifient **à la fois** les trois conditions suivantes :

$$(x \text{ est multiple de } 3) \quad \text{et} \quad (x \geq 12) \quad \text{et} \quad (x \leq 30)$$

- Écrivez la liste des entiers  $x$  qui vérifient **à la fois** les trois conditions suivantes :

$$(x \text{ est multiple de } 4) \quad \text{et} \quad (x \geq 4) \quad \text{et} \quad (x \leq 40)$$

**Solution partielle :** 1. Les nombres pairs sont les multiples de 2. Leur liste est **infinie** :

$$0 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \quad 14 \quad 16 \quad 18 \quad 20 \quad 22 \quad 24 \quad 26 \quad 28 \quad \dots$$

Les conditions  $(x \geq 6)$  et  $(x \leq 20)$  imposent qu'on limite la liste entre 6 et 20. On trouve donc :

$$6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \quad 14 \quad 16 \quad 18 \quad 20$$

Les questions 2. et 3. se résolvent sur ce modèle.

**Exercice 3** (unité le cm).

- Marquez horizontalement deux points  $A$  et  $B$  tels que  $AB = 5$ .
- Tracez le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $A$  et de rayon 3.
- Tracez le cercle  $\mathcal{C}'$  de centre  $B$  et de rayon 4.
- Coloriez la partie du plan formée des points  $M$  qui vérifient **à la fois** les deux relations suivantes :

$$AM < 3 \quad \text{et} \quad BM < 4$$

## 4 Correction des exercices

**Ex. 1, p. 57.** On trouve :

$$0 = 0 \quad 3 = 3 \quad 3 > 0 \quad 3 > 1 \quad 5 > 0 \quad 5 > 1 \quad 5 > 3 \quad 5 > 4$$

**Ex. 2, p. 57.** 2. Les multiples de 3 sont :  $0 \times 3$ ,  $1 \times 3$ ,  $2 \times 3$ ,  $3 \times 3$ ,  $4 \times 3$ , ...  
La liste est **infinie** :

$$0 \quad 3 \quad 6 \quad 9 \quad 12 \quad 15 \quad 18 \quad 21 \quad 24 \quad 27 \quad 30 \quad 33 \quad 39 \quad 42 \dots$$

Les conditions ( $x \geq 12$ ) et ( $x \leq 30$ ) imposent que  $x$  doit être **à la fois**  $\geq 12$  et  $\leq 30$ .  
On limite donc la liste entre 12 et 30, et on trouve :

$$12 \quad 15 \quad 18 \quad 21 \quad 24 \quad 27 \quad 30$$

3. On montre, par un raisonnement analogue, que la liste cherchée est :

$$4 \quad 8 \quad 12 \quad 16 \quad 20 \quad 24 \quad 28 \quad 32 \quad 36 \quad 40$$

**Ex. 3, p. 57.** Le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $A$  et de rayon 3 est l'ensemble des points  $M$  tels que :

$$AM = 3$$

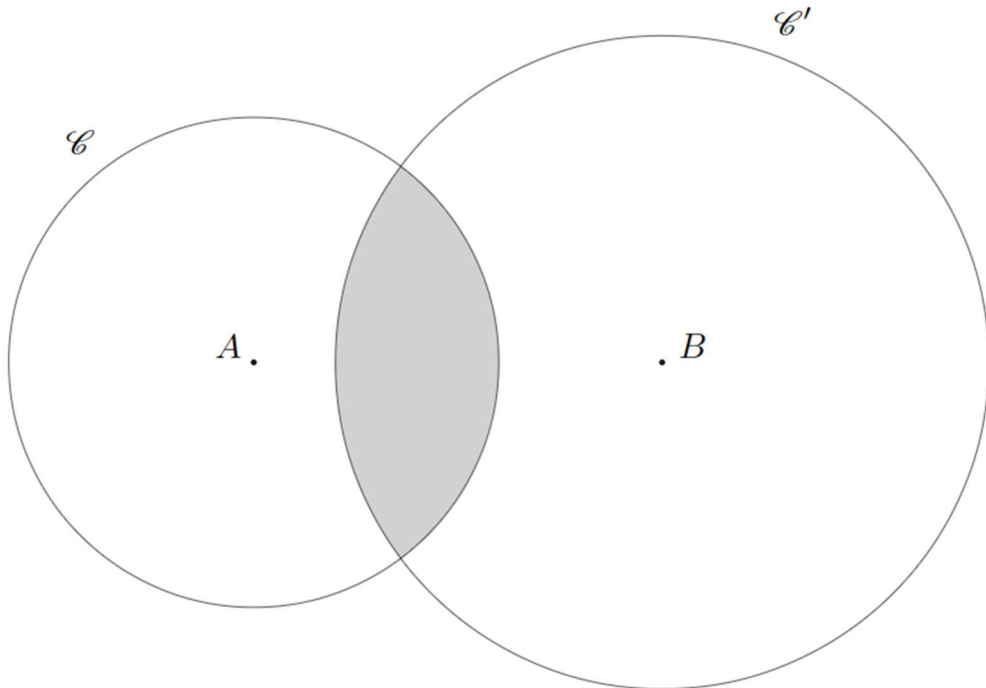
Le cercle  $\mathcal{C}'$  de centre  $B$  et de rayon 4 est l'ensemble des points  $M$  tels que :

$$BM = 4$$

Les points  $M$  qui vérifient **à la fois** :

$$AM < 3 \quad \text{et} \quad BM < 4$$

sont donc tous les points qui sont **à la fois** à l'intérieur de  $\mathcal{C}$  et à l'intérieur de  $\mathcal{C}'$ .  
Ils forment la partie grisée :



Classe de sixième

# Chapitre 1

## Arithmétique

L'arithmétique est née dans la Grèce antique. On la trouve exposée pour la première fois dans les *éléments* d'Euclide, aux environs de 300 avant Jésus-Christ. Dans ce chapitre, nous n'aborderons que quelques notions élémentaires, indispensables pour avoir des bases solides pour comprendre la suite du cours.

### 1 La division euclidienne

**Théorème 1.** (division euclidienne) *Pour tous les entiers  $a, b$  tels que  $b \neq 0$  il existe des entiers  $q$  et  $r$  tel qu'on ait*

$$r < b \quad \text{et} \quad a = b \times q + r$$

La relation :

$$a = b \times q + r$$

est appelée **égalité de division euclidienne** de  $a$  par  $b$ . Elle correspond à la division ci-contre, telle qu'on l'apprend à l'école primaire :

- $q$  est le **quotient**
- $r$  est le **reste**.

$$\begin{array}{r} a \\ r \mid b \\ \hline q \end{array}$$

Quand on écrit  $b \times q + r$ , il faut comprendre qu'on calcule **d'abord**  $b \times q$ , **puis** qu'on ajoute  $r$  (voir § 4, p. 66).

Voici un exemple d'une égalité de division euclidienne et de la division correspondante :

$$63 = 5 \times 12 + 3$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ 13 \mid 5 \\ \hline 12 \\ 3 \end{array}$$

#### Questions (correction p. 70)

Effectuer à la main les divisions euclidiennes suivantes :

$$\frac{316}{3} \quad \frac{317}{3} \quad \frac{318}{3}$$

Pour chacune d'elles, écrire l'égalité de division euclidienne.

Le cas particulier où le reste  $r$  de la division euclidienne est nul conduit à la définition suivante, déjà vue au cours moyen (voir p. 17) :

**Définition 2.** On dit qu'un entier  $a$  est **divisible** par un entier  $b$  si la division de  $a$  par  $b$  tombe juste, ce qui revient à dire qu'il existe un entier  $q$  tel que :

$$a = b \times q$$

**Définition 3.** Si  $a$  est divisible par  $b$ , on dit que  $b$  est un **diviseur** de  $a$ , et que  $a$  est un **multiple** de  $b$ .

Par exemple, grâce à l'égalité :

$$84 = 7 \times 12$$

$$\begin{array}{r|l} 84 & 7 \\ 14 & 12 \\ 0 & \end{array}$$

on peut dire que :

- 84 est **divisible** par 7
- 7 est un **diviseur** de 84
- 84 est **multiple** de 7

Redonnons l'énoncé suivant (voir p. 17) :

**Proposition 4.** (critères de divisibilité)

- Un entier est divisible par 2 **si et seulement si**, son chiffre des unités est 0 ou 2 ou 4 ou 6 ou 8.
- Un entier est divisible par 3, **si et seulement si**, la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un entier est divisible par 5, **si et seulement si**, son chiffre des unités est 0 ou 5.

#### Questions (correction p. 70)

- 1/ Le nombre 35 est-il divisible par 2 ? par 3 ? par 5 ?
- 2/ Le nombre 3005 est-il divisible par 2 ? par 3 ? par 5 ?
- 3/ Montrer que 133 n'est pas divisible par 3.

## 2 Diviseurs d'un entier

Les critères précédents permettent de trouver les petits diviseurs d'un entier, et parfois, de les déterminer tous. Ainsi, les diviseurs de 6 sont :

$$\boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 6}$$

Montrons, par exemple, comment on peut déterminer **tous les diviseurs de 24**. Les petits diviseurs sont faciles à trouver : 1, 2, 3. Comme on a :

$$24 = 1 \times 24$$

$$24 = 2 \times 12$$

$$24 = 3 \times 8$$

on voit que les nombres 24, 12, 8 sont aussi des diviseurs de 24, et qu'on peut les associer deux par deux :

$$\begin{array}{c} \underbrace{1 \quad \dots \quad 24} \\ 1 \quad \underbrace{2 \quad \dots \quad 12} \quad 24 \\ 1 \quad 2 \quad \underbrace{3 \quad \dots \quad 8} \quad 12 \quad 24 \end{array}$$

Noter que si  $b$  est un diviseur de 24, alors il existe un entier  $q$  tel que :

$$24 = b \times q$$

Et donc  $q$  est aussi un diviseur de 24, et il s'obtient par la formule :

$$q = \frac{24}{b}$$

Par exemple, ayant trouvé que 2 divise 24, le **diviseur associé** à 2 peut se calculer en divisant 24 par 2 et on trouve :

$$\frac{24}{2} = 12$$

On remarque que la suite 1, 2, 3 va en **croissant**, alors que la suite 24, 12, 8 va en **décroissant**. On continue à chercher des petits diviseurs de 24 jusqu'à ce que les deux suites de diviseurs se rejoignent.

Or 4 est un diviseur de 24, et  $4 \times 6 = 24$ . Donc 6 est aussi un diviseur de 24. On complète les deux suites :

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \underbrace{4 \quad 6} \quad 8 \quad 12 \quad 24$$

Comme le nombre 5, qui est le seul entier compris entre 4 et 6, n'est pas un diviseur de 24, le processus est terminé : on a trouvé tous les diviseurs de 24. On voit que 24 admet 8 diviseurs :

$$\boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 12 \quad 24}$$

**ATTENTION !** Quand on associe deux à deux les diviseurs d'un nombre, il se peut que le dernier diviseur trouvé soit associé à lui-même. Ainsi pour les diviseurs de 16 :

$$\begin{array}{c} \underbrace{1 \quad \dots \quad 16} \\ 1 \quad \underbrace{2 \quad \dots \quad 8} \quad 16 \\ 1 \quad 2 \quad \boxed{4} \quad 8 \quad 16 \end{array}$$

Le nombre 16 admet donc 5 diviseurs :

$$\boxed{1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16}$$

En procédant ainsi, on montrerait que 25 admet 3 diviseurs :

$$\boxed{1 \quad 5 \quad 25}$$

que 26 admet 4 diviseurs :

$$\boxed{1 \quad 2 \quad 13 \quad 26}$$

que 27 admet 4 diviseurs :

1	3	9	27
---	---	---	----

que 28 admet 6 diviseurs :

1	2	4	7	14	28
---	---	---	---	----	----

que 29 n'admet que 2 diviseurs :

1	29
---	----

#### Questions (correction p. 70)

1/ Déterminer tous les diviseurs de 15, de 16, de 17.

2/ Montrer que les nombres 2, 3, 5, 7 n'ont que 2 diviseurs.

### 3 Nombres premiers

On a vu que certains nombres, comme 2, 3, 5, 7, ... , 29 n'ont que deux diviseurs. Ces nombres ont des propriétés mystérieuses, et ils jouent un rôle important en arithmétique.

**Définition 1.** *Un nombre premier est un entier qui a exactement deux diviseurs.*

Les nombres premiers sont :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ..., 1999, 2003, 2011, 2017, 2027, ...

Il y en a une **infinité**.

Bien noter que :

**1 n'est pas un nombre premier**

car 1 n'a qu'un seul diviseur.

On trouve, dans les *éléments* d'Euclide, le résultat suivant, dont on donnera une idée de la démonstration en exercice (voir ex. 4, p. 68) :

**Théorème 2.** (Euclide) *Tout entier supérieur ou égal à 2 est premier ou est produit de nombres premiers.*

Par exemple, le nombre 126 se termine par 6, il est donc divisible par 2 :

$$126 = 2 \times 63$$

Le nombre 63 n'est pas divisible par 2 mais il est divisible par 3 :

$$63 = 3 \times 21$$

Le nombre 21 est divisible par 3 :

$$21 = 3 \times 7$$

et 7 est premier. On reporte, et on obtient successivement :

$$\begin{aligned} 63 &= 3 \times (3 \times 7) \\ 126 &= 2 \times (3 \times 3 \times 7) \\ 126 &= 2 \times 3^2 \times 7 \end{aligned}$$

La notation  $3^2$  se lit : “ 3 **au carré** ”, ou “ 3 **puissance 2** ”. C’est une abréviation qui signifie :

$$3^2 = 3 \times 3$$

Plus généralement, il est commode de noter, pour tout entier  $a$  :

$$a^2 = a \times a \quad a^3 = a \times a \times a \quad a^4 = a \times a \times a \times a \quad \text{etc.}$$

**Questions (correction p. 70)**

1/ Vérifier qu’on a :

$$10 = 2 \times 5 \quad 20 = 2^2 \times 5 \quad 40 = 2^3 \times 5 \quad 80 = 2^4 \times 5$$

2/ Écrire le nombre 36 sous forme d’un produit de nombres premiers.

On a montré que 126 peut s’écrire comme un produit de nombre premiers :

$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

Cette écriture est appelée **décomposition** de 126 en produit de **facteurs premiers**. On a vu aussi les quatre décompositions suivantes :

$$10 = 2 \times 5 \quad 20 = 2^2 \times 5 \quad 40 = 2^3 \times 5 \quad 80 = 2^4 \times 5$$

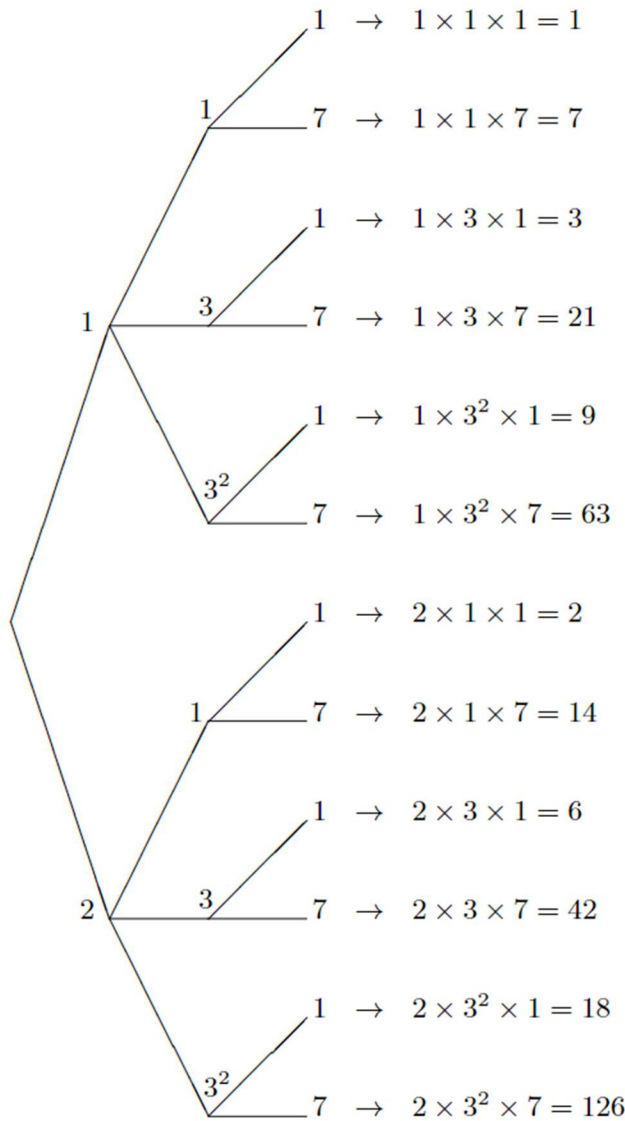
Revenons à 126. Un moyen simple de trouver sa décomposition en produit de facteurs premiers consiste à faire une **série de divisions** par des nombres premiers. Pour cela, on trace un segment vertical et on écrit 126 en haut à gauche. Le plus petit nombre premier qui divise 126 est 2. On l’écrit à droite. On divise, et on écrit le **quotient** 63, à gauche, en-dessous de 126. On recommence avec 63. Le plus petit nombre premier qui divise 63 est 3. On l’écrit à droite. On divise, et on écrit le quotient 21 à gauche, en-dessous de 63.

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

On continue ainsi à diviser par des nombres premiers **les plus petits possibles** jusqu’à obtenir un quotient qui vaut 1. La décomposition cherchée se lit alors à droite :

$$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2 \times 3^2 \times 7$$

Cette décomposition permet de construire un **arbre** donnant tous les **diviseurs** de 126, comme on le voit sur le schéma de la page suivante :



On voit que 126 a 12 diviseurs :

1	2	3	6	7	9	14	18	21	42	63	126
---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	-----

## 4 Priorité des opérations

On voudrait savoir quels résultats donnent les trois calculs suivants :

$$2 + 3 \times 5$$

$$10 - 2 \times 4$$

$$(2 + 3) \times 5$$

- Pour le premier calcul, on applique la première règle :

la <b>multiplication</b> est prioritaire sur l'addition
---

On fait donc d'abord la multiplication, puis l'addition :

$$2 + 3 \times 5 = 2 + \underbrace{3 \times 5}_{15} = 2 + 15 = 17$$

- Pour le deuxième calcul, on applique la deuxième règle :

la **multiplication** est prioritaire sur la soustraction

On fait donc d'abord la multiplication, puis la soustraction :

$$10 - 2 \times 4 = 10 - \underbrace{2 \times 4}_{= 8} = 10 - 8 = 2$$

- Pour le troisième calcul, on a applique la troisième règle :

les calculs entre **parenthèses** sont prioritaires

On fait donc d'abord l'addition entre parenthèse, puis la multiplication :

$$(2 + 3) \times 5 = \underbrace{(2 + 3)}_{= 5} \times 5 = 5 \times 5 = 25$$

## 5 Exercices

### Exercice 1.

1. Effectuer à la main les **divisions euclidiennes** suivantes :

$$\frac{31}{3} \quad \frac{32}{3} \quad \frac{32}{7} \quad \frac{3024}{3} \quad \frac{3024}{8}$$

2. Pour chacune d'elles, écrire l'égalité de division euclidienne correspondante.
3. Effectuer à la main les **divisions avec virgules** suivantes :

$$\frac{1}{3} \quad \frac{32}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{63}{11} \quad \frac{45}{11}$$

4. Vérifier qu'on obtient :

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{3} = 0,333\dots & \frac{32}{6} = 5,333\dots & \frac{1}{7} = 0,142857\dots \\ \frac{1}{9} = 0,111\dots & \frac{63}{11} = 5,7272\dots & \frac{45}{11} = 4,0909\dots \end{array}$$

### Exercice 2 (5-armées).

Pour jouer à la guerre, Damien veut répartir ses 47 soldats en 5 sections.

1. Effectuez la division euclidienne de 47 par 5.
2. Écrivez l'égalité de division euclidienne associée à cette division.
3. Combien y aura-t-il de soldats dans chaque section ?
4. Combien restera-t-il de soldats à part ?

### Exercice 3.

1. Calculer les diviseurs de 7, puis les diviseurs de 14.
2. Calculer les diviseurs de 8, puis les diviseurs de 32.
3. Calculer les diviseurs de 144. On vérifiera qu'il y en a 15.

**Exercice 4** (*décomposition en produit de nombres premiers*).

On se propose d'esquisser la preuve du th. 2, p. 64 :

Tout entier supérieur ou égal à 2 est premier ou est produit de nombres premiers.

Comme cette preuve est assez subtile, on conseille au lecteur de ne l'aborder qu'en deuxième lecture, lorsqu'il sera plus **familier avec les abstractions**. Commençons par un résultat préliminaire que l'on admet :

- Tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.

Soit maintenant un entier quelconque  $a \geq 2$ . D'après le résultat préliminaire, cet entier  $a$  admet un diviseur  $p$  qui est premier. On peut donc écrire :

$$a = p \times b$$

où  $b$  est un entier. Comme  $p$  est premier, on a  $p \geq 2$ , et donc  $b < a$ . Si  $b = 1$ , c'est fini. Sinon,  $b \geq 2$ , et d'après le résultat préliminaire,  $b$  admet un diviseur  $q$  qui est premier. On peut donc écrire :

$$b = q \times c$$

où  $c$  est entier, et  $c < b$ . On a donc :

$$a > b > c \quad \text{et} \quad a = p \times q \times c$$

Si  $c = 1$ , c'est fini. Sinon,  $c \geq 2$  et on peut recommencer le processus. On obtient ainsi une **suite d'entiers**  $b, c, \dots$  de plus en plus petits, qui donc **aboutit à 1**, et une **suite de nombres premiers**  $p, q, \dots$  tels que :

$$a > b > c > \dots > 1 \quad \text{et} \quad a = p \times q \times \dots$$

**Exercice 5.**

Vérifiez les égalités suivantes (tous les nombres situés à droite des égalités sont premiers) :

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$56 = 2^3 \times 7$$

$$560 = 2^4 \times 5 \times 7$$

$$2004 = 2^2 \times 3 \times 167$$

$$2006 = 2 \times 17 \times 59$$

$$2018 = 2 \times 1009$$

$$2019 = 3 \times 673$$

$$2020 = 2^2 \times 5 \times 101$$

$$2021 = 43 \times 47$$

**Exercice 6.**

Écrivez les nombres suivants :

24

27

28

42

44

comme produit de nombres premiers.

**Exercice 7** (résolu).

Écrivez les nombres suivants :

520      1078      450      420      500

comme produit de nombres premiers.

**Solution :** On utilise la méthode des séries de divisions, en essayant les petits nombres premiers dont on rappelle la liste :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23...

520	2	1078	2	450	2	420	2	500	2
260	2	539	7	225	3	210	2	250	2
130	2	77	7	75	3	105	3	125	5
65	5	11	11	25	5	35	5	25	5
13	13	1		5	5	7	7	5	5
1				1		1		1	

On en déduit :

$$520 = 2^3 \times 5 \times 13 \qquad 1078 = 2 \times 7^2 \times 11 \qquad 450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \qquad 500 = 2^2 \times 5^3$$

**Exercice 8.**

Écrivez les nombres suivants :

100      3000      490      250      504

comme produit de nombres premiers.

**Exercice 9** (*une énigme*).

Anastasia a écrit la phrase suivante, dont une partie est hélas effacée :

“Ma phrase contient ..... consonnes.”

Remplacer les pointillés par le nombre qui manque, **écrit en lettres**, pour que la phrase d’Anastasia soit vraie.

## 6 Correction des questions

p. 61.

On pose les divisions euclidiennes :

$$\begin{array}{r|l} \widehat{316} & 3 \\ 016 & \hline 1 & 105 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \widehat{317} & 3 \\ 016 & \hline 2 & 105 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \widehat{318} & 3 \\ 016 & \hline 0 & 106 \end{array}$$

Les égalités de division euclidienne sont donc :

$$316 = 3 \times 105 + 1 \qquad 317 = 3 \times 105 + 2 \qquad 318 = 3 \times 106$$

p. 62.

1/ 35 n'est pas divisible par 2, car son chiffre des unités est 5. La somme des chiffres de 35 est 8. Or 8 n'est pas divisible par 3, donc 35 non plus. Le chiffre des unités de 35 est 5, donc 35 est divisible par 5.

2/ Pour les mêmes raisons, 3005 n'est divisible ni par 2, ni par 3, mais il est divisible par 5.

3/ La somme des chiffres de 133 est 7. Or 7 n'est pas divisible par 3, donc 133 non plus.

p. 64

1/ Les diviseurs de 15 sont : 1 3 5 15.

Les diviseurs de 16 sont : 1 2 4 8 16.

Les diviseurs de 17 sont : 1 17.

2/ • Les diviseurs de 2 sont :  $\boxed{1 \ 2}$

• Le nombre 3 n'est pas divisible par 2, donc ses seuls diviseurs sont :  $\boxed{1 \ 3}$

• Les critères de divisibilité montrent que 5 n'est divisible ni par 2 ni par 3. Il n'est pas non plus divisible par 4, car

un nombre impair n'est jamais divisible par un nombre pair

donc les seuls diviseurs de 5 sont :  $\boxed{1 \ 5}$

• Les critères de divisibilité montrent que 7 n'est divisible ni par 2 ni par 3, ni par 5. Il n'est pas non plus divisible par 4, ni par 6 car on a vu qu'un nombre impair n'est jamais divisible par un nombre pair.

Finalement, les diviseurs de 7 sont :  $\boxed{1 \ 7}$

p. 65

1/ On a bien sûr :  $2 \times 5 = 10$ .

Par ailleurs,  $2^2 = 2 \times 2 = 4$ . Donc  $2^2 \times 5 = 4 \times 5 = 20$

De même,  $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 2 = 8$ . Donc  $2^3 \times 5 = 8 \times 5 = 40$

Enfin,  $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 8 \times 2 = 16$ . Donc  $2^4 \times 5 = 16 \times 5 = 80$

2/ On a :

$$36 = 4 \times 9 = 2^2 \times 3^2$$

## 7 Correction des exercices

**Ex. 1, p. 67.** 1. et 2. Les trois premières divisions euclidiennes s'écrivent :

$$\begin{array}{r|l} 31 & 3 \\ 01 & 10 \\ \hline 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 32 & 3 \\ 02 & 10 \\ \hline 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 32 & 7 \\ 4 & 4 \\ \hline & \end{array}$$

On en déduit les égalités de division euclidienne :

$$31 = 3 \times 10 + 1 \qquad 32 = 3 \times 10 + 2 \qquad 32 = 7 \times 4 + 4$$

Les deux dernières divisions euclidiennes sont :

$$\begin{array}{r|l} 3024 & 3 \\ 0024 & 1008 \\ \hline & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3024 & 8 \\ 62 & 378 \\ 64 & \\ 0 & \\ \hline & \end{array}$$

On en déduit les égalités de division euclidienne :

$$3024 = 3 \times 1008 + 24 \qquad 3024 = 8 \times 378$$

On voit que sur les cinq divisions, seule la dernière **tombe juste**.

3. Nous donnons les trois premières divisions, dont la **célèbre division** de 1 par 7 :

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ 10 & 0,33... \\ 1 & \\ \hline & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 32 & 6 \\ 20 & 5,33... \\ 20 & \\ \hline & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ 30 & 0,14285714... \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ \boxed{10} & \\ 30 & \\ 20 & \\ \hline & \end{array}$$

**Ex. 2, p. 67.**

La division ci-contre permet d'écrire l'égalité de division euclidienne :

$$47 = 5 \times 9 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} 47 & 5 \\ 2 & 9 \\ \hline & \end{array}$$

On en déduit qu'il y aura 9 soldats dans chaque section, et qu'il restera 2 soldats à part.

**Ex. 3, p. 67.**

1. Les diviseurs de 7 et de 14 se trouvent facilement :

$$\boxed{1 \quad 7}$$

$$\boxed{1 \quad 2 \quad 7 \quad 14}$$

2. de même ceux de 8 et 32 :

$$\boxed{1 \quad 2 \quad 4 \quad 8}$$

$$\boxed{1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32}$$

3. Pour trouver ceux de 144, on les groupe 2 à 2, comme dans le cours :

$$\begin{array}{c} \underbrace{1 \dots\dots\dots 144} \\ 1 \quad \underbrace{2 \dots\dots\dots 72} \quad 144 \\ 1 \quad 2 \quad \underbrace{3 \dots\dots\dots 48} \quad 72 \quad 144 \end{array}$$

À la fin, on trouve bien les 15 diviseurs demandés :

$$\boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \quad 12 \quad 16 \quad 18 \quad 24 \quad 36 \quad 48 \quad 72 \quad 144}$$

**Ex. 5, p. 68.** Il suffit de faire les multiplications, sachant que

$$2^2 = 2 \times 2 = 4 \quad 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \quad 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

**Ex. 6, p. 68.** On peut faire des séries de divisions comme dans le cours. Mais comme ici, les nombres sont petits, on peut procéder de tête, par morceau :

$$24 = 2 \times 12 = 2 \times (2 \times 6) = 2 \times (2 \times (2 \times 3)) = 2^3 \times 3$$

On trouve alors :

$$27 = 3^3 \quad 28 = 2^2 \times 7 \quad 42 = 2 \times 3 \times 7 \quad 44 = 2^2 \times 11$$

**Ex. 8, p. 69.** On a :

$$100 = 10 \times 10 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^2$$

$$3000 = 3 \times 1000 = 3 \times 10 \times 10 \times 10 = 3 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) = 2^3 \times 3 \times 5^3$$

En procédant de cette façon, on trouve :

$$490 = 2 \times 5 \times 7^2 \quad 250 = 2 \times 5^3$$

Mais pour 504, il vaut mieux utiliser une méthode mixte commençant par une série de divisions comme dans le cours, suivie d'une décomposition évidente. Ce qui nous donne :

$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$$

$$\begin{array}{r|l} 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \times 7 \end{array}$$

On voit l'avantage qu'il y a à **bien connaître ses tables de multiplication**, non seulement à l'endroit :  $3 \times 7 = 21$ , mais aussi à l'envers :

$$21 = 3 \times 7$$

**Ex. 9, p. 69.** La phrase incomplète comporte déjà 16 consonnes. On voit que les nombres seize, dix-sept, dix-huit et dix-neuf ne peuvent pas convenir. On peut la compléter de **trois façons possibles** : avec vingt, vingt-deux ou vingt-trois. En effet :

- vingt  $\rightarrow 16+4$
- vingt-deux  $\rightarrow 16+4+2$
- vingt-trois  $\rightarrow 16+4+3$

Mais il est délicat de prouver qu'il n'y a pas d'autres possibilités que ces trois-là...

## Chapitre 2

# Algèbre

La plupart des découvertes de l'algèbre depuis le XV<sup>e</sup> siècle proviennent de l'étude des **équations**. Les équations interviennent dans tous les domaines des mathématiques, mais nous n'en verrons que des **exemples très simples**.

### 1 Équations avec multiplication ou division

Soient  $a$  et  $b$  des nombres. Dans tout ce paragraphe, on suppose  $a \neq 0$ .

- Pour résoudre  $a \times x = b$  **je divise par**  $a$  des deux côtés :

$$\begin{aligned} ax &= b \\ \cancel{a}x &= \frac{b}{\cancel{a}} \\ x &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Finalement :

$$a \times x = b \quad \text{équivalent à} \quad x = \frac{b}{a}$$

De façon imagée, on peut dire que pour **tuer la multiplication** on a fait une division.

- Pour résoudre  $\frac{x}{a} = b$  **je multiplie par**  $a$  des deux côtés :

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= b \\ \cancel{a} \times \frac{x}{\cancel{a}} &= a \times b \\ x &= a \times b \end{aligned}$$

Finalement :

$$\frac{x}{a} = b \quad \text{équivalent à} \quad x = a \times b$$

De façon imagée, on peut dire que pour **tuer la division** on a fait une multiplication.

Il y a donc deux actions possibles pour résoudre ce type d'équations :

- Diviser par un même nombre des deux côtés.
- Multiplier par un même nombre des deux côtés.

En particulier, pour résoudre  $ax = 0$  on divise par  $a$  des deux côtés, et on obtient :

$$x = \frac{0}{a} = 0$$

De même, pour résoudre  $\frac{x}{a} = 0$  on multiplie par  $a$  des deux côtés, et on obtient :

$$x = a \times 0 = 0$$

Car on a les formules :

$$\frac{0}{a} = 0$$

$$a \times 0 = 0$$

On a aussi les formules suivantes :

$$\frac{a}{a} = 1$$

$$\frac{a}{1} = a$$

$$a \times 1 = a$$

### Questions (correction p. 87)

Résoudre les équations suivantes :

$$3x = 2$$

$$\frac{x}{3} = 2$$

$$3x = 0$$

$$3x = 3$$

## 2 Équations avec addition ou soustraction

- Pour résoudre l'équation :

$$x + a = b$$

je retranche  $a$  des deux côtés, et j'obtiens :

$$x + a - a = b - a$$

$$x = b - a$$

Tout revient donc à la règle suivante :

Pour résoudre  $x + a = b$  je fais passer mon  $+a$  de l'autre côté, il devient  $-a$  :

$$x + a = b \qquad x = b - a$$

- Pour résoudre l'équation :

$$x - a = b$$

j'ajoute  $a$  des deux côtés, et j'obtiens :

$$\begin{aligned} x - a + a &= b + a \\ x &= b + a \end{aligned}$$

Tout revient donc à la règle suivante :

Pour résoudre  $x - a = b$  je fais passer mon  $-a$  de l'autre côté, il devient  $+a$  :

$$\begin{array}{ccc} x - a = b & & x = b + a \\ & \underbrace{\hspace{10em}} & \nearrow \end{array}$$

Il y a donc deux actions possibles pour résoudre ce type d'équations :

- Retrancher un même nombre des deux côtés.
- Ajouter un même nombre des deux côtés.

#### Questions (correction p. 87)

Résoudre les deux équations suivantes :

$$3 + x = 7 \qquad x - 3 = 2$$

Voici un exemple complet, avec addition et multiplication. On cherche  $x$  tel que :

$$3x + 52 = 60$$

Pour résoudre cette équation, on procède en **deux temps**. D'abord, il faut **isoler**  $x$ . Pour cela, **on fait passer 52 de l'autre côté** en changeant son signe :

$$\begin{aligned} 3x &= 60 - 52 \\ 3x &= 8 \end{aligned}$$

Ensuite, **on divise par 3 des deux côtés** :

$$x = \frac{8}{3}$$

Bien noter la différence entre **faire passer** et **diviser**

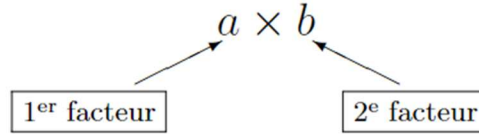
#### Questions (correction p. 87)

Résoudre les trois équations suivantes :

$$3x + 2 = 7 \qquad 5x - 4 = 7 \qquad 5x - 2 = 0$$

### 3 Calcul algébrique

**Vocabulaire** : dans l'expression  $a \times b$  on dit que  $a$  et  $b$  sont les **facteurs** du produit.



Ainsi, dans l'expression  $r(s+t)$ , qui signifie  $r \times (s+t)$ , les facteurs sont  $r$  et  $s+t$ .

Pour calculer un produit dont le second facteur est une somme :

$$r \times (s+t)$$

on peut **développer le produit** en procédant ainsi :

$$r \times (s+t) = r \times s + r \times t$$

On a de même :

$$r \times (s-t) = r \times s - r \times t$$

**Proposition 1.** (développement) *Pour tous les nombres  $r, s, t$  on a :*

$$\begin{aligned} r(s+t) &= rs + rt \\ r(s-t) &= rs - rt \end{aligned}$$

Par exemple, l'expression  $5(5+3)$  peut se calculer de deux façons différentes :

1/ en **réduisant** d'abord la parenthèse :  $5(5+3) = 5 \times 8 = 40$

2/ en développant d'abord et **réduisant** ensuite :  $5(5+3) = 5 \times 5 + 5 \times 3 = 25 + 15 = 40$

De même l'expression  $5(5-3)$  :

1/ en **réduisant** d'abord la parenthèse :  $5(5-3) = 5 \times 2 = 10$

2/ en développant d'abord et **réduisant** ensuite :  $5(5-3) = 5 \times 5 - 5 \times 3 = 25 - 15 = 10$

**Vocabulaire** : on a employé plusieurs fois "réduisant" qui est le participe présent du verbe **réduire**. En mathématiques, réduire a plusieurs sens. Ici, nous l'employons au sens de rendre plus simple. Si on remplace  $5-3$  par 2, on réduit l'expression  $5-3$ .

#### Questions (correction p. 88)

1/ Calculer de deux façons différentes les nombres suivants :

$$5(3-1)$$

$$7(3+2)$$

2/ Développer les produits suivants :

$$5(3+a)$$

$$a(3+b)$$

$$a(b-c)$$

**Proposition 2.** (mise en facteur) *Pour tous les nombres  $r, s, t$  on a :*

$$\begin{aligned} \underline{sr} + \underline{tr} &= r(s + t) \\ \underline{sr} - \underline{tr} &= r(s - t) \end{aligned}$$

Lorsque l'on applique les formules de la prop. 2, on dit qu'on **met  $r$  en facteur**, ou qu'on **factorise par  $r$** . Pour mieux se représenter la factorisation, le **débutant** pourra **souligner** le terme  $r$  qu'il met en facteur.

Par exemple, s'il doit factoriser par  $x$  l'expression  $3x + ax$ , il écrira :

$$3\underline{x} + a\underline{x} = x(3 + a)$$

Pour factoriser une expression, il faut parfois la transformer un peu. Ainsi, pour factoriser  $9a + a$  on écrit :

$$9a + a = 9 \times \underline{a} + 1 \times \underline{a} = \underline{a} \times (9 + 1) = a \times 10 = 10a$$

Une factorisation peut précéder une réduction. Ainsi, un **débutant** réduira en deux étapes une expression comme  $5a - 2a$  :

$$5\underline{a} - 2\underline{a} = \underline{a}(5 - 2) = a \times 3 = 3a$$

La mise en facteur préalable de  $a$  a permis de réduire facilement. Mais quand on est **familier du calcul algébrique**, on réduit directement :

$$5a - 2a = 3a$$

suivant la règle naïve mais efficace : j'avais 5 gommes, j'en ai perdu 2, il m'en reste 3. Autrement dit :

$$5 \text{ gommes} - 2 \text{ gommes} = 3 \text{ gommes}$$

#### Questions (correction p. 88)

1/ Réduire les nombres suivants :

$$3a + 2a$$

$$3a - 2a$$

$$7a + a$$

$$7a - a$$

2/ Factoriser par  $x$  les expressions suivantes :

$$3x - ax$$

$$ax + bx$$

$$ax - 5x$$

$$ax + x$$

$$x - ax$$

## 4 Complément sur les fractions

**Définition 1.** Dans l'écriture  $\frac{a}{b}$  d'une fraction, l'entier  $\boxed{a}$  est appelé **numérateur**, tandis que  $\boxed{b}$  est appelé **dénominateur**.

On connaît la règle suivante :

**Proposition 2.** (addition des fractions)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

• Cette règle permet d'ajouter des fractions qui ont le **même dénominateur**, qui a été noté  $b$  dans l'énoncé. Dans le cas général, pour ajouter deux fractions, ou un entier et une fraction, on commence par les transformer pour qu'elles aient même dénominateur. Ainsi, pour calculer :

$$3 + \frac{2}{5}$$

on écrit :

$$3 = \frac{3 \times 5}{5} = \frac{15}{5}$$

On peut alors calculer :

$$3 + \frac{2}{5} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{15+2}{5} = \frac{17}{5}$$

**Questions (correction p. 88)**

Calculer sous forme d'une fraction les expressions suivantes :

$$4 + \frac{2}{3}$$

$$4 - \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{5} - 1$$

• Lorsqu'on lit la règle d'addition des fractions à l'envers :

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$$

l'égalité obtenue permet de sortir le **plus grand entier** contenu dans une fraction  $\frac{a}{b}$ . On part de l'égalité de division euclidienne de  $a$  par  $b$  :

$$a = bq + r$$

On la divise par  $b$  des deux côtés :

$$\frac{a}{b} = \frac{bq+r}{b} = \frac{bq}{b} + \frac{r}{b} = q + \frac{r}{b}$$

On a donc montré :

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$$

où  $q$  et  $r$  sont les quotient et reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .

**Questions (correction p. 89)**

- 1/ Calculer la division euclidienne de 63 par 11.
- 2/ Écrire l'égalité de division euclidienne correspondante.
- 3/ En déduire qu'on a :

$$\frac{63}{11} = 5 + \frac{8}{11}$$

## 5 Utilisation des équations

Considérons le nombre :

$$a = 0,35555\dots$$

avec le chiffre 5 qui est répété indéfiniment (les points de suspension dans l'écriture de  $a$  signifient que le chiffre 5 est répété indéfiniment).

On cherche à exprimer  $a$  sous forme d'une **fraction**. Pour ce faire, on va isoler d'abord la partie des décimales de  $a$  qui ne comporte que des 5. On calcule  $10a$  :

$$\begin{aligned} 10a &= 3,5555\dots \\ &= 3 + 0,5555\dots \end{aligned}$$

Si donc on pose :

$$x = 0,5555\dots$$

on obtient :

$$10a = 3 + x \tag{1}$$

Ceci fait, on cherche maintenant une **équation** dont  $x$  soit solution. Pour ce faire, on multiplie  $x$  par 10 :

$$\begin{aligned} 10x &= 5,5555\dots \\ &= 5 + 0,5555\dots \\ &= 5 + x \end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\boxed{10x = 5 + x}$$

C'est l'équation que l'on cherchait, il n'y a plus qu'à la **résoudre**. Pour cela, on regroupe les  $x$  en faisant passer  $x$  à gauche, et on réduit :

$$\begin{aligned} 10x - x &= 5 \\ 9x &= 5 \end{aligned}$$

On divise ensuite par 9 des deux côtés et on obtient :

$$x = \frac{5}{9}$$

On reporte cette valeur de  $x$  dans l'expression (1) :

$$\begin{aligned} 10a &= 3 + \frac{5}{9} \\ &= \frac{3 \times 9}{9} + \frac{5}{9} = \frac{27}{9} + \frac{5}{9} = \frac{32}{9} \end{aligned}$$

On a donc :

$$10a = \frac{32}{9}$$

On multiplie par  $\frac{1}{10}$  des deux côtés, et on obtient :

$$a = \frac{1}{10} \times \frac{32}{9} = \frac{32}{10 \times 9} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$$

On a finalement montré :

$$0,35555\dots = \frac{16}{45}$$

formule que l'on peut facilement vérifier en posant la **division de 16 par 45** :

$$\begin{array}{r|l} 160 & 45 \\ 250 & 0,35\dots \\ 25 & \end{array}$$

## 6 Exercices

**Exercice 1** (*les canons* : résolu partiellement).

Le marchand de jouets explique à Damien que la portée d'un canon (en plastique) est proportionnelle à la taille du canon. Ainsi, un canon de 5 cm ayant une portée de 40 cm, un canon de 10 cm aura une portée de 80 cm.

1. Damien a acheté un canon de 7 cm. Quelle est sa portée ?
2. Quelle est la taille du canon qu'il doit acheter s'il veut qu'il ait une portée de 1 m ?

**Solution partielle** : Résolvons la première question. Puisque la longueur  $\ell$  du canon et sa portée  $p$  sont proportionnelles, on a le tableau de proportionnalité suivant :

$\ell$ en cm	5	7
$p$ en cm	40	$x$

On écrit l'égalité des produits en croix :

$$5x = 7 \times 40$$

Si on divise des deux côtés par 5 on obtient :

$$x = \frac{7 \times 40}{5} = 7 \times \frac{40}{5} = 7 \times 8 = 56$$

**Conclusion** : Un canon de 7 cm a une portée de 56 cm.

**Exercice 2.**

1. Développez les expressions suivantes :

$$5x(a+3) \quad 5(x-3) \quad 4(2x-1) \quad 4a(3-x) \quad 4b(1+a)$$

2. Développez les expressions suivantes et simplifiez-les :

$$5\left(\frac{3}{5} + a\right) \quad 3\left(b - \frac{4}{3}\right) \quad 5\left(\frac{6}{5} - a\right) \quad 10\left(\frac{1}{5} + a\right)$$

**Exercice 3.**

1. Développez les expressions suivantes :

$$5(x+3) \quad 4(1-2x) \quad 5x(a-3) \quad 4a(x+3) \quad 4b(1-a)$$

2. Développez les expressions suivantes et simplifiez-les :

$$5\left(\frac{1}{5}+2a\right) \quad 3\left(\frac{b}{3}+3\right) \quad 5\left(\frac{6}{5}+5\right) \quad 10\left(\frac{1}{5}-a\right)$$

**Exercice 4.**

1. Calculez de deux façons différentes les nombres suivants :

$$a = 4 \times (5+3) \quad b = 7 \times (1+2) \quad c = 4 \times (5-3) \quad d = 7 \times (3-1) \quad e = 4 \times (5-2)$$

2. Réduisez les expressions suivantes :

$$2a + 4a \quad 3b - 2b \quad 5a - 2a \quad 4a + 7a \quad 8a - a$$

3. Simplifiez les expressions suivantes :

$$2a + 3b + 5a + b \quad 5a + 3b - 2a + b \quad 7a + 4b - b + 3a \quad a + 3b + 5a - 2b$$

**Exercice 5.**

1. Développez les expressions suivantes :

$$3(x+5) \quad 5(x-2) \quad 5(x+3) \quad 4(3-x) \quad 4(1+x)$$

2. Simplifier les expressions suivantes :

$$2a + a \quad 3b - b \quad 5a - 4a \quad 4a + 9a \quad 8a + a$$

3. Simplifier les expressions suivantes :

$$5a + 3b - 3a - b \quad 5a + 3b + 2a - b \quad 7a + 4b + b - 3a \quad 5a + 3b - a + b$$

**Exercice 6 (partiellement résolu).**

Résolvez les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll} 3x + 1 = 2 & 2 + 3x = 5 & 3x = 0 \\ 5x - 2 = 3 & 2 + 7x = 3 & 5x + 2 = 7 \end{array}$$

**Solution partielle :** On va montrer comment on peut résoudre les trois équations de la première ligne.

- Pour résoudre  $3x + 1 = 2$ , on isole  $x$  du côté gauche. On fait donc passer  $+1$  à droite, qui devient  $-1$  et on obtient :

$$3x = 2 - 1$$

soit :

$$3x = 1$$

Pour obtenir  $x$ , on divise par 3 des deux côtés. Il vient :

$$x = \frac{1}{3}$$

• Pour résoudre  $2 + 3x = 5$ , on isole encore  $x$  du côté gauche. On fait donc passer 2 à droite, qui devient  $-2$ , et on obtient :

$$3x = 5 - 2$$

soit :

$$3x = 3$$

Pour obtenir  $x$ , on divise par 3 des deux côtés. Il vient :

$$x = \frac{3}{3} = 1$$

• Pour résoudre  $3x = 0$ , il suffit de diviser par 3 des deux côtés. On obtient :

$$x = \frac{0}{3} = 0$$

**Exercice 7** (partiellement résolu).

Résolvez les équations suivantes :

$$\frac{x}{3} - 1 = 4$$

$$4x + 3 = 7$$

$$3 + \frac{x}{7} = 3$$

**Solution partielle :** Pour résoudre la première équation **on isole** le  $\frac{x}{3}$  en faisant passer le  $-1$  à droite, et qui devient  $+1$  :

$$\frac{x}{3} = 4 + 1$$

On réduit :

$$\frac{x}{3} = 5$$

On multiplie par 3 des deux côtés :

$$3 \times \frac{x}{3} = 3 \times 5$$

$$x = 15$$

**Exercice 8.**

Résolvez les équations suivantes :

$$3x - 1 = 4$$

$$5x + 2 = 7$$

$$3 + 7x = 3$$

$$2 + 7x = 5$$

$$3x = 1$$

$$5x - 2 = 7$$

**Exercice 9** (partiellement résolu).

Résolvez les équations suivantes :

$$7x - 2 = 3x + 5$$

$$4x - 5 = 3x + 5$$

**Solution partielle :** On résout la première équation. Pour ce faire, on regroupe les  $x$  à gauche, et les autres termes à droite. On sait que lorsque l'on fait passer de l'autre côté, le signe change. Donc  $3x$  passe à gauche et devient  $-3x$ , tandis que  $-2$  passe à droite et devient  $+2$  :

$$7x - 3x = 5 + 2$$

On réduit, et on trouve :

$$4x = 7$$

Pour obtenir  $x$ , on divise par 4 des deux côtés. Il vient :

$$x = \frac{7}{4}$$

**Exercice 10** (partiellement résolu).

Développez les expressions et résolvez les équations suivantes :

$$9(1 + x) = 3(x + 4)$$

$$x + 5(x - 2) = 0$$

$$4(2 + x) = 3(x + 3)$$

$$3x + 5(x - 2) = 0$$

**Solution partielle :** On résout la première équation. Pour ce faire, on commence par développer :

$$9 + 9x = 3x + 12$$

Ensuite, on regroupe les  $x$  à gauche, et les autres termes à droite. Mais lorsque l'on fait passer de l'autre côté, le signe change. Donc  $3x$  passe à gauche et devient  $-3x$ , tandis que 9 passe à droite et devient  $-9$  :

$$9x - 3x = 12 - 9$$

On réduit, et on trouve :

$$6x = 3$$

Pour obtenir  $x$ , on divise par 6 des deux côtés. Il vient :

$$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

**Exercice 11** (partiellement résolu).

Développez les expressions et résolvez les équations suivantes :

$$5(x - 2) = 8(3 - x)$$

$$6(1 + x) = 3(x + 5)$$

$$3(x - 2) = 7(2 - x)$$

$$6(1 + x) = 4(x + 2)$$

**Solution partielle :** On résout la première équation. Pour ce faire, on commence par développer :

$$5x - 10 = 24 - 8x$$

Ensuite, on regroupe les  $x$  à gauche, et les autres termes à droite. Mais lorsque l'on fait passer de l'autre côté, le signe change. Donc  $-8x$  passe à gauche et devient  $+8x$ , tandis que  $-10$  passe à droite et devient  $+10$  :

$$5x + 8x = 24 + 10$$

On réduit, et on trouve :

$$13x = 34$$

Pour obtenir  $x$ , on divise par 13 des deux côtés. Il vient :

$$x = \frac{34}{13}$$

**Exercice 12** (partiellement résolu).

Calculer sous forme d'une seule fraction les expressions suivantes :

$$a = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \quad b = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \quad c = 5 + \frac{2}{3} \quad d = 2 - \frac{2}{3} \quad e = \frac{8}{5} + 1$$

**Solution partielle** : On va calculer  $c$ . Pour cela, on écrit le nombre 5 sous forme d'une fraction dont le dénominateur est 3 :

$$5 = \frac{5 \times 3}{3} = \frac{15}{3}$$

Comme les fractions  $\frac{15}{3}$  et  $\frac{2}{3}$  ont le même dénominateur, la somme se fait par la règle d'addition des fractions :

$$c = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = \frac{15 + 2}{3} = \frac{17}{3}$$

**Exercice 13.**

Calculer sous forme d'une seule fraction les expressions suivantes :

$$a = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \quad b = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \quad c = 2 + \frac{1}{5} \quad d = 2 - \frac{1}{4} \quad e = \frac{8}{5} - 1$$

**Exercice 14** (partiellement résolu).

Calculer sous forme d'une seule fraction les expressions suivantes :

$$a = 5x + \frac{2x}{3} \quad b = 2x - \frac{x}{4} \quad c = \frac{x}{5} + x$$

**Solution partielle** : On va calculer  $a$ . Pour cela, on écrit  $5x$  sous forme d'une fraction dont le dénominateur est 3 :

$$5x = \frac{5x \times 3}{3} = \frac{15x}{3}$$

Comme les fractions  $\frac{15x}{3}$  et  $\frac{2x}{3}$  ont le même dénominateur, la somme se fait par la règle d'addition des fractions :

$$a = \frac{15x}{3} + \frac{2x}{3} = \frac{15x + 2x}{3} = \frac{17x}{3}$$

**Exercice 15.**

Calculer sous forme d'une seule fraction les expressions suivantes :

$$a = 5x - \frac{x}{3} \qquad b = 2x - \frac{3x}{4} \qquad c = \frac{x}{5} + 3x$$

**Exercice 16.**

Soient les nombres :

$$a = 0,73\underline{73}\dots$$

$$b = 0,37\underline{37}\dots$$

(les décimales soulignées se répètent indéfiniment).

1. Déterminer une équation simple satisfaite par  $a$  (on pourra comparer  $100 \times a$  avec  $a$ ).
2. Résoudre cette équation et en déduire l'expression de  $a$  sous forme d'une fraction.
3. Calculer de même l'expression de  $b$  sous forme d'une fraction.
4. Vérifier que  $a + b = \frac{10}{9}$ .
5. Effectuer la division avec virgule de 10 par 9. Comment pouvait-on prévoir le résultat sans calculer les écritures de  $a$  et  $b$  sous forme de fractions?

**Exercice 17.**

Soit  $N$  un entier, formé de deux chiffres  $d$  et  $u$ , le chiffre  $u$  étant celui des unités, le chiffre  $d$  celui des dizaines. On considère de plus l'entier  $N'$  obtenu en permutant les deux chiffres de  $N$ .

1. Montrer qu'on a :

$$N = 10d + u$$

2. Exprimer pareillement  $N'$  en fonction de  $u$  et  $d$ .
3. Calculer  $N + N'$ . Factoriser le plus possible le résultat. En déduire que  $N + N'$  est divisible par 11.

**Exercice 18.**

Soient  $a$  et  $b$  deux chiffres quelconques parmi  $0, 1, \dots, 9$ . On considère les entiers  $x$ ,  $y$  et  $z$  de quatre chiffres qui s'écrivent de la façon suivante dans le système décimal :

$$x = aabb \quad y = abba \quad z = abab$$

1. L'écriture décimale de  $x$  signifie qu'on a :

$$x = 1000a + 100a + 10b + b$$

Réduire cette écriture de  $x$ . Vérifier qu'on peut y mettre 11 **en facteur**.

2. Montrer de même que  $y$  est divisible par 11.
3. Montrer que  $z$  est divisible par 101.

**Exercice 19** (*carré magique (i)*).

Dans un quadrillage, on appelle **colonne** un alignement vertical (comme les colonnes d'un temple grec) et **ligne** un alignement horizontal (comme la ligne d'horizon).

**Première partie**

1. Vérifiez que dans le carré ci-contre, les sommes des nombres, dans les trois lignes, les trois colonnes et les deux diagonales valent toutes 15. On dit que ce carré est **magique**.
2. Vérifiez que  $15 = \text{trois fois l'élément central}$ .
3. Transformez **simplement** ce premier carré magique pour en faire un deuxième dont toutes les sommes valent 12.
4. Vérifiez qu'alors  $12 = \text{trois fois l'élément central}$ .

8	1	6
3	5	7
4	9	2

**Seconde partie**

On se propose de construire un carré magique contenant tous les entiers de l'ensemble :

$$E = \{0, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 16\}$$

On note  $s$  la somme commune dans les lignes, colonnes, diagonales de ce carré.

1. Calculez la somme de tous les éléments de  $E$ . En déduire qu'on doit avoir :

$$s = 24$$

2. Décomposer le nombre 24 de toutes les manières possibles comme somme de trois éléments de  $E$ , dans le sens décroissant. Vérifier qu'il y a 8 décompositions possibles. En voici deux :

$$24 = 16 + 8 + 0 = 16 + 5 + 3$$

3. Indiquer, pour chaque élément de  $E$ , combien de fois il apparaît dans les 8 décompositions de la question précédente. On pourra faire un tableau.
4. En déduire quel est le nombre qui occupe le centre du carré, quels sont ceux qui sont dans les coins, et ceux qui occupent les milieux des côtés du carré.
5. Donner une solution du problème posé.

**Exercice 20** (*carré magique (ii)*).

Dans tout l'exercice, on considère un carré magique de quatre lignes et quatre colonnes, de même **somme**  $s$  dans chacune de ses lignes, colonnes et diagonales. On se propose d'abord de montrer que la somme  $x$  des quatre nombres du centre vaut  $s$ .

1. Nommez les seize nombres du carré :  $a, b, \dots, p$ .
2. Écrivez les équations faisant intervenir les diagonales et les deux lignes centrales.
3. Ajoutez ces équations. Vérifiez qu'on obtient une équation entre  $x$  et  $s$ .
4. Résolvez cette équation. Vérifiez qu'on trouve bien  $x = s$ .

5. Dans le carré magique incomplet ci-contre montrez que  $s = 95$
6. Complétez le carré magique. Vérifiez ensuite que le plus grand nombre présent dans ce carré est 49.

20	28	34	.
.	22	24	.
36	19	30	.
.	.	.	.

## 7 Correction des questions

p. 74

- Pour résoudre l'équation  $3x = 2$  on divise par 3 des deux côtés, et on obtient :

$$x = \frac{2}{3}$$

- Pour résoudre l'équation  $\frac{x}{3} = 2$  on multiplie par 3 des deux côtés, et on obtient :

$$x = 3 \times 2 = 6$$

- Pour résoudre l'équation  $3x = 0$  on divise par 3 des deux côtés, et on obtient :

$$x = \frac{0}{3} = 0$$

- Pour résoudre l'équation  $3x = 3$  on divise par 3 des deux côtés, et on obtient :

$$x = \frac{3}{3} = 1$$

p. 75

- Pour résoudre l'équation  $3 + x = 7$  on fait passer 3 à droite, il devient  $-3$  et on obtient :

$$x = 7 - 3 = 4$$

- Pour résoudre l'équation  $x - 3 = 2$  on fait passer  $-3$  à droite, il devient 3 et on obtient :

$$x = 2 + 3 = 5$$

p. 75

- Pour résoudre l'équation  $3x + 2 = 7$  il faut **isoler**  $x$ . Pour cela, on fait passer 2 à droite, il devient  $-2$  et on obtient :

$$3x = 7 - 2 = 5$$

Ensuite, on divise par 3 des deux côtés, et on obtient :

$$x = \frac{5}{3}$$

- Pour résoudre l'équation  $5x - 4 = 7$  on fait passer  $-4$  à droite, il devient 4 et on obtient :

$$5x = 7 + 4 = 11$$

Ensuite, on divise par 5 des deux côtés, et on obtient :

$$x = \frac{11}{5}$$

- Pour résoudre l'équation  $5x - 2 = 0$  on fait passer  $-2$  à droite, il devient 2 et on

obtient :

$$5x = 0 + 2 = 2$$

Ensuite, on divise par 5 des deux côtés, et on obtient :

$$x = \frac{2}{5}$$

**p. 76**

1/ Première façon, en réduisant d'abord :

$$a = 5(3 - 1) = 5 \times 2 = 10$$

Deuxième façon : développer d'abord, puis réduire :

$$a = 5(3 - 1) = 5 \times 3 - 5 \times 1 = 15 - 5 = 10$$

De même, première façon, en réduisant d'abord :

$$b = 7(3 + 2) = 7 \times 5 = 35$$

Deuxième façon : développer d'abord, puis réduire :

$$b = 7(3 + 2) = 7 \times 3 + 7 \times 2 = 21 + 14 = 35$$

2/ On développe :

$$5(3 + a) = 5 \times 3 + 5 \times a = 15 + 5a$$

$$a(3 + b) = a \times 3 + a \times b = 3a + ab$$

$$a(b - c) = a \times b - a \times c = ab - ac$$

**p. 77**

1/ On réduit :

$$3a + 2a = 5a$$

$$3a - 2a = a$$

$$7a + a = 8a$$

$$7a - a = 6a$$

2/ On factorise par  $x$  :

$$3\underline{x} - a\underline{x} = x(3 - a)$$

$$a\underline{x} + b\underline{x} = x(a + b)$$

$$a\underline{x} - 5\underline{x} = x(a - 5)$$

$$a\underline{x} + \underline{x} = a \times \underline{x} + 1 \times \underline{x} = x(a + 1)$$

$$\underline{x} - a\underline{x} = 1 \times \underline{x} - a \times \underline{x} = x(1 - a)$$

**p. 78**

$$4 + \frac{2}{3} = \frac{4 \times 3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{12}{3} + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

$$4 - \frac{2}{3} = \frac{4 \times 3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{12}{3} - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{8}{5} - 1 = \frac{8}{5} - \frac{5}{5} = \frac{8 - 5}{5} = \frac{3}{5}$$

## p. 78

1/ On calcule la division euclidienne :

$$63 \begin{array}{l} | 11 \\ 8 \quad | 5 \end{array}$$

2/ On en déduit l'égalité de division euclidienne :

$$63 = 11 \times 5 + 8$$

3/ On divise alors par 11 des deux côtés, et on trouve :

$$\frac{63}{11} = \frac{11 \times 5 + 8}{11} = \frac{11 \times 5}{11} + \frac{8}{11} = 5 + \frac{8}{11}$$

## 8 Correction des exercices

## Ex. 1, p. 80.

Pour résoudre la question 2., on reprend le tableau de proportionnalité de la question 1.

Il faut prendre garde que les longueurs doivent être dans la **même unité**, ici le cm. Comme 1 m = 100 cm, on marque dans le tableau la portée souhaitée de 100, et la taille inconnue  $x$  du canon.

$\ell$ en cm	5	$x$
$p$ en cm	40	100

On raisonne alors comme dans le cours : on égale les produits en croix, ce qui donne une équation en  $x$  que l'on résout. On trouve :

$$x = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ cm}$$

Il faut donc un canon de 12,5 cm pour avoir une portée d'1 m.

## Ex. 2, p. 80.

On rappelle les deux règles de développement d'un produit :

$$r \times (s + t) = r \times s + r \times t$$

$$r \times (s - t) = r \times s - r \times t$$

1. On a donc, avec la première règle :

$$5x(a + 3) = 5x \times a + 5x \times 3 = 5ax + 15x$$

et avec la seconde :

$$5(x - 3) = 5 \times x - 5 \times 3 = 5x - 15$$

et de même :

$$4(2x - 1) = 8x - 4 \quad 4a(3 - x) = 12a - 4ax \quad 4b(1 + a) = 4b + 4ab$$

2. On a :

$$5 \left( \frac{3}{5} + a \right) = 5 \times \frac{3}{5} + 5 \times a = \cancel{5} \times \frac{3}{\cancel{5}} + 5a = 3 + 5a$$

et de même :

$$3 \left( b - \frac{4}{3} \right) = 3b - 4 \quad 5 \left( \frac{6}{5} - a \right) = 6 - 5a \quad 10 \left( \frac{1}{5} + a \right) = 2 + 10a$$

**Ex. 3, p. 81.**

1. Comme dans l'ex. 2, p. 80, on applique les deux règles de développement d'un produit et on obtient :

$$5(x+3) = 5x+15 \quad 4(1-2x) = 4-8x \quad 5x(a-3) = 5ax-15x$$

$$4a(x+3) = 4ax+12a \quad 4b(1-a) = 4b-4ab$$

2. De même :

$$5\left(\frac{1}{5}+2a\right) = 1+10a \quad 3\left(\frac{b}{3}+3\right) = b+9 \quad 5\left(\frac{6}{5}+5\right) = 6+25=31$$

$$10\left(\frac{1}{5}-a\right) = 2-10a$$

**Ex. 4, p. 81.**

1. La première façon de calculer consiste à **développer** d'abord, puis **réduire**. La seconde façon consiste à **réduire** d'abord, puis **développer**. On applique les deux façons :

$$a = 4 \times (5+3) = 4 \times 5 + 4 \times 3 = 20 + 12 = 32$$

$$a = 4 \times (5+3) = 4 \times 8 = 32$$

$$b = 7 \times (1+2) = 7 \times 1 + 7 \times 2 = 7 + 14 = 21$$

$$b = 7 \times (1+2) = 7 \times 3 = 21$$

$$c = 4 \times (5-3) = 4 \times 5 - 4 \times 3 = 20 - 12 = 8$$

$$c = 4 \times (5-3) = 4 \times 2 = 8$$

$$d = 7 \times (3-1) = 7 \times 3 - 7 \times 1 = 21 - 7 = 14$$

$$d = 7 \times (3-1) = 7 \times 2 = 14$$

$$e = 4 \times (5-2) = 4 \times 5 - 4 \times 2 = 20 - 8 = 12$$

$$e = 4 \times (5-2) = 4 \times 3 = 12$$

2. Pour réduire, on factorise, comme expliqué dans le cours (prop. 2, p. 77) :

$$2a+4a = (2+4)a = 6a$$

$$3b-2b = (3-2)b = 1b = b$$

$$5a-2a = (5-2)a = 3a$$

$$4a+7a = (4+7)a = 11a$$

Pour réduire  $8a-a$  on peut factoriser par  $a$  comme font les débutants :

$$8a-a = 8a-1a = (8-1)a = 7a$$

Mais, quand on a l'habitude, on écrit directement :

$$8a-a = 7a$$

suivant la règle :

$8 \text{ gomm} - 1 \text{ gomme} = 7 \text{ gomm}$
---

3. On regroupe séparément, les  $a$  et les  $b$  :

$$2a+3b+5a+b = 2a+5a+3b+b = 7a+4b$$

$$5a+3b-2a+b = 5a-2a+3b+b = 3a+4b$$

$$7a+4b-b+3a = 7a+3a+4b-b = 1a+3b$$

$$a+3b+5a-2b = a+5a+3b-2b = 6a+b$$

**Ex. 5, p. 81.**

1. On développe par les règles usuelles :

$$3(x + 5) = 3x + 15 \quad 5(x - 2) = 5x - 10 \quad 5(x + 3) = 5x + 15$$

$$4(3 - x) = 12 - 4x \quad 4(1 + x) = 4 + 4x$$

2. Pour réduire  $2a + a$  et  $3b - b$ , on factorise par  $a$  ou par  $b$ , comme font les débutants :

$$2a + a = 2a + 1a = (2 + 1)a = 3a \quad 3b - b = 3b - 1b = (3 - 1)b = 2b$$

Quand on a l'habitude, on écrit directement :

$$2a + a = 3a \quad 3b - b = 2b$$

On a ensuite :

$$5a - 4a = (5 - 4)a = 1a = a \quad 4a + 9a = (4 + 9)a = 13a \quad 8a + a = 9a$$

3. On regroupe séparément, les  $a$  et les  $b$  :

$$5a + 3b - 3a - b = 5a - 3a + 3b - b = 2a + 2b \quad 5a + 3b + 2a - b = 5a + 2a + 3b - b = 7a + 2b$$

$$7a + 4b + b - 3a = 7a - 3a + 4b + b = 4a + 5b \quad 5a + 3b - a + b = 5a - a + 3b + b = 4a + 4b$$

**Ex. 6, p. 81.**

On résout les équations de la deuxième ligne :

$$\begin{array}{l} 5x - 2 = 3 \\ 5x = 3 + 2 \\ 5x = 5 \\ x = \frac{5}{5} = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 + 7x = 3 \\ 7x = 3 - 2 \\ 7x = 1 \\ x = \frac{1}{7} \end{array} \quad \begin{array}{l} 5x + 2 = 7 \\ 5x = 7 - 2 \\ 5x = 3 \\ x = \frac{3}{5} \end{array}$$

**Ex. 7, p. 82.**

On résout les deux autres équations :

$$\begin{array}{l} 4x + 3 = 7 \\ 4x = 7 - 3 \\ 4x = 4 \\ x = \frac{4}{4} = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 + \frac{x}{7} = 3 \\ \cancel{3} + \frac{x}{7} = \cancel{3} \\ \frac{x}{7} = 0 \\ x = 7 \times 0 = 0 \end{array}$$

**Ex. 8, p. 82.**

On résout les équations de la première ligne :

$$\begin{array}{l} 3x - 1 = 4 \\ 3x = 4 + 1 \\ 3x = 5 \\ x = \frac{5}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} 5x + 2 = 7 \\ 5x = 7 - 2 \\ 5x = 5 \\ x = \frac{5}{5} = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 + 7x = 3 \\ \cancel{3} + 7x = \cancel{3} \\ 7x = 0 \\ x = 0 \end{array}$$

On résout celles de la seconde ligne :

$$\begin{array}{rcl} 2 + 7x & = & 5 \\ 7x & = & 3 \\ x & = & \frac{3}{7} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 3x & = & 1 \\ x & = & \frac{1}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 5x - 2 & = & 7 \\ 5x & = & 9 \\ x & = & \frac{9}{5} \end{array}$$

**Ex. 9, p. 83.** On a :

$$\begin{array}{rcl} 4x - 5 & = & 3x + 5 \\ 4x - 3x & = & 5 + 5 \\ x & = & 10 \end{array}$$

**Ex. 10, p. 83.** On résout les trois équations restantes :

$$\begin{array}{rcl} x + 5(x - 2) & = & 0 \\ x + 5x - 10 & = & 0 \\ 6x & = & 10 \\ x & = & \frac{10}{6} \\ x & = & \frac{5}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 4(2 + x) & = & 3(x + 3) \\ 8 + 4x & = & 3x + 9 \\ 4x - 3x & = & 9 - 8 \\ x & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 3x + 5(x - 2) & = & 0 \\ 3x + 5x - 10 & = & 0 \\ 8x & = & 10 \\ x & = & \frac{10}{8} \\ x & = & \frac{5}{4} \end{array}$$

**Ex. 11, p. 83.** On résout les trois équations restantes. Pour simplifier, on va d'abord diviser par 6 la première équation, et par 2 la troisième :

$$\begin{array}{rcl} 6(1 + x) & = & 3(x + 5) \\ 2(1 + x) & = & x + 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 3(x - 2) & = & 7(2 - x) \\ 3x - 6 & = & 14 - 7x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 6(1 + x) & = & 4(x + 2) \\ 3(1 + x) & = & 2(x + 2) \end{array}$$

On continue :

$$\begin{array}{rcl} 2 + 2x & = & x + 5 \\ 2x - x & = & 5 - 2 \\ x & = & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 3x + 7x & = & 14 + 6 \\ 10x & = & 20 \\ x & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 3 + 3x & = & 2x + 4 \\ 3x - 2x & = & 4 - 3 \\ x & = & 1 \end{array}$$

**Ex. 12, p. 84.** On travaille sur les quatre expressions restant à réduire :

$$\begin{array}{rcl} a & = & \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \\ & = & \frac{4-2}{3} \\ & = & \frac{2}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} b & = & \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \\ & = & \frac{4+2}{3} \\ & = & \frac{6}{3} \\ & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} d & = & 2 - \frac{2}{3} \\ & = & \frac{6}{3} - \frac{2}{3} \\ & = & \frac{4}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} e & = & \frac{8}{5} + 1 \\ & = & \frac{8}{5} + \frac{5}{5} \\ & = & \frac{13}{5} \end{array}$$

**Ex. 13, p. 84.** On a :

$$\begin{array}{lllll} a = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} & b = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} & c = 2 + \frac{1}{5} & d = 2 - \frac{1}{4} & e = \frac{8}{5} - 1 \\ a = \frac{2}{4} & b = \frac{6}{5} & c = \frac{10}{5} + \frac{1}{5} & d = \frac{8}{4} - \frac{1}{4} & e = \frac{8}{5} - \frac{5}{5} \\ a = \frac{1}{2} & & c = \frac{11}{5} & d = \frac{7}{4} & e = \frac{3}{5} \end{array}$$

**Ex. 14, p. 84.** Il reste à calculer  $b$  et  $c$  :

$$\begin{array}{ll} b & = 2x - \frac{x}{4} \\ & = \frac{8x}{4} - \frac{x}{4} \\ & = \frac{7x}{4} \\ c & = \frac{x}{5} + x \\ & = \frac{x}{5} + \frac{5x}{5} \\ & = \frac{6x}{5} \end{array}$$

**Ex. 15, p. 85.** On a

$$\begin{array}{lll} a & = 5x - \frac{x}{3} & b = 2x - \frac{3x}{4} & c = \frac{x}{5} + 3x \\ & = \frac{15x}{3} - \frac{x}{3} & = \frac{8x}{4} - \frac{3x}{4} & = \frac{x}{5} + \frac{15x}{5} \\ & = \frac{14x}{3} & = \frac{5x}{4} & = \frac{16x}{5} \end{array}$$

**Ex. 16, p. 85.** On procède comme dans le cours, au § 5, p. 79.

1. On calcule :

$$\begin{aligned} 100a &= 73,7373\dots \\ &= 73 + 0,7373\dots \\ &= 73 + a \end{aligned}$$

L'équation cherchée est donc :

$$100a = 73 + a$$

2. La résolution se fait ainsi :

$$\begin{aligned} 100a - a &= 73 \\ 99a &= 73 \\ a &= \frac{73}{99} \end{aligned}$$

3. Par le même méthode, on obtient :

$$b = \frac{37}{99}$$

4. On en déduit :

$$a + b = \frac{73}{99} + \frac{37}{99} = \frac{110}{99} = \frac{10}{9}$$

5. La division de 10 par 9 est :

$$\begin{array}{r|l} 10 & 9 \\ 10 & 1,11\dots \\ 1 & \end{array}$$

Donc  $a+b = 1,111\dots$ . Ce résultat pouvait se prévoir si on observe les additions suivantes :

$$\begin{array}{r} 0,73 \\ +0,37 \\ \hline 1,10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,7373 \\ +0,3737 \\ \hline 1,1110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,737373 \\ +0,373737 \\ \hline 1,111110 \end{array}$$

Dans ces trois additions, le chiffre obtenu dans toutes les colonnes est 1 sauf le plus à droite qui est 0. Ceci est dû à la retenue de la somme  $3+7=10$  provenant de la colonne suivante, sauf pour la dernière colonne car il n'y a pas de colonne après la dernière....

Mais dans l'**addition infinie** suivante :

$$\begin{array}{r} 0,737373\dots \\ +0,373737\dots \\ \hline 1,111111 \end{array}$$

il n'y a pas de dernière colonne, donc dans chaque colonne, il y a toujours une retenue de 1 provenant de la colonne suivante.

**Ex. 17, p. 85.** 1. Dans le système de numération décimale, considérons le nombre  $N$  à deux chiffres. Son chiffre des unités  $u$  compte  $u$  objets, son chiffre des dizaines  $d$  compte  $d \times 10$  objets. On a donc :

$$N = 10d + u$$

2. On a clairement :

$$N' = 10u + d$$

3. On en déduit :

$$N + N' = 10d + u + 10u + d = 10d + d + 10u + u = 11d + 11u = 11 \times (d + u)$$

Comme  $d + u$  est un entier, la relation :

$$N + N' = 11 \times (d + u)$$

montre que  $N + N'$  est multiple de 11 ou, ce qui est synonyme, divisible par 11.

**Ex. 18, p. 85.** 1. On a :

$$x = 1000a + 100a + 10b + b = 100(10a + a) + 11b = 100 \times 11a + 11b = 11(100a + b)$$

2. On a de même :

$$y = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 11b$$

Or  $1001 = 11 \times 91$  donc

$$y = 11 \times 91a + 11b = 11(91a + b)$$

Comme  $91a + b$  est entier, la relation :

$$y = 11(91a + b)$$

montre que  $y$  est divisible par 11.

3. On a :

$$z = 1000a + 100b + 10a + b = 1000a + 10a + 100b + b = 1010a + 101b = 101(10a + b)$$

Comme  $10a + b$  est entier, la relation suivante :

$$z = 101(10a + b)$$

montre que  $z$  est divisible par 101.

**Ex. 19, p. 86. Première partie** 1. Dans la première ligne, on a  $8 + 1 + 7 = 15$ , dans une des deux diagonales, on a  $8 + 5 + 2 = 15$ . Nous laissons au lecteur les cinq autres vérifications.

2. En effet,  $15 = 3 \times 5$

3. Il suffit de retrancher 1 à tous les chiffres du carré. Voir ci-contre :

4. Évident.

7	0	5
2	4	6
3	8	1

**Seconde partie** 1. La somme de tous les éléments de  $E$  vaut la somme de tous les éléments situés dans chacune des trois lignes. Donc elle vaut  $3s$ . On en déduit :

$$3s = 0 + 3 + 5 + 6 + 8 + 10 + 11 + 13 + 16 = 72$$

Donc  $s = 24$

2. Voici les huit décompositions :

$$\begin{aligned} 24 &= 16 + 8 + 0 = 16 + 5 + 3 \\ &= 13 + 11 + 0 = 13 + 8 + 3 = 13 + 6 + 5 \\ &= 11 + 10 + 3 = 11 + 8 + 5 \\ &= 10 + 8 + 6 \end{aligned}$$

3. Le tableau suivant représente le nombre d'occurrences<sup>1</sup> de chaque élément de  $E$  dans les huit décompositions :

éléments	0	3	5	6	8	10	11	13	16
occurrences	2	3	3	2	4	2	3	3	2

4. On voit que 8 apparaît 4 fois. C'est donc l'élément central, situé sur une ligne, une colonne, et les deux diagonales.

Les éléments qui ont trois occurrences sont dans les coins. Ce sont 3, 5, 11, 13. Les éléments qui ont deux occurrences sont au milieu des côtés du carré. Ce sont : 0, 6, 10, 16.

5. On commence par placer 8 au centre, puis 3 dans un des coins.

3		
	8	

1. Occurrence = apparition d'un terme dans une liste.

On complète la diagonale de 3 et 8 pour faire une somme de 24. La seule façon est 13. On place 5 dans un des coins libres. Et on continue... Une solution du problème est :

3	16	5
10	8	6
11	0	13

**Ex. 20, p. 86.** 1. On demande au lecteur de tracer un **quadrillage** de quatre lignes et quatre colonnes, et de marquer les seize cases obtenues de gauche à droite et de haut en bas avec les lettres  $a, b, c, d, \dots, m, n, o, p$

2. Les équations demandées sont :

$$\begin{aligned} a + f + k + p &= s \\ d + g + j + m &= s \\ e + f + g + h &= s \\ i + j + k + l &= s \end{aligned}$$

3. et 4. La somme demandée vaut  $4s$ . En raisonnant géométriquement sur le quadrillage, on voit qu'elle vaut aussi deux fois la somme des éléments centraux plus la somme de la première et de la quatrième colonne. On en déduit :

$$4s = 2x + s + s$$

donc  $x = s$

5. La somme des quatre éléments centraux vaut  $22 + 24 + 19 + 30 = 95$ . Donc  $s = 95$

6. Pour compléter la diagonale 20-22-30- $p$ , on remarque que  $20 + 22 + 30 = 72$ , donc  $p = 23$ . On complète de même la première et la troisième ligne. On trouve  $d = 13$  et  $l = 10$ . On continue ainsi... On trouve à la fin :

20	28	34	13
0	22	24	49
36	19	30	10
39	26	7	23

## Chapitre 3

# Coordonnées dans le plan

Dans ce chapitre, on **choisit** une certaine unité de longueur, par exemple le cm, le petit carreau, le grand carreau. Si  $M$  et  $O$ , sont des points, on note  $OM$  la distance entre  $O$  et  $M$ , mesurée avec cette unité de longueur.

### 1 Abscisse et ordonnée

**Définition 1.** *Un **axe horizontal** est une droite horizontale sur laquelle on a choisi un point origine  $O$ , et une orientation vers la droite.*

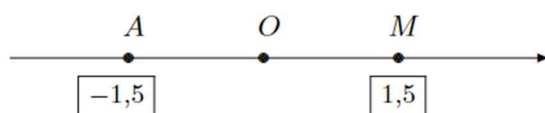
**Définition 2.** *Tout point  $M$  d'un **axe horizontal** d'origine  $O$ , a une **abscisse** qui est un nombre positif ou négatif, et qui vaut :*

- $OM$  si  $M$  est à droite de  $O$ .
- $-OM$  si  $M$  est à gauche de  $O$ .

*L'abscisse de l'origine vaut 0.*

On prendra garde à bien écrire le mot **abscisse** avec les deux lettres **sc**. L'origine de ce mot est un verbe latin qui veut dire **scinder**, où l'on retrouve les lettres **sc**.

Sur la figure ci-dessous,  $A$  et  $M$  sont deux points d'un axe horizontal. L'abscisse de  $M$  est **positive** car  $M$  est situé à droite de  $O$ . L'abscisse de  $A$  est **négative** car  $A$  est situé à gauche de  $O$ .

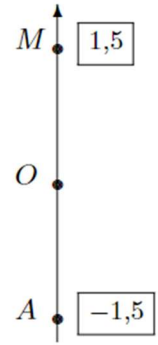


**Définition 3.** *Un **axe vertical** est une droite verticale, sur laquelle on a choisi un point origine  $O$ , et une orientation vers le haut.*

**Définition 4.** *Tout point  $M$  d'un axe vertical d'origine  $O$ , a une ordonnée qui vaut :*

- $OM$  si  $M$  est au-dessus de  $O$ .
- $-OM$  si  $M$  est en-dessous de  $O$ .

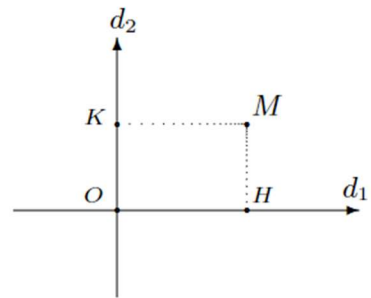
*L'ordonnée de l'origine vaut 0.*



**Définition 5.** *Un repère du plan est constitué de deux axes  $d_1$  et  $d_2$  de même origine  $O$ . L'axe horizontal  $d_1$  est appelé **axe des abscisses** (il est orienté vers la droite); l'axe vertical  $d_2$  est appelé **axe des ordonnées** (il est orienté vers le haut).*

**Définition 6.** *Le pointillé vertical, issu d'un point  $M$  coupe  $d_1$  en  $H$ . Le pointillé horizontal issu de  $M$  coupe  $d_2$  en  $K$ .*

- L'abscisse de  $H$  sur  $d_1$  est appelée **abscisse** de  $M$ . Elle est notée  $x_M$ .
- L'ordonnée de  $K$  sur  $d_2$  est appelée **ordonnée** de  $M$ . Elle est notée  $y_M$ .



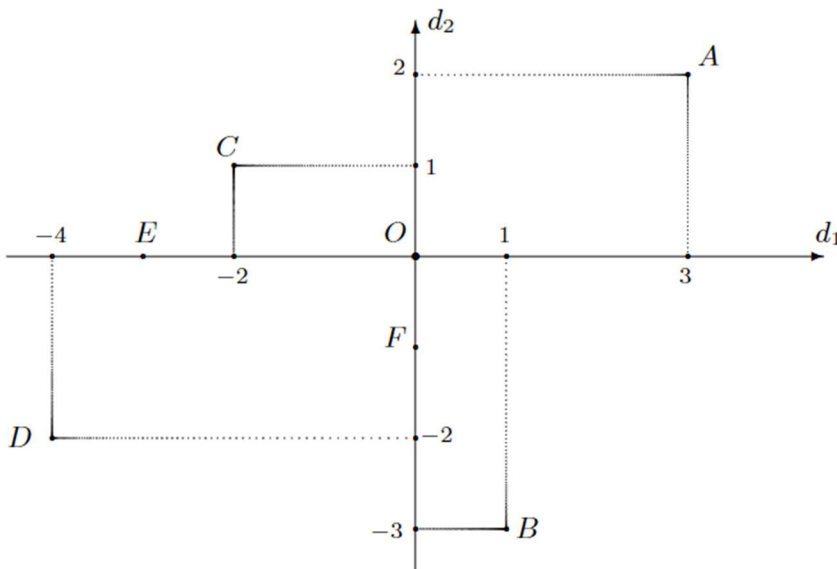
On dit que le couple  $(x_M; y_M)$  est le couple des **coordonnées** de  $M$ , et on écrit :

$$M(x_M; y_M)$$

Ainsi, la notation  $A(3; 2)$  signifie que le point  $A$  a pour abscisse 3 et pour ordonnée 2. C'est-à-dire  $x_A = 3$  et  $y_A = 2$ . Représentons les points suivants :

$A(3; 2)$        $B(1; -3)$        $C(-2; 1)$        $D(-4; -2)$        $E(-3; 0)$        $F(0; -1)$

avec le **cm** comme unité. On trace un repère, on place les points :



Le point  $E$  a une ordonnée nulle ( $y_E = 0$ ), il est donc sur l'axe des abscisses. Le point  $F$  a une abscisse nulle ( $x_F = 0$ ), il est donc sur l'axe des ordonnées. Le point  $O$ , dont les deux coordonnées sont nulles ( $x_O = y_O = 0$ ), est à l'intersection des deux axes.

## 2 Calculs de distances particulières

Si deux points  $A$  et  $B$  sont sur une même **horizontale** ils ont la même ordonnée. Leur distance est alors égale à la **différence positive** de leurs abscisses :

$$AB = \text{grande abscisse} - \text{petite abscisse}$$

Sur la figure ci-dessous, on a :

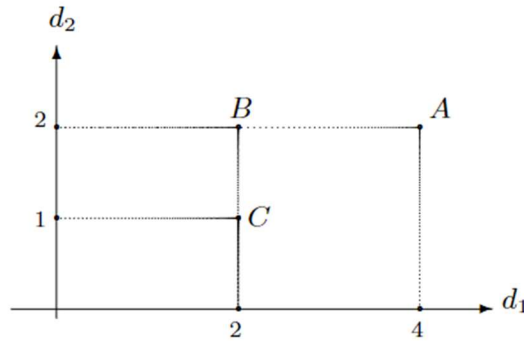
$$AB = 4 - 2 = 2$$

Si deux points  $A$  et  $B$  sont sur une même **verticale** ils ont la même abscisse. Leur distance est alors égale à la **différence positive** de leurs ordonnées :

$$BC = \text{grande ordonnée} - \text{petite ordonnée}$$

Sur la figure ci-dessous, on a :

$$BC = 2 - 1 = 1$$



## 3 Exercices

### Exercice 1.

(unité le cm) On repère les points par abscisse et ordonnée.

- Placez les points suivants :

$$A(2; 2) \quad B(-2; 2) \quad C(-2; -2) \quad D(2; -2)$$

- Tracez le quadrilatère  $ABCD$ . Vérifiez que c'est un carré.
- Placez les points suivants :

$$A'(2; 0) \quad B'(0; 2) \quad C'(-2; 0) \quad D'(0; -2)$$

- Tracez le quadrilatère  $A'B'C'D'$ . Vérifiez que c'est un carré.

**Exercice 2.**

(unité le cm) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placez les points suivants :

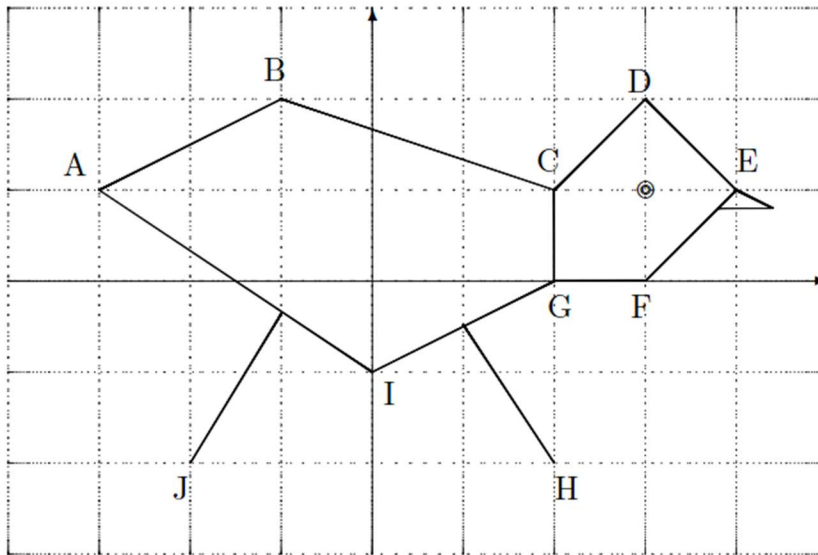
$$A(4; 2) \quad B(1; -3) \quad C(-3; 2) \quad D(0; 3) \quad E(2; 0) \quad F(-4; 2) \quad G(0; 5)$$

2. Vérifiez qu'on a :

$$EC = EG \approx 5,4$$

**Exercice 3 (poussin).**

- On repère les points par abscisse et ordonnée. Utilisez le quadrillage et les deux axes dessinés pour mesurer les coordonnées des **dix points**  $A, B, \dots, J$ . On présentera les résultats dans un tableau.
- Utilisez un quadrillage de votre choix pour reproduire le poussin ci-dessous.
- Coloriez le poussin.

**Exercice 4.**

(unité de longueur arbitraire) On repère les points par abscisse et ordonnée.

- Tracez comme d'habitude les deux axes de coordonnées.
- Placez les points suivants :

$$A(-4; -3) \quad B(2; -5) \quad C(0; 5)$$

- Tracez le triangle  $ABC$ .
- Mesurez les trois angles du triangle (il faudra peut-être prolonger certains côtés).
- Vérifiez que leur somme vaut  $180^\circ$

**Exercice 5** (*La Santa Maria*).

(unité de longueur arbitraire) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placez le point  $D(0;0)$  à peu près au centre de la page.
2. Placez les points suivants :

$$A(-4; -3) \quad B(5; -3) \quad C(7; 1) \quad E(-5; 0)$$

3. Tracez le pentagone  $ABCDE$ .
4. Placez les points suivants :

$$F(-3; 1) \quad G(3, 1) \quad H(3; 4) \quad I(-3; 4)$$

5. Tracez le rectangle  $FGHI$ .
6. Placez le point  $J(0; 7)$  et tracez le segment  $[DJ]$ .
7. Ajoutez une vigie, décorez et coloriez le navire amiral de **Christophe Colomb**.

## 4 Correction des exercices

**Ex. 1, p. 99.**

On mesure et on trouve :

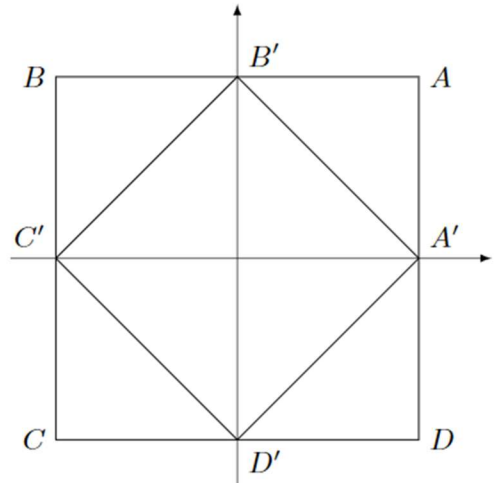
$$AB = BC = CD = DA = 4$$

donc  $ABCD$  a tous ses côtés égaux. De plus, on voit avec l'équerre, que ses quatre angles sont droits, c'est donc un carré.

De même, on mesure et on trouve :

$$A'B' = B'C' = C'D' = D'A' = 2,8$$

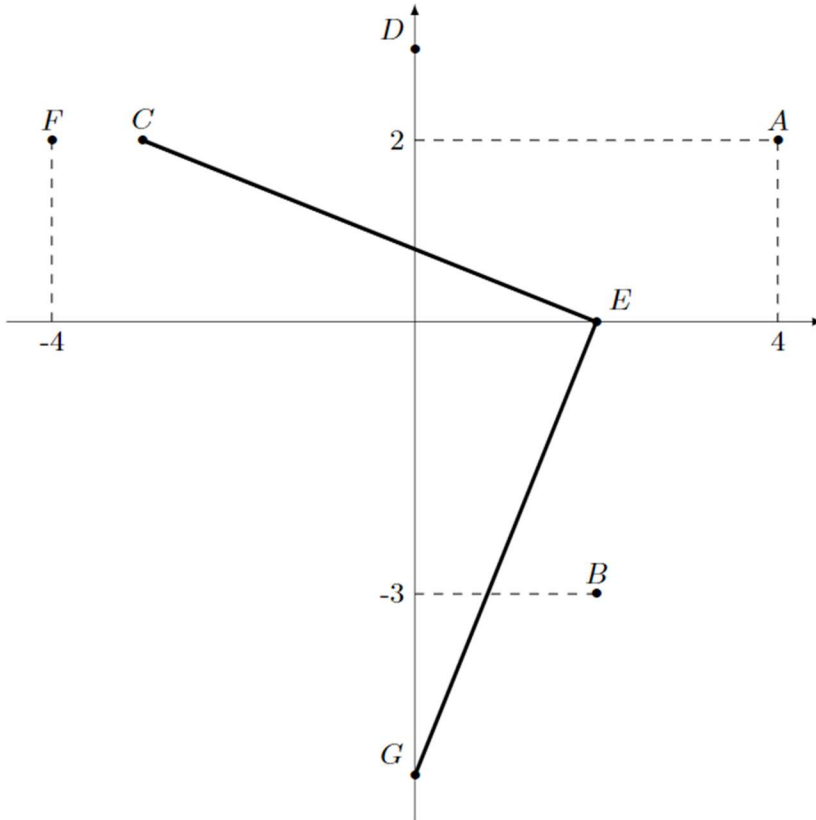
donc  $A'B'C'D'$  a tous ses côtés égaux. De plus, ses quatre angles sont droits, c'est donc un carré.



Ex. 2, p. 100. On mesure et on trouve :

$$EC = EG = 5,4$$

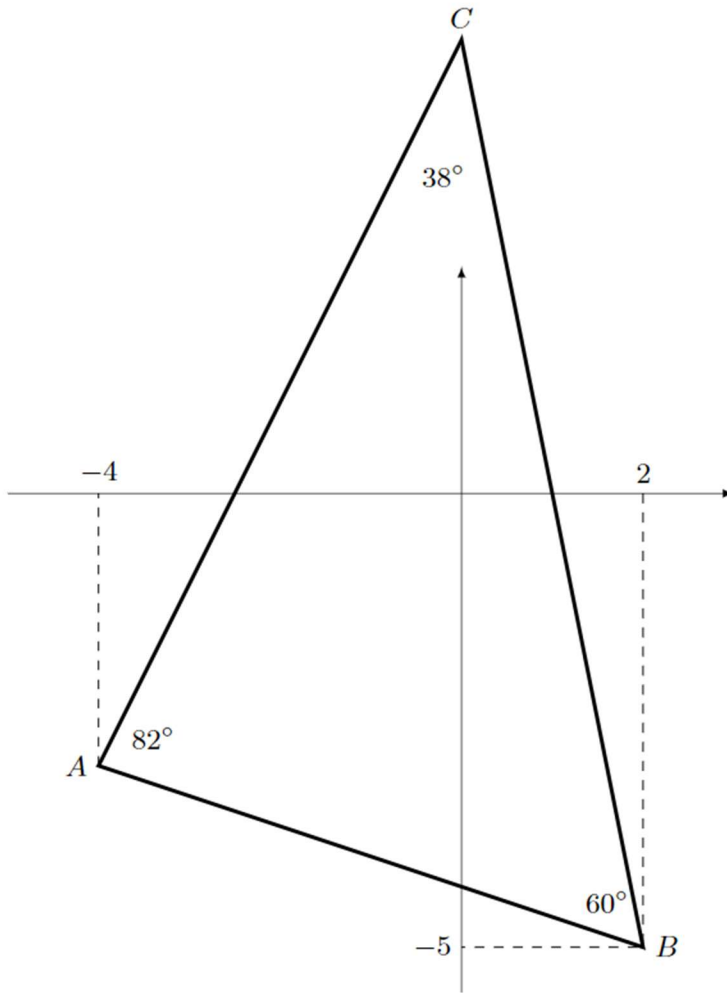
De plus, on constate avec l'équerre, que l'angle  $\widehat{CEG}$  est droit. Donc le triangle  $ECG$  est rectangle et isocèle en  $E$ .



Ex. 3, p. 100.

sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$x$	-3	-1	2	3	4	3	2	2	0	-2
$y$	1	2	1	2	1	0	0	-2	-1	-2

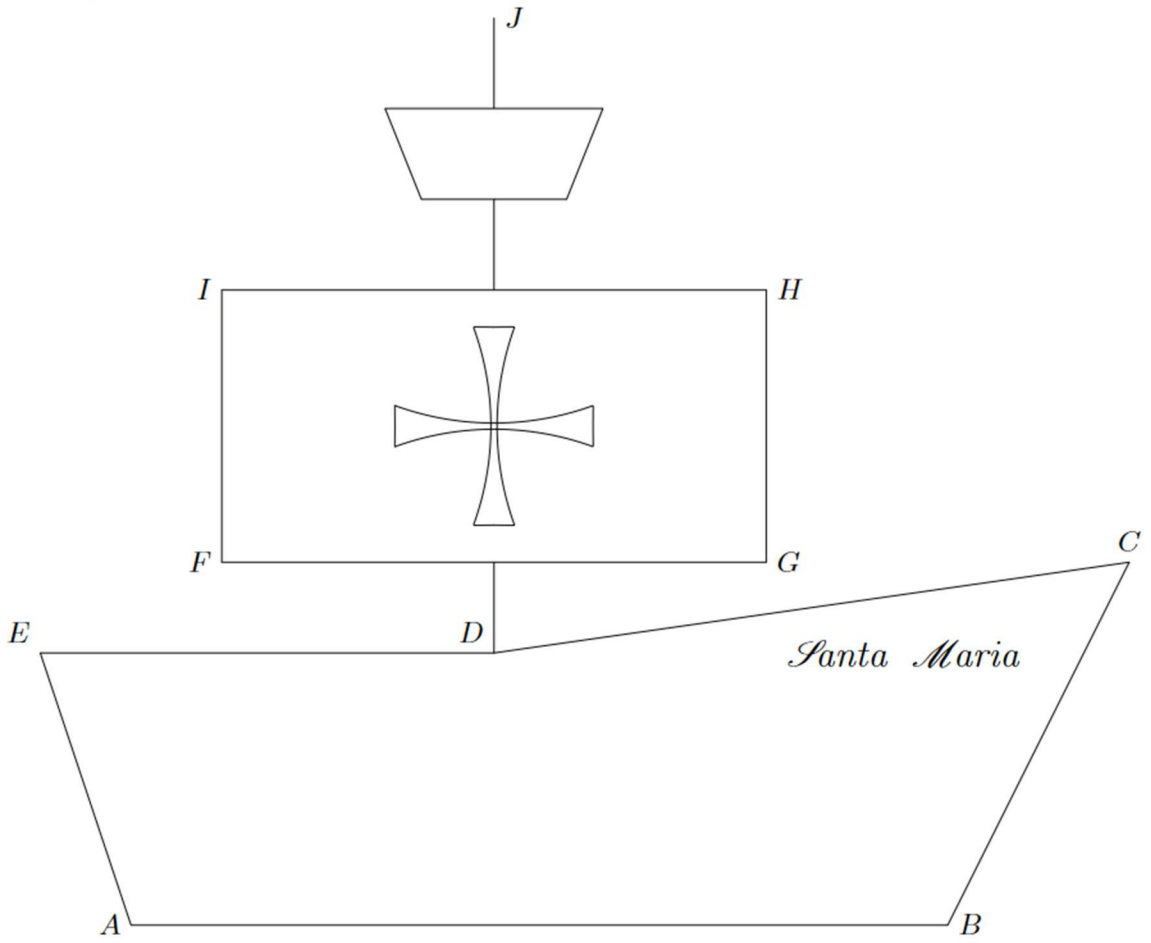
Ex. 4, p. 100.



On mesure au rapporteur, et on trouve les angles indiqués sur la figure. On a bien :

$$82 + 60 + 38 = 180$$

Ex. 5, p. 101.



# Chapitre 4

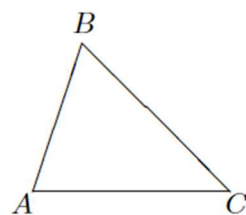
## Géométrie plane

### 1 Addition des distances et des angles

On sait que la ligne droite est le plus court chemin entre deux points. On en déduit la propriété suivante :

**Proposition 1.** (inégalité triangulaire) *Pour tout triangle ABC on a :*

$$AC < AB + BC$$



**Proposition 2.** (addition des distances) *Si  $B \in [AC]$  on a :*

$$AC = AB + BC$$



#### Questions (correction p. 128)

Tracer un segment  $[AC]$  horizontal de longueur 10 cm. Placer le point  $B$  tel que  $B \in [AC]$  et  $AB = 7,5$  cm. On note  $BC = x$ .

1/ Montrer qu'on a :

$$7,5 + x = 10$$

2/ Résoudre l'équation précédente.

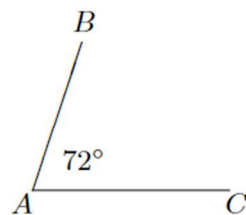
3/ Vérifier la valeur trouvée de  $x$  en mesurant  $BC$  sur la figure.

Au Cours moyen, on a vu qu'un angle est l'écart qui existe entre deux segments de même origine (voir § 2, p. 34).

Ainsi l'angle désigné par :

$$\widehat{BAC} \quad \text{ou} \quad \widehat{CAB}$$

est l'écart qui existe entre les segments  $[AB]$  et  $[AC]$ . Sur la figure ci-contre, cet angle mesure  $72^\circ$  :



L'angle  $\widehat{BAC}$  a pour **sommet**  $A$  et pour **côtés** les segments  $[AB]$  et  $[AC]$ .

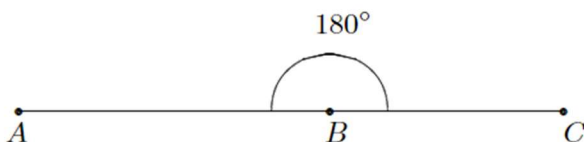
L'énoncé suivant est souvent utilisé pour démontrer que des points sont alignés :

**Proposition 3.** Soient  $A, B, C$  des points deux à deux distincts. On a :

$$\widehat{ABC} = 180^\circ \Rightarrow B \in [AC]$$

Le symbole  $\boxed{\Rightarrow}$  se lit “**implique**” et signifie “**alors**”.

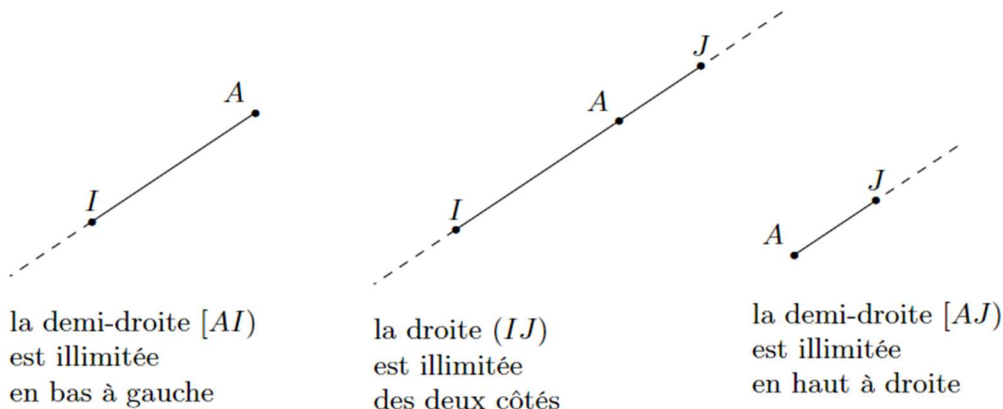
La prop. 3 signifie donc que si l'angle  $\widehat{ABC}$  est **plat** alors le point  $B$  appartient au segment  $[AC]$ . En particulier, les points  $A, B, C$  sont **alignés** :



Soient  $A, I, J$  trois points alignés distincts, tels que  $A \in [IJ]$ . La droite  $(IJ)$  définit deux **demi-droites** d'origine  $A$ .

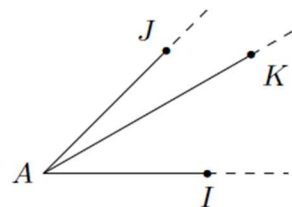
- L'une contient le point  $I$ . On la note  $[AI]$
- L'autre contient le point  $J$ . On la note  $[AJ]$

Ces deux demi-droites sont illimitées d'un côté, et limitées de l'autre.



**Proposition 4.** (addition des angles) Soient  $[AI), [AJ), [AK)$  trois demi-droites. Si  $K$  est **intérieure** à l'angle  $\widehat{IAJ}$  alors

$$\widehat{IAK} + \widehat{KAJ} = \widehat{IAJ}$$



#### Questions (correction p. 128)

Tracer un segment  $[AC]$  horizontal. **Au-dessus** de la droite  $(AC)$ , placer un point  $B$  tel que :

$$\widehat{CAB} = 40^\circ$$

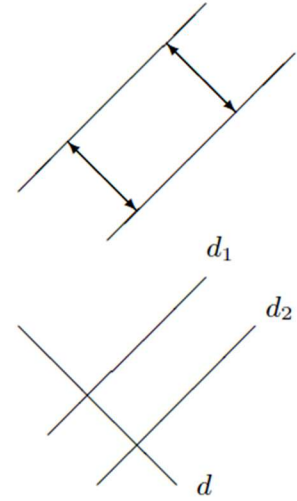
**Au-dessous** de la droite  $(AC)$ , placer un point  $D$  tel que :

$$\widehat{CAD} = 140^\circ$$

Montrer que les points  $B, A, D$  sont alignés.

## 2 Les cinq théorèmes principaux

Le parallélisme de deux droites a été défini au cours moyen (voir déf. 1, p. 38). Deux droites sont parallèles si l'écart entre elles est partout le même. Ce que l'on peut vérifier en plaçant un rectangle entre les droites.



Pour illustrer les th. 1 et 2, on considère la figure ci-contre :

• Supposons d'abord que les droites  $d_1$  et  $d_2$  soient toutes deux perpendiculaires à  $d$ . Alors elles sont parallèles. Ceci se symbolise ainsi :

$$(d_1 \perp d \text{ et } d_2 \perp d) \Rightarrow d_1 \parallel d_2$$

et peut s'énoncer ainsi :

**Théorème 1.** (théorème des perpendiculaires) *Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles.*

• Supposons maintenant que les droites  $d_1$  et  $d_2$  soient parallèles, et que la droite  $d$  soit perpendiculaire à  $d_1$ . Alors elle est aussi perpendiculaire à  $d_2$ . Ceci se symbolise ainsi :

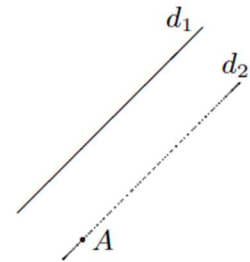
$$(d_1 \parallel d_2 \text{ et } d \perp d_1) \Rightarrow d \perp d_2$$

et peut s'énoncer ainsi :

**Théorème 2.** (théorème des parallèles) *Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

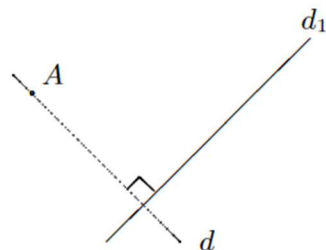
Passons maintenant aux th. 3 et 4 :

**Théorème 3.** (postulat des parallèles d'Euclide) *Par un point, il passe une droite unique, parallèle à une droite donnée.*



Pour illustrer ce théorème, on a tracé une droite  $d_1$  oblique, et on a marqué un point  $A$ . La droite  $d_2$  parallèle à  $d_1$  et issue de  $A$  est tracée en pointillés.

**Théorème 4.** (un axiome d'Euclide) *Par un point, il passe une droite unique, perpendiculaire à une droite donnée.*



Pour illustrer ce théorème, on a tracé une droite  $d_1$  oblique, et on a marqué un point  $A$ . La droite  $d$  perpendiculaire à  $d_1$  et issue de  $A$  est tracée en pointillés.

Le théorème des perpendiculaires permet de tracer facilement avec une **équerre** la droite  $d_2$  du postulat des parallèles. On procède ainsi (il est conseillé de dessiner la figure au fur et à mesure) :

- La droite  $d_1$  et le point  $A$  sont donnés.
- On trace la droite  $d$ , issue de  $A$  et perpendiculaire à  $d_1$ .
- On trace la droite  $d_2$  issue de  $A$  et perpendiculaire à  $d$ .
- On conclut que :  $d_1 \parallel d_2$ .

**Théorème 5.** (parallélisme de trois droites) *Si deux droites sont parallèles à une même droite, elles sont parallèles entre elles.*

#### Questions (correction p. 129)

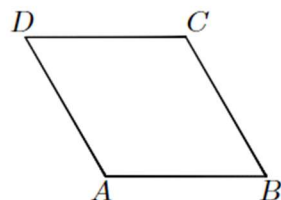
- On sait qu'un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.
  - 1/ Tracer un segment  $[AB]$  oblique. Placer des points  $D$  et  $C$ , tels que  $ABCD$  soit un rectangle de diagonale  $(AC)$ .
  - 2/ Montrer que les droites  $(AB)$  et  $(DC)$  sont parallèles.
- 1/ Tracer un segment  $[IJ]$  oblique. Placer un point  $K$ , tel que le triangle  $IJK$  soit rectangle en  $J$ .
  - 2/ Tracer la droite  $d$  issue du point  $K$  et parallèle à  $(IJ)$ .
  - 3/ Montrer que  $(JK)$  est perpendiculaire à  $d$ .

En utilisant les th. 1 et 2, on peut montrer :

**Corollaire 6.** *Si un quadrilatère du plan a trois angles droits, c'est un rectangle, et son quatrième angle est droit aussi.*

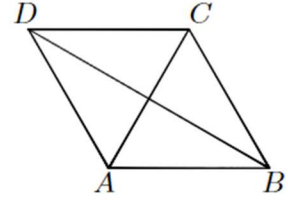
### 3 Losange

**Définition 1.** *Un losange est un quadrilatère dont les quatre côtés ont même longueur.*



**Proposition 2.** *Dans un losange, les côtés opposés sont parallèles.*

**Proposition 3.** *Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires et ont le même milieu.*



- La **réciproque** de la prop. 3 est vraie aussi. Elle s'obtient en inversant l'hypothèse :
- le quadrilatère est un losange  
et la conclusion :
  - ses diagonales sont perpendiculaires et ont le même milieu.

Cette réciproque s'énonce donc ainsi :

**Proposition 4.** *Si les diagonales d'un quadrilatère ont même milieu et sont perpendiculaires, alors ce quadrilatère est un losange.*

#### Questions (correction p. 129)

Tracer un segment  $[AC]$  horizontal. Placer le point  $I$  milieu de  $[AC]$ . Tracer un segment  $[BD]$  vertical, et dont le milieu soit encore le point  $I$ .  
Montrer que le quadrilatère  $ABCD$  est un losange.

**Définition 5.** *Un trapèze est un quadrilatère non croisé qui a deux côtés parallèles.*

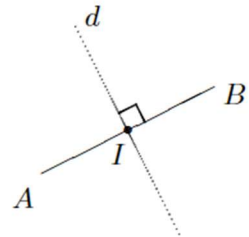
## 4 Médiatrice d'un segment

**Définition 1.** *La médiatrice d'un segment est la droite qui est issue du milieu de ce segment et qui lui est perpendiculaire.*

La médiatrice  $d$  d'un segment  $[AB]$  peut se tracer avec une règle graduée et une équerre. On place d'abord le milieu  $I$  de  $[AB]$  après avoir calculé :

$$AI = \frac{AB}{2}$$

On trace ensuite, avec l'équerre, la droite  $d$ , issue de  $I$ , et perpendiculaire à  $(AB)$ .



#### Questions (correction p. 130)

- 1/ Tracer un segment  $[AB]$  et sa médiatrice  $d$ .
- 2/ Sur la droite  $d$ , marquer deux points, qu'on notera  $M, N$ .
- 3/ Mesurer  $MA$  et  $MB$ . Vérifier qu'on trouve le même nombre.
- 4/ Faire de même avec  $N$ .

On montre que si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est **équidistant** (c'est-à-dire à égale distance) des extrémités de ce segment. C'est le premier théorème de la médiatrice :

**Théorème 1.** Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan, distincts, et soit  $d$  la médiatrice de  $[AB]$ . Pour tout point  $M$  du plan on a :

$$(M \in d \Rightarrow MA = MB)$$

Dans cet énoncé, on a utilisé de nouveau le symbole logique  $\boxed{\Rightarrow}$ . On sait que ce symbole se lit “**implique**”, qu’il signifie “**alors**”, et qu’il indique une **conséquence**.

La **réci-proque** du théorème 1 est vraie : si un point est **équidistant** de deux points, alors il est sur la **médiatrice** du segment reliant ces deux points. C’est le second théorème de la médiatrice :

**Théorème 2.** Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan, distincts, et soit  $d$  la médiatrice de  $[AB]$ . Pour tout point  $M$  du plan on a :

$$(MA = MB \Rightarrow M \in d)$$

Ce théorème 2 permet de tracer la médiatrice d’un segment **sans équerre** et **sans mesure de longueur**, uniquement à la règle et au compas :

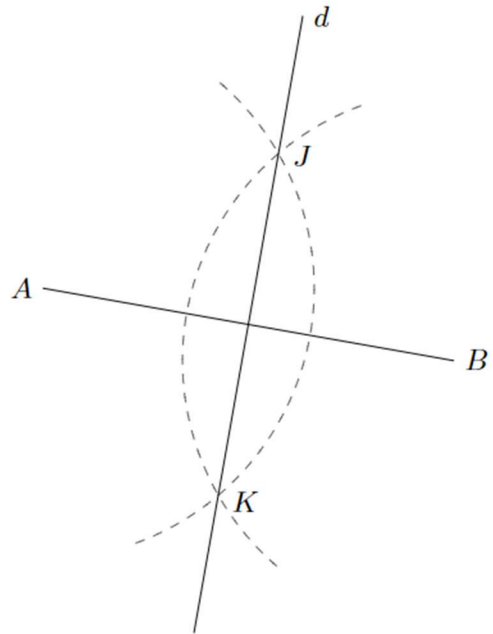
On trace deux arcs de cercle de **même rayon**, l’un centré en  $A$ , l’autre en  $B$ . Ces deux arcs se coupent en deux points. Notons-les  $J$  et  $K$ . Notons aussi  $d$  la médiatrice de  $[AB]$ .

Puisque  $J$  appartient à deux arcs de cercle de **même rayon**, centrés en  $A$  et  $B$ , on a :

$$JA = JB$$

Donc  $J \in d$ , d’après le théorème. De façon analogue, on montre que  $K \in d$ . La droite  $(JK)$  et la droite  $d$  ont donc deux points en commun. On en déduit que ce sont les mêmes droites :

$$(JK) = d$$



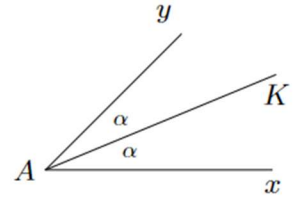
#### Entraînement (correction p. 130)

- 1/ Au milieu de la page de votre cahier, tracer un segment  $[AB]$  oblique, de longueur 5 cm.
- 2/ Tracer le cercle de centre  $A$ , et de rayon 3 cm. Tracer le cercle de centre  $B$ , et de rayon 3 cm.
- 3/ Ces deux cercles se coupent en deux points, qu’on note  $J$  et  $K$ . Marquer ces deux points sur la figure.
- 4/ Tracer la droite  $(JK)$ . Vérifier sur la figure, que la droite  $(JK)$  est bien la médiatrice de  $[AB]$ .

## 5 Bissectrice d'un angle

**Proposition 1.** Soit  $\widehat{xAy}$  un angle. Il existe une demi-droite  $[AK)$  telle qu'on ait  $K \in \widehat{xAy}$  et de plus :

$$\widehat{KAx} = \widehat{KAy}$$



**Définition 2.** La demi-droite  $[AK)$  est appelée **bissectrice** de l'angle  $\widehat{xAy}$ . La bissectrice d'un angle est donc la demi-droite issue du sommet de cet angle, et qui partage l'angle en **deux angles égaux**.

Pour construire la bissectrice  $[AK)$  d'un angle  $\widehat{xAy}$ , on peut mesurer l'angle au rapporteur, puis diviser par deux sa mesure. On obtient une mesure d'angle qui permet de construire  $[AK)$ . Voici un exemple :

### Entraînement (correction p. 131)

- 1/ Construire un angle  $\widehat{xAy}$  de mesure  $82^\circ$
- 2/ Montrer que si  $[AK)$  est la bissectrice de cet angle on a :

$$\widehat{KAx} = 41^\circ$$

- 3/ Construire  $[AK)$ .
- 4/ Mesurer l'angle  $\widehat{KAy}$  sur la figure. Vérifier qu'on a :

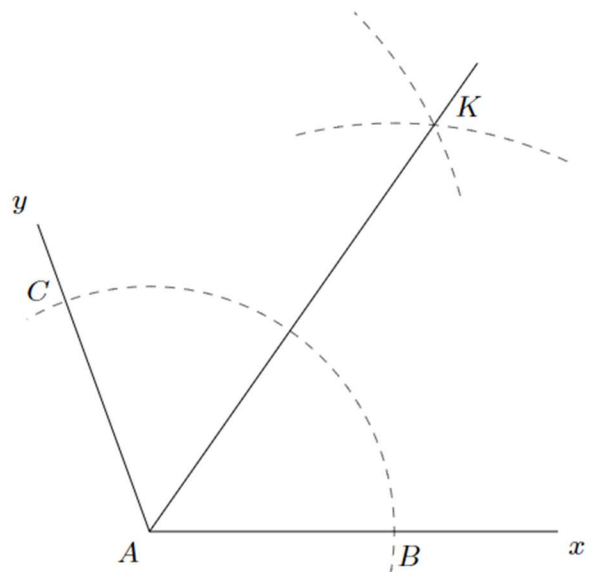
$$\widehat{KAy} = \widehat{KAx}$$

La construction classique de la bissectrice se fait à **la règle et au compas**, sans mesurer les angles :

On pointe en  $A$ , et on trace un arc de cercle. Cet arc coupe  $[Ax)$  en  $B$ , et  $[Ay)$  en  $C$ .

Le triangle  $ABC$  est donc isocèle en  $A$ . On verra qu'alors (prop. 2, p. 113), la **médiatrice** de  $[BC]$  est aussi **bissectrice** de notre angle  $\widehat{xAy}$ .

Comme  $A$  est un point de cette médiatrice, il suffit d'en trouver un autre pour pouvoir la tracer. Cet autre point, noté  $K$  sur la figure, s'obtient en intersectant deux arcs de cercles de **même rayon**, l'un centré en  $B$ , l'autre en  $C$ .



## 6 Droites remarquables d'un triangle

**Définition 1.** Les *bissectrices* d'un triangle sont les bissectrices de ses trois angles.

**Définition 2.** Les *médiatrices* d'un triangle sont les médiatrices de ses trois côtés.

On rappelle la définition suivante (voir déf. 4, p. 38) :

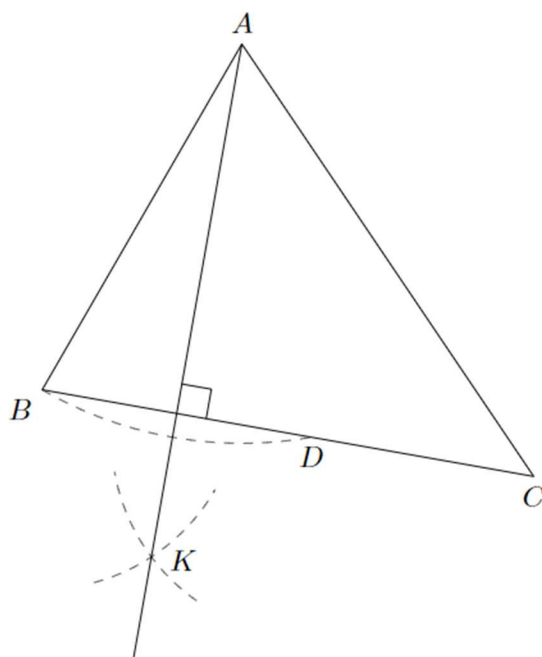
**Définition 3.** On appelle *hauteur* d'un triangle relative à l'un de ses sommets la droite issue de ce sommet et perpendiculaire au côté opposé.

On sait construire une hauteur avec une équerre. On peut aussi la construire à la règle et au compas :

pour construire la hauteur relative à  $A$  dans le triangle  $ABC$ , on pointe en  $A$ , on trace un arc de cercle qui passe par  $B$ , par exemple. Cet arc recoupe la droite  $(BC)$  en un point qu'on note  $D$ . Le triangle  $ABD$  est donc isocèle en  $A$ .

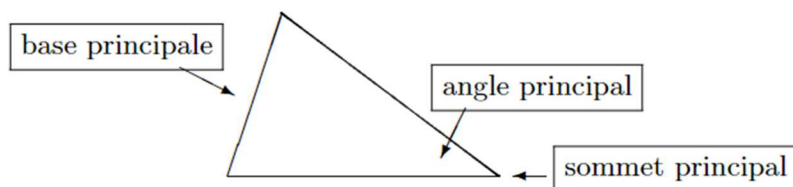
La médiatrice de  $[BD]$  passe donc par  $A$ , et comme elle est perpendiculaire à  $(BD)$ , elle est hauteur de  $ABC$ .

On construit la médiatrice de  $[BD]$  par la méthode usuelle : c'est la droite  $(AK)$ , où  $K$  s'obtient en intersectant deux arcs de cercles de même rayon, l'un centré en  $B$ , l'autre en  $D$ .

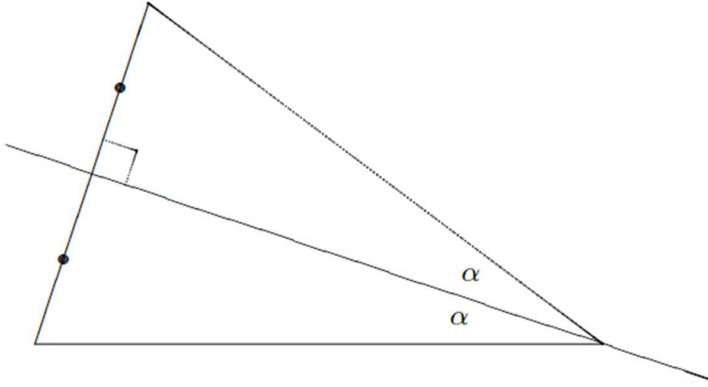


## 7 Triangle isocèle

**Définition 1.** Si un triangle est isocèle, le sommet d'où partent les deux côtés égaux est le *sommet principal*. L'angle formé par ces deux côtés est l'*angle principal*, le côté opposé au sommet principal est la *base principale*.



**Proposition 2.** Dans un triangle isocèle la médiatrice de la base principale est aussi bissectrice de l'angle principal et hauteur relative au sommet principal.



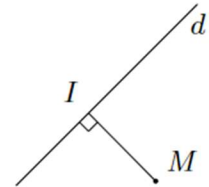
**Définition 3.** Dans un triangle isocèle la médiatrice de la base principale est appelée **médiatrice principale** du triangle. Elle est dite aussi **bissectrice principale** et **hauteur principale** du triangle.

**Proposition 4.** Si dans un triangle, une hauteur est aussi bissectrice, alors le triangle est isocèle.

## 8 Symétrie axiale

**Définition 1.** La **projection orthogonale** d'un point  $M$  sur une droite  $d$  est le point  $I \in d$  tel que :

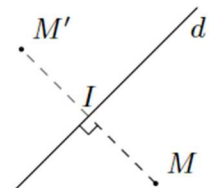
$$(IM) \perp d$$



Le mot "orthogonal" est constitué de deux mots grecs : **orthos** signifie "droit" et **gônia** signifie "angle". Une projection **orthogonale** sur une droite est donc une projection à angle droit sur cette droite.

**Définition 2.** Soit  $d$  une droite. Pour tout point  $M$  du plan, si  $M \notin d$ , on appelle **symétrique** de  $M$  par rapport à  $d$  le point  $M'$  tel que  $d$  soit la médiatrice de  $[MM']$ . Si  $M \in d$  son symétrique est le point  $M$  lui-même.

Pour tracer le symétrique  $M'$  de  $M$  par rapport à  $d$ , on trace d'abord (avec une équerre) la perpendiculaire à  $d$  issue de  $M$ . On obtient ainsi le point  $I$ , projection de  $M$  sur  $d$ , et on reporte (au compas ou à la règle graduée) la distance  $IM$  de l'autre côté de  $M$ . Ceci donne  $M'$ .

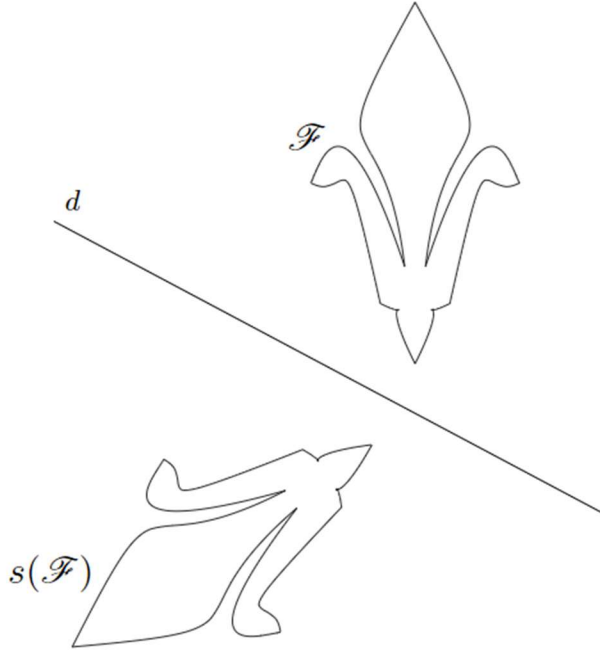


**Définition 3.** Soit  $d$  une droite. La **symétrie axiale** d'axe  $d$  est l'opération qui associe, à tout point  $M$  du plan, son symétrique  $M'$  par rapport à  $d$ .

Il est commode de donner un nom à une symétrie axiale. Si on note  $s$  la symétrie d'axe  $d$ , et si  $M'$  est le symétrique de  $M$  par rapport à  $d$ , on écrit :

$$M' = s(M)$$

**Définition 4.** Soient  $d$  une droite, et  $s$  la symétrie d'axe  $d$ . Soit  $\mathcal{F}$  une figure. La **figure symétrique** de  $\mathcal{F}$  par rapport à  $d$  est notée  $s(\mathcal{F})$ . C'est l'ensemble de tous les symétriques des points de  $\mathcal{F}$  par rapport à  $d$ .

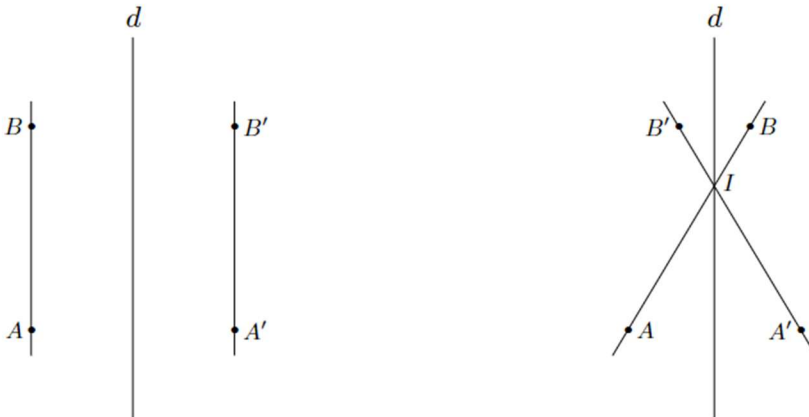


**Proposition 5.** La figure symétrique d'une droite est une droite. Plus précisément, si  $s$  est une symétrie axiale, et si  $A$  et  $B$  sont deux points distincts, alors  $s(AB)$  est la droite  $(A'B')$  où  $A' = s(A)$  et  $B' = s(B)$ .

On a dessiné ci-dessous deux exemples d'une droite  $AB$  et de sa symétrique  $A'B'$  par rapport à l'axe  $d$  de  $s$ .

- Dans le premier exemple, on a choisi de prendre  $(AB) \parallel d$ . On a alors  $(A'B') \parallel d$  et donc  $(AB) \parallel (A'B')$

- Dans le second exemple, la droite  $(AB)$  est sécante avec  $d$  en un point  $I$ . Alors  $(A'B')$  passe aussi par  $I$ .



**Proposition 6.** La figure symétrique d'un cercle est un cercle. Plus précisément, si  $s$  est une symétrie axiale, et si  $\mathcal{C}$  est le cercle de centre  $I$  et de rayon  $r$ , alors  $s(\mathcal{C})$  est le cercle de centre  $I' = s(I)$  et de **même rayon**  $r$ .

Soit  $d$  l'axe de la symétrie. On a dessiné ci-dessous trois exemples d'un cercle  $\mathcal{C}$  et de son symétrique  $s(\mathcal{C})$ .

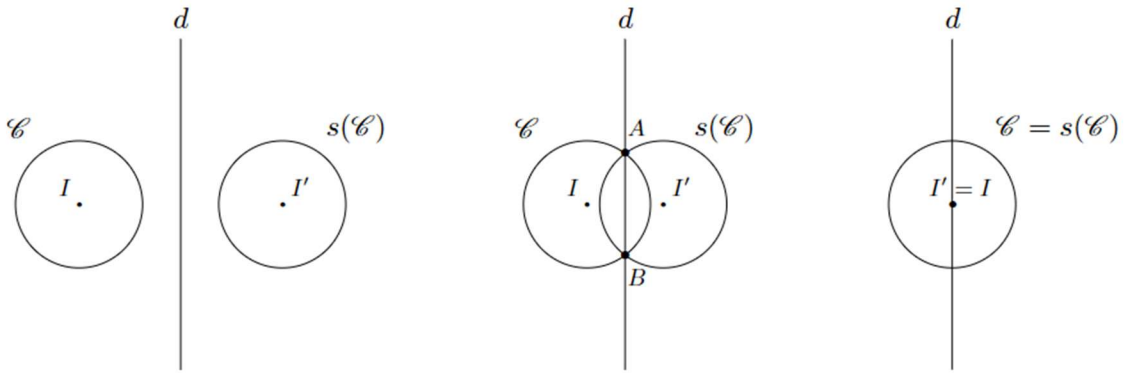
- Dans le premier exemple,  $\mathcal{C}$  et  $s(\mathcal{C})$  n'ont pas de points communs. On dit qu'ils sont **disjoints**.

- Dans le deuxième exemple, il y a deux points  $A, B \in \mathcal{C}$  qui sont aussi sur  $d$ . Ils sont donc fixes par  $s$ , ce qui signifie :

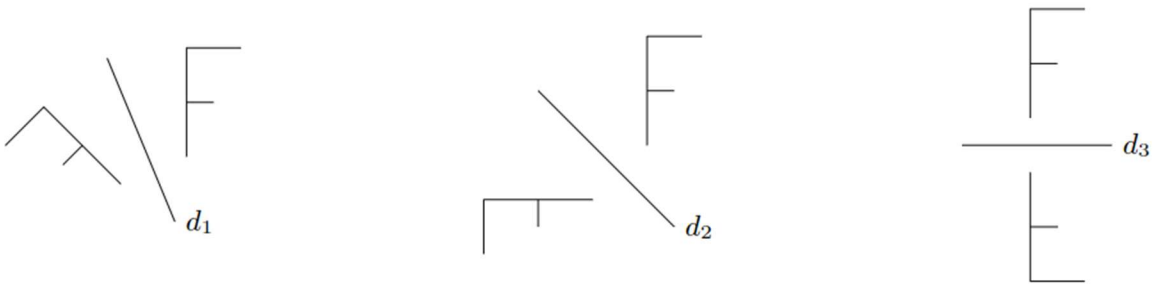
$$s(A) = A \quad \text{et} \quad s(B) = B$$

Les points  $A$  et  $B$  sont donc à la fois sur  $\mathcal{C}$  et sur  $s(\mathcal{C})$ . On dit que  $\mathcal{C}$  et  $s(\mathcal{C})$  sont **sécants** en  $A$  et  $B$ .

- Dans le troisième exemple, on a choisit  $I \in d$ . Le point  $I$  est donc fixe par  $s$ , et les cercles  $\mathcal{C}$  et  $s(\mathcal{C})$  sont les mêmes. On dit qu'ils sont **confondus**.



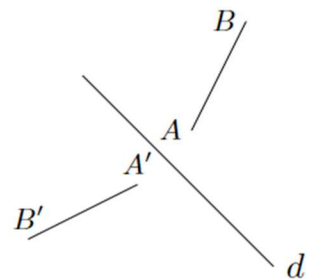
Voici les figures symétriques de la lettre **F** par rapport à trois droites différentes :



On voit qu'une symétrie axiale est un **retournement** autour d'une droite, comme dans un **miroir**. Ceci justifie les propositions que l'on va étudier maintenant :

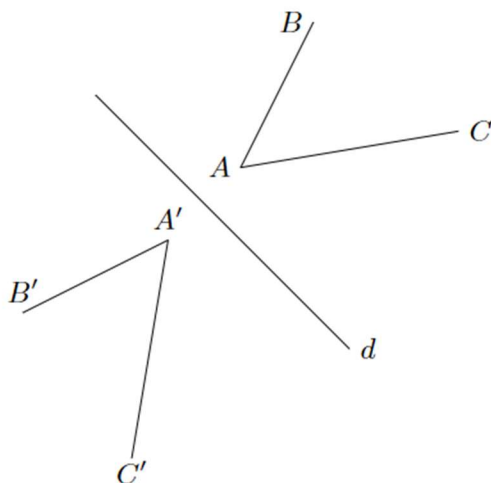
**Proposition 7.** Une symétrie axiale **conserve les distances**, ce qui signifie que si deux points  $A$  et  $B$  ont pour symétriques  $A'$  et  $B'$ , alors  $AB = A'B'$ .

On symétrise le segment  $[AB]$ , et on obtient  $[A'B']$ . Les deux segments ont la **même longueur**.



**Proposition 8.** Une symétrie axiale **conserve les angles**, ce qui signifie que si trois points quelconques non alignés  $A$ ,  $B$  et  $C$  ont pour symétriques  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ , alors  $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ .

On symétrise l'angle  $\widehat{BAC}$ , et on obtient  $\widehat{B'A'C'}$ . Les deux angles ont la même mesure.

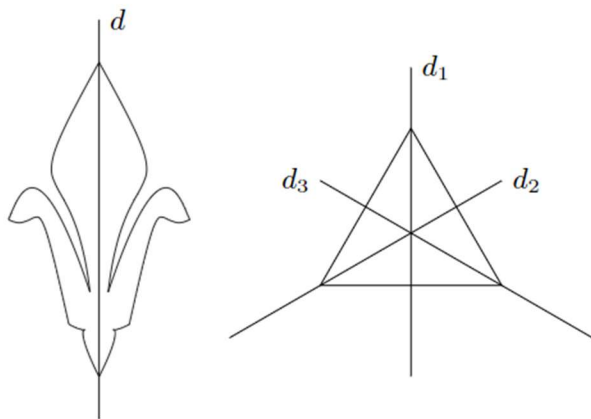


**Proposition 9.** Une symétrie axiale **conserve les aires**, ce qui signifie qu'une figure quelconque et sa figure symétrique ont la même aire. Une symétrie axiale **conserve les périmètres**.

**Définition 10.** On dit qu'une figure  $\mathcal{F}$  admet un **axe de symétrie**  $d$  si la figure symétrique de  $\mathcal{F}$  par rapport à  $d$  est  $\mathcal{F}$  elle-même.

Le fleur admet **un** axe de symétrie.

Le triangle équilatéral admet **trois** axes de symétrie.



- Les diagonales d'un losange sont axes de symétrie de ce losange.
- La médiatrice principale d'un triangle isocèle est axe de symétrie de ce triangle.
- Un triangle équilatéral admet trois axes de symétrie.
- Tous les diamètres d'un cercle sont axes de symétrie de ce cercle.

**ATTENTION !** Si un triangle n'est pas isocèle, il n'a pas d'axe de symétrie.

## 9 Exercices

Les deux premiers exercices ci-dessous ont un énoncé très simple mais leur résolution est assez subtile. Il vaut mieux les **éviter** en première lecture.

### Exercice 1.

Démontrez que si un quadrilatère du plan a trois angles droits, alors son quatrième angle est droit aussi.

### Exercice 2.

Démontrez que dans un rectangle, la médiatrice d'un côté est aussi médiatrice du côté opposé.

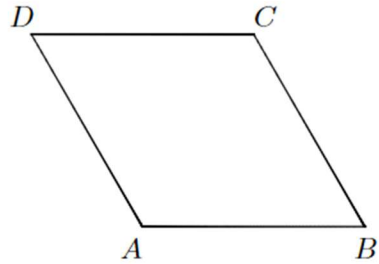
### Exercice 3.

On se propose de tracer un losange  $ABCD$  comme celui de la figure ci-dessous.

1. Tracez un segment  $[AB]$  horizontal et de longueur arbitraire.
2. Utilisez le compas et le rapporteur pour tracer le point  $D$  comme sur la figure, tel qu'on ait :

$$AD = AB \quad \text{et} \quad \widehat{BAD} = 120^\circ$$

3. Construisez le point  $C$ . Complétez le tracer du losange.



### Exercice 4.

1. Tracez un losange  $ABCD$ .
2. Démontrez que le point  $A$  appartient à la médiatrice de  $[BD]$ .
3. Démontrez de même que le point  $C$  appartient à la médiatrice de  $[BD]$ .
4. Déduisez-en que la droite  $(AC)$  est la médiatrice de  $[BD]$ .
5. Déduisez-en que  $(AC) \perp (BD)$  et que  $(AC)$  passe par le milieu de  $[BD]$ .

On démontrerait de même que  $(BD)$  passe par le milieu de  $[AC]$ , si bien qu'on a démontré la prop. 3, p. 109 :

Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires et ont le même milieu.

### Exercice 5.

1. Utilisez la prop. 4, p. 109, pour tracer un losange  $ABCD$  dont les diagonales vérifient :

$$BD = 8 \text{ cm} \qquad AC = 6 \text{ cm}$$

2. Calculez l'aire de ce losange.
3. Dans le cas général, montrez que l'aire  $S$  d'un losange dont les diagonales ont pour longueur  $a$  et  $b$  vaut :

$$S = \frac{1}{2}ab$$

**Exercice 6.**

- Tracez un segment  $[AB]$  de longueur 7 cm.
- Tracez un segment  $[AD]$  perpendiculaire à  $[AB]$  et tel que  $AD = 5$  cm.
- Placez le point  $C$  tel que  $ABCD$  soit un rectangle. Tracer les côtés  $[CB]$  et  $[CD]$ .
- Extérieurement** à ce rectangle, construire, avec le compas, le point  $E$  tel que  $AE = 4$  cm et  $DE = 3$  cm.
- Tracez les segments  $[AE]$  et  $[DE]$ . Vérifier que l'angle  $\widehat{AED}$  est droit.
- Tracez le demi-cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[AE]$ , situé à l'**extérieur** du triangle  $AED$ .
- On note  $\mathcal{L}$  la ligne fermée constituée de  $[BA]$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $[ED]$ ,  $[DC]$  et  $[CB]$ . Repassez  $\mathcal{L}$  en rouge.
- Calculez le périmètre  $p$  de  $\mathcal{L}$ . Vérifier qu'on trouve :

$$p = 22 + 2\pi$$

- Calculez l'aire  $S$  de la partie du plan entourée par  $\mathcal{L}$ . Vérifier qu'on trouve :

$$S = 41 + 2\pi$$

**Exercice 7.**

(unité le cm) On repère les points par abscisse et ordonnée.

- Placez les points suivants :

$$A(2; 3) \quad B(4; -1) \quad C(1; 0)$$

- Tracez le segment  $[AB]$ .
- Vérifiez qu'on a :

$$CA = CB \approx 3,2$$

- Avec le compas et la règle, construisez la médiatrice de  $[AB]$ . Vérifiez qu'elle passe par  $C$ .

**Exercice 8.**

(unité le cm) On repère les points par abscisse et ordonnée.

- Placez les points suivants :

$$A(1; 0) \quad B(5; 0) \quad C(2; 4)$$

- Tracez le triangle  $ABC$ .
- Tracez la médiatrice de  $[AB]$ .
- Tracez la médiatrice de  $[AC]$ .
- Ces deux médiatrices se coupent en un point qu'on note  $I$ . Marquez ce point et vérifiez qu'on a :

$$IA = IB = IC \approx 2,6$$

- Tracez le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $I$ , et qui passe par  $A$ .
- Vérifiez que  $\mathcal{C}$  passe aussi par  $B$  et  $C$ .

**Exercice 9.**

(unité de longueur arbitraire) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Tracez comme d'habitude les deux axes de coordonnées.
2. Placez les points suivants :

$$A(-4; 1) \quad B(0; 3) \quad C(2; 3)$$

3. Tracez le triangle  $ABC$ .
4. Tracez la médiatrice de  $[BC]$ . Tracez la médiatrice de  $[BA]$ .
5. Ces deux médiatrices se coupent en un point qu'on note  $I$ . Marquez ce point sur la figure.
6. Tracez le **cercle**  $\mathcal{C}$  de centre  $I$  et qui passe par  $C$ .
7. Vérifiez que  $\mathcal{C}$  passe aussi par  $A$  et  $B$ .

**Exercice 10.**

(unité le cm) Soit  $ABC$  un triangle tel que :

$$AB = 7 \quad BC = 3 \quad AC = 5$$

1. Tracer le segment  $[AB]$  horizontal. Utiliser le compas pour construire le point  $C$ .
2. Tracer  $[CA]$  et  $[CB]$ .
3. Construisez la médiatrice de  $[BC]$ .
4. Construisez la médiatrice de  $[BA]$ .
5. Ces deux médiatrices se coupent en un point qu'on note  $I$ . Marquez ce point sur la figure.
6. Tracez le **cercle**  $\mathcal{C}$  de centre  $I$  et qui passe par  $C$ .
7. Vérifiez que  $\mathcal{C}$  passe aussi par  $A$  et  $B$ .

**Exercice 11.**

(unité le cm) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placez les points suivants :

$$A(-4; 1) \quad B(0; 3) \quad C(3; 0)$$

2. Tracez le triangle  $ABC$ .
3. Tracez la bissectrice de l'angle  $\widehat{CAB}$ .
4. Tracez la bissectrice de l'angle  $\widehat{CBA}$ .
5. Ces deux bissectrices se coupent en un point qu'on note  $\boxed{\omega}$  lettre grecque que l'on prononce "petit oméga". Marquez ce point.
6. Tracez la droite  $(C\omega)$ .
7. Mesurez l'angle  $\widehat{AC\omega}$ . Mesurez l'angle  $\widehat{BC\omega}$ .
8. Vérifiez que ces deux angles sont égaux. Que peut-on conclure ?

**Exercice 12.**

(unité le cm) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placez les points suivants :

$$A(-3; -2) \qquad B(5; -2) \qquad C(2; 3)$$

2. Tracez le triangle  $ABC$ .
3. Tracez la bissectrice de l'angle  $\widehat{CAB}$ .
4. Tracez la bissectrice de l'angle  $\widehat{CBA}$ .
5. Ces deux bissectrices se coupent en un point qu'on note  $\omega$ . Marquez ce point.
6. Tracez la droite  $(C\omega)$ .
7. Mesurez l'angle  $\widehat{AC\omega}$ . Mesurez l'angle  $\widehat{BC\omega}$ .
8. Vérifiez que ces deux angles sont égaux. Que peut-on conclure ?

**Exercice 13.**

(unité le cm) Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$  tel que :

$$AB = 7 \qquad BC = 3$$

1. Tracez le segment  $[AB]$  horizontal. Utiliser le compas pour construire le point  $C$ .
2. Tracez  $[CA]$  et  $[CB]$ .
3. Construisez la médiatrice de  $[BC]$ .
4. Vérifiez que cette droite est la bissectrice de l'angle  $\widehat{A}$ .

**Exercice 14.**

(unité le cm) Soit  $ABC$  un triangle tel que :

$$AB = 7 \qquad BC = 3 \qquad AC = 5$$

1. Tracez le segment  $[AB]$  horizontal. Utiliser le compas pour construire le point  $C$ .
2. Tracez  $[CA]$  et  $[CB]$ .
3. Construisez la médiatrice de  $[BC]$ .
4. Vérifiez que cette droite n'est pas la bissectrice de l'angle  $\widehat{A}$ .

**Exercice 15.**

(unité au choix) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placez les points suivants :

$$A(-3; -2) \qquad B(5; -2) \qquad C(2; 3)$$

2. Tracez le triangle  $ABC$ .
3. Tracez la hauteur relative à  $A$ . Tracez la hauteur relative à  $B$ .
4. Ces deux hauteurs se coupent en un point qu'on note  $H$ . Marquez ce point.
5. Tracez la droite  $(CH)$ . Vérifiez que  $(CH) \perp (AB)$ .

**Exercice 16** (*calcul d'une hauteur (i)*).

(unité le cm) Soit  $ABC$  un triangle tel que :

$$BC = 5 \qquad BA = 3 \qquad CA = 4$$

1. Tracez  $[BC]$  horizontal. Placer le point  $A$  en utilisant le compas.
2. Tracez  $[AB]$  et  $[AC]$ .
3. Vérifiez que  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A$ .
4. Tracez la hauteur relative à  $A$ .
5. Cette hauteur coupe le côté  $[BC]$  en  $H$ . Marquez ce point  $H$ .
6. Calculez l'aire  $S$  de  $ABC$  en utilisant les deux côtés de l'angle droit.
7. Recalculez l'aire  $S$  de  $ABC$  en utilisant la hauteur  $AH$ . Vérifiez qu'on trouve :

$$S = \frac{5}{2} \times AH$$

8. Égalez les deux expressions de  $S$  pour calculer  $AH$ . Vérifiez qu'on trouve à la fin :

$$AH = 2,4$$

9. Vérifiez cette valeur en mesurant sur la figure.

**Exercice 17** (*calcul d'une hauteur (ii)*).

(unité le cm) Soit  $ABC$  un triangle tel que :

$$BC = 13 \qquad BA = 5 \qquad CA = 12$$

1. Tracez  $[BC]$  horizontal. Placer le point  $A$  en utilisant le compas.
2. Tracez  $[AB]$  et  $[AC]$ .
3. Vérifiez que  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A$ .
4. Tracez la hauteur relative à  $A$ .
5. Cette hauteur coupe le côté  $[BC]$  en  $H$ . Marquez ce point  $H$ .
6. Calculez l'aire  $S$  de  $ABC$  en utilisant les deux côtés de l'angle droit.
7. Recalculez l'aire  $S$  de  $ABC$  en utilisant la hauteur  $AH$ . Vérifiez qu'on trouve :

$$S = \frac{13}{2} \times AH$$

8. Égalez les deux expressions de  $S$  pour calculer  $AH$ . Vérifiez qu'on trouve à la fin :

$$AH = \frac{60}{13}$$

9. Calculez une valeur approchée de ce quotient. Vérifier la valeur trouvée en mesurant sur la figure.

**Exercice 18.**

(unité au choix) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placez les points suivants :

$$A(-3; 1) \qquad B(4; -3) \qquad C(3; 4)$$

2. Tracez le triangle  $ABC$ .
3. Tracez la hauteur relative à  $A$ . Tracez la hauteur relative à  $B$ .
4. Ces deux hauteurs se coupent en un point qu'on note  $H$ . Marquez ce point.
5. Tracez la droite  $(CH)$ . Vérifiez que  $(CH) \perp (AB)$ .

**Exercice 19.**

(unité de longueur arbitraire) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placez le point  $I(0; 0)$  à peu près au centre de la page.
2. Placez les points suivants :

$$A(-2; 4) \quad B(-2; -4) \quad J(-9; 0)$$

3. Tracez le cercle  $\mathcal{C}_1$  de centre  $I$  et qui passe par  $A$ .
4. Tracez l'arc de cercle  $\mathcal{C}_2$  de centre  $J$ , d'extrémités  $A$  et  $B$ , et qui est situé à l'intérieur de  $\mathcal{C}_1$ .
5. Tracez les points  $A'$ ,  $B'$ ,  $J'$  qui sont les symétriques des points  $A$ ,  $B$ ,  $J$  par rapport à l'axe des ordonnées.
6. Tracez l'arc de cercle  $\mathcal{C}'_2$  qui est le symétrique de  $\mathcal{C}_2$  par rapport à l'axe des ordonnées.
7. Le cercle  $\mathcal{C}_1$  et les arcs  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}'_2$  définissent trois régions du plan. Coloriez ces régions de trois couleurs différentes.

**Exercice 20 (Une fleur).**

(unité de longueur arbitraire) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placez le point  $I(0; 0)$  à peu près au centre de la page.
2. Placez les points suivants :

$$A(3; 3) \qquad B(1; 3) \qquad C(3; 1)$$

3. Tracez les segments  $[IB]$  et  $[IC]$ .
4. Tracez le **demi-cercle**  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[BC]$  et qui passe par  $A$ .
5. On obtient un premier pétale. Tracez le point  $A'$  symétrique de  $A$  par rapport à l'axe des abscisses.
6. Tracez de même les points  $B'$  et  $C'$  symétriques de  $B$  et  $C$  par rapport à l'axe des abscisses.
7. Tracez le deuxième pétale, symétrique du premier pétale par rapport à l'axe des abscisses.
8. Tracez le troisième pétale, symétrique du premier pétale par rapport à l'axe des ordonnées.
9. Tracez le quatrième pétale, symétrique du troisième pétale par rapport à l'axe des abscisses.
10. Coloriez la fleur obtenue.

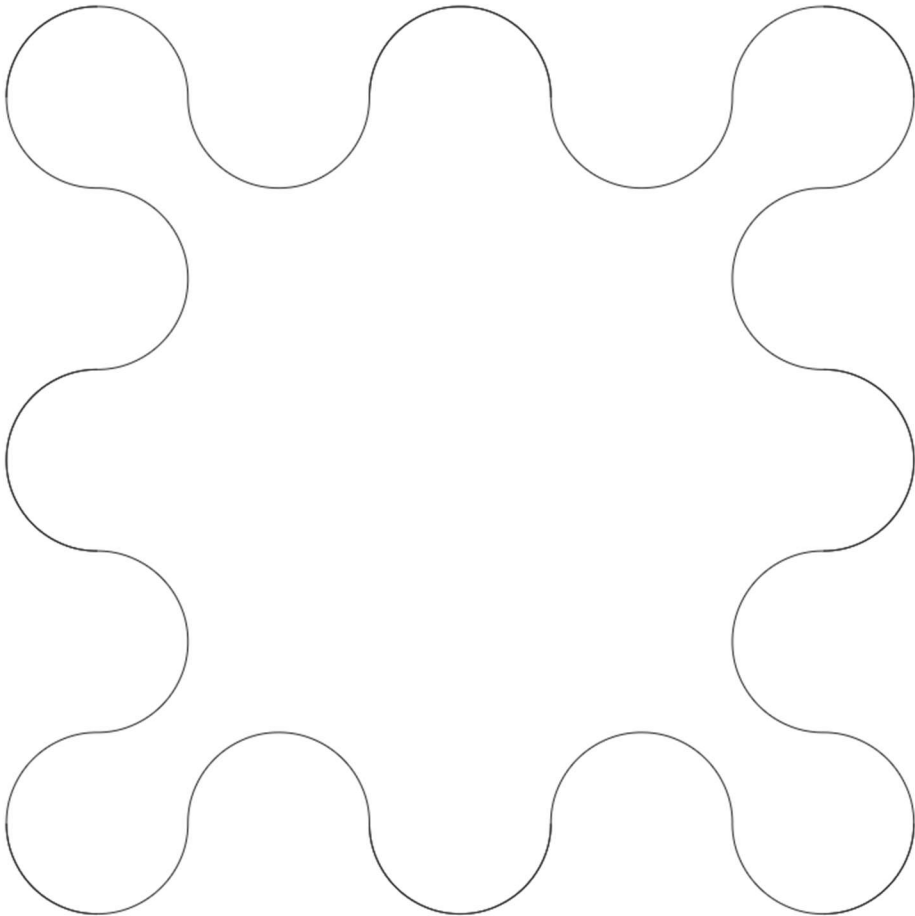
**Exercice 21** (*Le fantôme*).

(l'unité est le carreau de votre feuille quadrillée) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placez le point  $E(0;0)$  à peu près au centre de la page.
2. Placez les points suivants :

$$\begin{array}{cccc} A(-8;0) & B(-6;0) & C(-4;0) & D(-2;0) \\ & F(0;2) & G(-8;2) & H(-4;-2) \end{array}$$

3. Tracez le quart de cercle de centre  $A$ , d'extrémités  $B$  et  $G$ .
4. Tracez le quart de cercle de centre  $E$ , d'extrémités  $D$  et  $F$ .
5. Tracez le demi-cercle de centre  $C$ , d'extrémités  $B$  et  $D$ , passant par  $H$ .
6. Placez les symétriques des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $G$ ,  $H$  par rapport à l'axe des ordonnées.
7. Tracez les symétriques des deux quarts de cercles par rapport à l'axe des ordonnées.
8. Tracez le symétrique du demi-cercle par rapport à l'axe des ordonnées.
9. Inspirez-vous de l'exercice pour reproduire la figure suivante :



**Exercice 22.**

(unité de longueur arbitraire) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placez le point  $I(0;0)$  à peu près au centre de la page.
2. Placez les points suivants :

$$A(3;3) \quad B(1;3) \quad C(3;1) \quad D(-1;3)$$

3. Tracez la droite  $(ID)$ .
4. Construisez le point  $A'$  symétrique du point  $A$  par rapport à la droite  $(ID)$ .
5. Construisez les symétriques  $B'$  et  $C'$  de  $B$  et  $C$  par rapport à la droite  $(ID)$ .
6. Coloriez en rouge le triangle  $ABC$ .
7. Coloriez en bleu le triangle  $A'B'C'$ .

**Exercice 23.**

(unité de longueur arbitraire) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placez le point  $C(0;0)$  à peu près au centre de la page.
2. Placez les points suivants :

$$A(-7;1) \quad B(-1;3) \quad D(-3;1) \quad U(4;2) \quad V(-6;-5)$$

3. Tracez les segments  $[BA]$  et  $[BC]$ . Tracer la droite  $(UV)$ .
4. Construisez le point  $E$ , projection orthogonale de  $D$  sur  $(AB)$ . Tracez le segment  $[ED]$
5. On voit que les segments  $[BA]$ ,  $[BC]$ ,  $[ED]$  forment une lettre **F** majuscule d'imprimerie.
  - a/ Repassez cette lettre en bleu.
  - b/ Construisez la figure symétrique de cette lettre par rapport à la droite  $(UV)$ .
  - c/ Repassez en rouge cette figure symétrique.

**Exercice 24 (lettres symétriques).**

1. Écrire sur deux lignes les vingt-six lettres de l'alphabet, bien formées, en majuscules d'imprimerie.
2. Rayer celles qui n'ont pas d'**axe de symétrie**.
3. Entourer celles qui en ont. Tracer en couleurs le ou les axes de symétrie.

**Exercice 25.**

(unité de longueur arbitraire) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placez le point  $I(0;0)$  à peu près au centre de la page.
2. Placez les points suivants :

$$A(-4;-1) \quad B(-4;5) \quad U(-4;-2) \quad V(3;-6)$$

3. Tracez les droites  $(IU)$  et  $(IV)$ .
4. Tracez le segment  $[AB]$ .

5. Tracez le demi-cercle de diamètre  $[AB]$ , d'extrémités  $A$  et  $B$ , situé à droite de  $(AB)$ .
6. On note  $\mathcal{F}$  la figure formée du demi-cercle et du segment  $[AB]$ . Coloriez  $\mathcal{F}$  en bleu.
7. Tracez la figure  $\mathcal{F}'$  symétrique de  $\mathcal{F}$  par rapport à la droite  $(IU)$ . Coloriez  $\mathcal{F}'$  en rouge.
8. Tracez la figure  $\mathcal{F}''$  symétrique de  $\mathcal{F}'$  par rapport à la droite  $(IV)$ . Coloriez  $\mathcal{F}''$  en vert.
9. Vérifiez qu'on passe de  $\mathcal{F}$  à  $\mathcal{F}''$  en tournant d'un demi-tour autour de  $I$ .

**Exercice 26.**

(unité au choix) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points suivants :

$$I(0;0) \quad J(6;4) \quad K(-2,3)$$

2. Tracer les droites  $(IJ)$  et  $(IK)$ . Dans toute la suite, on note :
  - $s_1$  la **symétrie d'axe**  $(IJ)$
  - $s_2$  la **symétrie d'axe**  $(IK)$ .
3. On considère le point  $A(4;1)$ . Placer ce point.
  - a/ Construire le point  $A' = s_1(A)$ .
  - b/ Construire le point  $A'' = s_2(A')$ .
  - c/ Que peut-on remarquer sur la disposition des points  $A'$ ,  $I$  et  $A''$  ?
4. On considère le point  $B(0;-3)$ . Placer ce point.
  - a/ Construire le point  $B' = s_1(B)$ .
  - b/ Construire le point  $B'' = s_2(B')$ .
  - c/ Que peut-on remarquer sur la disposition des points  $B'$ ,  $I$  et  $B''$  ?

**Exercice 27.**

On considère deux **droites parallèles**  $d_1$  et  $d_2$ . On note :

- $s_1$  la **symétrie d'axe**  $d_1$
  - $s_2$  la **symétrie d'axe**  $d_2$ .
1. Tracer  $d_1$  et  $d_2$  (on les dessinera obliques).
  2. Placer un point  $A$  **entre**  $d_1$  et  $d_2$ .
    - a/ Construire le point  $A' = s_1(A)$ .
    - b/ Construire le point  $A'' = s_2(A')$ .
  3. Placer un point  $B$  qui ne soit **pas entre**  $d_1$  et  $d_2$ .
    - a/ Construire le point  $B' = s_1(B)$ .
    - b/ Construire le point  $B'' = s_2(B')$ .
  4. Vérifier que les segments  $[AA'']$  et  $[BB'']$  sont de même longueur.
  5. Vérifier que cette longueur commune est le double de la distance qui sépare  $d_1$  et  $d_2$ .

**Exercice 28** (*fortification*).

(unité le cm) On repère les points par abscisse et ordonnée.

- Placez les points suivants :

$$A(0, 2) \quad B(-1, 2) \quad C(-2, 2) \quad D(-3; 2) \quad E(-2; 1) \quad F(0, 1)$$

- Tracez les segments  $[AB]$ ,  $[EF]$ .
- Tracez le grand arc de cercle  $\mathcal{C}$  qui est centré en  $C$ , qui passe par  $D$ , et dont les extrémités sont  $B$  et  $E$ .
- On note  $\mathcal{F}_1$  la figure constituée de  $[AB]$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $[EF]$ . Tracez la figure  $\mathcal{F}_2$  qui est symétrique de  $\mathcal{F}_1$  par rapport à l'axe des ordonnées.
- On note  $\mathcal{F}$  la figure constituée de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ . Il semble bien que  $\mathcal{F}$  soit le plan d'une **fortification** vue de dessus...
  - Calculez le périmètre  $p$  de  $\mathcal{F}$ . Vérifiez qu'on trouve :

$$p = 6 + 3\pi$$

- Calculez l'aire  $S$  de  $\mathcal{F}$ . Vérifiez qu'on trouve :

$$S = 4 + \frac{3}{2}\pi$$

**Exercice 29** (*un cœur*).

- Tracez un segment horizontal  $[AB]$  de longueur 8 cm.
- Construisez, avec le compas, le point  $C$ , au-dessus de  $(AB)$ , tel que le triangle  $ABC$  soit équilatéral.
- Placez le point  $I$ , milieu de  $[BC]$ . Placez le point  $J$ , milieu de  $[CA]$ . Placez le point  $K$ , milieu de  $[AB]$ .
- L'horizontale issue de  $C$  coupe  $(KJ)$  en  $D$  et  $(KI)$  en  $E$ . Construisez  $D$  et  $E$ .
- Tracez le demi-cercle de diamètre  $[CD]$ , situé au dessus de  $(CD)$
- Tracez le demi-cercle de diamètre  $[CE]$ , situé au dessus de  $(CE)$
- Tracez le petit arc de cercle de centre  $C$ , d'extrémités  $D$  et  $J$ .
- Tracez le petit arc de cercle de centre  $C$ , d'extrémités  $E$  et  $I$ .
- Tracez le petit arc de cercle de centre  $A$ , d'extrémités  $K$  et  $J$ .
- Tracez le petit arc de cercle de centre  $B$ , d'extrémités  $K$  et  $I$ .
- Coloriez le cœur obtenu.

**Exercice 30** (*une hélice*).

(unité de longueur arbitraire) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placez le point  $I(0;0)$  à peu près au centre de la page.
2. Placez les points suivants :

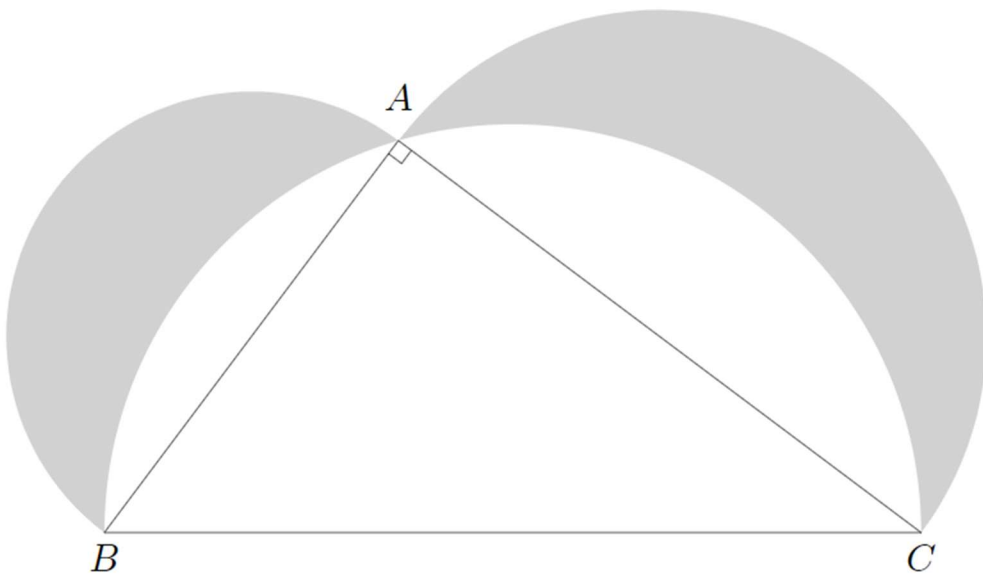
$$A(0,2) \quad B(0,12) \quad C(6,4) \quad D(9,0) \quad E(6,-4) \quad F(0,-2)$$

3. Tracez le **petit arc** de cercle de centre  $B$ , d'extrémités  $A$  et  $C$ .
4. Tracez le **symétrique** de l'arc précédent par rapport à l'axe des abscisses.
5. Tracez le **grand arc** de cercle de centre  $D$ , d'extrémités  $C$  et  $E$ .
6. On a dessiné ainsi une demi-hélice d'avion. Tracez ce qui manque pour avoir l'hélice complète.

**Récréation 31** (*les lunules d'Hippocrate*).

**Hippocrate de Chios** vécut à Athènes, à l'époque de **Périclès**, au  $v^e$  siècle avant Jésus-Christ. Mathématicien et astronome, il ne reste aucun de ses écrits mais ses recherches en géométrie ont influencé Euclide, un siècle plus tard. Il s'est intéressé à deux surfaces appelées **lunules** et que l'on obtient ainsi :

1. Tracer un segment  $[BC]$  horizontal.
2. Tracer le demi-cercle supérieur de diamètre  $[BC]$ .
3. Marquer un point  $A$  sur ce demi-cercle. Tracer les segment  $[AB]$  et  $[AC]$ .
4. Tracer le demi-cercle de diamètre  $[AB]$ , à gauche de  $[AB]$ .
5. Tracer le demi-cercle de diamètre  $[AC]$ , à droite de  $[AC]$ .
6. Colorier les deux lunules.



## 10 Correction des questions

p. 105

Voici la figure :



1/ Puisque  $B \in [AC]$ , les distances s'ajoutent, et on a l'égalité :

$$\begin{aligned} AB + BC &= AC \\ 7,5 + x &= 10 \end{aligned}$$

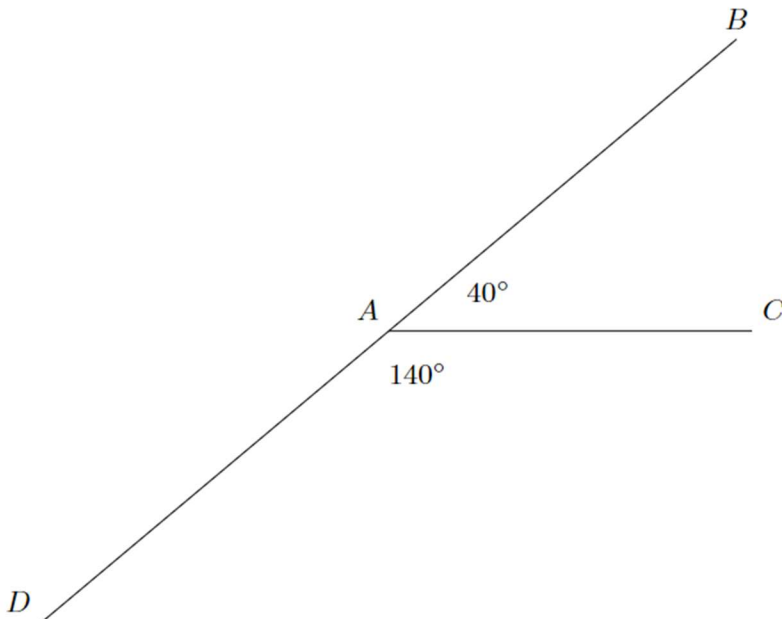
2/ Pour résoudre cette équation, on fait passer 7,5 à droite, qui devient  $-7,5$ . On obtient donc :

$$x = 10 - 7,5 = 2,5$$

3/ On mesure sur la figure, et on trouve bien :  $BC = 2,5$  cm.

p. 106

La figure se trace à l'aide du rapporteur :



L'angle  $\widehat{DAB}$  peut s'obtenir en ajoutant les angles  $\widehat{CAB}$  et  $\widehat{CAD}$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \widehat{DAB} &= \widehat{CAB} + \widehat{CAD} \\ &= 40 + 140 \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$

Donc  $\widehat{DAB}$  est **plat**, ce qui prouve que les points B, A, D sont **alignés**.

## p. 108

• (La figure ci-contre est dessinée à échelle réduite). On décide de tracer un rectangle  $ABCD$  de longueur  $AB = 7$  cm et de largeur  $AD = 4$  cm.

1/ On trace d'abord le segment  $[AB]$ , légèrement penché. Pour placer ensuite le point  $D$ , on trace avec l'équerre la demi-droite issue de  $A$  qui fait un angle droit avec la demi-droite  $[AB]$ , et dirigée vers le haut à gauche. Sur cette demi-droite, on place le point  $D$ , tel que :

$$AD = 4 \text{ cm}$$

Pour placer le point  $C$ , on trace avec l'équerre la demi-droite issue de  $B$  qui fait un angle droit avec la demi-droite  $[BA]$ , et dirigée vers le haut à gauche. Sur cette demi-droite, on place  $C$  en prenant :

$$BC = 4 \text{ cm}$$

On trace ensuite le segment  $[DC]$ , et on admet que  $ABCD$  est un rectangle.

2/ Puisqu'un rectangle a quatre angles droits, les angles  $\hat{A}$  et  $\hat{D}$  du rectangle  $ABCD$  sont droits. Donc les droites  $(AB)$  et  $(DC)$  sont toutes deux perpendiculaires à la droite  $(AD)$ . Par le théorème des perpendiculaires, on en déduit qu'elles sont parallèles entre elles :

$$(AB) \parallel (DC)$$

• Tracer le **triangle rectangle**  $IJK$  n'est pas difficile quand on dispose d'une équerre.

Sur la figure ci-contre, la droite  $d$  issue de  $K$  et parallèle à  $(IJ)$ , est tracée en pointillés. Vous pouvez la tracer avec une règle, approximativement. L'important n'est pas d'avoir une figure exacte mais de bien **comprendre le raisonnement** suivant :

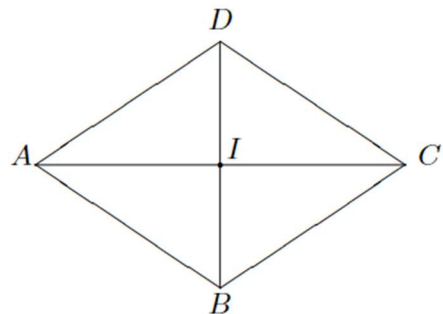
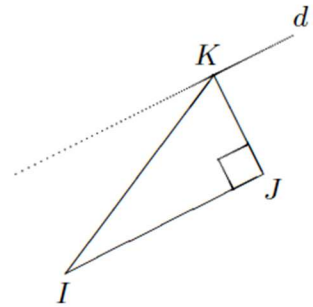
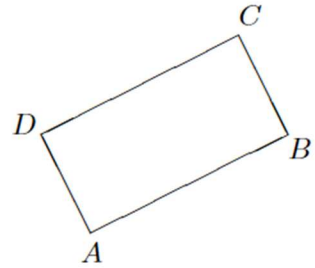
Par hypothèse, les droites  $d$  et  $(IJ)$  sont parallèles. Or la droite  $(JK)$  est perpendiculaire à  $(IJ)$ . Par le théorème des parallèles, on en déduit que  $(JK)$  est aussi perpendiculaire à  $d$  :

$$(JK) \perp d$$

## p. 109

Puisque  $(AC)$  est horizontale et que  $(BD)$  est verticale, ces deux droites sont perpendiculaires.

De plus, les segments  $[AC]$  et  $[BD]$  ont le même milieu. On en déduit que  $ABCD$  est un losange.



## p. 109

On prend  $AB = 8$  cm. La médiatrice  $d$  est construite avec l'équerre, à partir du milieu  $I$  de  $[AB]$  comme indiqué dans le cours p. 109. Soient  $M, N \in d$  tels que :

$$IM = 3 \text{ cm}, \quad IN = 1 \text{ cm}$$

On mesure :

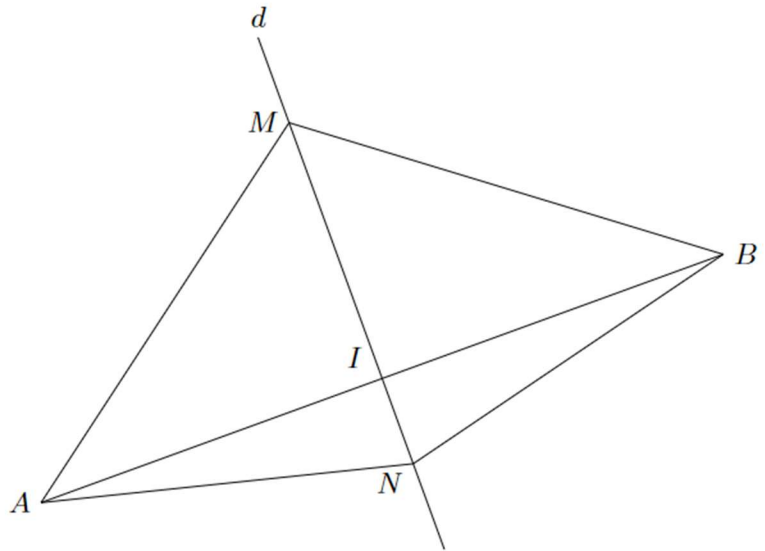
$$MA = MB = 5$$

Donc  $M$  est à égale distance de  $A$  et  $B$ .

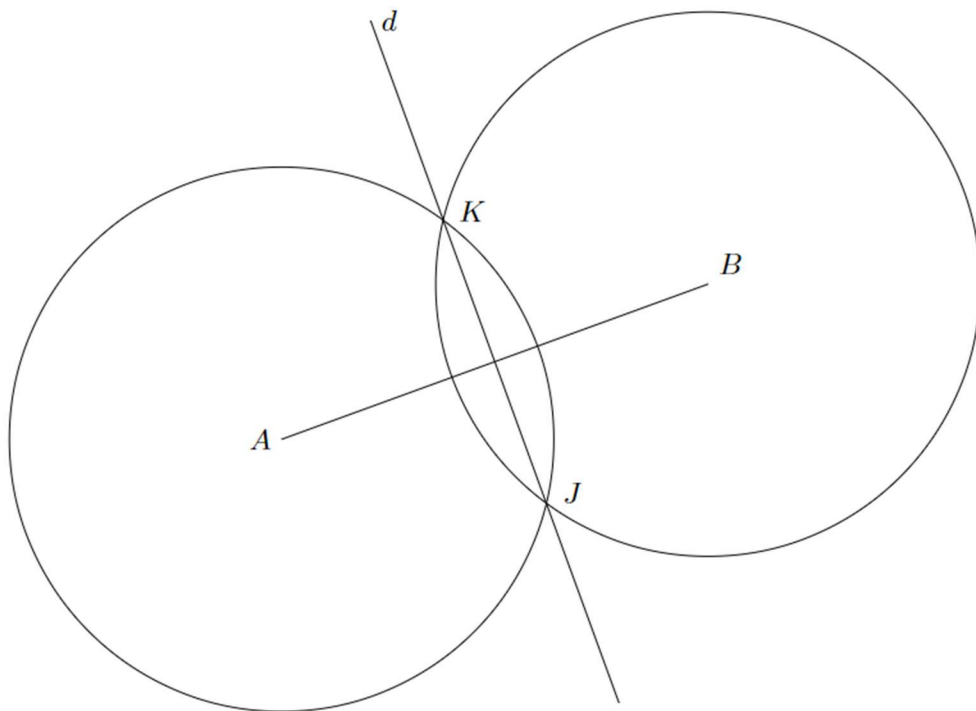
On mesure de nouveau :

$$NA = NB = 4,1$$

Donc  $N$  est aussi à égale distance de  $A$  et  $B$ .

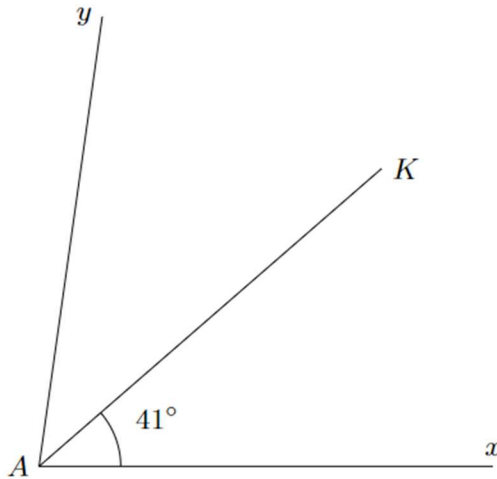


## p. 110



On constate que  $d$  est perpendiculaire à  $[AB]$  et passe par son milieu. C'est donc bien la **médiatrice** de  $[AB]$ .

p. 111



2/ Dire que  $[AK)$  est bissectrice de  $\widehat{xAy}$ , équivaut à dire que :

$$\widehat{xAK} = \frac{1}{2}\widehat{xAy} = \frac{82}{2} = 41^\circ$$

3/ On peut donc construire  $[AK)$  en traçant un angle de  $41^\circ$  à partir de  $[Ax)$ .

4/ On mesure et on trouve  $\widehat{KAy} = 41^\circ$ . On en déduit :

$$\widehat{KAy} = \widehat{KAx}$$

## 11 Correction des exercices

Pour des raisons de mise en page, la plupart des figures tracées pour les corrections sont à échelle réduite. On conseille au lecteur, qui a toute notre sympathie, de les reproduire en plus grand, et à l'échelle réelle lorsqu'il est question de distances en cm.

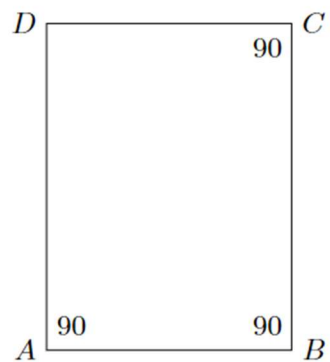
**Ex. 1, p. 117.** Il s'agit, en fait, de démontrer le cor. 6, p. 108 du cours.

On suppose que  $ABCD$  est un quadrilatère dont les angles en  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sont droits. On veut montrer que l'angle  $\widehat{D}$  est droit aussi.

Les droites  $(AD)$  et  $(BC)$  sont donc perpendiculaires à  $(AB)$ . On en déduit, par le **th. des perpendiculaires**, qu'elles sont parallèles entre elles.

Or la droite  $(CD)$  est perpendiculaire à  $(BC)$ , elle est donc aussi perpendiculaire à  $(AD)$ , par le **th. des parallèles**. Et donc l'angle  $\widehat{D}$  est droit.

cqfd



**Ex. 2, p. 117.** On suppose que  $ABCD$  est un rectangle, et que  $d$  est médiatrice de  $[AB]$ . On veut montrer que  $d$  est aussi médiatrice de  $[CD]$ .

Soit  $I$  le milieu de  $[AB]$ . On a :

$$I \in d \quad \text{et} \quad d \perp (AB)$$

Notons  $J$  le point d'intersection de  $d$  avec  $(BC)$ . Le quadrilatère  $IBCJ$  a trois angles droits, donc son quatrième angle est droit aussi, d'après le cor. 6, p. 108. On en déduit que ce quadrilatère est un rectangle, et donc :

$$JC = IB$$

Par un raisonnement analogue on démontrerait que :

$$JD = IA$$

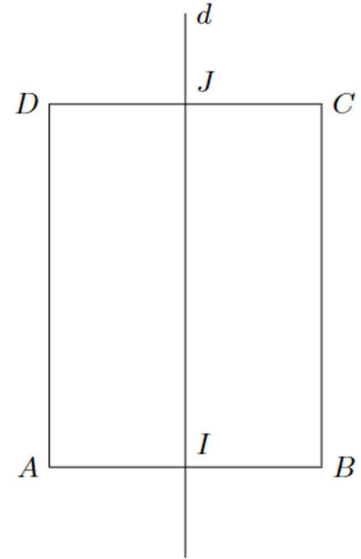
et comme  $IA = IB$ , on a aussi  $JD = JC$ , et donc  $J$  est milieu de  $[DC]$ . De plus, puisque  $IBCJ$  est un rectangle, on a :

$$(IJ) \parallel (BC)$$

Or  $(CD) \perp (BC)$ , donc, par le th. des parallèles, on a aussi  $(IJ) \perp (CD)$ .

Finalement  $(IJ)$  est médiatrice de  $[CD]$ .

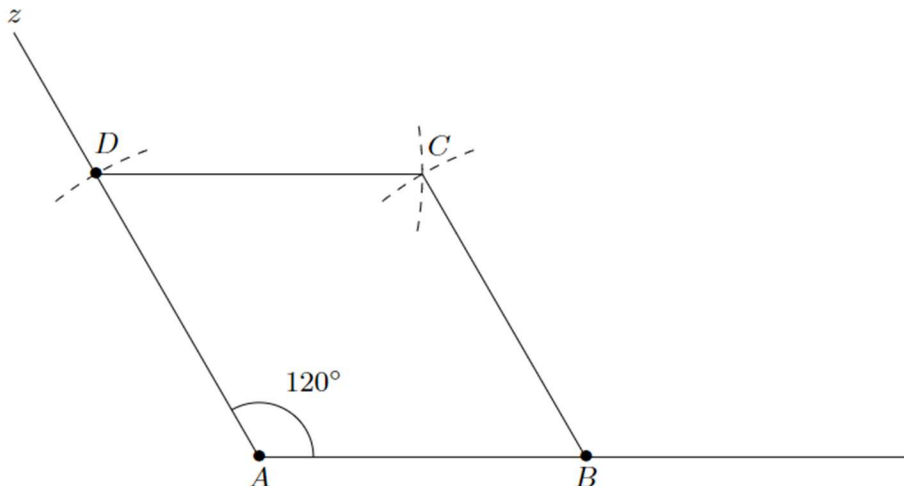
cqfd



**Ex. 3, p. 117.** 2. et 3. Le segment  $[AB]$  étant tracé, il faut éventuellement le prolonger à droite de  $B$  pour pouvoir utiliser le rapporteur. Marquez avec ce rapporteur un point de la demi-droite  $[Az)$  faisant un angle de  $120^\circ$  avec la demi-droite  $[AB)$ . Tracez la demi-droite  $[Az)$ .

Piquez le compas en  $A$ , ouvrez jusqu'à  $B$ . Avec cette ouverture, tracez un arc de cercle qui coupe  $[Az)$ . Le point  $D$  se trouve à l'intersection.

Avec la **même ouverture de compas**, on pique en  $B$ , on trace un arc de cercle. On pique en  $D$ , on trace un autre arc de cercle. À l'intersection des deux arcs, se trouve  $C$ .



**Ex. 4, p. 117.** 2. On sait qu'un losange a tous ses côtés égaux. On en déduit que :

$$AB = AD$$

donc  $A$  appartient à la médiatrice de  $[BD]$ .

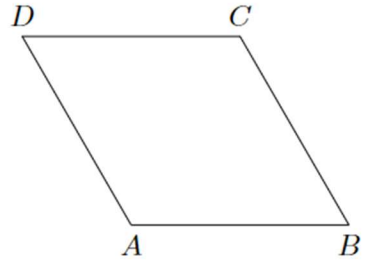
3. De même :

$$CB = CD$$

donc  $C$  appartient à la médiatrice de  $[BD]$ .

4. On a montré que  $A$  et  $C$  sont sur la médiatrice de  $[BD]$ .  
Il en résulte que  $(AC)$  est la médiatrice de  $[BD]$ .

5. Par définition de la médiatrice, on a  $(AC) \perp (BD)$   
et  $(AC)$  passe par le milieu de  $[BD]$ .



**Ex. 5, p. 117** 1. Il s'agit de tracer deux segments  $[BD]$  et  $[AC]$ , de longueur donnée, qui ont même milieu, et qui sont perpendiculaires. On procède ainsi : on trace un segment  $[BD]$  de longueur 8 cm. On marque son milieu  $I$ . On trace la droite issue de  $I$  et perpendiculaire à  $(BD)$ . Sur cette droite, de part et d'autre de  $I$ , on place les points  $A$  et  $C$ , tels que :

$$IA = IC = 3 \text{ cm}$$

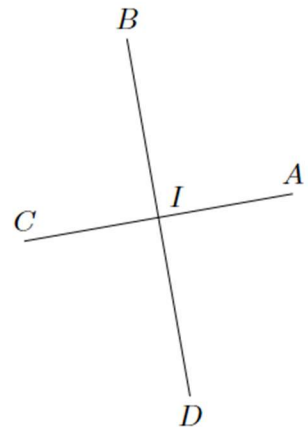
Alors  $ABCD$  est le losange souhaité.

2. La surface du losange est composée de 4 triangles rectangles en  $I$ , dont les côtés de l'angle droit valent 4 cm et 3 cm. Son aire est donc :

$$S = 4 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 4 \times 6 = 24 \text{ cm}^2$$

3. On reprend la décomposition du losange en quatre triangles rectangles. Dans le cas général, les côtés de l'angle droit valent  $\frac{a}{2}$  et  $\frac{b}{2}$ . Donc l'aire du losange vaut :

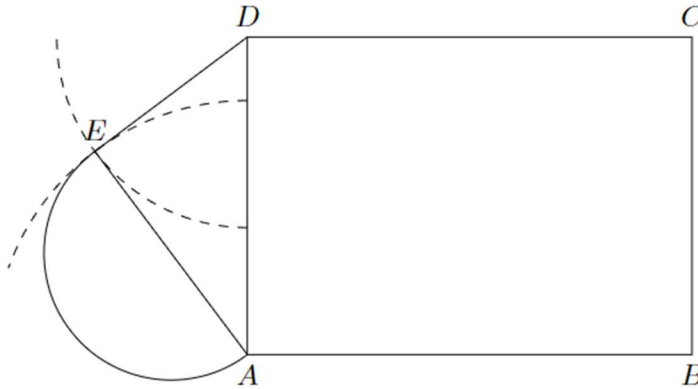
$$S = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{b}{2} = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{b}{2} = \frac{1}{2} ab$$



**Ex. 6, p. 118** 1. à 7. On trace le rectangle comme indiqué dans l'énoncé.

Pour construire le point  $E$ , on pique le compas en  $A$ , ouvert de 4 cm, et on trace un petit arc de cercle à gauche de  $[AD]$ . Puis on pique le compas en  $D$ , ouvert de 3 cm, et on trace un petit arc de cercle à gauche de  $[AD]$ . Le point  $E$  est à l'intersection des deux arcs de cercles.

Pour tracer le demi-cercle  $\mathcal{C}$ , on pique le compas au milieu de  $[AE]$ , ouvert de 2 cm. La figure complète est la suivante :



8. La ligne  $\mathcal{L}$  a pour périmètre :

$$p = AB + BC + CD + DE + \frac{1}{2} \times 2\pi r$$

où  $r$  est le rayon de  $\mathcal{C}$ . On a donc  $r = 2$ , et on trouve :

$$p = 2 \times 7 + 5 + 3 + \frac{1}{2} \times 2\pi \times 2 = 22 + \frac{1}{2} \times 2\pi \times 2 = 22 + 2\pi$$

9. La surface entourée par  $\mathcal{L}$  se compose du rectangle  $ABCD$ , du triangle rectangle  $AED$  et du demi-disque entouré par  $\mathcal{C}$ . On a donc :

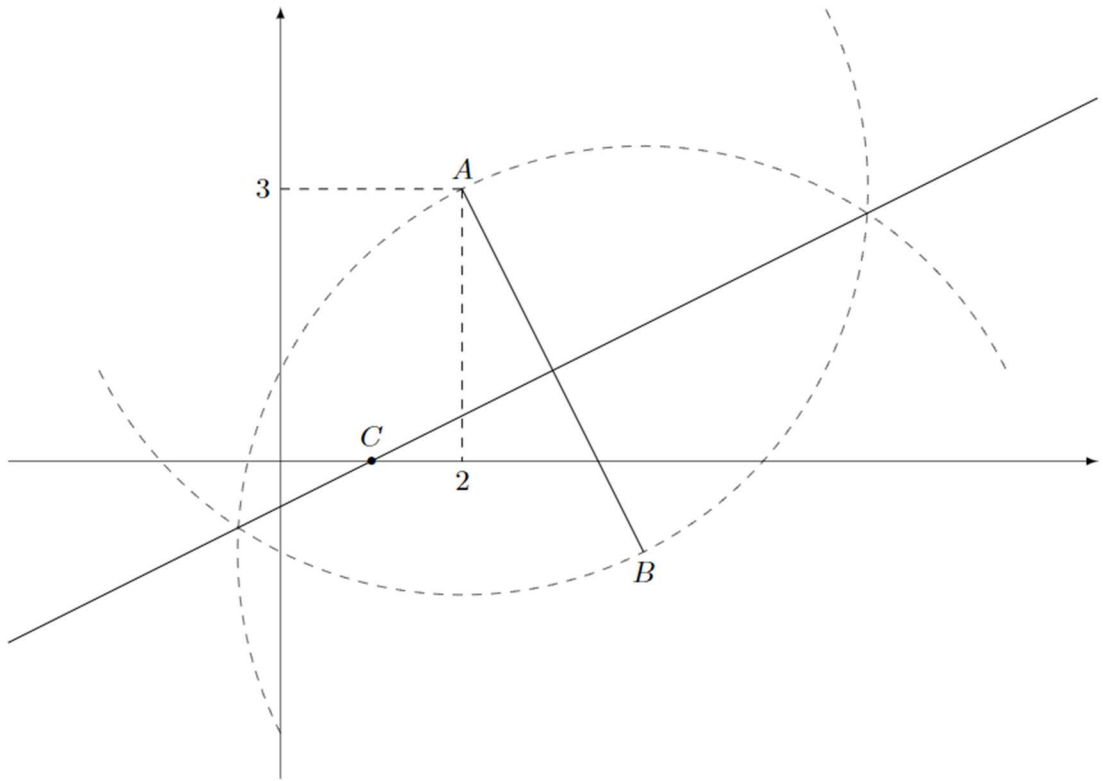
$$S = 5 \times 7 + \frac{1}{2} \times 3 \times 4 + \frac{1}{2} \times \pi \times r^2$$

où  $r = 2$  puisque c'est le rayon de  $\mathcal{C}$ . Finalement, on trouve :

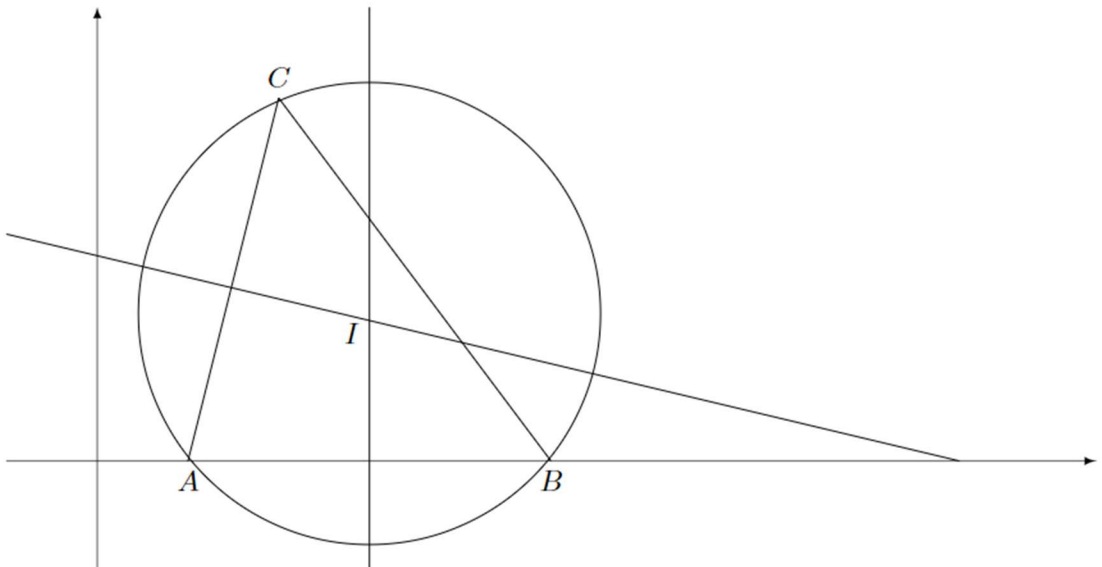
$$S = 35 + 6 + \frac{1}{2} \times \pi \times 4 = 41 + 2\pi$$

**Ex. 7, p. 118** 3. Les longueurs  $CA$  et  $CB$  seront mesurées au double décimètre.

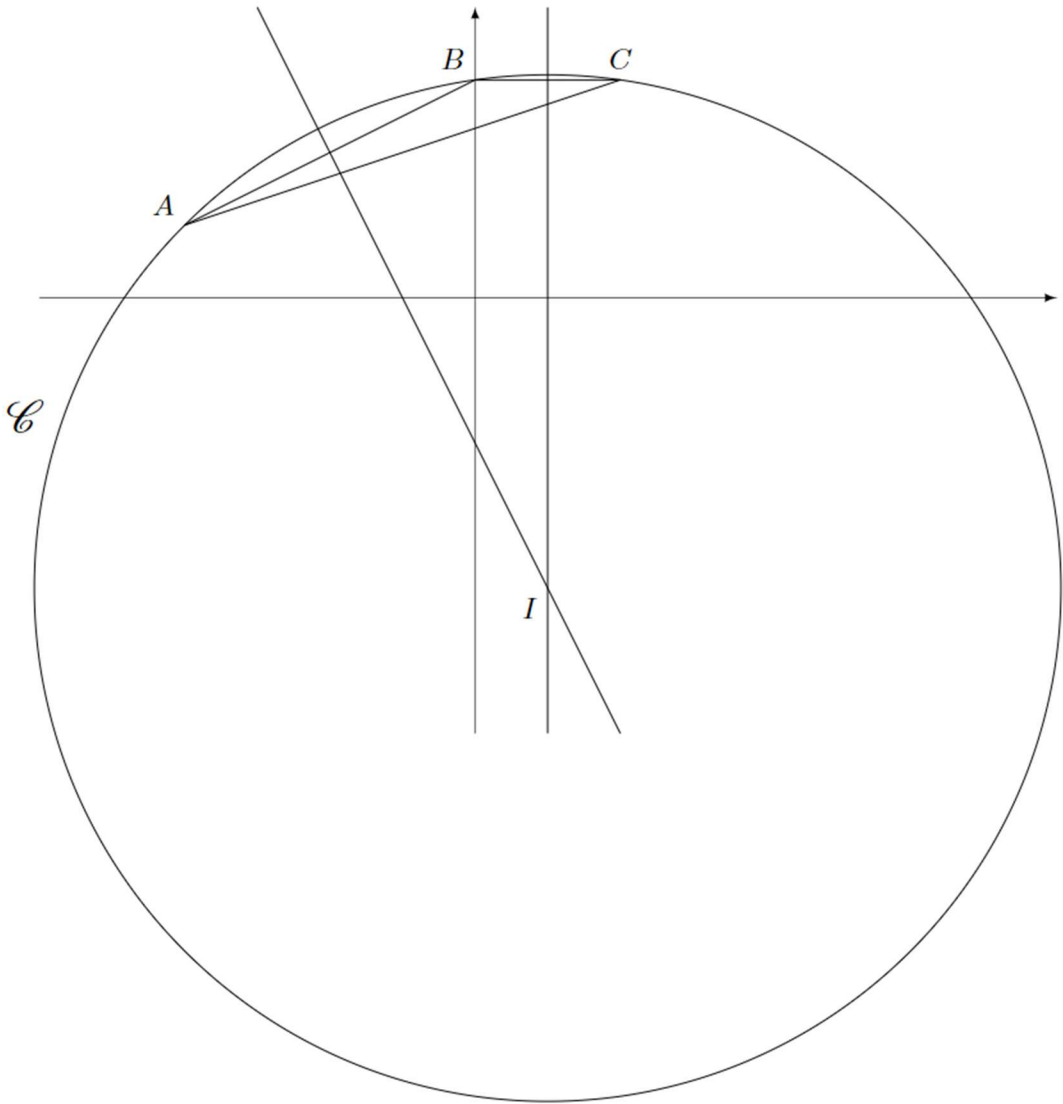
4. Pour construire la médiatrice de  $[AB]$  (voir le cours p. 110), on utilise deux arcs de cercles de même rayon, l'un de centre  $A$ , l'autre de centre  $B$ . Les deux points d'intersection des deux arcs étant équidistants de  $A$  et  $B$ , ils sont sur la médiatrice.



**Ex. 8, p. 118** 5. Les longueurs  $IA$ ,  $IB$ ,  $IC$  seront mesurées au double décimètre.



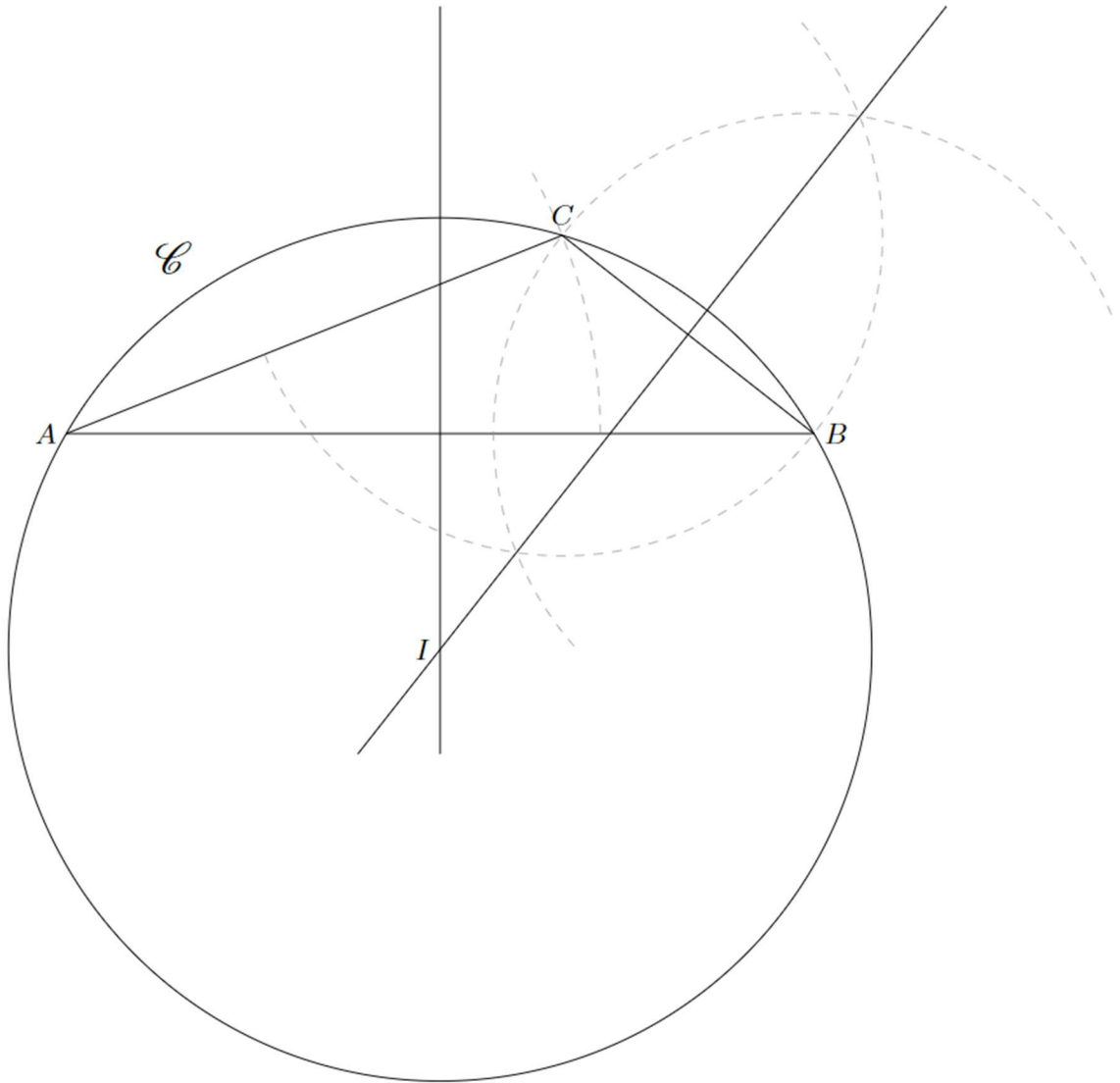
**Ex. 9, p. 119** On obtient la figure ci-dessous. Noter que l'angle  $\widehat{B}$  étant obtu, le centre  $I$  de  $\mathcal{C}$  est situé en-dehors du triangle.



**Ex. 10, p. 119** Le segment  $[AB]$  étant tracé, on pique le compas en  $A$  avec une ouverture de 5 cm, puis on pique en  $B$  avec une ouverture de 3 cm. L'un des deux points d'intersection des deux arcs de cercle est un point  $C$  possible.

La médiatrice de  $[BC]$  s'obtient par la méthode vue en cours p. 110. On trace deux arcs de cercle de même rayon assez grand, l'un de centre  $B$ , l'autre de centre  $C$ . Les deux intersections de ces deux arcs sont deux points de la médiatrice de  $[BC]$ .

La médiatrice de  $[AB]$  étant verticale, elle est facile à tracer.

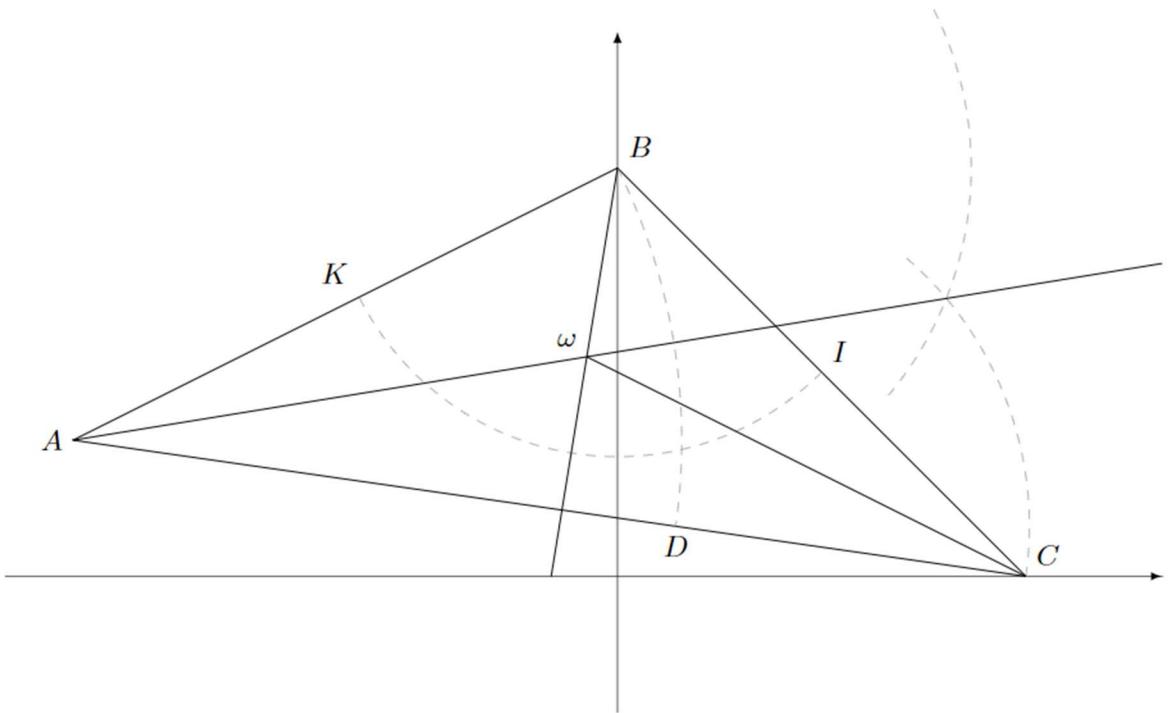


**Ex. 11, p. 119** 3. Suivant les explications données dans le cours p. 111, pour construire la bissectrice de  $\widehat{CAB}$ , on construit au compas le point  $D \in [AC]$ , tel que  $DAB$  soit **isocèle** en  $A$ . La bissectrice cherchée est alors la **médiatrice** de  $[BD]$ . Le point  $A$  étant équidistant de  $B$  et  $D$ , il est sur cette médiatrice. Pour avoir un deuxième point, on intersecte deux arcs de cercles de **même rayon**, centrés l'un en  $B$ , l'autre en  $D$ .

4. Pour la construction de la bissectrice de  $\widehat{CBA}$ , on pique en  $B$ , et on trace un arc de cercle qui coupe  $[BC]$  en  $I$  et  $[BA]$  en  $K$ . Le triangle  $IBK$  étant isocèle en  $B$ , la bissectrice de  $\widehat{CBA}$  est la médiatrice de  $[IK]$ , que l'on construit comme expliqué ci-dessus avec deux arcs de cercle. Mais pour ne pas surcharger la figure, nous n'avons pas marqué ces arcs.

7. On trouve  $\widehat{AC\omega} \simeq 33^\circ$  et  $\widehat{BC\omega} \simeq 33^\circ$

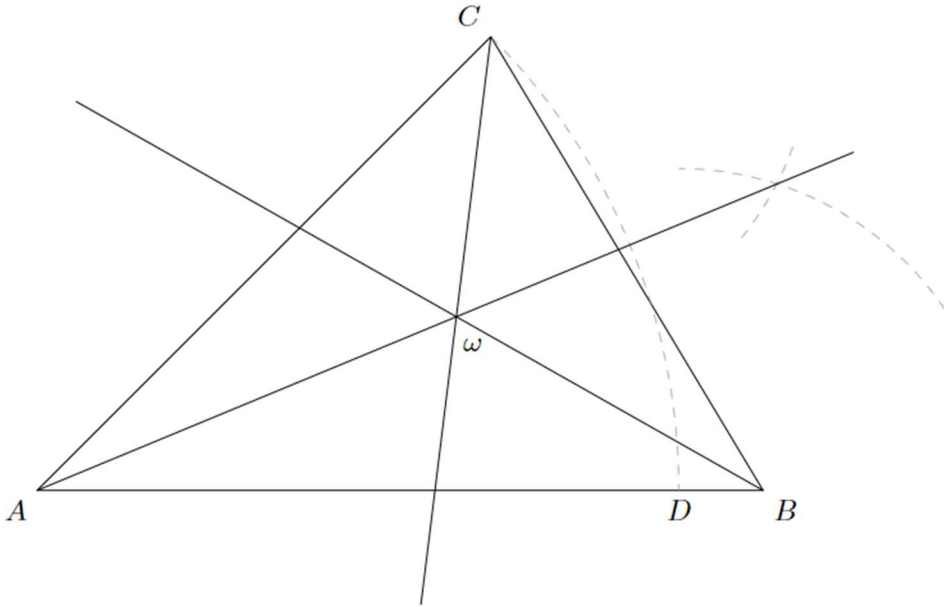
8. On pourrait montrer que ces deux angles sont en fait exactement **égaux**, ce qui prouve que la droite  $(C\omega)$  est bissectrice de  $\widehat{BCA}$ , et donc, que les trois bissectrices passent par  $\omega$ .



**Ex. 12, p. 120** Cet exercice est un décalque de l'exercice précédent (ex. 11, p. 119). La seule différence porte sur les coordonnées des sommets du triangle. On se reportera donc à la correction de cet exercice pour avoir les explications des constructions.

7. On trouve  $\widehat{AC\omega} \simeq 38^\circ$  et  $\widehat{BC\omega} \simeq 38^\circ$

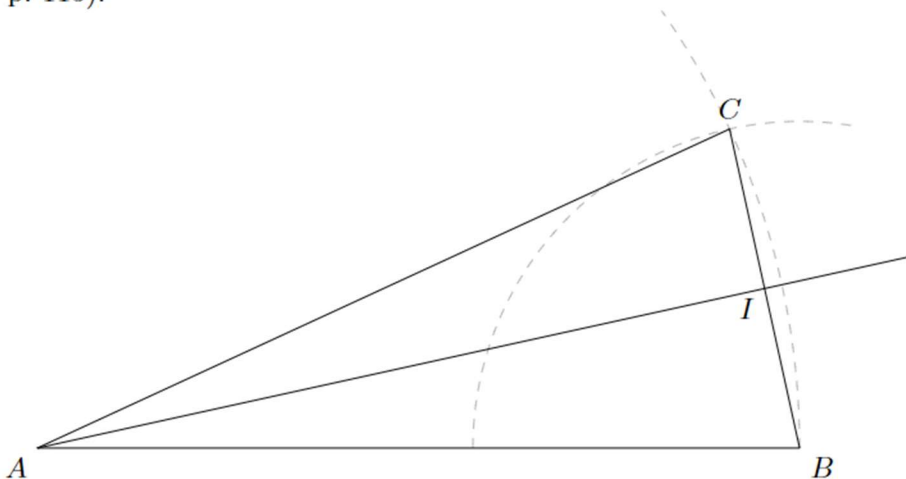
8. La droite  $(C\omega)$  est bissectrice de  $\widehat{BCA}$ .



**Ex. 13, p. 120** 1. Pour placer le point  $C$ , on pique en  $A$ , avec une ouverture de compas de 7 cm, et on trace un arc de cercle. Puis on pique en  $B$ , avec une ouverture de 3 cm, et on trace un second arc de cercle. À l'intersection des deux arcs, se trouve le point  $C$ .

3. La médiatrice de  $[BC]$  passe par le milieu  $I$  de  $[BC]$ . Comme  $AB = AC$ , elle passe aussi par  $A$ . C'est donc la droite  $(AI)$ .

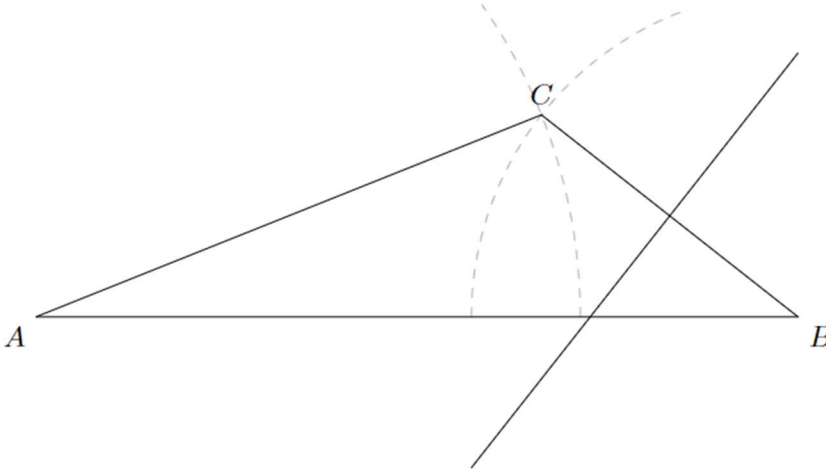
4. On mesure et on trouve  $\widehat{IAB} \simeq 12^\circ$  et  $\widehat{IAC} \simeq 12^\circ$ . En fait ces angles sont exactement égaux, et donc  $(AI)$  est bissectrice de  $\widehat{A}$ . Ce résultat est général, il résulte du cours (prop. 2, p. 113).



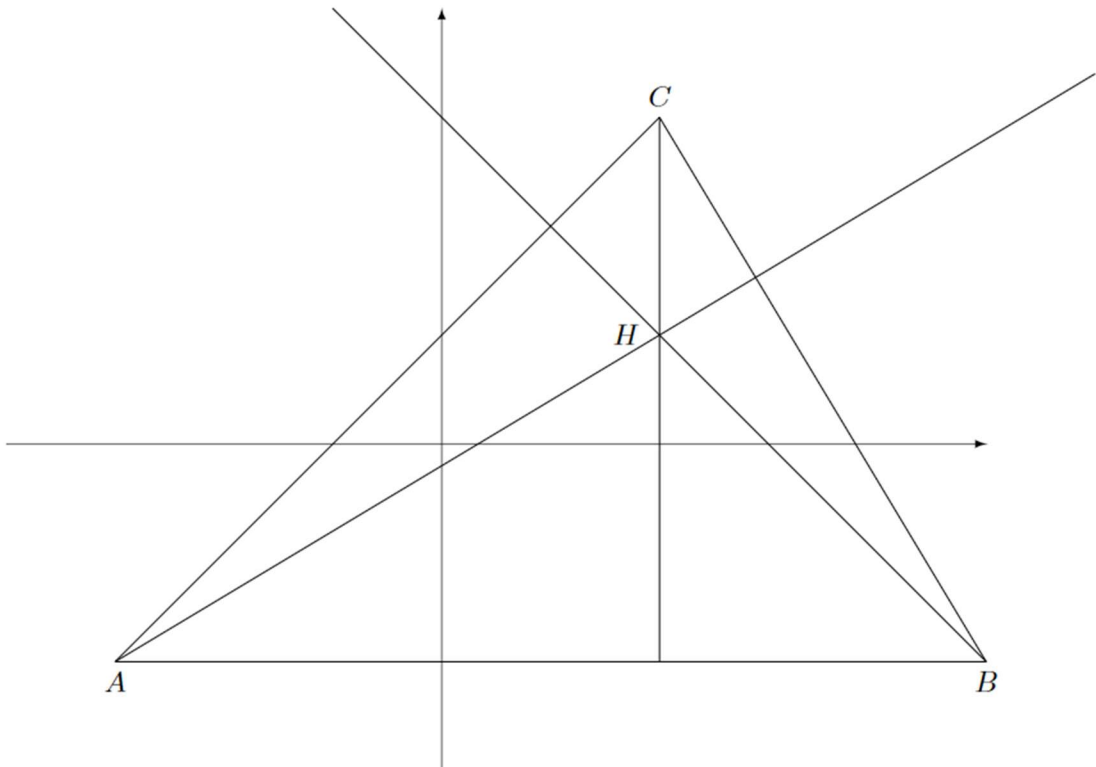
**Ex. 14, p. 120** 1. Pour placer le point  $C$ , on pique en  $A$ , avec une ouverture de compas de 5 cm, et on trace un arc de cercle. Puis on pique en  $B$ , avec une ouverture de 3 cm, et on trace un second arc de cercle. À l'intersection des deux arcs, se trouve le point  $C$ .

3. La médiatrice de  $[BC]$  passe par le milieu de  $[BC]$ , et est perpendiculaire à  $[BC]$ . On la trace facilement avec le double décimètre et l'équerre.

4. Comme elle ne passe pas par  $A$ , ce n'est pas la bissectrice de l'angle  $\widehat{A}$ .



**Ex. 15, p. 120** On peut tracer les deux hauteurs demandées avec l'équerre. On obtient la figure ci-dessous. On vérifie avec l'équerre qu'on a bien  $(CH) \perp (AB)$ .



**Ex. 16, p. 121** 1. Pour placer le point  $A$ , on pique en  $B$ , avec une ouverture de compas de 3 cm, et on trace un arc de cercle. Puis on pique en  $C$ , avec une ouverture de 4 cm, et on trace un second arc de cercle. À l'intersection des deux arcs, se trouve le point  $A$ .

3. On constate avec l'équerre que l'angle  $\widehat{BAC}$  est droit.

6. Comme le triangle  $ABC$  est rectangle, on peut calculer son aire par la formule classique (voir cor. 4 p. 40) utilisant les côtés  $b$  et  $c$  de l'angle droit :

$$S = \frac{b \times c}{2} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

7. On peut aussi utiliser la formule générale (voir cor. 5 p. 41), valable pour tous les triangles, rectangles ou non :

$$S = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{5}{2} \times AH$$

8. Si on égale les deux expressions de  $S$ , on obtient une équation d'inconnue  $AH$  :

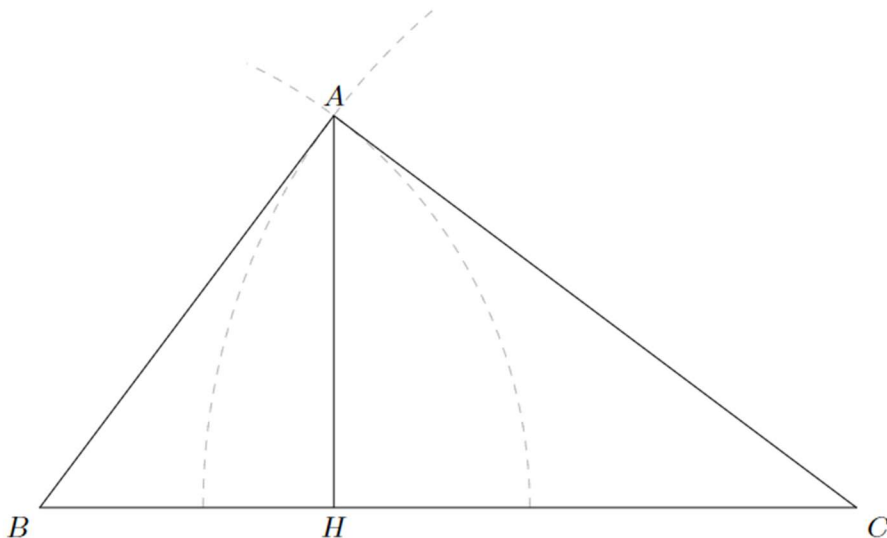
$$\frac{5}{2} \times AH = 6$$

On la résout en multipliant les deux côtés par 2, puis en divisant les deux côtés par 5 :

$$2 \times \frac{5}{2} \times AH = 2 \times 6$$

$$5 \times AH = 12$$

$$AH = \frac{12}{5} = \frac{24}{10} = 2,4$$



**Ex. 17, p. 121** Cet exercice est un décalque de l'exercice précédent (ex. 16, p. 121), la seule différence portant sur la longueur des côtés du triangle. On se reportera donc à la correction de l'exercice précédent pour avoir des explications plus détaillées.

3. On constate avec l'équerre que l'angle  $\widehat{BAC}$  est droit.

6. et 7. Comme le triangle  $ABC$  est rectangle, on peut calculer son aire par la formule particulière aux triangles rectangles :

$$S = \frac{b \times c}{2} = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$$

ou par la formule générale :

$$S = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{2} \times 13 \times AH = \frac{13}{2} \times AH$$

8. et 9. Si on égale les deux expressions de  $S$ , on obtient :

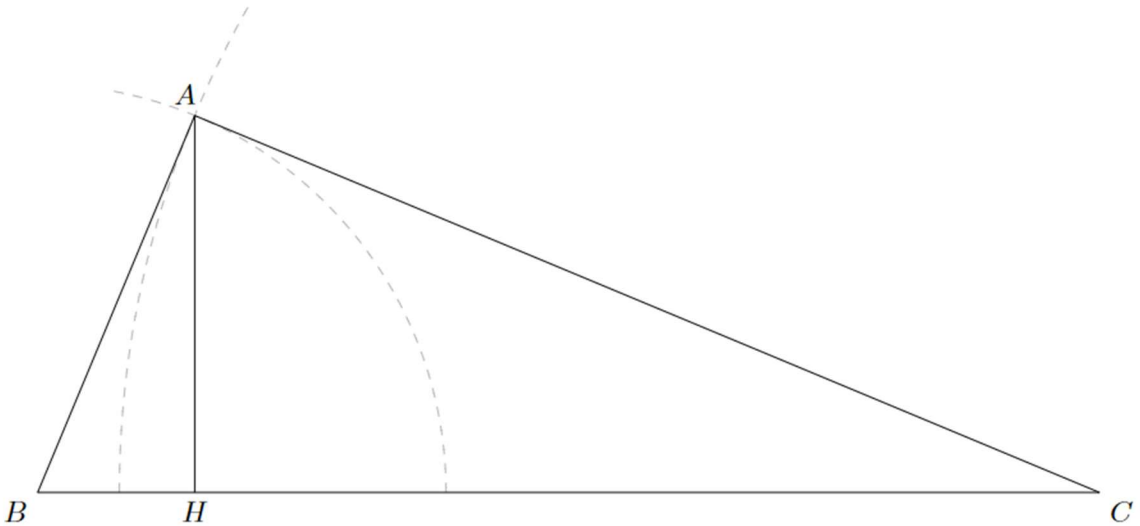
$$\frac{13}{2} \times AH = 30$$

On résout cette équation en multipliant les deux côtés par 2, puis en les divisant par 13 :

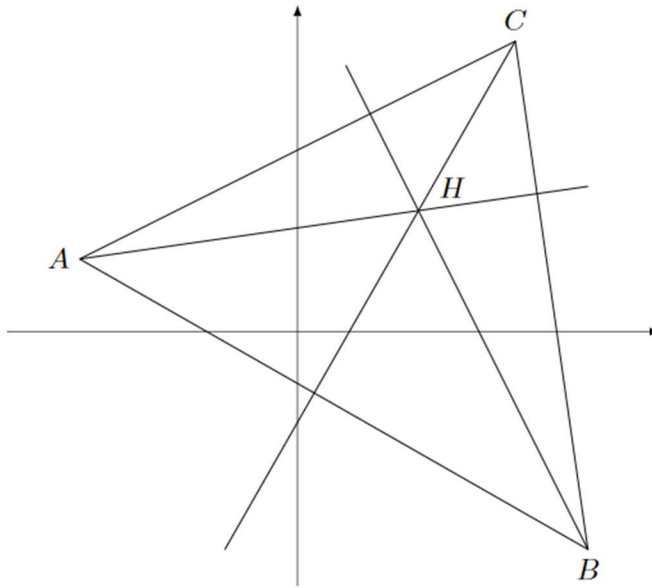
$$2 \times \frac{13}{2} \times AH = 2 \times 30$$

$$13 \times AH = 60$$

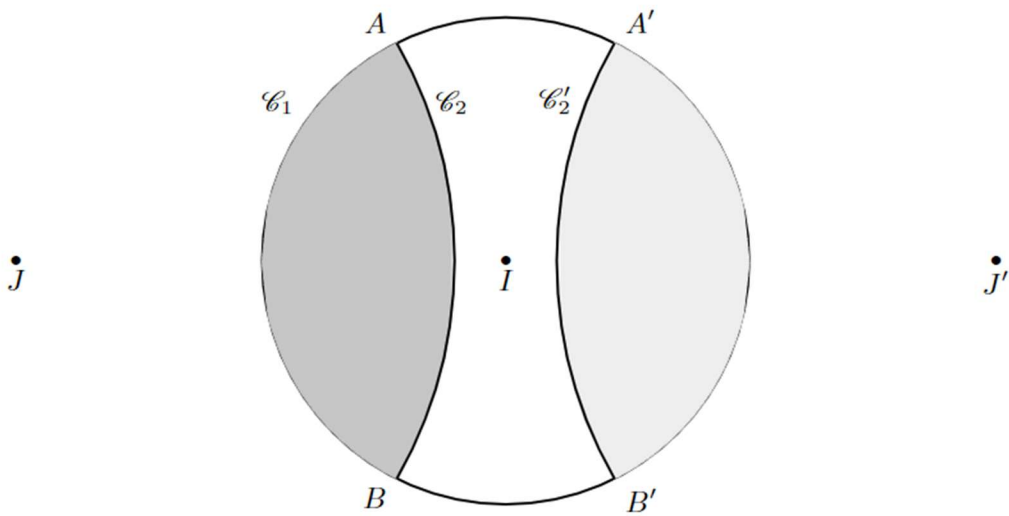
$$AH = \frac{60}{13} \approx 4,6$$



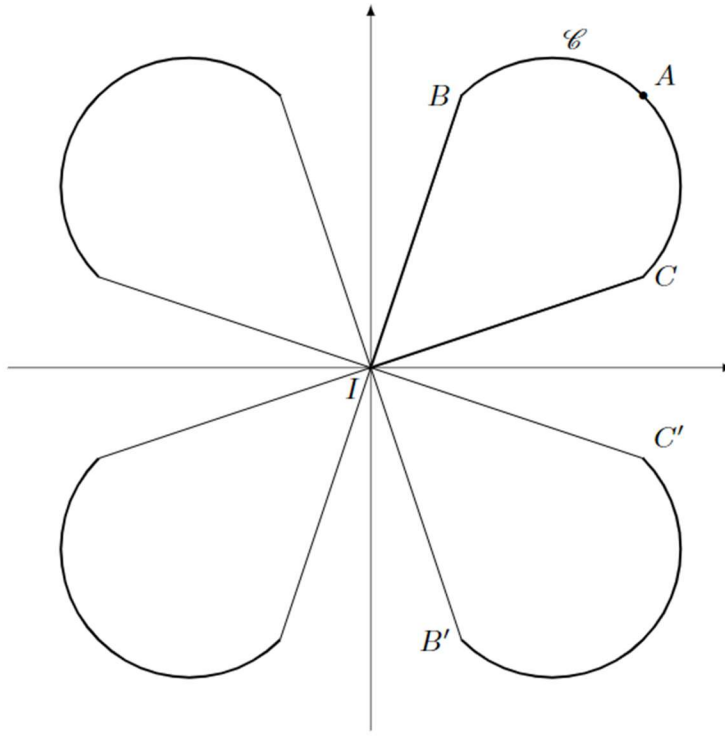
**Ex. 18, p. 122** On peut tracer les deux hauteurs demandées avec l'équerre. On obtient la figure ci-dessous. On vérifie avec l'équerre qu'on a bien  $(CH) \perp (AB)$ .



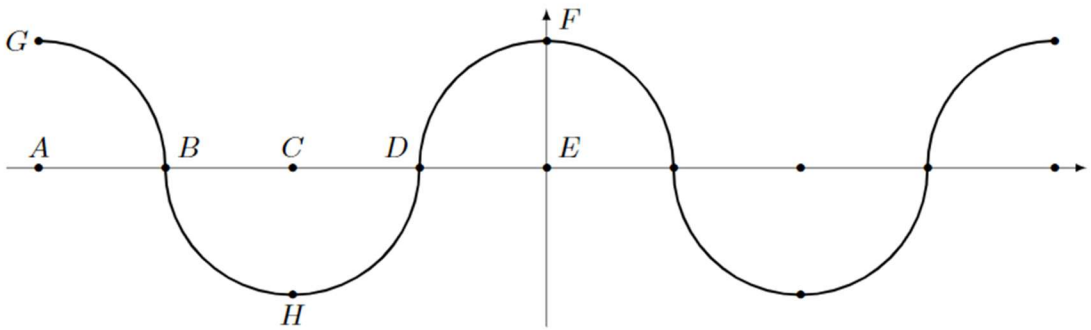
**Ex. 19, p. 122** On a colorié les régions gauche et droite avec deux nuances de gris. La région centrale a été laissée en blanc.



Ex. 20, p. 122 4. Le demi-cercle  $\mathcal{C}$  a pour centre le milieu de  $[BC]$ .



Ex. 21, p. 123 La figure se compose finalement de **deux** quarts de cercle aux extrémités et de **trois** demi-cercles au milieu :



9. Il faut tracer d'abord le **carré** dont les sommets sont :

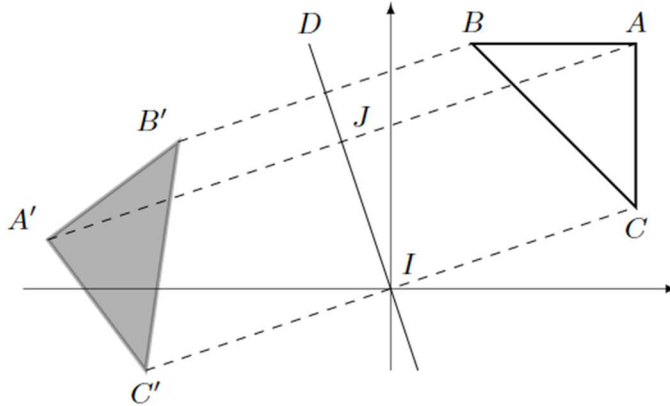
$$(-8, 0) \quad (8, 0) \quad (8, -8) \quad (-8, -8)$$

Les centres de tous les quarts de cercle et demi-cercles à tracer pour dessiner le **fantôme** sont sur les côtés de ce carré.

**Ex. 22, p. 124** On sait (*voir* les explications p. 113) comment on construit un symétrique. Pour le point  $A$ , par exemple, on a tracé, en pointillés, la **perpendiculaire** à  $(ID)$ , issue de  $A$ . Elle coupe  $(ID)$  en  $J$ . Le point  $A'$  se trouve sur cette perpendiculaire, de l'autre côté de  $A$ , tel que :

$$JA' = JA$$

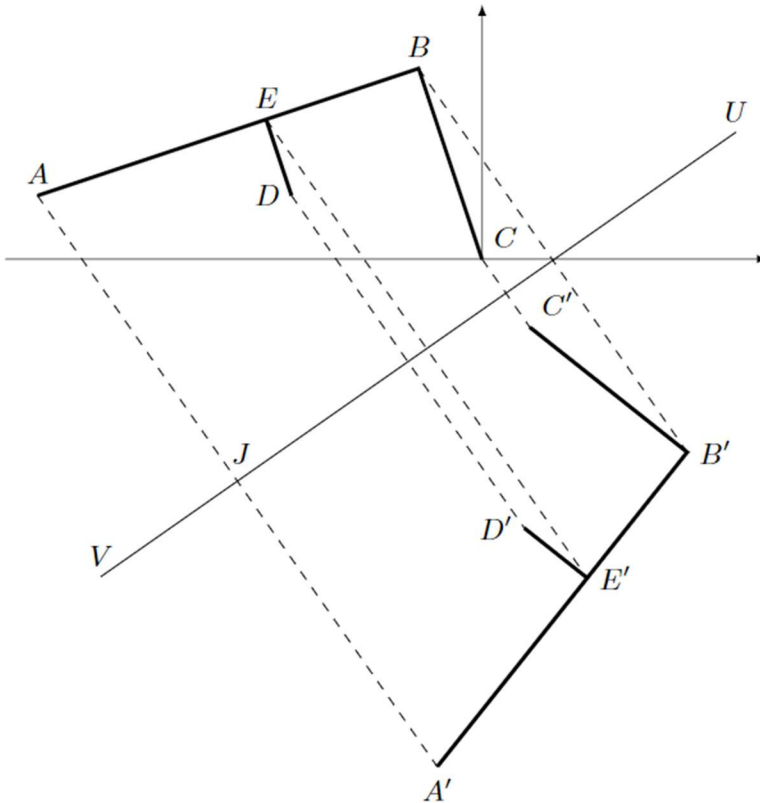
7. On a grisé le triangle  $A'B'C'$ .



**Ex. 23, p. 124** La construction de  $E$  se fait avec l'équerre.

Il y a cinq symétriques à construire pour obtenir la figure symétrique du grand  $F$ . On sait (*voir* p. 113) comment on construit un symétrique. Pour le point  $A$ , par exemple, on a tracé, en pointillés, la **perpendiculaire** à  $(UV)$ , issue de  $A$ . Elle coupe  $(UV)$  en  $J$ . Le point  $A'$  se trouve sur cette perpendiculaire, de l'autre côté de  $A$ , tel que :

$$JA' = JA$$



**Ex. 24, p. 124** On a édité les 26 lettres majuscules d'imprimerie de l'alphabet français, et on a rayé celles qui n'ont pas d'axe de symétrie :

A ~~B~~ C D E ~~F~~ ~~G~~ H I ~~J~~ ~~K~~ ~~L~~ M  
~~N~~ O ~~P~~ ~~Q~~ ~~R~~ ~~S~~ T U V W X Y ~~Z~~

Il y a donc 14 lettres qui ont au moins un axe de symétrie :

A C D E H I M  
 O T U V W X Y

Parmi ces 14 lettres, 7 ont seulement un axe de symétrie vertical :

A M T U V W Y

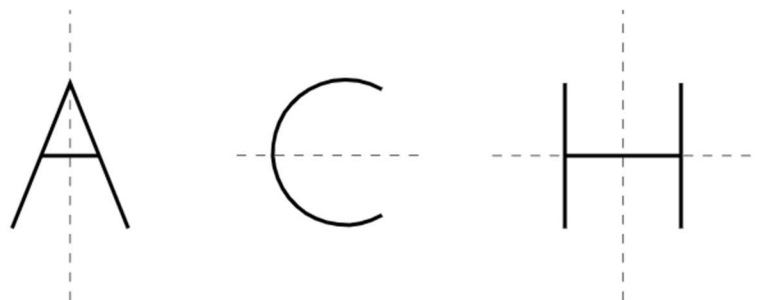
3 ont seulement un axe de symétrie horizontal :

C D E

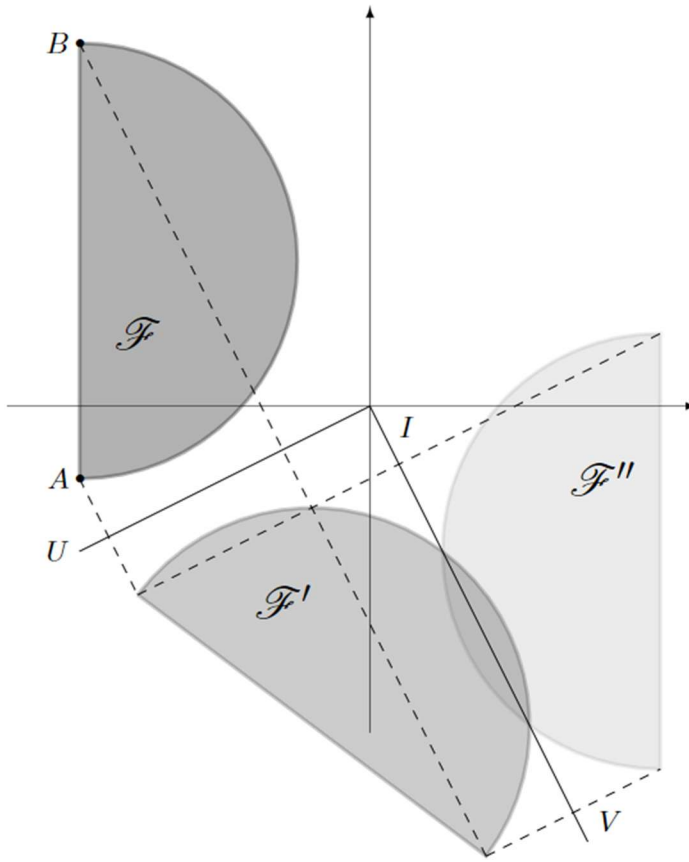
et 4 ont deux axes de symétrie, l'un vertical, l'autre horizontal :

H I O X

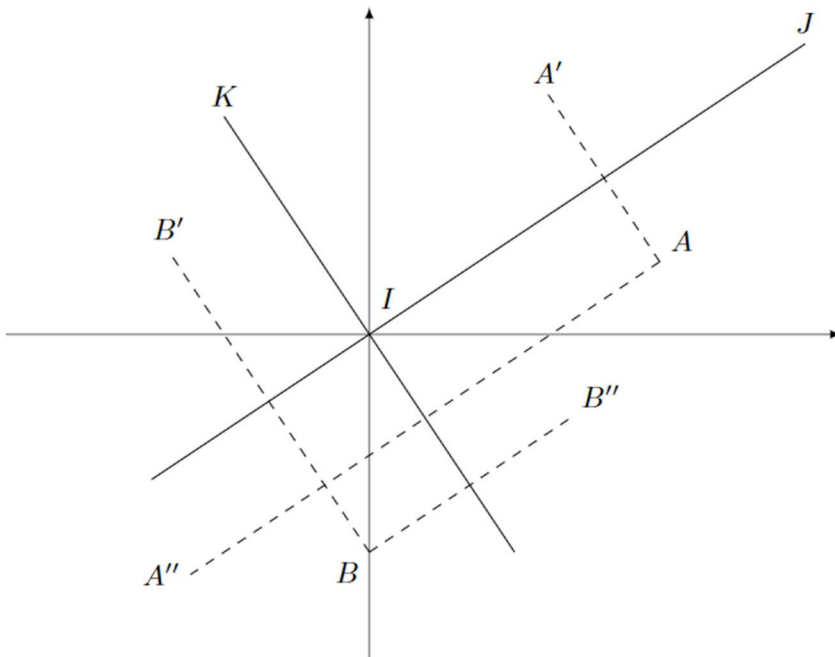
Donnons trois exemples :



Ex. 25, p. 124



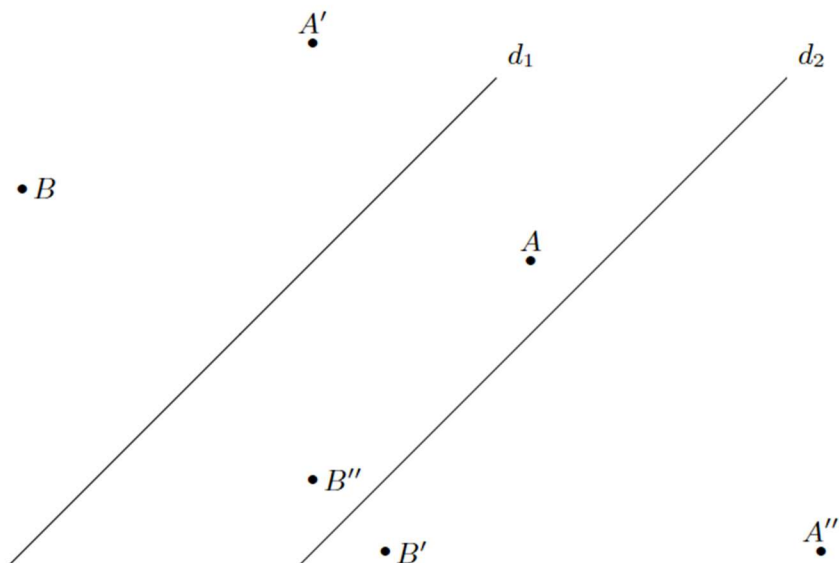
Ex. 26, p. 125 3. et 4. On remarque que  $A', I, A''$  sont alignés, et de même  $B', I, B''$ .



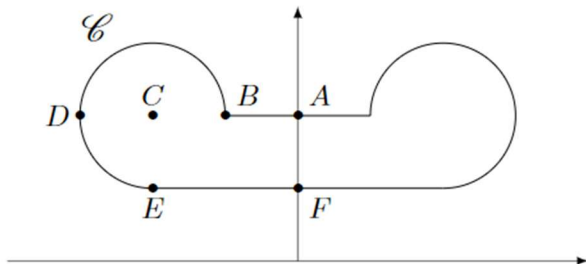
Ex. 27, p. 125 On mesure, et on constate :

$$AA'' = BB'' = 2 \times e$$

où  $e$  est l'écart entre les deux droites.



Ex. 28, p. 126



5. a/ La figure  $\mathcal{F}_1$  se compose de deux segments de droites et de trois quarts d'un cercle de rayon  $r = 1$ . Son périmètre vaut donc :

$$\begin{aligned} p(\mathcal{F}_1) &= 1 + 2 + \frac{3}{4} \times 2\pi \times r \\ &= 3 + \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

On en déduit :

$$p = 6 + 3\pi$$

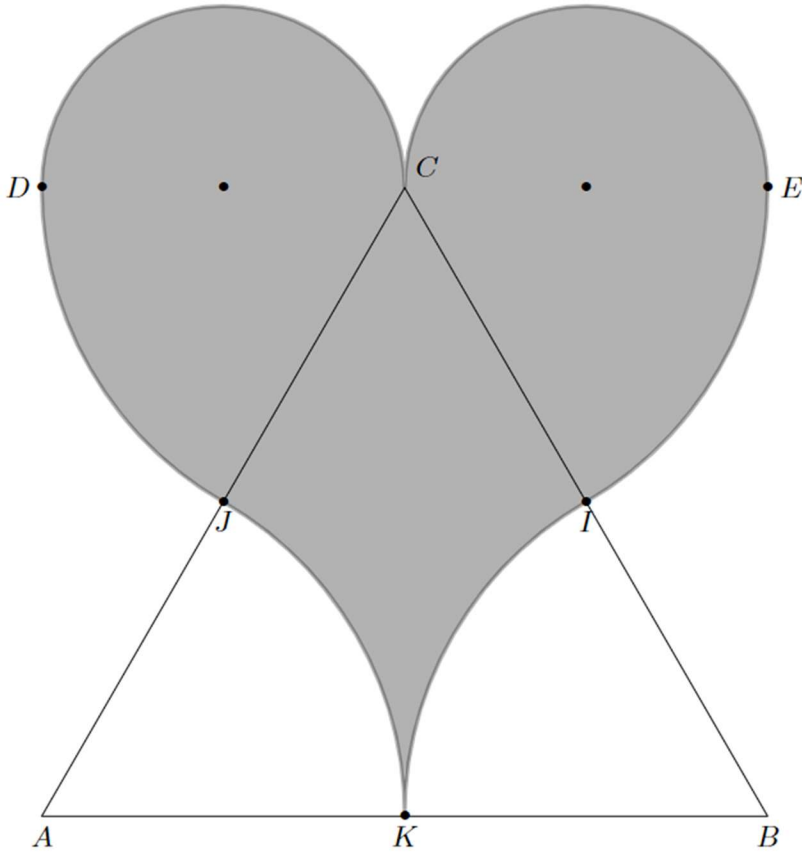
b/ La surface intérieure de  $\mathcal{F}_1$  se compose du rectangle  $ACEF$  et de trois quarts d'un disque de rayon  $r = 1$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \text{aire } \mathcal{F}_1 &= 1 \times 2 + \frac{3}{4} \times \pi \times r^2 \\ &= 2 + \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

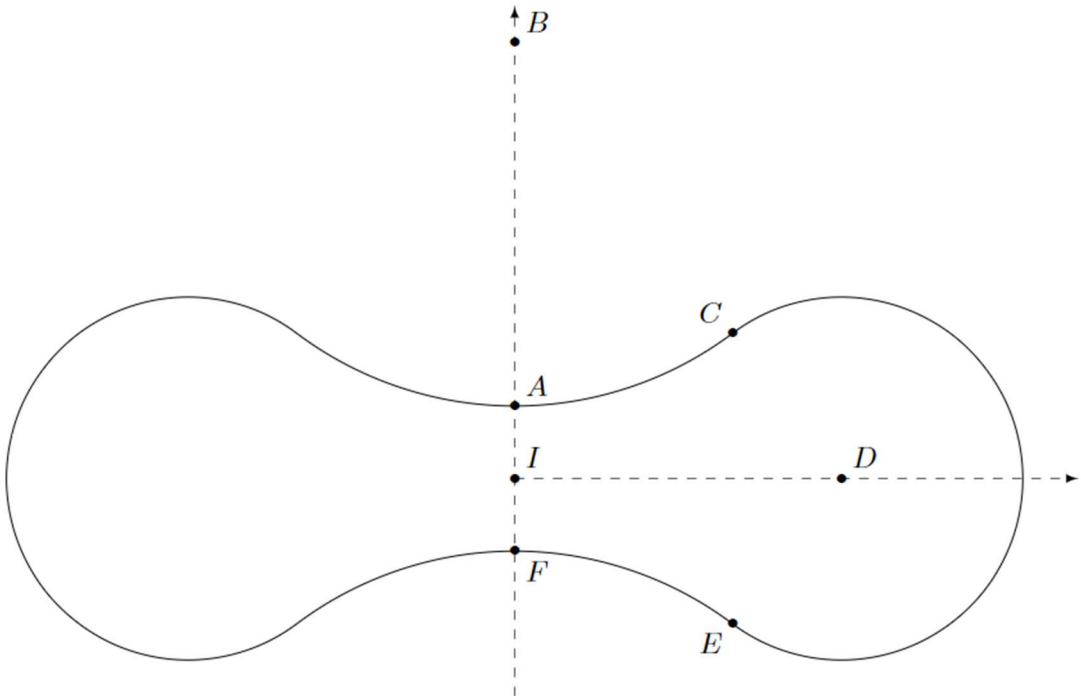
On en déduit :

$$S = 4 + \frac{3}{2}\pi$$

Ex. 29, p. 126



Ex. 30, p. 127

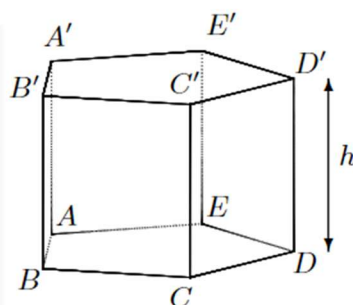


## Chapitre 5

# Géométrie dans l'espace

### 1 Prisme droit et cylindre

**Définition 1.** Soit  $h$  un nombre  $> 0$ . Dans un plan horizontal, on considère un **polygone**, qu'on appelle **base**. De chaque sommet du polygone, on élève un segment vertical de longueur  $h$ . Les extrémités supérieures de ces segments sont les sommets du polygone supérieur. Les deux polygones et les rectangles latéraux forment un **prisme droit**. Le nombre  $h$  est appelé **hauteur** du prisme.

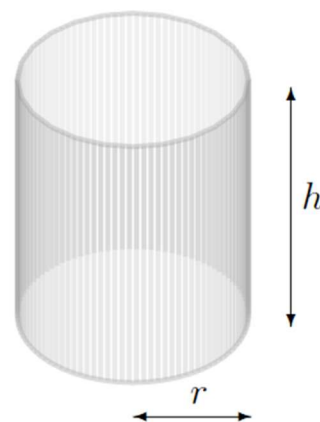


Pour abrégé, on dit souvent **prisme**, sans spécifier prisme droit (*voir* les exercices). Sur la figure ci-dessus, la base du prisme est un pentagone  $ABCDE$ . Ce prisme comporte 10 sommets, 15 arêtes, 7 faces. On a

$$h = AA' = BB' = CC' = DD' = EE'$$

- Un **pavé droit** est un prisme dont la base est un rectangle.
- Un **cube** est un prisme à base carrée, et dont les faces latérales sont aussi des carrés.

**Définition 2.** Soient  $r$  et  $h$  deux nombres. Dans un plan horizontal, on considère un cercle de rayon  $r$ . En chaque point du cercle, on élève un segment vertical de longueur  $h$ . L'ensemble de tous ces segments est une **surface** appelée **cylindre**.



Le nombre  $r$  est le **rayon du cylindre**,  $h$  est sa **hauteur**. Sur la figure ci-contre, le cylindre est vu en perspective.

## 2 Volumes

Pour un prisme ou un cylindre le volume  $V$  ne dépend que de l'aire  $\mathcal{B}$  de la base et de la hauteur  $h$ .

**Proposition 3.** *Le volume  $V$  d'un **prisme** ou d'un **cylindre** d'aire de base  $\mathcal{B}$  et de hauteur  $h$  est :*

$$V = \mathcal{B}h$$

Dans le cas d'un **cube** d'arête  $a$ , toutes les faces étant des carrés de côté  $a$ , on a :

$$\mathcal{B} = a^2 \quad h = a$$

et on retrouve le volume du cube donné à l'école primaire (voir p. 42) :

$$V = a^3$$

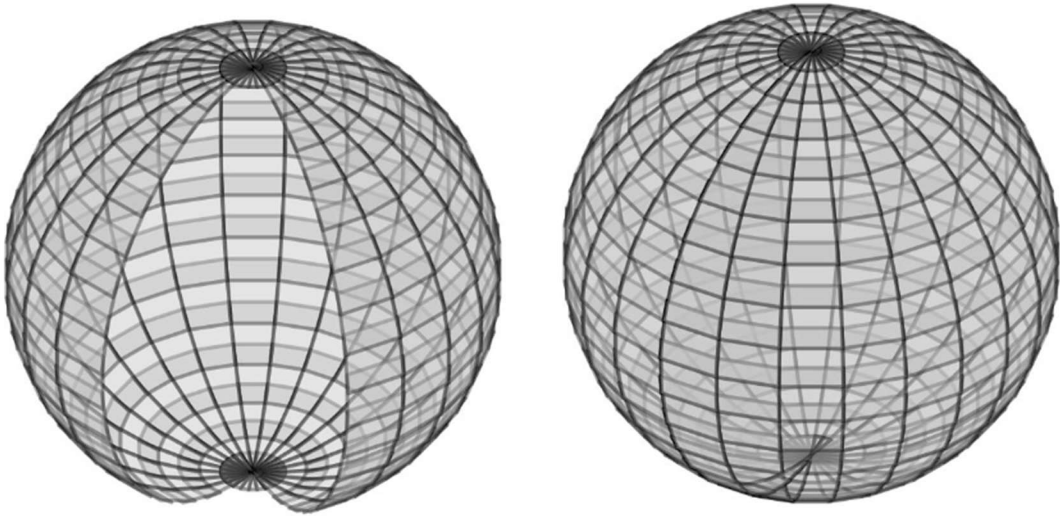
Dans le cas d'un **pavé droit** de dimensions de base  $a$ ,  $b$ , et de hauteur  $h$ , on retrouve la formule :

$$V = abh$$

## 3 La sphère

**Définition 4.** *Soient  $I$  un point de l'espace et  $r$  un nombre  $> 0$ . La **sphère** de centre  $I$  et de rayon  $r$  est la **surface** formée des points  $M$  tels que  $IM = r$ .*

La sphère n'est pas un volume, c'est une **surface creuse**. On le voit sur la perspective de gauche, car on l'a entre-ouverte pour voir l'intérieur :

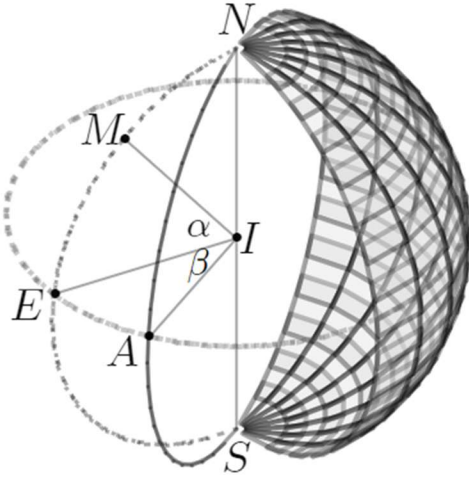


## 4 Latitude et longitude sur la Terre

La surface de la Terre est représentée par une sphère. Sur la figure, le point  $N$  est le **pôle Nord**, le point  $S$  le **pôle Sud**,  $I$  est le **centre** de la Terre.

L'**équateur** est un grand cercle situé à égale distance des deux pôles. Il mesure environ 40 000 km. On l'a marqué en pointillés. Il partage la sphère terrestre en deux parties appelées **hémisphères** : l'hémisphère Nord contient le pôle Nord, l'hémisphère Sud contient le pôle Sud.

Les **méridiens** sont des demi-cercles centrés en  $I$  dont les extrémités sont  $N$  et  $S$ . On en a marqué deux, l'un en trait fort, l'autre en pointillés.



Soit un point  $M$  sur la sphère terrestre ; le méridien qui passe par  $M$  est marqué en pointillés. Il coupe l'équateur en  $E$ . Un **méridien de référence**, marqué en trait fort, coupe l'équateur en  $A$ . On repère le point  $M$  par les deux angles suivants :

$$\alpha = \widehat{EIM} = \text{latitude de } M$$

$$\beta = \widehat{EIA} = \text{longitude de } M$$

Selon que  $M$  est situé dans l'hémisphère Nord [comme sur la figure] ou dans l'hémisphère Sud, on dit que  $\alpha$  est une **latitude nord** ou une **latitude sud**. Et selon que le méridien de  $M$  est situé à gauche ou à droite du méridien de référence, on dit que  $\beta$  est une **longitude ouest** ou une **longitude est**.

On mesure généralement en degrés la latitude  $\alpha$  et la longitude  $\beta$ , et on a :

$$0 \leq \alpha \leq 90 \quad 0 \leq \beta \leq 180$$

## 5 Exercices

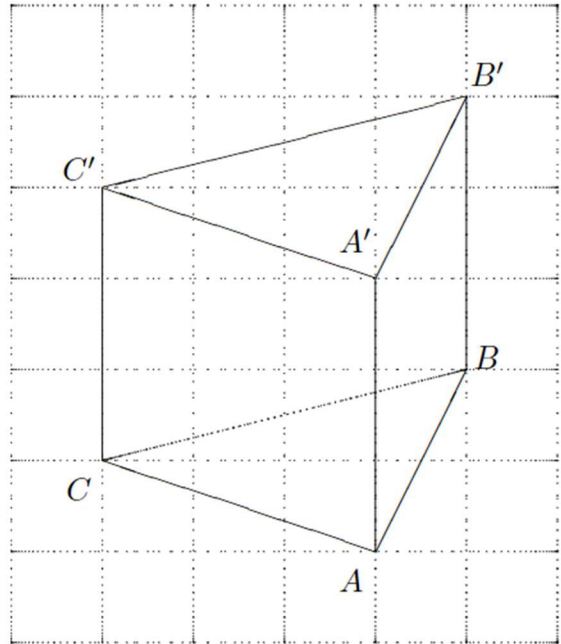
### Exercice 1.

(longueurs en cm). On considère le prisme à base triangulaire dessiné ci-contre en perspective. On suppose que la base  $ABC$  est un **triangle rectangle** en  $A$ , dont les côtés mesurent :

$$AB = 3 \quad AC = 4 \quad BC = 5$$

On suppose de plus que la hauteur du prisme vaut 3, comme on peut le vérifier sur la figure. Par contre, les arêtes  $[AB]$ ,  $[AC]$  et  $[BC]$  paraissent plus petites sur la figure qu'elles ne sont en réalité à cause de la perspective.

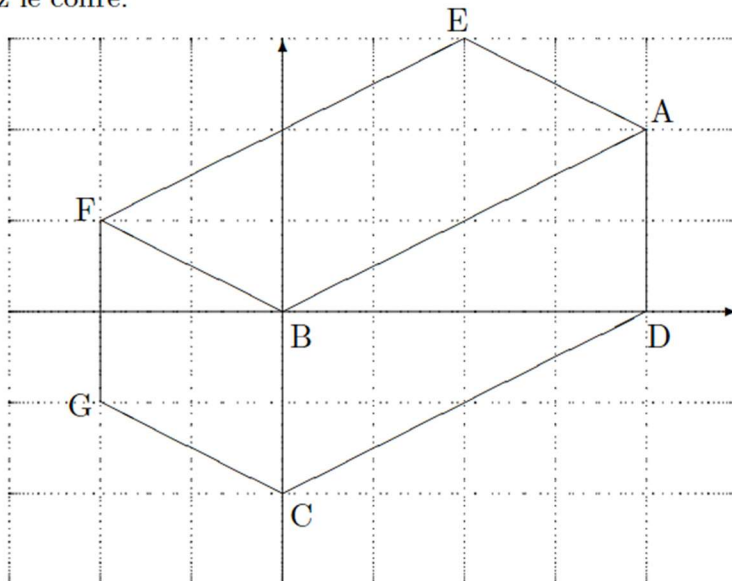
1. Dessinez en vraie grandeur le triangle  $ABC$ .
2. Calculez l'aire de  $ABC$ .
3. Dessinez en vraie grandeur les trois faces latérales du prisme (il y a deux rectangles et un carré).
4. Calculez l'aire de chacune de ces trois faces latérales.
5. Calculez le volume du prisme.



### Exercice 2 (la malle au trésor).

(unité au choix)

1. Reproduisez la figure sur une feuille quadrillée.
2. Dans le repère défini par les deux axes et le quadrillage, mesurez les coordonnées des **sept points**  $A, B, \dots, G$ .
3. Coloriez le coffre.



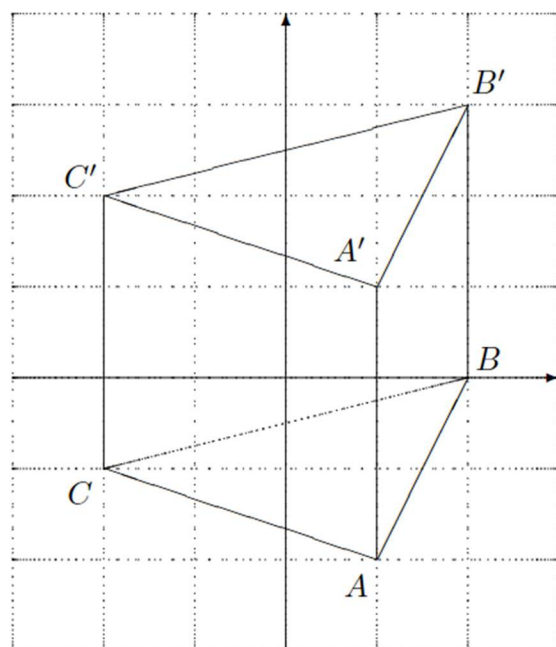
**Exercice 3.**

La figure ci-contre représente un prisme dont on a marqué les sommets :  $A, B, C, A', B', C'$

1. Reproduisez la figure sur une feuille de papier millimétré.
2. Dans le repère défini par les deux axes et le quadrillage, mesurez les coordonnées des sommets du prisme.
3. Tracez les segments  $[AC']$  et  $[A'C]$ .
4. Ces segments se coupent en un point qu'on note  $I$ . Marquez ce point et déterminez ses coordonnées.
5. Tracez les segments  $[AB']$  et  $[A'B]$ .
6. Ces segments se coupent en un point qu'on note  $J$ . Marquez ce point et vérifiez que ses coordonnées sont :

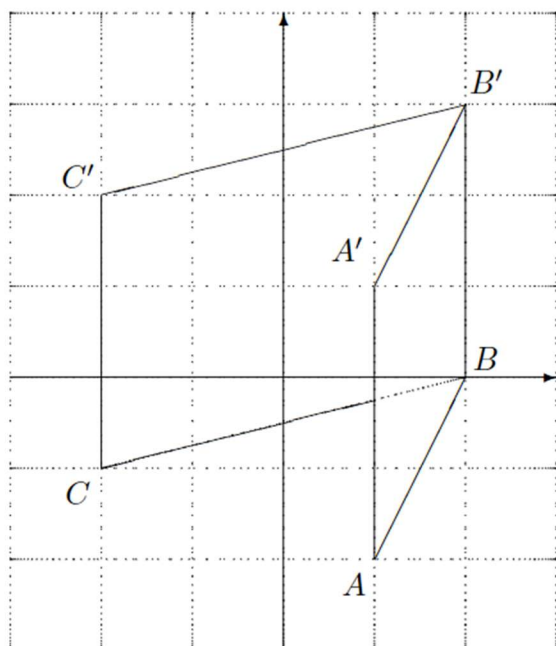
$$x_J = 1,5 \quad y_J = 0,5$$

7. Colorier de différentes couleurs les trois faces visibles du prisme.

**Exercice 4.**

La figure ci-contre représente un **prisme incomplet**. On a marqué les sommets :  $A, B, C, A', B', C'$ , ainsi que certaines arêtes.

1. Reproduisez la figure sur une feuille de papier millimétré.
2. Dans le repère défini par les deux axes et le quadrillage, on considère le point  $D(-1; -2)$ . Placez ce point sur votre figure.
3. Tracez les segments  $[DA]$  et  $[DC]$ .
4. Placez le point  $D'$  à l'endroit qu'il faut pour que le prisme ait pour **base** le quadrilatère  $ABCD$  et pour **couvercle** le quadrilatère  $A'B'C'D'$ .
5. Complétez le dessin du prisme et colorier de différentes couleurs ses quatre faces visibles.

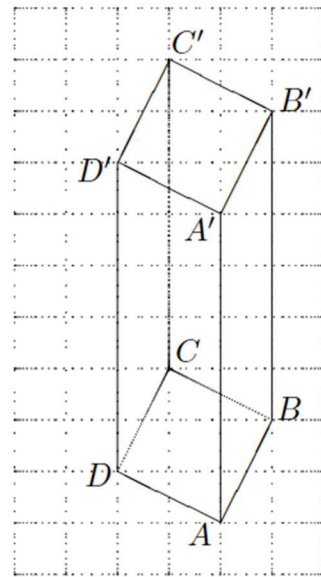


**Exercice 5** (*Le donjon*).

Le donjon représenté ci-contre, a la forme d'un **prisme droit** dont la base est un carré  $ABCD$  de côté 3 m. La hauteur du donjon est :

$$AA' = BB' = CC' = DD' = 15 \text{ m}$$

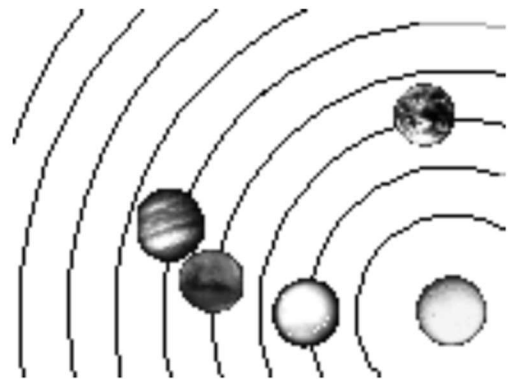
1. Calculez l'aire de la base du donjon.
2. Calculez l'aire de chacune de ses faces latérales.
3. Calculez le volume du donjon.
4. Dessinez le donjon en utilisant le quadrillage de votre feuille. Coloriez-le.

**Exercice 6** (*Les planètes*).

1. Tracez un segment  $[EO]$  horizontal de 12 cm,  $E$  à gauche,  $O$  à droite. Marquez le milieu  $H$  de ce segment.
2. Tracez le **demi-cercle**  $\mathcal{C}$ , de centre  $H$ , passant par  $E$ , et situé au-dessus de  $(EO)$ .
3. Le segment  $[EO]$  représente la **ligne d'horizon** de l'est ( $E$ ) vers l'ouest ( $O$ ). Le point  $H$  représente l'observateur. Au petit matin, le 30 décembre 2015, deux heures avant le lever du soleil, l'observateur est déjà levé, et il regarde vers le sud, puis vers l'est, à sa gauche. Il voit que les planètes Vénus ( $V$ ), Mars ( $M$ ), Jupiter ( $J$ ) sont déjà levées, visibles au-dessus de l'horizon à l'est.
  - a/ Marquez les points  $V, M, J$  sur le demi-cercle  $\mathcal{C}$ , tels que

$$\widehat{EHV} = 9^\circ \quad \widehat{EHM} = 31^\circ \quad \widehat{EHJ} = 47^\circ$$

- b/ Calculez ou mesurez l'angle  $\widehat{VHM}$  entre Vénus et Mars.
- c/ Calculez ou mesurez l'angle  $\widehat{MHJ}$  entre Mars et Jupiter.
- d/ Comparez les angles trouvés avec ceux que vous pouvez mesurer sur la **figure simulée** ci-contre, qui montre une partie du **système solaire, vue du dessus**, à la même date. La Terre est en haut, le Soleil est en bas à droite, au centre des trajectoires circulaires des planètes. Vénus est blanche, à gauche du Soleil, Jupiter présente des raies obliques, Mars est entre Vénus et Jupiter.



À l'heure où se fait l'observation, le Soleil est en-dessous de la ligne d'horizon de l'observateur, il est donc invisible pour lui. Pour voir les **positions simulées** des planètes :

<http://users.skynet.be/fa274406/rubriques/live/orbites/orbites.htm>

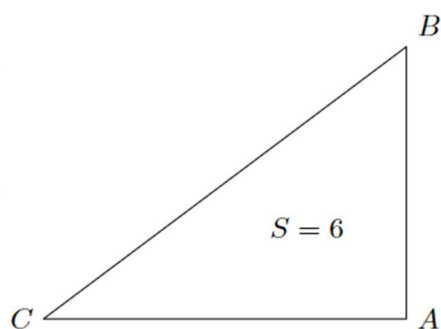
## 6 Correction des exercices

### Ex. 1, p. 154

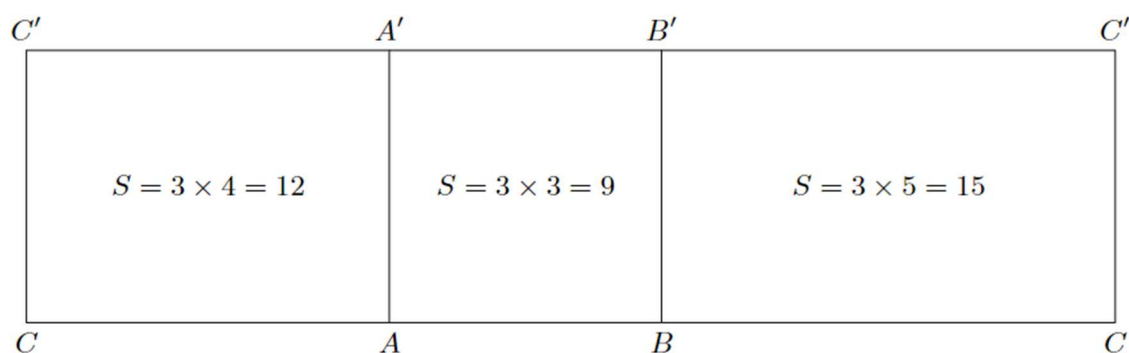
1. On a représenté ci-contre en vraie grandeur la base du prisme.

2. On applique la formule de l'aire d'un triangle rectangle, dont les côtés de l'angle droit sont  $b$  et  $c$  :

$$S = \frac{1}{2} \times bc = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \text{ cm}^2$$



3. et 4. Les faces latérales, à plat, sont représentées ci-dessous, avec la surface de chacune :



5. On sait que le volume du prisme d'aire de base  $\mathcal{B}$  et de hauteur  $h$  est  $V = \mathcal{B}h$  (voir prop. 3, p. 152). Ici, la base du prisme est le triangle  $ABC$  d'aire  $\mathcal{B} = 6$ , et sa hauteur est  $h = 3$ . On a donc :

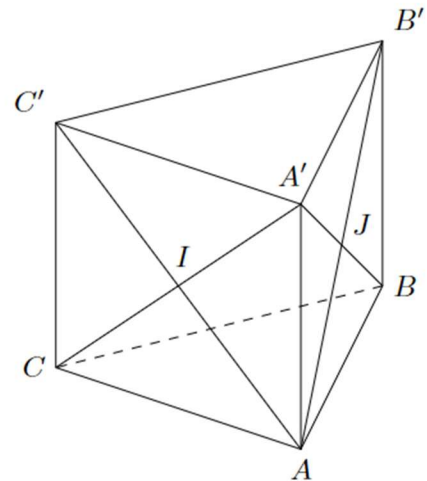
$$V = 6 \times 3 = 18 \text{ cm}^3$$

**Ex. 2, p. 154** Les coordonnées demandées sont :

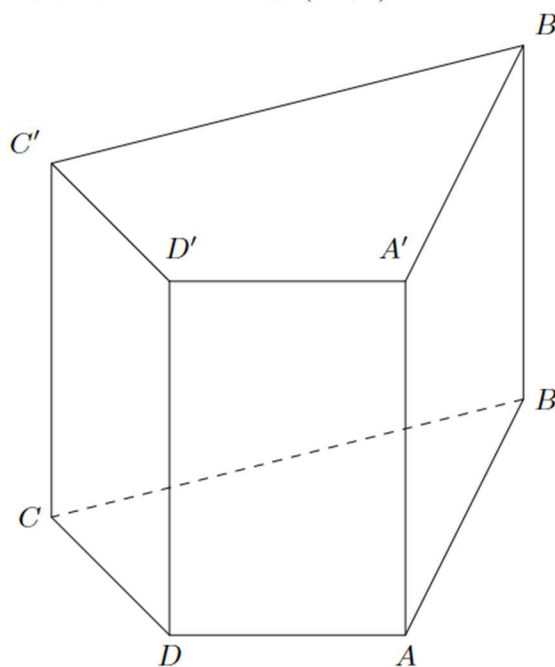
sommet	A	B	C	D	E	F	G
$x$	4	0	0	4	2	-2	-2
$y$	2	0	-2	0	3	1	-1

Ex. 3, p. 155

sommet	A	B	C	A'	B'	C'	I
$x$	1	2	-2	1	2	-2	-0.5
$y$	-2	0	-1	1	3	2	0



**Ex. 4, p. 155** La hauteur du prisme étant 3, le point  $D'$  doit être au-dessus de  $D$  à distance 3. Donc les coordonnées de  $D'$  sont  $(-2, 1)$ .



**Ex. 5, p. 156** 1. La base du donjon étant un carré de côté 3 m, son aire vaut :

$$\mathcal{B} = 3^2 = 9 \text{ m}^2$$

2. Les quatre faces latérales du donjon sont toutes des rectangles de dimension 3 et 15. L'aire commune de ces faces est donc :

$$S = 3 \times 15 = 45 \text{ m}^2$$

3. On applique la formule du volume  $V = \mathcal{B}h$  (voir prop. 3, p. 152) avec  $\mathcal{B} = 9$  et  $h = 15$ . On obtient :

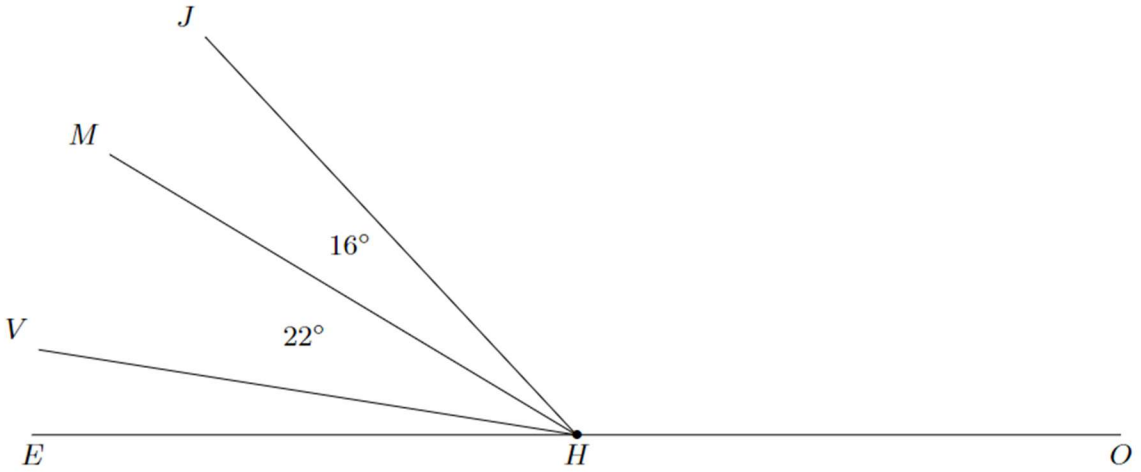
$$V = 9 \times 15 = 135 \text{ m}^3$$

**Ex. 6, p. 156** Les angles réels que l'observateur a pu mesurer à l'Est, entre Vénus et Mars, et entre Mars et Jupiter sont :

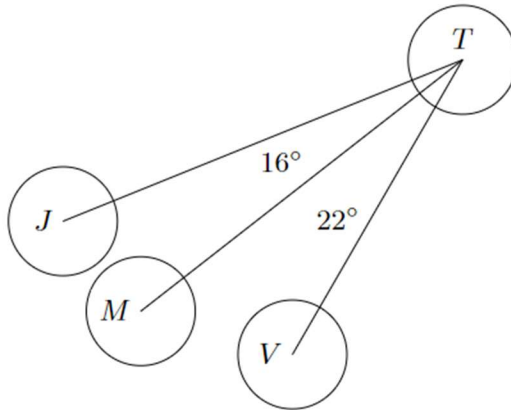
$$\widehat{VHM} = \widehat{EHM} - \widehat{EHV} = 31 - 9 = 22$$

$$\widehat{MHJ} = \widehat{EHJ} - \widehat{EHM} = 47 - 31 = 16$$

On peut les représenter sur le schéma ci-dessous :



Les valeurs sont les mêmes que celles que l'on peut mesurer sur la figure simulée du système solaire, vue du dessus, à la même date :



# Index

- ∈, 7, 55
- ≠, 7, 56
- <, 56
- >, 56
- ⇒, 7, 106, 107, 110
- (AI) ⊥ (AJ), 34
- $d_1 \parallel d_2$ , 7, 38
- $d_1 \perp d_2$ , 7, 38
- [AI], 106
- π, 39
- ≈, 22, 31, 39
- s(M), 113
- s( $\mathcal{F}$ ), 114
  
- à la règle et au compas, 110–112
- abscisse, 97
- addition des angles, 106
- aire d'un carré, 40
- aire d'un disque, 41
- aire d'un rectangle, 40
- aire d'un triangle, 41
- aire d'un triangle rectangle, 40
- angle, 34
- angle au centre, 35
- angle droit, 34
- angle plat, 35
- angles d'un triangle, 35
- arêtes, 42, 151
- Aristote, 1
- axe de symétrie, 116
- axe des abscisses, 98
- axe des ordonnées, 98
- axiome d'Euclide, 33
  
- base d'un prisme, 151
- base d'un triangle, 38, 41
- base principale, 112
- bissectrice, 111, 112
- carré, 37
- carré magique, 86
- centre d'un rectangle, 37
- cercle, 33
- cercles confondus, 115
- cercles disjoints, 115
- cercles sécants, 115
- Christophe Colomb, 101
- colonne, 86
- comptine, 41
- coordonnées, 98
- corollaire (**cor.**), 7
- côtés d'un angle, 105
- côtés d'un triangle, 35
- cube, 42
- cylindre, 151
  
- décomposition en facteurs premiers, 65
- définition (**déf.**), 7
- demi-droite, 106
- développement, 76
- développer, 76
- diagonales, 37
- diamètre, 34
- disque, 34
- distance, 33
- diviseur, 17, 62
- divisible, 17, 62
- division de 1 par 7, 71
- division euclidienne, 61
- droite, 33
- droites parallèles, 38
- droites perpendiculaires, 34, 38
  
- égalité de division euclidienne, 61
- égalité de division, 16
- élément, 55
- énigme, 69
- ensemble de points, 55
- équateur, 153

- équidistant, 109
- Euclide, 1, 61
- faces, 42, 151
- facteurs d'un produit, 76
- factorisation, 77
- formule de la vitesse, 30
- fraction et nombre décimal, 19
- hauteur, 112
- hauteur d'un cylindre, 151
- hauteur d'un prisme, 151
- hauteur d'un triangle, 38
- hémisphère, 153
- inégalité triangulaire, 105
- largeur d'un rectangle, 37
- latitude, 153
- ligne, 86
- longitude, 153
- longueur d'un rectangle, 37
- losange, 108
- lunules d'Hippocrate, 127
- méridien, 153
- médiatrice, 109, 112
- médiatrice principale, 113
- mise en facteur, 77
- multiple, 17, 62
- nombre impair, 17
- nombre pair, 17
- nombre premier, 64
- $\omega$ , 119
- ordonnée, 98
- papyrus de Rhindt, 5
- parallélisme de trois droites, 108
- pentagone régulier, 45
- perspective, 42
- planètes, 156
- point d'intersection de deux droites, 38
- polygone régulier, 37
- postulat des parallèles, 107
- priorité des opérations, 66
- prisme droit, 151
- produits en croix, 30
- projection orthogonale sur une droite, 113
- proposition (**prop.**), 7
- Pythagore, 1
- quadrilatère, 36
- rayon, 34
- rayon d'un cylindre, 151
- réciproque, 109, 110
- rectangle, 37
- réduire, 76
- segment, 33
- série de divisions, 65
- sommet d'un angle, 105
- sommet principal, 112
- sommets, 42, 151
- sommets d'un triangle, 35
- sommets opposés d'un rectangle, 37
- sphère, 152
- symétrie axiale, 113
- symétrique d'un point, 113
- symétrique d'une figure, 114
- tables de multiplication, 72
- théorème des parallèles, 107
- théorème des perpendiculaires, 8, 107
- théorème (**th.**), 7
- trapèze, 109
- triangle équilatéral, 36
- triangle isocèle, 36
- triangle rectangle, 36
- unité d'aire  $\text{cm}^2$ , 41
- unité d'aire  $\text{km}^2$ , 41
- unité d'aire  $\text{m}^2$ , 41
- vitesse constante, 30
- voilier, 41
- volume du cube, 152
- volume du cylindre, 152
- volume du prisme, 152

# Mathématiques

## CLASSE DE 6<sup>e</sup>

Pour bien faire comprendre les notions nouvelles du cours de mathématiques de sixième, ce livre comporte des explications concrètes avec en première partie des révisions de cours moyen pour consolider les connaissances. Ces notions sont entrecoupées de petites questions posées à l'élève, qui sont résolues un peu plus loin.

Une série d'exercices clôt chaque chapitre, la plupart originaux. Ils sont corrigés entièrement pour montrer aux élèves les méthodes de raisonnement. Presque tous de niveau facile ou moyen, ils ont pour ambition première de faciliter l'assimilation du cours et d'entraîner l'élève à la pratique aisée des techniques de base.

Mais l'auteur n'a pas pu s'empêcher de glisser quand même quelques exercices plus relevés, intéressants et instructifs, destinés à faire aimer les mathématiques, et à donner aux enfants suffisamment de satisfaction pour justifier les efforts qu'ils auront consentis pour les comprendre et les résoudre.

*Jean-Louis Frot a enseigné les mathématiques dans toutes les classes de la Sixième à la Terminale dans différents lycées, et en particulier seize ans au Lycée Henri-IV à Paris. Il est auteur de plusieurs livres de mathématiques.*

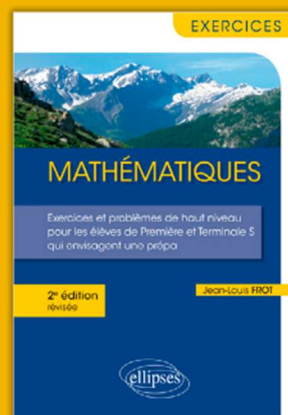
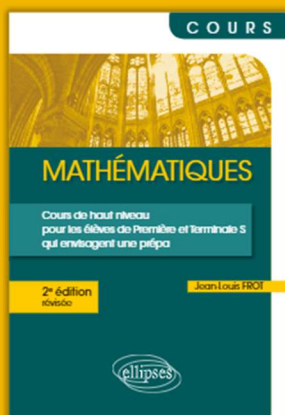
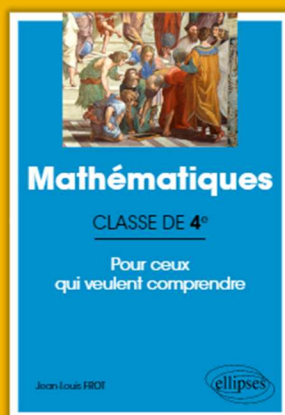
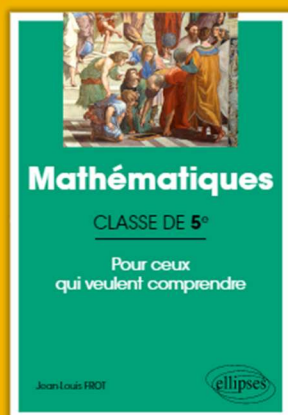


Illustration de couverture : Euclide représenté dans *La fresque de l'École d'Athènes* peinte par Raphaël, 1509-1511.

[www.editions-ellipses.fr](http://www.editions-ellipses.fr)

