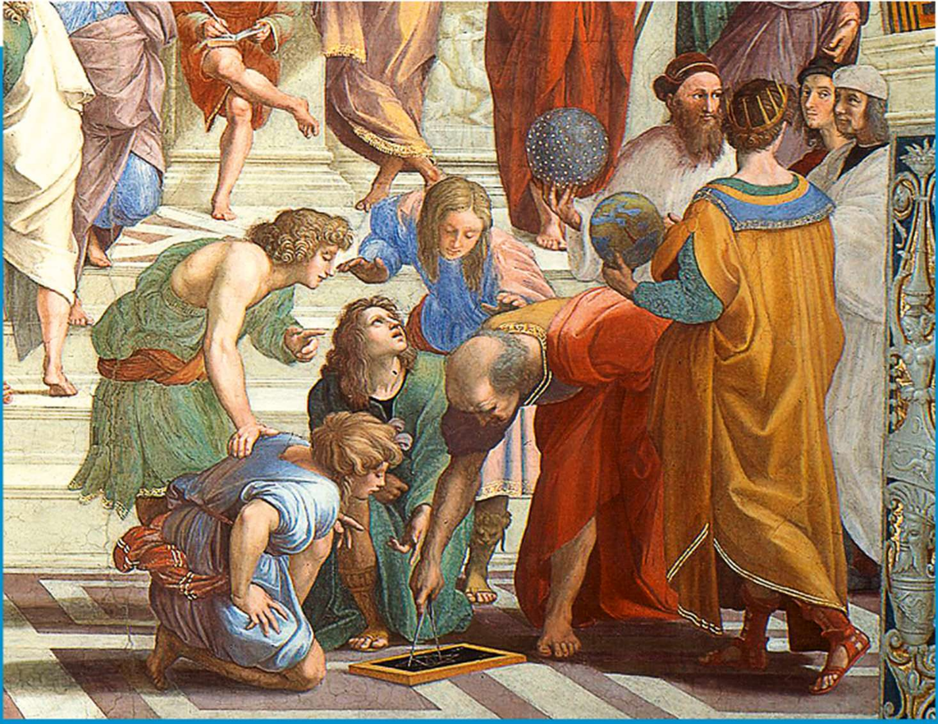


Mathématiques

CLASSE DE 4e

Pour ceux
qui veulent comprendre

Jean-Louis FROT

ellipses

Mathématiques

CLASSE DE **4**^{e}

Pour ceux
qui veulent comprendre

Jean-Louis **FROT**

ellipses

Avant-propos

Les années passées jadis au milieu de mes élèves de collège m'ont conduit à penser que dans les petites classes, il faut essayer de donner aux enfants :

le goût et l'émerveillement des nombres, des figures et des jolis calculs.

J'ai enseigné les mathématiques dans toutes les classes du collège et du lycée, mais surtout (dans des conditions très privilégiées, au lycée Henri IV, à Paris) en classes de première S et terminale S. Je sais que la principale difficulté pour enseigner les mathématiques est de les rendre humaines, attractives et intéressantes, ce qui ne veut pas dire ludiques ou amusantes car les mathématiques sont une chose sérieuse.

Bien souvent, les mathématiques sont enseignées de façon rébarbative et ennuyeuse. Pourtant, et j'ai pu le constater tout au long de ma carrière, la curiosité et l'intelligence des enfants et des jeunes ne demandent qu'à croître et à se fortifier. Il leur faut donc une **nourriture intellectuelle vivifiante**.

C'est ce qui m'a décidé à prendre la plume, avec l'intention d'écrire un livre de mathématiques de niveau collège qui contribuât à la formation des enfants, du point de vue intellectuel, humain, spirituel, et qui exaltât aussi le sens de la **beauté** et du **courage**, conscient que ces grands mots vont contre l'air du temps.

L'origine des mathématiques se perd dans la nuit des temps. On connaît le **papyrus de Rhindt**, découvert sur un site archéologique de Thèbes, en Égypte, qui date du XVIe siècle avant Jésus-Christ. Il contient des problèmes résolus d'arithmétique et d'arpentage.

On doit aux Grecs de l'Antiquité, à partir du Ve siècle avant Jésus-Christ, les plus anciennes **démonstrations** écrites et rigoureuses qui nous soient parvenues. Elles portent sur la géométrie et l'arithmétique. Les grands mathématiciens de la Grèce antique sont Thalès, Euclide, Pythagore, Archimède, Diophante, etc.

Il semble que les mathématiques soient entrées en sommeil après le déclin et la chute de Rome (476), et qu'elles ne se soient réveillées que sous Charlemagne (800). Mais au cours de cette période de latence, des mathématiques venant de l'Inde et de la Chine ont été transmises et enrichies par des **mathématiciens chrétiens ou perses** du bassin méditerranéen qui écrivaient en latin, ou en arabe du fait des conquêtes musulmanes commencées au VIIe siècle et poursuivies bien au-delà. On connaît ainsi un écrit de quelques pages, datant du IXe siècle, et qui a pour titre "*al jabr*" (algèbre). Le savant moine bénédictin Gerbert, de l'abbaye d'Aurillac, élu pape en 999 sous le nom de Sylvestre II, a introduit l'algèbre en Europe.

Le développement ultérieur des sciences est en grande partie dû aux progrès accomplis en mathématiques dans le formalisme et les notations, à partir du XVe siècle (Chuquet, Viète) et à l'intrépidité de quelques expérimentateurs et géomètres (Cardan, Bombielli, Toriccelli, Galilée, Descartes, Pascal, Fermat, etc.). C'est le nouvel essor des mathématiques qui s'est produit dans l'Europe chrétienne qui a permis le développement spectaculaire de la physique à partir du XVIIe siècle.

Depuis cette époque, on ne peut plus **rien faire de sérieux** en sciences sans une formation de base solide en mathématiques. « La nature est un livre écrit en langage mathématique » disait Galilée au XVIe siècle.

Les mathématiques sont le lieu privilégié des certitudes rationnelles, des notions abstraites et des démonstrations rigoureuses. Elles ont contribué au développement intellectuel de l'homme au cours des siècles, elles sont une de ses conquêtes, laborieusement acquise, elles constituent une composante majeure de la **culture universelle**.

Nombre de prélats et de princes chrétiens, depuis le Moyen Âge, n'ont pas hésité à se frotter aux sciences de leur époque, à les maintenir, à les protéger et à s'entourer de savants. On a déjà cité le pape de l'an mil, Gerbert d'Aurillac (Sylvestre II). Plus avant, on peut évoquer saint Augustin (mort en 430) qui relate quelques faits de ses années d'apprentissage dans ses *Confessions* (Liv. 4, chap. 16) :

« J'ai compris sans beaucoup de peine, et sans être aidé d'aucun homme tout ce que j'ai pu lire touchant l'art de l'Éloquence, la Dialectique, la Géométrie, la Musique et l'Arithmétique. »

En France, depuis le milieu des années 1980, les programmes de mathématiques du collège et du lycée ont été progressivement **bouleversés** et **saccagés**. Ayant déjà évoqué ce sujet dans l'épilogue du livre référencé en note [1], je ne dirai rien ici des partis pris idéologiques qui ont conduit à ces bouleversements et à ce saccage. Mais je dirai quelques mots des conséquences : il ne subsiste plus dans l'enseignement qui est dispensé aux élèves aujourd'hui, qu'une caricature grimaçante des mathématiques. Les mathématiques n'ont plus d'attrait pour les élèves, et la plupart d'entre eux en sont justement dégoûtés. Certains parviennent cependant à échapper au massacre, grâce à leurs parents qui ont les moyens de leur fournir une bonne instruction.

Je ne dis pas que les programmes de mathématiques des années 1950 à 1980 n'avaient pas de défauts, mais je dis que les programmes actuels ne sont plus des mathématiques. Et quand on feuillette la plupart des manuels français de mathématiques destinés à l'enseignement d'aujourd'hui, on est consterné, saisi de colère. Et on se dit :

Quel gâchis ! Quelle décadence ! Pauvres élèves !

Prenant la plume, disais-je, je me suis attaché, dans mes livres destinés au collège, à exposer et expliquer de mon mieux les bases de ce que doit être un enseignement de qualité. La matière abordée est accessible à un élève de niveau moyen, aidé d'un professeur qui choisira ce qui l'intéresse pour faire son cours. Mes livres ne sont qu'un outil entre les mains du professeur et de ses élèves. Le rôle du professeur est déterminant, c'est lui qui détient le savoir, c'est la référence, le modèle que l'enfant doit d'abord tâcher d'imiter lors de son initiation. Un bon professeur sait transmettre son enthousiasme. Il fait preuve de bienveillance, de patience et d'ingéniosité pour faire comprendre les mathématiques et les rendre familières. Tout un savoir non écrit passe par le professeur. Mais je ne voudrais pas laisser croire que je détiens une formule miracle pour enseigner les mathématiques, ou que les mathématiques sont une discipline facile, que l'on peut maitriser sans efforts.

Pour bien faire comprendre les notions nouvelles, les livres comportent des explications concrètes et, aux niveaux 6^e^, 5^e^, 4^e^, ils sont parsemés de **petites questions** posées à l'élève, et qui sont résolues un peu plus loin.

Une série d'exercices clôt chaque chapitre, la plupart originaux. Ils sont **corrigés** entièrement pour montrer aux élèves les méthodes de raisonnement. Presque tous de niveau facile ou moyen, ils ont pour ambition première de faciliter l'assimilation du cours et d'entraîner l'élève à la pratique aisée des techniques de base, un peu comme les gammes et les exercices d'assouplissement des doigts pour le piano. Mais l'auteur n'a pas pu s'empêcher de glisser quand même quelques **exercices plus relevés**, intéressants et instructifs,

---

1. J.-L. Frot : *Mathématiques - Cours de haut niveau pour les élèves de Première et Terminale S qui envisagent une prépa - 2^e^ édition révisée*, Ellipses (2018).

destinés à faire **aimer les mathématiques**, et à donner aux enfants suffisamment de satisfaction pour justifier les efforts qu'ils auront consentis pour les comprendre et les résoudre. (Pour les élèves qui veulent aller plus loin, il y a des exercices de niveau plus ambitieux dans le livre référencé en note [2]).

Il ne faut pas se précipiter sur les corrections d'exercices. Il faut se donner la peine de chercher pour avoir la **satisfaction de trouver** par soi-même. Si on parvient sans aide à résoudre ne serait-ce qu'une petite partie des questions, c'est déjà bien. Et puis, rien n'empêche de laisser de côté un exercice qui paraît hors d'atteinte à un moment donné, et d'y revenir un autre jour, lorsqu'on aura acquis plus de connaissances et d'aisance.

Un exercice doit toujours être d'abord cherché au brouillon. Quand on a résolu la première question au brouillon, on peut rédiger la solution de cette première question au propre. On passe ensuite à la deuxième question, et on continue de la même façon. Si on bute sur une question, on peut souvent l'admettre, et passer à la suivante sans dommage.

Un cours de mathématique introduit et explique des notions nouvelles. Si on veut en tirer profit, ces notions doivent être **étudiées** avec soin pour pouvoir les comprendre, et doivent ensuite être **apprises** par cœur, jusqu'à pouvoir **réciter** définitions, règles et théorèmes (*voir* ci-après). C'est un bon entraînement pour les élèves de **travailler à deux**, de réciter et de s'interroger à tour de rôle. Le livre de mathématiques doit devenir un compagnon familier auquel on pourra même avoir recours l'année suivante. L'idéal étant de conserver précieusement ses livres de mathématiques des quatre années du collège.

Le style mathématique

On verra apparaître, au fil des pages de ce livre, les mots suivants :

- **définition** (abrégé parfois en **déf.**) dit ce que signifie un mot mathématique nouveau,
- **proposition** (abrégé parfois en **prop.**) = propriété,
- **théorème** (abrégé parfois en **th.**) = propriété importante,
- **corollaire** (abrégé parfois en **cor.**) = conséquence.

On donne dans le livre (lorsque c'est possible) des définitions rigoureuses des termes que l'on utilise. Ensuite, on énonce (et démontre parfois) des propositions et des théorèmes. Pour formaliser les énoncés, on utilise des symboles qui ont déjà été introduits en classe de 6ᵉ ou de 5ᵉ, et qui seront revus cette année. Voyons-en ici quelques-uns :

Symbole	Lecture	Exemple	Traduction
$\in$	appartient	$A \in d$	A est un point de d.
$\neq$	différent	$1 \neq 0$	1 n'est pas nul.
$\Rightarrow$	implique, alors	$x = 1 \Rightarrow x \neq 0$	Si $x = 1$ alors il n'est pas nul.
$\Leftrightarrow$	équivaut	$a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$	a^2 est nul équivaut à a est nul.
$\perp$	perpendiculaire	$d_1 \perp d_2$	d_1 et d_2 sont perpendiculaires.
$/\!/$	parallèle	$d_1 /\!/ d_2$	d_1 et d_2 sont parallèles.

2. J.-L. Frot : *Mathématiques, exercices avec corrigés et rappels de cours pour ceux qui veulent s'initier pour de bon, 6ᵉ à 3ᵉ , 2ᵉ édition révisée*, Clovis (2020).

Prenons pour exemple l'énoncé suivant :

Théorème 1. (théorème des perpendiculaires) *Si deux droites* ***du plan*** *sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles.*

Il peut se formuler ainsi, les symboles d_1, d_2, d désignant des droites du plan :

$$\boxed{(d_1 \perp d \ \text{ et } \ d_2 \perp d) \Rightarrow d_1 /\!\!/ d_2}$$

Les textes mathématiques comportent parfois un vocabulaire lourd, pénible à écrire et à lire pour le débutant. Quand quelques abréviations et symboles peuvent alléger le style et mieux faire **comprendre l'essentiel**, on les utilise. Comparer :

> " Les droites d_1 et d_2 sont parallèles d'après le théorème des perpendiculaires (*voir* théorème 1). "

> " $d_1 /\!\!/ d_2$ d'après le th. des perpendiculaires (*voir* th. 1) "

On verra dans tout le livre, qu'abréviations et symboles mettent l'accent sur les **propriétés**, les **raisonnements**, et les **points importants**. Ils rendent le texte plus fluide, plus court, et donc plus facile à appréhender.

Ceci ne veut pas dire que l'auteur soit hostile ou indifférent au **beau style**. Ce qu'il veut ici, c'est donner au lecteur des modèles simples pour lui apprendre à réfléchir, raisonner et rédiger clairement.

Le livre de quatrième

La classe de quatrième c'est l'année du **calcul algébrique**. On s'appuie sur les connaissances et l'expérience acquises en classe de cinquième (addition et multiplication des entiers relatifs, calculs sur les fractions, développement et factorisation de petites expressions) pour se lancer dans la grande aventure des calculs abstraits.

Mais nous y allons **progressivement**, en commençant par des révisions sur les décimaux (§ 2, p. 23). Nous résolvons des équations en utilisant les deux règles de base de l'algèbre élémentaire et la règle d'annulation. Nous définissons les puissances, et le lecteur est entraîné à leur utilisation par de nombreux exercices. Nous développons ou factorisons certaines fonctions numériques très simples (§ 3, p. 87).

Le calcul algébrique au service de la géométrie (théorème de Thalès, théorème de Pythagore, cosinus d'un angle) nous permet d'obtenir dans les exercices plusieurs résultats remarquables : position du pied de la bissectrice dans un triangle (ex. 7, p. 104), distance de la ligne d'horizon (ex. 25, p. 109), formule du cosinus (ex. 44, p. 115), etc.

Il y a aussi un chapitre sur les **vecteurs** qui culmine avec la règle du parallélogramme.

Alors, hardi petits !

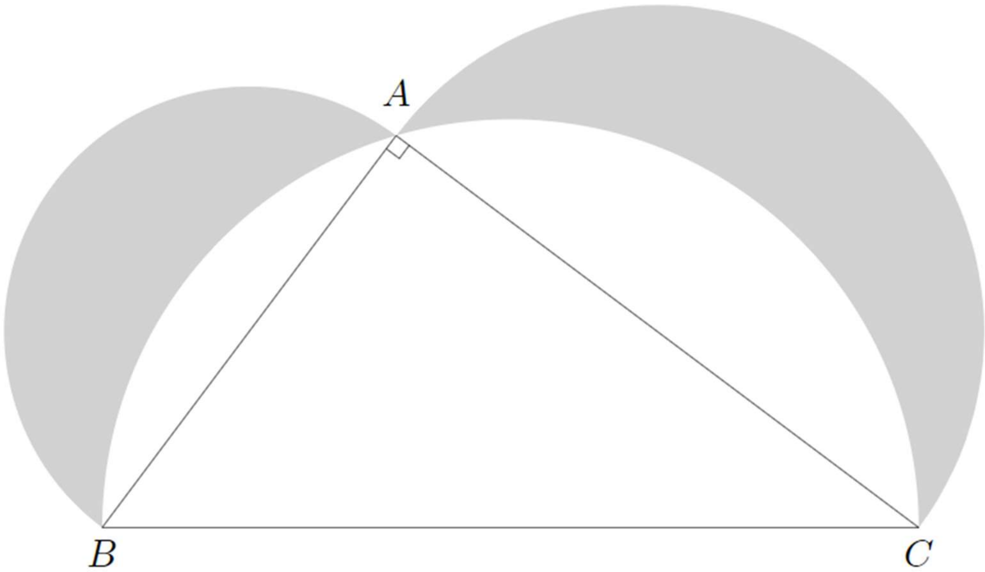

A
B
C

Table des matières

Rappels de quelques résultats

Chapitre 1

Géométrie plane

1 Médiatrices et cercle circonscrit

En géométrie, on note parfois les angles avec les premières lettres de l'**alphabet grec** : $\boxed{\alpha}$ se prononce "alpha", $\boxed{\beta}$ se prononce "béta", $\boxed{\gamma}$ se prononce "gamma".

Pour certains points, on utilise aussi la lettre grecque $\boxed{\omega}$ qui se lit "petit oméga" et la lettre $\boxed{\Omega}$ qui se lit "grand oméga"

Définition 2. *La **médiatrice** d'un segment est la droite issue du milieu de ce segment, et qui lui est perpendiculaire.*

Tout point de la **médiatrice** d'un segment, est **équidistant** de ses extrémités :

Théorème 3. *Soient A et B deux points du plan, distincts, et soit d la médiatrice de $[AB]$. Pour tout point M du plan on a :*

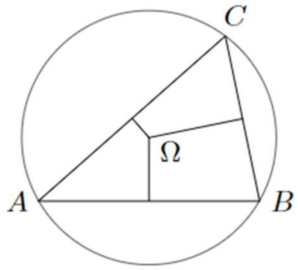
$$M \in d \Rightarrow MA = MB$$

Le symbole logique $\boxed{\Rightarrow}$ se lit "**implique**", et signifie "**alors**". La **réciproque** de ce théorème est vraie, et dit que tout point **équidistant** de deux points, est sur la **médiatrice** du segment joignant ces deux points :

Théorème 4. *Soient A et B deux points du plan, distincts, et soit d la médiatrice de $[AB]$. Pour tout point M du plan on a :*

$$MA = MB \Rightarrow M \in d$$

Proposition 5. *Les médiatrices des trois côtés d'un triangle sont **concourantes** en un même point Ω. Le cercle centré en Ω et passant par l'un des sommets du triangle passe aussi par les deux autres sommets.*



Définition 6. *Le cercle précédent est appelé **cercle circonscrit** au triangle ABC.*

2 Les angles

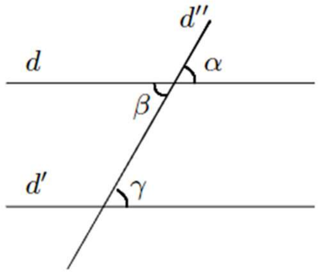
Théorème 1. *La somme des angles d'un triangle vaut $180°$.*

Définition 2. *Deux angles dont la somme vaut $90°$ sont dits **complémentaires**.*

Corollaire 3. *Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.*

Proposition 4. *Si un triangle est à la fois rectangle et isocèle, ses angles à la base valent $45°$.*

Définition 5. *Soient d et d' des droites **parallèles**, coupées par une droite d''. Ces trois droites définissent trois angles α, β et γ qui sont nommés ainsi :*
- *α et β opposés par le sommet,*
- *β et γ alternes-internes,*
- *α et γ correspondants.*

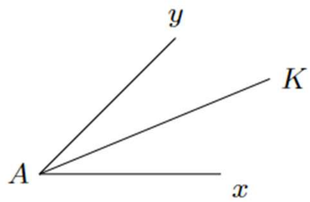


Proposition 6. *Les angles alternes-internes, opposés par le sommet, correspondants sont égaux.*

3 Bissectrices et cercle inscrit

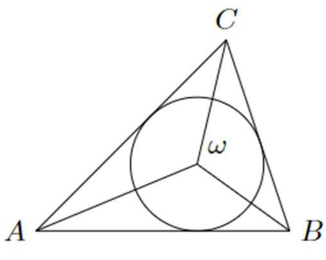
Proposition 1. *Soit $\widehat{xAy}$ un angle. Il existe une demi-droite $[AK)$ telle qu'on ait $K \in \widehat{xAy}$ et de plus :*

$$\widehat{KAx} = \widehat{KAy}$$



Définition 2. *La **demi-droite** $[AK)$ est appelée **bissectrice** de l'angle $\widehat{xAy}$. La bissectrice d'un angle est donc la demi-droite issue du sommet de cet angle, et qui partage l'angle en **deux angles égaux**.*

Proposition 3. *Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un même point ω. Le cercle centré en ω et **tangent** à l'un des côtés du triangle est **tangent** aux deux autres côtés.*



Définition 4. *Le cercle précédent est appelé **cercle inscrit** dans le triangle ABC.*

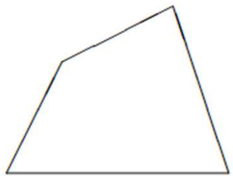
4 Théorème du demi-cercle

Théorème 1. (théorème du demi-cercle) *Pour tout point M d'un cercle de diamètre $[AB]$, si $M \neq A$ et $M \neq B$, alors $(MA) \perp (MB)$.*

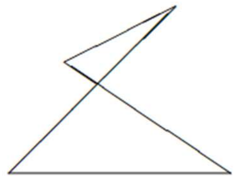
Théorème 2. (réciproque du théorème du demi-cercle) *Si un triangle MAB est rectangle en M, son cercle circonscrit a pour diamètre $[AB]$.*

5 Parallélogramme

Dans ce livre, les quadrilatères considérés ne sont **pas croisés** :

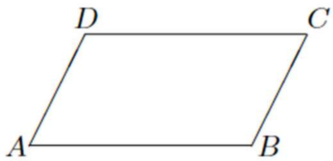


quadrilatère **non croisé**



quadrilatère **croisé**

Définition 1. *Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.*



Proposition 2. *Dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux, les angles consécutifs sont supplémentaires.*

Proposition 3. *Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux.*

On a les **équivalences** ou **critères** suivants :

$$\boxed{\text{parallélogramme} \Leftrightarrow \text{deux côtés parallèles et égaux}}$$

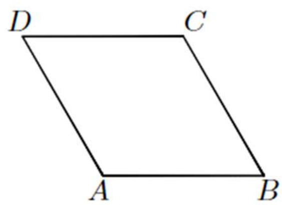
$$\boxed{\text{parallélogramme} \Leftrightarrow \text{deux couples de côtés opposés égaux}}$$

$$\boxed{\text{parallélogramme} \Leftrightarrow \text{diagonales de même milieu}}$$

Définition 4. *On appelle **centre** d'un parallélogramme le milieu de ses diagonales.*

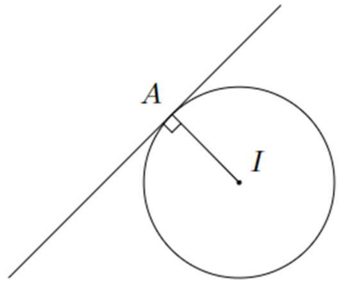
Définition 5. *Un **losange** est un quadrilatère dont les quatre côtés ont même longueur.*

Proposition 6. *Un losange est un **parallélogramme**.*



6 Tangente à un cercle

Définition 1. *Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre I, et soit un point A appartenant à $\mathscr{C}$. La droite issue de A et perpendiculaire à (IA) est appelée* ***tangente*** *en A au cercle. On dit que* ***la droite et le cercle sont tangents*** *en A.*



Chapitre 2

Arithmétique

1 Multiples et diviseurs

Définition 1. *On dit qu'un entier a est* ***divisible*** *par un entier b si la division de a par b tombe juste, ce qui revient à dire qu'il existe un entier q tel que :*

$$a = b \times q$$

ce qui correspond à la division suivante :

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} 0 & q \end{array}$$

Définition 2. *Si a est divisible par b, on dit que b est un* ***diviseur*** *de a, et que a est un* ***multiple*** *de b.*

On peut trouver les **diviseurs d'un entier** en les associant deux à deux. Par exemple les diviseurs de 24 :

$$\underbrace{1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad 24}$$

$$1 \quad \underbrace{2 \quad \dots\dots\dots \quad 12} \quad 24$$

$$1 \quad 2 \quad \underbrace{3 \ \dots\dots \ 8} \quad 12 \quad 24$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \underbrace{4 \quad 6} \quad 8 \quad 12 \quad 24$$

et les diviseurs de 16 :

$$\underbrace{1 \quad \dots\dots\dots \quad 16}$$

$$1 \quad \underbrace{2 \ \dots \ 8} \quad 16$$

$$1 \quad 2 \quad \boxed{4} \quad 8 \quad 16$$

Proposition 3. *Les multiples non nuls de b sont : $b \quad 2b \quad 3b \quad 4b \quad 5b \quad 6b \ \dots$ Il y en a une* ***infinité****.*

2 Plus grand commun diviseur

Définition 1. *Soient a et b des entiers non nuls. On note* $\text{pgcd}(a, b)$ *le* ***plus grand commun diviseur*** *des entiers a et b, c'est-à-dire le nombre qui divise* ***à la fois*** *a et b, et qui est le plus grand possible.*

Considérons, par exemple, les diviseurs de 12 :

1	2	3	4	6	12

puis ceux de 8 :

1	2	4	8

Les **diviseurs communs** de 12 et de 8 sont donc :

1	2	4

et le plus grand d'entre eux est 4. Donc :

$$\boxed{\text{pgcd}\,(12, 8) = 4}$$

3 Plus petit commun multiple

Définition 1. *Soient a et b des entiers non nuls. On note* $\text{ppcm}(\text{a}, \text{b})$ *le* ***plus petit commun multiple*** *de a et b, c'est-à-dire le multiple* **non nul** *de a et de b qui est le plus petit possible.*

Par exemple, les multiples (non nuls) de 6 sont :

$$6 \quad 12 \quad 18 \quad 24 \quad 30 \quad 36 \quad 42 \quad 48 \quad 54 \quad \dots$$

La liste ne s'arrête pas, elle est infinie. De même, les multiples (non nuls) de 8 sont :

$$8 \quad 16 \quad 24 \quad 32 \quad 40 \quad 48 \quad 56 \quad \dots$$

On voit donc que le premier **multiple commun** non nul de 6 et de 8 est 24. On a donc :

$$\boxed{\text{ppcm}(6, 8) = 24}$$

Classe de quatrième

Chapitre 1

Les nombres décimaux

1 Définition

Un nombre décimal est soit un entier, soit un nombre à virgule qui peut comporter un **nombre fini de chiffres** à droite de la virgule. Un nombre décimal peut être positif, négatif ou nul. Les nombres suivants sont décimaux :

$$1 \qquad 0 \qquad -2 \qquad -1{,}4 \qquad 37{,}05 \qquad 3{,}14 \qquad -557{,}123008$$

2 Opérations de base sur les décimaux

Proposition 1. *Pour **multiplier** un décimal par 10, on déplace sa virgule d'un cran vers la **droite**. Pour **diviser** un décimal par 10, on déplace sa virgule d'un cran vers la **gauche**. Si, alors, il n'y a plus de chiffre à gauche de la virgule, on met un 0 à gauche de la virgule.*

Donnons des exemples. Soit le décimal $a = 0{,}38$. On a :

$$10a = 3{,}8 \quad \text{et} \quad \frac{a}{10} = 0{,}038$$

On peut aussi, avant de le diviser par 10, compléter le décimal avec des 0 en tête, puis supprimer les 0 inutiles après la division. Reprenons $a = 0{,}38$. On écrit :

$$a = 0000{,}38 \ \text{ donc } \ \frac{a}{10} = 000{,}038 = 0{,}038$$

Plus généralement, afin de pouvoir aisément multiplier ou diviser un décimal par 10 ou 100 ou 1000, etc., il est commode de commencer par compléter son écriture avec suffisamment de 0 à gauche, si on veut le diviser, et à droite, si on veut le multiplier. Par exemple :

$$a = 0{,}38 = 000{,}38000 \quad \text{et} \quad b = 5 = 0005{,}000$$

Proposition 2. *Soit un décimal dont on a complété l'écriture avec suffisamment de 0 à gauche et à droite. Pour **multiplier** ce décimal par 100, on déplace sa virgule de 2 crans vers la **droite**. Pour **diviser** ce décimal par 100, on déplace sa virgule de 2 crans vers la **gauche**.*

Reprenons $a = 0{,}38$ et $b = 5$. On a :

$$100a = 100 \times 0{,}3800 = 38{,}00 = 38 \quad \text{et} \quad \frac{a}{100} = \frac{000{,}38}{100} = 0{,}0038$$
$$100b = 100 \times 5{,}000 = 500{,}0 = 500 \quad \text{et} \quad \frac{b}{100} = \frac{0005{,}0}{100} = 0{,}050 = 0{,}05$$

Proposition 3. *Soit un décimal dont on a complété l'écriture avec suffisamment de 0 à gauche et à droite. Pour* ***multiplier*** *ce décimal par 1000, on déplace sa virgule de 3 crans vers la* ***droite****. Pour* ***diviser*** *ce décimal par 1000, on déplace sa virgule de 3 crans vers la* ***gauche****.*

Reprenons $a = 0,38$ et $b = 5$. On a :

$$\begin{aligned} 1000a &= 1000 \times 0{,}3800 = 380{,}0 = 380 \\ \frac{a}{1000} &= \frac{00000{,}38}{1000} = 00{,}00038 = 0{,}00038 \\ 1000b &= 1000 \times 5{,}0000 = 5000{,}0 = 5000 \\ \frac{b}{1000} &= \frac{00005{,}0}{1000} = 00{,}0050 = 0{,}005 \end{aligned}$$

Questions (correction p. 28)

Effectuer les calculs suivants :

$$\begin{aligned} 3{,}14 \times 10 &= \\ \frac{3{,}14}{10} &= \\ 3{,}14 \times 100 &= \\ \frac{3{,}14}{100} &= \\ 3{,}14 \times 1000 &= \end{aligned}$$

3 Écriture fractionnaire des décimaux

Rappelons que $\frac{1}{10}$ se lit un dixième, $\frac{1}{100}$ se lit un centième, $\frac{1}{1000}$ se lit un millième. Et $\frac{3}{10}$ se lit trois dixièmes, $\frac{37}{100}$ se lit trente sept centièmes, etc.

Proposition 1. *On a :*

$$0{,}1 = \frac{1}{10} \qquad 0{,}01 = \frac{1}{100} \qquad 0{,}001 = \frac{1}{1000}$$

Plus généralement, on a par exemple :

$$0{,}3 = \frac{3}{10} \qquad 0{,}37 = \frac{37}{100} \qquad 0{,}708 = \frac{708}{1000}$$

On peut donc écrire :

$$76{,}37 = 76 + 0{,}37 = 76 + \frac{37}{100} \qquad 10{,}708 = 10 + 0{,}708 = 10 + \frac{708}{1000}$$

Dans l'écriture précédente du nombre $c = 76{,}37$, on dit que :

- 76 est la **partie entière** de c tandis que $\frac{37}{100}$ est la **partie fractionnaire** de c.

4 Approximations

Reprenons le décimal $c = 76{,}37$. Il est compris entre les deux entiers successifs 76 et 77, plus près du premier que du second. L'entier 76 est appelé **arrondi entier** de c.

Si on **tronque** maintenant l'écriture décimale de c en ne gardant qu'un chiffre après la virgule, on obtient l'encadrement suivant entre deux **décimaux d'ordre un** consécutifs :

$$76{,}3 < c < 76{,}4$$

L'amplitude de cet encadrement est :

$$76{,}4 - 76{,}3 = 0{,}1 = \frac{1}{10}$$

et on dit que :

- 76,3 est l'approximation **par défaut** de c au dixième.
- 76,4 est l'approximation **par excès** de c au dixième.

De plus, comme c est plus proche de 76,4 que de 76,3, on dit que 76,4 est l'**arrondi** au dixième de c.

Plus généralement, si on tronque une écriture décimale en ne gardant après la virgule que zéro ou un, deux, trois chiffres, etc. (suivant la précision que l'on souhaite), on obtient des approximations par défaut entière, ou au dixième, au centième, au millième, etc.

Prenons le nombre $d = 76{,}8527$. Son arrondi entier est 77. Tronquons maintenant l'écriture décimale de d au millième, ce qui revient à ne garder que trois chiffres après la virgule. On obtient l'encadrement suivant entre deux **décimaux d'ordre trois** consécutifs :

$$76{,}852 < d < 76{,}853$$

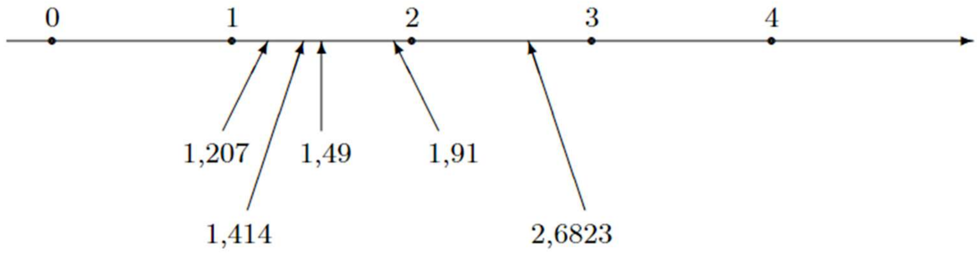
- 76,852 est l'approximation par défaut de d au millième.
- 76,853 est l'approximation par excès de d au millième.

L'arrondi au millième de d est 76,853.

Au lieu du terme **arrondi**, on utilise parfois le l'expression **meilleure approximation**. Soient les nombres :

$$1{,}207 \qquad 1{,}414 \qquad 1{,}49 \qquad 1{,}91 \qquad 2{,}6823$$

On les place sur un **axe**, et on obtient le schéma suivant :

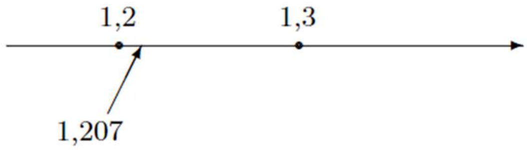


Pour chacun de ces nombres, on cherche la meilleure approximation, avec un seul chiffre après la virgule. Voici les résultats que l'on obtient :

$$1{,}207 \approx 1{,}2 \qquad 1{,}414 \approx 1{,}4 \qquad 1{,}49 \approx 1{,}5 \qquad 1{,}91 = 1{,}9 \qquad 2{,}6823 \approx 2{,}7$$

• Pour prouver ces résultats, on peut procéder par **encadrement**. On a par exemple :

$$1{,}2 < 1{,}207 < 1{,}3$$



Il est clair que 1,207 est plus proche de 1,2 que de 1,3. Donc : $\boxed{1{,}207 \approx 1{,}2}$

On raisonne de même avec 1,414 et 1,91. Par ailleurs, on a :

$$1{,}4 < 1{,}49 < 1{,}5$$

et il est clair que 1,49 est plus proche de 1,5 que de 1,4. Donc : $\boxed{1{,}49 \approx 1{,}5}$

On a de même :

$$2{,}6 < 2{,}6823 < 2{,}7$$

mais 2,6823 est plus proche de 2,7 que de 2,6 car :

$$2{,}7000 - 2{,}6823 = 0{,}0177 \qquad 2{,}6823 - 2{,}6000 = 0{,}0823$$

et $177 < 823$. On en déduit : $\boxed{2{,}6823 \approx 2{,}7}$

• On peut aussi procéder **directement**, sans encadrement. Voici la méthode :

1. Soit à approximer le nombre 1,247 avec un seul chiffre après la virgule. Fabriquons le nombre a en ne gardant qu'un chiffre après la virgule de 1,247. On obtient le nombre tronqué : $a = 1{,}2$. La première décimale négligée est $b = 4$, qui est un **petit chiffre**, donc a est l'approximation cherchée :

$$\boxed{1{,}247 \approx 1{,}2}$$

2. Soit à approximer de même le nombre 1,267. Fabriquons le nombre a en ne gardant qu'un chiffre après la virgule de 1,267. On obtient le nombre tronqué : $a = 1{,}2$. La première **décimale négligée** est $b = 6$, qui est un **grand chiffre**. On ajoute alors 1 à la première décimale qui n'a pas été négligée, et on obtient l'approximation cherchée :

$$\boxed{1{,}267 \approx 1{,}3}$$

3. En fait, on considère comme petits les chiffres 0 1 2 3 4 et on considère comme grands les chiffres 5 6 7 8 9.

4. Il y a une subtilité lorsque l'ajout de 1 produit une **retenue**. C'est le cas lorsque le chiffre b est grand et que la première décimale non négligée est 9. Prenons l'exemple du nombre 1,239 672 que l'on veut approximer avec 3 décimales. On le tronque avec trois chiffres après la virgule. On obtient le nombre tronqué : $a = 1{,}239$. La première **décimale négligée** est $b = 6$, qui est un **grand chiffre**. On ajoute donc 1 à la première décimale qui n'a pas été négligée, et qui est 9. L'approximation cherchée est donc :

$$\boxed{1{,}239\,672 \approx 1{,}240}$$

car 39+1=40.

Les calculs d'approximations sont basés sur des règles simples qu'il faut **mémoriser**. Il faut aussi étudier les exemples traités et s'entraîner suffisamment. Au bout de quelques temps, tout ça devient **naturel**...

Questions (correction p. 29)

Donner la meilleure approximation, avec un seul chiffre après la virgule :

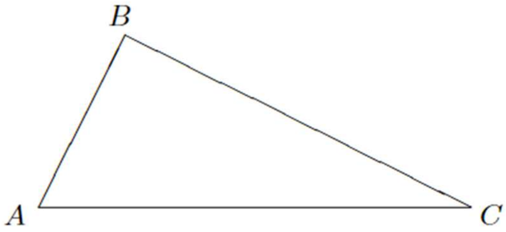
$$\begin{aligned} 3{,}14 &\approx \\ 3{,}57 &\approx \\ 103{,}91 &\approx \end{aligned}$$

Voici des exemples concrets : si on **mesure au rapporteur** les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ du triangle ci-dessous, on voit qu'ils n'ont pas des mesures entières.

On trouve :

$$63° < \widehat{A} < 64°$$

$$26° < \widehat{C} < 27°$$



En fait, une mesure plus précise montrerait que $\widehat{A}$ est plus proche de 63° que de 64°. Donc 63° est la **valeur arrondie** de $\widehat{A}$ et on écrit :

$$\widehat{A} \approx 63°$$

Cette mesure plus précise montre aussi que $\widehat{C}$ est plus proche de 27° que de 26°. Donc 27° est la **valeur arrondie** de $\widehat{C}$ et on écrit :

$$\widehat{C} \approx 27°$$

En géométrie, en physique, en chimie, etc. les **instruments de mesure** ne fournissent que des valeurs **approximatives**, mais suffisantes pour les applications en vue. Ainsi, pour un angle $\widehat{A}$, une longueur AC, une intensité de courant électrique I (en ampère), une masse m (en gramme), on écrira par exemple :

$$\begin{aligned} \widehat{A} &\approx 63° \\ AC &\approx 3{,}75 \text{ cm} \\ I &\approx 0{,}8 \text{ A} \\ m &\approx 53{,}4 \text{ g} \end{aligned}$$

Le nombre 63 est une valeur approchée **entière**, le nombre 3,75 est une valeur approchée **décimale d'ordre 2**, les nombres 0,8 et 53,4 sont des valeurs approchées **décimales d'ordre 1**.

5 Exercices

Exercice 1.

On suppose : $a = 3{,}6$ $b = 5{,}1$ $c = 1{,}25$.

1. Pour chacun de ces trois nombres, donner un encadrement entre **deux entiers consécutifs**.
2. En déduire, pour chacun d'entre eux, la **valeur approchée entière** la meilleure possible.
3. Calculer les nombres :

$$x = a + b \qquad y = a + c \qquad z = b + c$$

4. Pour chacun, donner un encadrement entre **deux entiers consécutifs**.
5. En déduire, pour chacun, la **valeur approchée entière** la meilleure possible.
6. Pour chacun des nombres y et z, donner un encadrement entre deux **décimaux d'ordre un consécutifs**.
7. En déduire, pour y et z, la valeur approchée **décimale d'ordre un** la meilleure possible.

Exercice 2.

On suppose : $a = 5{,}383$ $b = 1{,}07$ $c = 3{,}6$.

1. Pour chacun de ces trois nombres, donner un encadrement entre **deux entiers consécutifs**.
2. En déduire, pour chacun d'entre eux, la **valeur approchée entière** la meilleure possible.
3. Calculer les nombres :

$$x = a + b \qquad y = a + c \qquad z = b + c$$

4. Pour chacun, donner un encadrement entre **deux entiers consécutifs**.
5. En déduire, pour chacun, la **valeur approchée entière** la meilleure possible.
6. Pour x et y, donner un encadrement entre deux **décimaux d'ordre deux consécutifs**.
7. En déduire, pour x et y, la valeur approchée **décimale d'ordre deux** la meilleure possible.

6 Correction des questions

p. 24 D'abord les multiplications :

$$\begin{aligned} 3{,}14 \times 10 &= 31{,}4 \\ 3{,}14 \times 100 &= 314 \\ 3{,}14 \times 1000 &= 3140 \end{aligned}$$

Pour les divisions, il faut ajouter un ou deux zéros devant 3,14 avant de déplacer la virgule vers la gauche :

$$\begin{aligned}\frac{3{,}14}{10} &= \frac{03{,}14}{10} = 0{,}314\\ \frac{3{,}14}{100} &= \frac{003{,}14}{100} = 0{,}0314\end{aligned}$$

p. 27 On veut donc approximer avec un seul chiffre après la virgule les nombres $a = 3{,}14$, $b = 3{,}57$, $c = 103{,}91$. D'abord on tronque nos trois décimaux en ne gardant qu'un chiffre après la virgule. On obtient : $a' = 3{,}1$, $b' = 3{,}5$, $c' = 103{,}9$. Ensuite, on regarde le premier chiffre qui a été négligé. Pour a, ce chiffre est 4 qui est petit, donc :

$$3{,}14 \approx 3{,}1$$

Pour b, ce chiffre est 7 qui est grand,donc :

$$3{,}57 \approx 3{,}6$$

Pour c, ce chiffre est 1 qui est petit, donc :

$$103{,}91 \approx 103{,}9$$

7 Correction des exercices

Ex. 1, p. 28. 1. Voici les encadrements :

$$3 \leq 3{,}6 \leq 4 \qquad 5 \leq 5{,}1 \leq 6 \qquad 1 \leq 1{,}25 \leq 2$$

2. On en déduit les approximations :

$$3{,}6 \approx 4 \qquad 5{,}1 \approx 5 \qquad 1{,}25 \approx 1$$

3. Les sommes x, y, z valent :

$$3{,}6 + 5{,}1 = 8{,}7 \qquad 3{,}6 + 1{,}25 = 4{,}85 \qquad 5{,}1 + 1{,}25 = 6{,}35$$

4. Les encadrements de x, y, z sont donc :

$$8 \leq 8{,}7 \leq 9 \qquad 4 \leq 4{,}85 \leq 5 \qquad 6 \leq 6{,}35 \leq 7$$

5. On en déduit les approximations :

$$8{,}7 \approx 9 \qquad 4{,}85 \approx 5 \qquad 6{,}35 \approx 6$$

6. Voici les encadrements demandés de y et z :

$$4{,}8 \leq 4{,}85 \leq 4{,}9 \qquad 6{,}3 \leq 6{,}35 \leq 6{,}4$$

7. On en déduit les approximations :

$$4{,}85 \approx 4{,}9 \qquad 6{,}35 \approx 6{,}4$$

Ex. 2, p. 28. 1. Voici les encadrements :

$$5 \leq 5{,}383 \leq 6 \qquad 1 \leq 1{,}07 \leq 2 \qquad 3 \leq 3{,}6 \leq 4$$

2. On en déduit les approximations :

$$5{,}383 \approx 5 \qquad 1{,}07 \approx 1 \qquad 3{,}6 \approx 4$$

3. Les sommes x, y, z valent :

$$5{,}383 + 1{,}07 = 6{,}453 \qquad 5{,}383 + 3{,}6 = 8{,}983 \qquad 1{,}07 + 3{,}6 = 4{,}67$$

4. Les encadrements de x, y, z sont donc :

$$6 \leq 6{,}453 \leq 7 \qquad 8 \leq 8{,}983 \leq 9 \qquad 4 \leq 4{,}67 \leq 5$$

5. On en déduit les approximations :

$$6{,}453 \approx 6 \qquad 8{,}983 \approx 9 \qquad 4{,}67 \approx 5$$

6. Voici les encadrements demandés de x et y :

$$6{,}45 \leq 6{,}453 \leq 6{,}46 \qquad 8{,}98 \leq 8{,}983 \leq 8{,}99$$

7. On en déduit les approximations :

$$6{,}453 \approx 6{,}45 \qquad 8{,}983 \approx 8{,}98$$

Chapitre 2

Algèbre

Dans ce chapitre, nous construisons les **bases du calcul algébrique**. Ces bases seront valables pour toute la vie...

Le temps qu'on aura passé à étudier, comprendre et apprendre les règles qui vont être exposées maintenant est du temps bien occupé.

Plus tard, dans un, deux, trois, dix ans, le lecteur se souviendra avec tendresse de ce chapitre, comme l'auteur de ces lignes s'en souvient. Mais arrêtons, il y a trop d'émotion.

1 Les entiers, les décimaux, les rationnels

Définition 1. *On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des **entiers naturels** :*

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\}$$

Définition 2. *On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des **entiers relatifs** :*

$$\mathbb{Z} = \{\ \dots, -3,\ -2,\ -1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \dots\}$$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est la réunion de $\mathbb{N}$ et de tous les entiers négatifs.

Définition 3. *On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des **nombres rationnels**. Ce sont les entiers et les quotients d'entiers.*

Tout nombre rationnel x peut donc s'écrire sous la forme :

$$x = \frac{a}{b}$$

où $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$. Si $b = 1$ alors $x = a$ et est donc entier.

Supposons $x > 0$. Alors $a > 0$. Pour trouver le **développement décimal** de x, on divise a par b. Il y a trois possibilités :

1. La division tombe juste. Donc x est entier.
2. La division ne tombe pas juste, mais si on la poursuit au-delà de la virgule, elle finit par tomber juste. Donc x est décimal.

3. La division ne tombe pas juste et, même si on la poursuit au-delà de la virgule, elle ne s'arrête pas car **les restes se répètent** et ne sont jamais nuls. Les chiffres du développement de x se répètent donc indéfiniment (et ne sont pas tous nuls). Donc x n'est pas décimal.

Donnons des exemples :

$$\frac{12}{4} = 3 = 3{,}0000... \qquad \frac{784}{25} = \frac{3136}{100} = 31{,}36 = 31{,}360000...$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333... \qquad \frac{22}{7} = 3{,}142857\,142857...$$

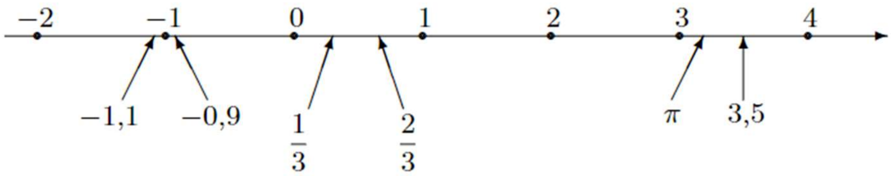
Les nombres 3 et 31,36 sont décimaux, tandis que $\frac{1}{3}$ et $\frac{22}{7}$ ne le sont pas.

2 Les nombres réels

On appelle **nombre réel**, tout nombre donné par une **écriture décimale illimitée**, éventuellement précédée du signe moins, cette écriture pouvant se terminer par une infinité de 0 répétés. On a la notion de réel positif et de réel négatif. On montre que l'on peut ajouter et multiplier entre eux des réels et que le résultat est réel.

Définition 1. *On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.*

On peut montrer que $\mathbb{R}$ est exactement l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée :



On montre que l'écriture décimale d'un rationnel est toujours périodique, c'est-à-dire que les chiffres situés après la virgule se répètent. Par exemple :

$$\frac{269}{330} = 0{,}8151515...$$

On montre aussi que, réciproquement, tout réel ayant une écriture décimale qui est périodique est rationnel. Ainsi

$$0{,}151515... = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$$

Donc les nombres réels qui ont une écriture décimale qui n'est pas périodique ne sont pas rationnels. On dit qu'ils sont **irrationnels**. Ainsi le nombre réel a, défini par :

$$a = 0{,}12112111211112...$$

est irrationnel. De même le nombre π qui vaut :

$$\pi = 3{,}1415926...$$

et qu'on utilise en géométrie pour mesurer le cercle et le disque (*voir* ex. 28, p. 109) est lui aussi irrationnel.

3 Opposé et addition

Définition 1. *On obtient l'**opposé** d'un réel en changeant son signe. L'opposé du réel a est noté $-a$ et il vérifie :*

$$a + (-a) = 0$$

Proposition 2. *L'opposé de l'opposé est le nombre lui-même :*

$$-(-a) = a$$

Définition 3. *La différence de deux réels a et b est définie par :*

$$a - b = a + (-b)$$

Proposition 4. (le signe "$-$" devant une parenthèse) *Pour tous réels a et b on a :*

$$\begin{aligned} -(a+b) &= -a-b \\ -(a-b) &= -a+b \\ -(-a-b) &= a+b \end{aligned}$$

On a par exemple :

$$c - (a - b) = c - a + b$$

Si la parenthèse est précédée du signe $+$ on peut la retirer :

$$c + (a+b) = c + a + b \qquad c + (a-b) = c + a - b \qquad c + (-a-b) = c - a - b$$

4 Addition et soustraction des décimaux relatifs

• On a vu en classe de cinquième comment on ajoute des **entiers relatifs** en utilisant la **méthode de l'ascenseur**. Mais pour ajouter des **décimaux relatifs**, la méthode de l'ascenseur n'a guère de sens : que signifie monter de 2,37 étages ou descendre de 0,4 étages ? On va donc procéder autrement, en s'appuyant sur la prop. 4 qui explique comment on peut mettre le signe "$-$" en facteur. Il y **deux cas faciles** :

1. Si on ajoute deux positifs (comme à l'école primaire), la somme est positive :

$$2{,}37 + 3{,}82 = 6{,}19$$

2. Si on ajoute deux négatifs, la somme est négative. On met le signe $-$ en facteur et on se ramène à une addition de décimaux positifs :

$$(-2{,}75) + (-3{,}9) = -(2{,}75 + 3{,}9) = -6{,}65$$

On va expliquer maintenant comment on procède dans les **deux cas difficiles** où l'on ajoute deux décimaux de signes contraires. Définissons la **valeur absolue** d'un nombre comme étant **le nombre sans son signe**. Ainsi, la valeur absolue de $-3{,}19$ c'est $3{,}19$ et la valeur absolue de $2{,}37$ et de $+2{,}37$ c'est $2{,}37$.

Ajoutons donc deux décimaux de signes contraires. Il y a deux cas :

3. Si c'est le décimal positif qui a la plus grande valeur absolue, la somme est positive :

$$(-2{,}37) + 3{,}1 = 3{,}1 + (-2{,}37) = 3{,}1 - 2{,}37 = 0{,}73$$

et le calcul se ramène à une **soustraction** de l'école primaire.

4. Si c'est le décimal négatif qui a la plus grande valeur absolue, la somme est négative. On met le signe $-$ en facteur et on soustrait deux décimaux positifs :

$$(2{,}75) + (-3{,}9) = -(3{,}9 - 2{,}75) = -1{,}15$$

et on voit que le calcul se ramène à une **soustraction** de l'école primaire, suivie d'un changement de signe.

• Pour soustraire les décimaux relatifs, suivant les cas, on applique la règle des signes (prop. 2) ou bien on met le signe "$-$" en facteur (prop. 4). Voici des exemples :

$$\begin{aligned} -3{,}5 - 1{,}7 &= -(3{,}5 + 1{,}7) = -5{,}2 \\ 2 - 4{,}5 &= -(4{,}5 - 2) = -2{,}5 \\ 5{,}7 - (-1{,}3) &= 5{,}7 + 1{,}3 = 7 \end{aligned}$$

Questions **(correction p. 65)**

Calculer les sommes ou différences suivantes :

$$\begin{aligned} (-3{,}75) + 7 &= \\ 4{,}8 - (-9{,}35) &= \\ -4{,}6 + (-2{,}05) &= \\ 3{,}97 + (-7{,}6) &= \end{aligned}$$

5 Première règle de l'algèbre élémentaire

Proposition 1. *Dans une égalité, on peut* ***faire passer*** *un terme de l'autre côté à condition de* ***changer son signe****.*

• Si dans égalité $\boxed{x + a = b}$ **je fais passer** mon $\boxed{+a}$ à droite, il devient $\boxed{-a}$:

$$x + a = b \qquad x = b - a$$

• Si dans égalité $\boxed{x - a = b}$ **je fais passer** mon $\boxed{-a}$ à droite, il devient $\boxed{+a}$:

$$x - a = b \qquad x = b + a$$

6 Produit et quotient

Proposition 1. (règle des signes) *Si a, b sont des nombres réels, on a :*

$$\begin{array}{lclcl} (-a)\times b & = & a\times(-b) & = & -ab \\ (-a)\times(-b) & = & a\times b & = & ab \end{array}$$

Proposition 2. *Tout réel $a \neq 0$ admet un **inverse** qui est un nombre réel, que l'on note $\frac{1}{a}$ et qui vérifie :*

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

ATTENTION ! Ne pas confondre $\boxed{\text{l'inverse noté } \frac{1}{a}}$ et $\boxed{\text{l'opposé noté } -a}$

Ainsi, l'inverse de 2 est

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

tandis que l'opposé de 2 est -2. Ce n'est pas du tout la même chose...

Comme $-0 = 0$ on voit que l'opposé de 0 est 0 lui-même. Mais

$$\boxed{\textbf{0 n'a pas d'inverse}}$$

Démontrons-le **par l'absurde**. Supposons que 0 ait un inverse, et notons a cet inverse. On aurait alors :

$$\frac{1}{0} = a \;\Leftrightarrow\; 1 = 0 \times a \;\Leftrightarrow\; 1 = 0$$

ce qui est absurde (on rappelle que le symbole "$\Leftrightarrow$" se lit "équivaut")

On montrerait de même :

$$\boxed{\text{on ne peut pas diviser par } 0}$$

Définition 3. *Soient a et b des réels. Si $b \neq 0$, on pose :*

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

Proposition 4. (règle des signes) *Si a, b sont des réels, et si $b \neq 0$, on a :*

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

Proposition 5. (simplification) *Si a, b, c sont des réels, et si $b, c \neq 0$, on a :*

$$\frac{c \times a}{c \times b} = \frac{a}{b}$$

ATTENTION ! En général $\frac{c+a}{c+b}$ ne se simplifie pas.

Proposition 6. *Soient a, b, c, d des réels. Si tous les quotients existent on a :*

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{c}{b} &= \frac{a+c}{b}\\ \frac{a}{b}\times\frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd}\\ \frac{a}{b}\times c &= \frac{ac}{b}\end{aligned}$$

On a en particulier :

$$\frac{x}{y}\times\frac{y}{x}=\frac{xy}{yx}=1$$

On en déduit que l'inverse de $\frac{x}{y}$ est $\frac{y}{x}$. Autrement dit :

$$\frac{1}{\frac{x}{y}}=\frac{y}{x}$$

Par ailleurs, on sait que pour tous réels u et v, si $v \neq 0$ on a :

$$\frac{u}{v}=u\times\frac{1}{v}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour } \textbf{diviser} \text{ par } \frac{x}{y} \text{ on } \textbf{multiplie} \text{ par } \frac{y}{x}}$$

Récapitulons :

Proposition 7. *Soient a, b, c, d des réels. Si tous les quotients existent on a :*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\frac{a}{b}} &= \frac{b}{a}\\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\times\frac{1}{\frac{c}{d}} &= \frac{a}{b}\times\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}\\ \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b}\times\frac{1}{c} &= \frac{a}{bc}\\ \frac{a}{\frac{b}{c}} = a\times\frac{c}{b} &= \frac{ac}{b}\end{aligned}$$

Donnons un exemple : puisque $0{,}1=\frac{1}{10}$ on a :

$$\frac{u}{0{,}1}=\frac{u}{\frac{1}{10}}=u\times\frac{10}{1}=u\times 10=10u$$

On voit donc que :

$$\boxed{\text{diviser par un petit nombre revient à multiplier par un grand nombre}}$$

7 Seconde règle de l'algèbre élémentaire

Rappelons que le symbole "$\Leftrightarrow$" se lit "équivaut à". On l'a étudié en classe de 5^{e}.

Proposition 1. *Dans une égalité, on peut diviser ou multiplier par un même réel $\neq 0$ des deux côtés et on obtient une égalité équivalente.*

• Dans l'égalité $\boxed{a \times x = b}$ si je veux calculer x, il me faut **tuer la multiplication par** a. Donc **je divise par** a des deux côtés, et j'obtiens :

$$\boxed{a \times x = b \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{b}{a}}$$

Bien noter la différence entre **diviser** et **faire passer**

• Dans l'égalité $\boxed{\dfrac{x}{a} = b}$ si je veux calculer x, il me faut **tuer la division par** a. Donc **je multiplie par** a des deux côtés, et j'obtiens :

$$\boxed{\frac{x}{a} = b \qquad \Leftrightarrow \qquad x = a \times b}$$

Bien noter la différence entre **multiplier** et **faire passer**

8 Proportions

Dans tout ce paragraphe, il est sous-entendu que tous les réels figurant au dénominateurs des quotients sont non nuls.

Définition 1. *On appelle **proportion** une égalité entre deux quotients :*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Par exemple :

$$\frac{2}{1} = \frac{32}{16}$$

Définition 2. *Dans la proportion $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ les réels a et d sont appelés **extrêmes**, les réels b et c sont appelés **moyens**.*

Ce vocabulaire provient de l'ordre naturel, de gauche à droite, dans lequel on écrit les quatre nombres de la proportion, en commençant par a, puis b, puis c, puis d.

$\boxed{a}\ b\ c\ \boxed{d}$ — extrêmes

$a\ \boxed{b}\ \boxed{c}\ d$ — moyens

Proposition 3. *Deux quotients sont égaux si et seulement si le produit des extrêmes est égal au produit des moyens :*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad=bc$$

Ce qui peut aussi se dire ainsi :

Proposition 4. *Deux quotients sont égaux si et seulement si les **produits en croix** sont égaux.*

$$\begin{array}{ccc} a & & c \\ & \times & \\ b & & d \end{array}$$

Corollaire 5. *Dans une proportion, on peut permuter les extrêmes :*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

Corollaire 6. *Dans une proportion, on peut permuter les moyenss :*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

Proposition 7.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

Depuis ma propre classe de 4^{e}, j'ai toujours trouvé cette propriété **admirable**.

9 Addition et multiplication

Nous énonçons dans ce paragraphe un grand nombre de **règles qu'il faut connaître** pour faire du calcul algébrique. Parmi ces règles, certaines ont déjà été étudiées en classes de 6^{e} ou de 5^{e}, dans le cas particulier où les nombres concernés sont entiers ou rationnels. Pour celles-ci, l'apprentissage est donc déjà fait.

Mais il y a aussi des règles nouvelles. Il faut les apprendre, les réciter seul ou à plusieurs, et faire de nombreux exercices d'entraînement pour les assimiler.

• Dans $\mathbb{R}$, l'addition et la multiplication sont des opérations **commutatives**. Ce qui signifie qu'on peut inverser l'ordre des termes :

$$a+b=b+a \qquad\qquad a\times b=b\times a$$

• La multiplication ou la division par 1 ne change rien, alors que la multiplication ou la division par -1 change le signe :

$$\begin{array}{rcl} a\times 1 &=& a \\ 1\times a &=& a \\ \dfrac{a}{1} &=& a \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} (-1)\times a &=& -a \\ a\times(-1) &=& -a \\ \dfrac{a}{-1} &=& -a \end{array}$$

• On prendra garde de ne pas confondre addition et multiplication, et on fera la distinction entre les relations additives :

$$a + 0 = a \qquad\qquad 0 + a = a$$

et les relations multiplicatives :

$$a \times 0 = 0 \qquad\qquad 0 \times a = 0$$

• On apprendra par cœur les relations suivantes :

$$\frac{a}{a} = 1 \qquad\qquad \frac{0}{a} = 0$$

• On fera bien la distinction entre les deux relations suivantes :

$$a + a = 2a \qquad\qquad a \times a = a^2$$

Proposition 1. (associativité) *Pour tous réels a, b, c, on a :*

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

et on note $\boxed{abc}$ *la valeur commune des deux expressions.*

ATTENTION ! Les deux expressions :

$$\boxed{a(bc) \ \text{ et } \ ab \times ac \ \text{ ne sont pas égales}}$$

C'est une **erreur commune**, chez les débutants, de croire qu'elles le sont. Par exemple :

$$2 \times (4 \times 5) = 40 \qquad\qquad \text{mais} \qquad\qquad (2 \times 4) \ \times \ (2 \times 5) = 80$$

10 Développement et mise en facteurs

Proposition 2. (développement) *Pour tous réels a, b, c, on a :*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}(b + c) &= \boldsymbol{a}b + \boldsymbol{a}c \\ \boldsymbol{a}(b - c) &= \boldsymbol{a}b - \boldsymbol{a}c \end{aligned}$$

Pour développer l'expression $(a + b) \times (c - d)$, on développe les quatre termes à la fois, suivant le schéma suivant :

$$(a + b) \times (c - d)$$

On effectue d'abord les produits du haut avec le facteur a, puis ceux du bas avec le facteur b. On obtient :

$$(a + b) \times (c - d) \quad = \quad ac - ad + bc - bd$$

Voyons des exemples. On veut développer et réduire le produit $(x-3)(2x+5)$. On applique le schéma précédent :

$$(x-3)\times(2x+5)$$

$$\begin{aligned}(x-3)(2x+5) &= 2x^2+5x-6x-15\\ &= 2x^2-x-15\end{aligned}$$

On a de même :

$$\begin{aligned}(-3x+5)(2x-3) &= -6x^2+9x+10x-15\\ &= -6x^2+19x-15\end{aligned}$$

Proposition 3. (mise en facteurs) *Pour tous réels a, b, c, on a :*

$$\begin{aligned}b\boldsymbol{a}+c\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}(b+c)\\ b\boldsymbol{a}-c\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}(b-c)\end{aligned}$$

On dit qu'on a mis $\boxed{a}$ *en **facteur**.*

11 Identités remarquables

Commençons par des exemples :

• Développons $(a+b)^2$. On a :

$$(a+b)^2=(a+b)\times(a+b)$$

$$(a+b)\times(a+b)$$

On effectue d'abord les produits du haut avec le facteur a, puis ceux du bas avec le facteur b. On obtient :

$$\begin{aligned}(a+b)\times(a+b) &= a\times a+ab+ba+b\times b\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

• Développons de même $(a-b)^2$. On a :

$$(a-b)^2=(a-b)\times(a-b)$$

$$(a-b)\times(a-b)$$

Dans ce développement, on doit prendre garde à la **règle des signes**. On obtient :

$$\begin{aligned}(a-b)\times(a-b) &= a\times a-ab-ba+b\times b\\ &= a^2-2ab+b^2\end{aligned}$$

• Développons $(a+b) \times (a-b)$.

$$(a+b) \times (a-b)$$

$$\begin{aligned}(a+b) \times (a-b) &= a \times a - ab + ba - b \times b \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Finalement, on a démontré :

Proposition 4. (identités remarquables) *Pour tous réels a, b, on a :*

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\ (a-b)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

ATTENTION ! $\qquad (a+b)^2 \neq a^2 + b^2 \qquad (a-b)^2 \neq a^2 - b^2$

Les identités remarquables doivent être **apprises par cœur**. Elles sont d'un usage constant en mathématique.

Il faut bien noter que :
• dans le développement de $(a+b)^2$ le signe $+$ se retrouve dans le $+2ab$.
• dans le développement de $(a-b)^2$ le signe $-$ se retrouve dans le $-2ab$.

Quand on applique les identités remarquables, on doit souvent faire usage des deux formules suivantes :

$$(ab)^2 = a^2b^2 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Voyons des exemples :

$$\begin{aligned}(5+2x)^2 &= 5^2 + 2 \times 5 \times 2x + (2x)^2 \\ &= 25 + 2 \times 10x + 2^2x^2 \\ &= 25 + 20x + 4x^2 \\ \left(\frac{x}{2} - 3\right)^2 &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{x}{2} \times 3 + 3^2 \\ &= \frac{x^2}{2^2} - \cancel{2} \times \frac{x}{\cancel{2}} \times 3 + 3^2 \\ &= \frac{x^2}{4} - 3x + 9 \\ (2x-3y)(2x+3y) &= (2x)^2 - (3y)^2 \\ &= 2^2x^2 - 3^2y^2 \\ &= 4x^2 - 9y^2\end{aligned}$$

12 Règle d'annulation

Théorème 5. *Pour tous réels a, b, on a :*

$$a \times b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$$

On apprend cette règle et **on la récite** sous la forme suivante :

Pour qu'un produit soit nul il faut et il suffit qu'**un de ses facteurs** soit nul.

La règle d'annulation permet de résoudre un grand nombre d'équations. Donnons un exemple : on veut savoir s'il y a des nombres dont le produit est égal à la somme. On cherche donc s'il existe des réels x qui satisfont l'équation suivante :

$$x \times x = x + x$$

Pour pouvoir appliquer la règle, on réduit l'équation, puis on fait tout passer à gauche :

$$\begin{aligned} x \times x &= 2x \\ x \times x - 2x &= 0 \end{aligned}$$

Ensuite, pour obtenir un produit, on factorise par x :

$$\begin{aligned} x \times \underline{x} - 2 \times \underline{x} &= 0 \\ x \times (x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

On peut maintenant appliquer la règle :

$$x \times (x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x = 0 \text{ ou } x - 2 = 0)$$

Finalement, l'équation initiale est équivalente à :

$$\boxed{x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2}$$

Donc seuls les nombres 0 et 2 ont un produit égal à leur somme. Vérification :

$$\begin{aligned} 0 \times 0 = 0 \quad &\text{et} \quad 0 + 0 = 0 \\ 2 \times 2 = 4 \quad &\text{et} \quad 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

13 Puissances d'exposant entier

Les puissances sont une nouveauté du cours de quatrième. La définition en est simple, et peut être considérée comme une abréviation. Ainsi :

$$r^2 \qquad \text{veut dire} \qquad r \times r$$

comme dans la formule de géométrie qui donne l'aire S d'un disque de rayon r :

$$S = \pi r^2$$

Mais la force des puissances vient des **huit formules** que l'on va voir ci-dessous, et dont voici un échantillon :

$$u^\alpha \times u^\beta = u^{\alpha+\beta}$$

Toutes ces formules sont fondamentales : on ne peut rien faire en mathématiques sans les connaître parfaitement. On va les expliquer pour bien les faire comprendre. Et il faudra ensuite les apprendre et les manier en faisant de nombreux exercices, comme ceux du § 19, p. 51.

Avant de donner la définition, donnons le vocabulaire :

dans la **puissance** $\boxed{u^\alpha}$ le nombre u est appelé **base**, le nombre α est appelé **exposant**.

Définition 1. *Si u est un réel, on pose :*

$$u^0 = 1 \qquad u^1 = u \qquad u^2 = u \times u \qquad u^3 = u \times u \times u \qquad u^4 = u \times u \times u \times u \qquad \ldots$$

Et on peut faire cela avec n'importe quel exposant entier positif, aussi grand soit-il. Donnons un exemple :

$$2^{100} = 2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2$$

Le produit à droite comportant 100 facteurs, tous égaux à 2, ce nombre est très grand. Pour s'en rendre mieux compte, il suffit de se réciter les puissances de 2 à partir de 2^0 :

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 64 \quad 128 \quad 256 \quad 512 \quad 1024 \quad 2048 \quad 4096 \quad 8192 \quad \ldots$$

On peut montrer que 2^{100} comporte 31 chiffres, qu'il commence par 1 et finit par 6.

Dans le cas général, la définition est la suivante :

Définition 2. *Soit u un réel, α un entier ≥ 1, on pose :*

$$u^\alpha = \underbrace{u \times u \times \cdots \times u}_{\alpha \text{ facteurs}}$$

On peut calculer les puissances de proche en proche. Ainsi, sachant que $2^2 = 2 \times 2 = 4$, on peut écrire :

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = (2 \times 2) \times 2 = 4 \times 2 = 8$$

et de même :

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = (2 \times 2 \times 2) \times 2 = 2^3 \times 2 = 8 \times 2 = 16$$

et ensuite :

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 2 = 2^4 \times 2 = 16 \times 2 = 32$$

et ainsi, indéfiniment. La formule générale est :

$$u^{\alpha+1} = u^\alpha \times u$$

Il y a deux formules de base pour calculer les puissances. Voici la **première formule** :

$$u^{\alpha+\beta} = u^\alpha \times u^\beta$$

Et voici la **deuxième formule** :

$$(u \times v)^\alpha = u^\alpha \times v^\alpha$$

On définit les puissances d'exposant négatif de la façon suivante :

Définition 3. *Soit u un réel non nul, α un entier **positif**, on pose :*

$$u^{-\alpha} = \frac{1}{u^{\alpha}}$$

Montrons comment on utilise ces formules. Soient les expressions suivantes :

$$a = 2^3 \times 2^{-4} \qquad b = 3^5 \times 3 \qquad c = 2^{-2} \times 5^{-2} \qquad d = \frac{2^5}{2^2}$$

que l'on souhaite réduire. On écrit :

$$\begin{aligned}
a &= 2^3 \times 2^{-4} = 2^{3-4} = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \\
b &= 3^5 \times 3 = 3^5 \times 3^1 = 3^{5+1} = 3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 9 \times 9 = 81 \times 9 = 729 \\
c &= 2^{-2} \times 5^{-2} = (2 \times 5)^{-2} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01 \\
d &= \frac{2^5}{2^2} = 2^5 \times \frac{1}{2^2} = 2^5 \times 2^{-2} = 2^{5-2} = 2^3 = 8
\end{aligned}$$

Questions (correction p. 66)

Réduisez les nombres suivants :

$$a = 3^4 \times 3^{-7} \qquad b = 2^7 \times 2 \qquad c = 5^4 \times 2^4 \qquad d = \frac{2^{-5}}{2}$$

Pour réduire d, il y a deux méthodes possibles.

Les propriétés des puissances sont regroupées dans les **8 formules** suivantes :

Proposition 4. *Soient u, v des **réels** $\neq 0$, et α, β des **entiers relatifs**. On a :*

$1^{\alpha} = 1$	$u^{\alpha} \times u^{\beta} = u^{\alpha+\beta}$
$u^0 = 1$	$(uv)^{\alpha} = u^{\alpha} v^{\alpha}$
$u^1 = u$	$(u^{\alpha})^{\beta} = u^{\alpha\beta}$
$u^{-\alpha} = \frac{1}{u^{\alpha}}$	$\left(\frac{u}{v}\right)^{\alpha} = \frac{u^{\alpha}}{v^{\alpha}}$

Certaines de ces formules sont valables pour $u = 0$ ou $v = 0$ suivant les valeurs de α et β.

ATTENTION ! Au cas particulier de 0

- On a $0^1 = 0$, $0^2 = 0$, $0^3 = 0$, etc. Mais $0^0 = 1$, *voir* exemple 50, p. 63.
- 0^{-1} **n'existe pas**, car $\frac{1}{0}$ n'existe pas, *voir* p. 35.

Noter que, d'après la **règle des signes**, on a :

$$(-u)^2 = (-u) \times (-u) = u^2 \qquad \text{tandis que} \qquad (-u)^3 = (-u) \times (-u) \times (-u) = -u^3$$

Par exemple :

$$(-4)^2 = 4^2 = 16 \qquad \text{tandis que} \qquad (-4)^3 = -4^3 = -64$$

Plus généralement :

$$(-u)^\alpha = \begin{cases} u^\alpha & \text{si } \alpha \text{ est pair} \\ -u^\alpha & \text{si } \alpha \text{ est impair} \end{cases}$$

Et d'après la règle des signes, on voit que

$$\boxed{u^2 \text{ est toujours positif}} \qquad \boxed{u^\alpha \text{ est toujours positif si } \alpha \text{ est pair}}$$

14 Notation scientifique des décimaux

Proposition 1. *Soit a un décimal strictement positif. Il existe un unique décimal b, tel que $1 \leq b < 10$, et un unique entier relatif n tels que :*

$$a = b \times 10^n$$

L'expression précédente est appelée **notation scientifique** de a. Elle est utilisée en physique, en chimie, et dans la plupart des sciences. Donnons quelques exemples :

$$1{,}5 = 1{,}5 \quad 0{,}15 = 1{,}5\times10^{-1} \quad 10{,}1 = 1{,}01\times10 \quad 150{,}3 = 1{,}503\times10^2 \quad 0{,}037 = 3{,}7\times10^{-2}$$

Noter que $10^1 = 10 \quad 10^2 = 100 \quad 10^3 = 1000$. Plus généralement, si n=1, 2, 3, 4, etc. le nombre 10^n s'écrit 1 suivi de n zéros :

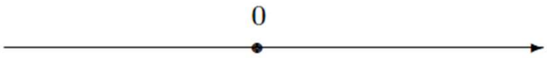
$$10^n = 1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ fois}}$$

Noter aussi que $10^{-1} = 0{,}1 \quad 10^{-2} = 0{,}01 \quad 10^{-3} = 0{,}001$. Plus généralement, si n=2, 3, 4, etc. le nombre 10^{-n} s'écrit avec n chiffres **après la virgule** en tout. Il commence par $\boxed{0,}$ et continue avec $n-1$ zéros, puis le chiffre 1.

$$10^{-n} = \boxed{0,}\underbrace{0\ldots01}_{n \text{ chiffres}} = 0,\underbrace{0\ldots01}_{n \text{ chiffres}}$$

15 Les inégalités

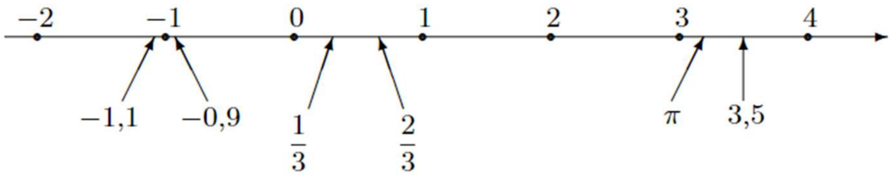
Définition 1. ***L'axe réel*** *est une droite horizontale sur laquelle on a choisi un point origine O, et une orientation* **vers la droite**. *L'abscisse de O est* 0.



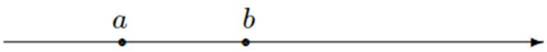
• Un réel est positif si son écriture décimale est précédée du **signe plus** ou de **rien**. Par exemple : $\frac{2}{3}$ est positif ; π est positif ; 4 est positif.

• Un réel est négatif si son écriture décimale est précédée du **signe moins**. Par exemple : -2 est négatif ; $-1{,}1$ est négatif ; $-0{,}9$ est négatif.
Considérons l'axe réel **orienté vers la droite comme d'habitude**. Alors :

Un réel négatif est situé à gauche de 0, un réel positif est situé à droite de 0.



Définition 2. *Pour tous réels a, b de* ***signes quelconques****, on dit que a* ***est inférieur à*** *b, et on écrit $a \leq b$ si a est* ***à gauche*** *de b sur l'axe réel :*



Par exemple, si on place **mentalement** les nombres sur l'axe réel, on voit que :

$$-3 \leq -2{,}5 \qquad -3 \leq 0 \qquad -3 \leq 2{,}5 \qquad 2{,}5 \leq 3$$

Pour chacun de ces exemples, si on calcule le grand nombre moins le petit, on obtient :

$$\begin{array}{rclcl} -2{,}5-(-3) & = & -2{,}5+3 & = & 0{,}5 \\ 0-(-3) & = & 0+3 & = & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rclcl} 2{,}5-(-3) & = & 2{,}5+3 & = & 5{,}5 \\ 3-2{,}5 & = & 0{,}5 & & \end{array}$$

Chaque fois, la différence (grand nombre moins petit nombre) est **positive**. Dans le cas général, on peut montrer qu'on a l'équivalence :

Proposition 3. *Pour tous réels a et b,* $\quad a \leq b \;\Leftrightarrow\; b-a$ *est positif ou nul.*

Il est clair que $\boxed{a \text{ est inférieur à } b}$ équivaut à $\boxed{b \text{ est supérieur à } a}$.

Par exemple, dans la vie courante, les énoncés "je suis plus jeune que ma sœur" et "ma sœur est plus âgée que moi" sont équivalents.

Définition 4. *Pour tous réels a, b, on dit que b* ***est supérieur à*** *a, et on écrit $b \geq a$, si b est* ***à droite*** *de a sur l'axe réel.*

Avec cette notation, on a :

$$\boxed{a \leq b \;\Leftrightarrow\; b \geq a}$$

Proposition 5. *Pour tous réels a et b,* $\quad b \geq a \;\Leftrightarrow\; b - a$ *est positif ou nul.*

Grâce aux prop. 3 ou 5, on peut comparer algébriquement deux réels sans avoir à les placer sur l'axe réel. Donnons un exemple. On souhaite comparer les nombres :

$$x = \frac{3}{2}\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$$

sachant que $\sqrt{2} = 1{,}414...$. On calcule par exemple $x - y$. On a :

$$\begin{aligned} x - y &= \frac{3}{2}\sqrt{2} - (\frac{1}{2} + \sqrt{2}) \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{2} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) \;\approx\; \frac{1}{2} \times 0{,}4 \end{aligned}$$

Donc $x - y \geq 0$, ce qui veut dire $x \geq y$.

Proposition 6. *Pour tout réel a on a :*

$$\begin{array}{ccl} a \geq 0 & \Leftrightarrow & a \text{ est positif ou nul} \\ a \leq 0 & \Leftrightarrow & a \text{ est négatif ou nul} \end{array}$$

Définition 7. *Pour tout réel a, on dit que a* ***est strictement positif*** *et on écrit $a > 0$ si a est* ***positif*** *et $a \neq 0$.*

Définition 8. *Pour tout réel a, on dit que a* ***est strictement négatif*** *et on écrit $a < 0$ si a est* ***négatif*** *et $a \neq 0$.*

Par exemple, si n est un **entier** positif ou nul, on a :

$$n < 3 \;\Leftrightarrow\; n \in \{0, 1, 2\} \qquad \text{alors que} \qquad n \leq 3 \;\Leftrightarrow\; n \in \{0, 1, 2, 3\}$$

16 Propriétés algébriques des inégalités

Commençons par un exemple. On a :

$$-3{,}7 \leq -2$$

Si on ajoute 1 des deux côtés, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} -3{,}7 + 1 & ? & -2 + 1 \\ -2{,}7 & \leq & -1 \end{array}$$

Donc le sens $\leq$ n'a pas changé. On pourrait démontrer les règles générales suivantes :

• *On peut* ***ajouter un même nombre*** *des deux côtés d'une inégalité, et le sens ne change pas.*
• *On peut* ***retrancher un même nombre*** *des deux côtés d'une inégalité, et le sens ne change pas.*

Proposition 9. *Pour tous réels a, b, c on a :*

$$\begin{array}{ccc} a \leq b & \Leftrightarrow & a+c \leq b+c \\ a \leq b & \Leftrightarrow & a-c \leq b-c \end{array}$$

Corollaire 10. *Pour tous réels a, b on a :*

$$a \leq b \Leftrightarrow a-b \leq 0 \quad \Leftrightarrow b-a \geq 0$$

On montrerait aussi :

• *On peut* ***multiplier par un même nombre strictement positif*** *les deux côtés d'une inégalité, et le sens ne change pas.*
• *On peut* ***diviser par un même nombre strictement positif*** *les deux côtés d'une inégalité, et le sens ne change pas.*

Ce qui se traduit ainsi en langage symbolique :

Proposition 11. *Pour tous réels a, b, c, tels que $c > 0$ on a :*

$$\begin{array}{ccc} a \leq b & \Leftrightarrow & ac \leq bc \\ a \leq b & \Leftrightarrow & \dfrac{a}{c} \leq \dfrac{b}{c} \end{array}$$

Donnons un exemple. On veut comparer les deux actions suivantes :
• multiplier par 4,
• ajouter 10.
En faisant des essais avec des nombres ≥ 0, on remarque que quand x est **petit**, on a

$$4x \leq 10 + x$$

(par exemple $4 \times 1 \leq 10 + 1$) alors que quand x est **grand**, on a

$$4x \geq 10 + x$$

(par exemple $4 \times 5 \geq 10 + 5$)
Cherchons donc tous les réels x tels que :

$$4x \geq 10 + x \tag{1}$$

L'inégalité précédente, où x est inconnu, s'appelle une **inéquation**. Pour la résoudre, on regroupe les x à gauche en retranchant x des deux côtés, puis on réduit :

$$\begin{array}{rcl} 4x - x & \geq & 10 \\ 3x & \geq & 10 \end{array}$$

On divise ensuite par 3 des deux côtés. Comme $3 > 0$ le sens ne change pas, et on obtient :

$$x \geq \frac{10}{3}$$

Ceci montre bien que la relation (1) est vraie dès que x est **suffisamment grand**. En conclusion, on a montré :

$$4x \geq 10 + x \;\Leftrightarrow\; x \geq \frac{10}{3}$$

On montrerait de même :

$$4x \leq 10 + x \;\Leftrightarrow\; x \leq \frac{10}{3}$$

Passons à la règle de multiplication ou de division par un réel strictement négatif.

• *On peut* ***multiplier par un même nombre strictement négatif*** *les deux côtés d'une inégalité, et* ***le sens change****.*
• *On peut* ***diviser par un même nombre strictement négatif*** *les deux côtés d'une inégalité, et* ***le sens change****.*

Proposition 12. *Pour tous réels a, b, c, tels que $c < 0$ on a :*

$$\begin{array}{lcl} a \leq b & \Leftrightarrow & ac \geq bc \\ a \leq b & \Leftrightarrow & \dfrac{a}{c} \geq \dfrac{b}{c} \end{array}$$

Démonstration : 1. Commençons par l'équivalence portant sur la multiplication. Supposons donc que $a \leq b$ et que $c < 0$. Pour prouver que $ac \geq bc$, il suffit de regarder le signe de la différence $ac - bc$. On a :

$$ac - bc = c(a - b)$$

or $a \leq b$ donc $a - b \leq 0$. Comme $c < 0$, la règle des signes montre que $ac - bc \geq 0$, donc

$$ac \geq bc$$

Réciproquement, supposons qu'on ait l'inégalité $ac \geq bc$. Puisque $c < 0$, alors $\frac{1}{c} < 0$. Donc si on multiplie par $\frac{1}{c}$ des deux côtés, **le sens change**, et on obtient :

$$\begin{array}{rrcl} ac \geq bc \;\Rightarrow & ac \times \dfrac{1}{c} & \leq & bc \times \dfrac{1}{c} \\ & \dfrac{ac}{c} & \leq & \dfrac{bc}{c} \\ & a & \leq & b \end{array}$$

2. L'équivalence portant sur la division se ramène à la précédente car diviser par c revient à multiplier par $\frac{1}{c}$.

Terminons par un exemple. Soit à résoudre l'inéquation :

$$2x + \frac{1}{2} \leq 4x + \frac{5}{2}$$

On regroupe d'abord les x à gauche, le reste à droite, et on réduit :

$$\begin{aligned} 2x - 4x &\leq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \\ -2x &\leq 2 \end{aligned}$$

On divise ensuite par -2 des deux côtés. Comme $-2 < 0$, **le sens change** et on obtient :

$$\begin{aligned} x &\geq -\frac{2}{2} \\ x &\geq -1 \end{aligned}$$

17 Résolution de certaines équations

Soient a, b, c sont des réels, tels que $a \neq 0$ et $b \neq 0$. On veut calculer x dans l'équation :

$$\frac{a}{b} \times x = c$$

Il faut donc tuer la multiplication par $\frac{a}{b}$. Puisque $\frac{b}{a} \times \frac{a}{b} = 1$, au lieu de **diviser** par $\frac{a}{b}$, il est plus commode de **multiplier** par $\frac{b}{a}$ des deux côtés :

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} \times \frac{a}{b} \times x &= \frac{b}{a} \times c \\ x &= \frac{b \times c}{a} \end{aligned}$$

18 Utilisation des équations élémentaires

Considérons le nombre :

$$a = 0{,}8151515...$$

Cette écriture décimale est périodique donc $a \in \mathbb{Q}$. Cherchons **l'écriture rationnelle** de a, c'est-à-dire sous forme d'une fraction. Pour cela, **on a l'idée** de calculer $10a$ pour **mettre en évidence** les décimales qui se répètent :

$$\begin{aligned} 10a &= 8{,}151515.... \\ &= 8 + 0{,}151515.... \end{aligned}$$

Si donc on pose $b = 0{,}151515...$, il vient cette première relation :

$$\boxed{10a = 8 + b}$$

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned} 100b &= 15{,}151515... \\ &= 15 + 0{,}151515... \\ &= 15 + b \end{aligned}$$

On a donc obtenu une deuxième relation :

$$\boxed{100b = 15 + b}$$

Cette relation est une **équation en** b que l'on va résoudre en appliquant les deux règles. D'abord, on fait passer b à gauche et on réduit :

$$\begin{aligned} 100b &= 15 + b \\ 100b - b &= 15 \\ 99b &= 15 \end{aligned}$$

Ensuite, on divise par 99 des deux côtés, et on simplifie la fraction obtenue :

$$b = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$$

On reporte alors la valeur de b dans la relation $10a = 8 + b$. On obtient :

$$10a = 8 + \frac{5}{33} = \frac{8 \times 33}{33} + \frac{5}{33} = \frac{269}{33}$$

d'où

$$a = \frac{1}{10} \times \frac{269}{33} = \frac{269}{330}$$

On a donc trouvé l'expression rationnelle cherchée :

$$\boxed{0{,}8151515... = \frac{269}{330}}$$

On vérifie ce résultat en calculant la division de **269** par **330** :

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{269}0 & \mathbf{330} \\ 0500 & 0{,}8151\ldots \\ 1700 & \\ 0500 & \\ 170 & \end{array}$$

19 Exercices

On rappelle les deux règles de priorité des opérations :

1. La **multiplication** est prioritaire sur l'addition et sur la soustraction.

Ainsi, par exemple :

$$\begin{aligned} 2 + 3 \times 5 &= 2 + \underbrace{3 \times 5} &= 2 + 15 &= 17 \\ 10 - 2 \times 7 &= 10 - \underbrace{2 \times 7} &= 10 - 14 &= -4 \end{aligned}$$

2. $\boxed{\text{Les calculs entre \textbf{parenthèses} sont prioritaires.}}$

Ainsi :
$$(2-3)\times 5 \quad = \quad \underbrace{(2-3)}\times 5 \quad = \quad (-1)\times 5 \quad = \quad -5$$

Calculs algébriques

Exercice 1 (résolu partiellement)**.**

On suppose : $a = 0{,}3 \qquad b = 6 \qquad c = -2.$

1. Calculez les expressions suivantes :

$$a+b \qquad a+c \qquad -a+b \qquad -a+c \qquad c-b$$

2. Écrire sous forme d'un quotient d'entiers les quotients suivants :

$$\frac{a}{b} \qquad \frac{b}{a} \qquad \frac{a}{c} \qquad \frac{b}{c}$$

Solution partielle : 1. Calculons par exemple $a+c$. Première étape, on allège l'écriture :

$$a+c = 0{,}3+(-2) = 0{,}3-2$$

Deuxième étape, on met -1 en facteur pour se ramener à une soustraction facile :

$$0{,}3-2 = -(-0{,}3+2) = -(2-0{,}3) = -1{,}7$$

2. Calculons $\frac{a}{b}$. Première étape, on multiplie haut et bas par 10 pour supprimer la virgule :

$$\frac{a}{b} = \frac{0{,}3}{6} = \frac{0{,}3\times 10}{6\times 10} = \frac{3}{60}$$

Deuxième étape, on simplifie :
$$\frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

Exercice 2.

Réduire les expressions suivantes pour les mettre sous forme de quotients d'entiers :

$$A = \frac{5}{12} - \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\right) \qquad B = \left(\frac{9}{16} - \frac{2}{8}\right) + \frac{1}{4} \qquad C = \frac{1}{15} - \left(2 - \frac{7}{3}\right)$$

$$D = \frac{5}{6} - \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\right) \qquad E = \left(\frac{9}{16} + \frac{2}{8}\right) + \frac{1}{4} \qquad F = \frac{1}{15} + \left(2 + \frac{7}{3}\right)$$

Exercice 3.

Réduire les expressions suivantes pour les mettre sous forme de quotients d'entiers :

$$A = -\frac{8}{5}\left(\frac{5}{6} - 3 + \frac{5}{2}\right) \qquad B = \frac{4}{3}\left(2 - \frac{5}{4} - \frac{3}{2}\right) \qquad C = -\frac{2}{3}\left(\frac{5}{4} - 1 - \frac{3}{2}\right)$$

Exercice 4.

Réduire les expressions suivantes pour les mettre sous forme de quotients d'entiers :

$$A = \frac{2}{5} - \frac{5}{8} \times \frac{4}{3} \qquad B = \left(\frac{2}{5} - \frac{5}{8}\right) \times \frac{4}{3} \qquad C = \frac{2}{5} \times \frac{-1}{3} - \frac{1}{2}$$

$$D = \frac{3}{4} - 2\left(\frac{3}{5} - \frac{7}{10}\right) \qquad E = \left(\frac{3}{4} - 2\right) \times \frac{3}{5} - \frac{7}{10} \qquad F = \frac{2}{5}\left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

Exercice 5.

On suppose : $a = 3 \qquad b = 6 \qquad c = -2.$

1. Écrire sous forme d'entiers ou de quotients d'entiers les expressions suivantes :

$$a + bc \qquad a + \frac{b}{c} \qquad a - \frac{c}{b} \qquad \frac{-a+c}{b} \qquad \frac{c-b}{a}$$

2. Même question pour :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \qquad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \qquad \frac{1}{c} + \frac{1}{b} \qquad \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \qquad \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$$

Exercice 6.

Simplifier le plus possible les expressions suivantes :

$$2\pi - 3\pi \qquad \pi + \frac{3}{2}\pi \qquad \pi - \frac{3}{2}\pi \qquad \frac{2}{\pi} - \frac{5}{\pi} \qquad \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$$

Exercice 7.

Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$\frac{3}{4}\left(6 - \frac{1}{3}\right) \qquad \frac{3}{4}\left(4 + \frac{1}{6}\right) \qquad \frac{3}{\pi}\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) \qquad \frac{3\pi}{4}\left(\frac{1}{6\pi} + \frac{1}{3\pi}\right)$$

Exercice 8.

Réduire les expressions suivantes par la méthode de votre choix :

$$\frac{3}{4}(6-2) \qquad -\frac{3}{4}\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right) \qquad -\frac{3}{\pi}(6\pi - 2\pi) \qquad \frac{3\pi}{5}\left(\frac{1}{6\pi} - \frac{1}{3\pi}\right)$$

Exercice 9.

Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$A = 5 - (2 + 3x) \qquad B = 4 - x + (2x - 7)$$
$$C = -(4x + 3) - (5 + 4x) \qquad D = -(1 + 2x) - (1 - 3x)$$

Exercice 10.

Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$A = 4(x-3) + 2 \qquad B = 3a - (3 + 2a) \qquad C = 3 - (2 + x)$$
$$D = 4(1-a) - 3 \qquad E = 3(x-2) - 2(1-x) \qquad F = 2 - 3(1-x)$$

Exercice 11.

Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lllllllll} A & = & 1+x(x+2) & B & = & x-(x+2) & C & = & 1+2x(x-2) \\ D & = & 1-x(3x-2) & E & = & 2+x-x(1-x) & F & = & 1-x(1+x) \end{array}$$

Exercice 12 (résolu partiellement)**.**

Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lllllllll} A & = & (x+1)(x+2) & B & = & (x-1)(x+2) & C & = & (2x+1)(x-2) \\ D & = & (5-x)(3x-2) & E & = & (2-x)(1-x) & F & = & (1-x)(1+x) \end{array}$$

Solution partielle : on s'intéresse à l'expression $D = (5-x)\times(3x-2)$. On va développer les quatre termes à la fois, suivant le schéma suivant :

$$(5-x)\times(3x-2)$$

On effectue d'abord les produits du haut avec le facteur 5, puis ceux du bas avec le facteur $-x$, en appliquant soigneusement la **règle des signes**. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} (5-x)\times(3x-2) & = & 15x-10-3x^2+2x \\ & = & -3x^2+17x-10 \end{array}$$

Exercice 13.

Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lllllllll} A & = & (x-3)(x+2) & B & = & (2x-1)(x-4) & C & = & (-x+5)(x+2) \\ D & = & (3-2x)(-x+4) & E & = & (2+x)(4-x) & F & = & (1-2x)(1+x) \end{array}$$

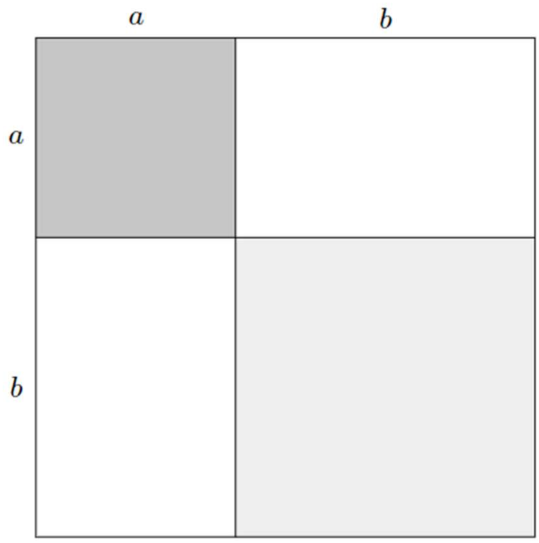
Identités remarquables

Exercice 14.

On se propose de démontrer par la géométrie l'identité algébrique :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

On suppose que a et b sont positifs. On considère un **grand carré** de côté $a+b$ que l'on partage comme ci-dessous en deux **carrés**, l'un de côté a, l'autre de côté b, et deux **rectangles** égaux de dimensions a et b.



1. Que vaut l'aire S du grand carré ?
2. Calculer les aires des carrés et des rectangles.
3. Calculer la somme S' de ces quatre aires.
4. Conclure.

Exercice 15 (résolu partiellement)**.**

Développer puis réduire les carrés et les produits suivants :

$$A = (x+1)^2 \qquad B = (1-x)^2 \qquad C = \left(\frac{1}{2}+x\right)\times\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

$$D = (3-2x)^2 \qquad E = (3x-2)(3x+2) \qquad F = \left(\frac{1}{2}-3x\right)^2$$

Solution partielle : on détaille le calcul de F. On a :

$$\left(\frac{1}{2}-3x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\times\frac{1}{2}\times 3x + (3x)^2$$

On calcule à part :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4} \qquad 2\times\frac{1}{2} = 1 \qquad (3x)^2 = 3^2\times x^2 = 9x^2$$

On en déduit :

$$\left(\frac{1}{2}-3x\right)^2 = \frac{1}{4} - 3x + 9x^2$$

Exercice 16.

Développer puis réduire les carrés suivants :

$$A = \left(\frac{x}{2}+5\right)^2 \qquad B = \left(\frac{x}{4}+2\right)^2 \qquad C = \left(5x+\frac{1}{2}\right)^2$$

Exercice 17.

Développer puis réduire les carrés suivants :

$$A = \left(\frac{x}{2}+3\right)^2 \qquad B = \left(\frac{x}{3}-2\right)^2 \qquad C = \left(5x-\frac{1}{2}\right)^2$$

Équations

Exercice 18 (résolu partiellement)**.**

Après les avoir simplifiées ou réduites, résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{rclrclrcl} 4(x-3)+3 & = & -3 & 3x & = & -2x & 3-(1-2x) & = & 0 \\ -3x+7 & = & 1-3x & -3(x+7) & = & 0 & 2x-(2x-1) & = & 0 \end{array}$$

Solution partielle : on s'intéresse à la quatrième équation :

$$-3x+7 = 1-3x$$

On remarque que le terme $\boxed{-3x}$ figure des deux côtés et donc se simplifie. On voit alors que l'équation n'a plus d'inconnue, et qu'elle équivaut à l'égalité :

$$7 = 1$$

Or cette égalité est **fausse**. On en déduit que l'équation n'a **pas de solution**. Notant $\mathscr{S}$ l'ensemble de ses **solutions**, et $\emptyset$ l'**ensemble vide**, qui n'a aucun élément, on a donc :

$$\mathscr{S} = \emptyset$$

Exercice 19.

Le tableau suivant présente dans chaque ligne : un numéro d'équation, une équation, un réel a. Dans chaque cas, calculer si a est solution ou non de l'équation :

(1)	$2x+3 = 0$	$a = \frac{3}{2}$
(2)	$-5x = -25$	$a = -5$
(3)	$x+1 = 2x+3$	$a = -1$
(4)	$-6x+2 = -x-13$	$a = 3$
(5)	$-\frac{6}{5}x+12 = 24$	$a = -10$
(6)	$\frac{1}{3}+x = -\frac{1}{3}$	$a = 1$
(7)	$\frac{5}{7}x = 2$	$a = \frac{14}{5}$

Exercice 20.

Résoudre les équations suivantes :

$$\frac{x}{2} = 8 \qquad 3 - x = \frac{2}{5}$$

$$3x = \frac{3}{7} \qquad -3x - 5 = 2$$

Exercice 21.

Résoudre les équations suivantes :

$$\frac{3}{2}x = \frac{3}{7} \qquad \frac{-3x}{4} - 5 = 2$$

$$\frac{2x}{3} - 3 = -5 \qquad \frac{5x}{2} = 7$$

Exercice 22.

Résoudre les équations suivantes après avoir chassé les dénominateurs :

$$\frac{6x-3}{4} = \frac{5x-8}{2} \qquad \frac{2x+3}{3} = \frac{2-x}{5}$$

$$\frac{x-1}{5} = \frac{3x+6}{7} \qquad \frac{3x}{4} - 5 = \frac{x-3}{2}$$

$$\frac{2x}{3} - 3 = \frac{1-x}{6} \qquad \frac{2x-1}{3} + \frac{x+1}{6} = \frac{x+5}{2}$$

Exercice 23.

Résoudre l'équation $x^3 = x^2$ en utilisant la règle d'annulation.

Mise en équations

Exercice 24 (résolu partiellement)**.**

On précise que consécutifs signifie "**qui se suivent**".

1. Déterminer les trois entiers **consécutifs** dont la somme vaut 165.
2. Déterminer les quatre entiers **consécutifs** dont la somme vaut 726.

Solution partielle : on résout la première question, et on note n le plus petit des trois entiers inconnus. Puisque les trois entiers sont consécutifs, les deux autres entiers sont $n+1$ et $n+2$. La somme de ces trois entiers vaut donc :

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3$$

L'énoncé équivaut donc à l'équation suivante :

$$3n + 3 = 165$$

qui se résout aisément :

$$\begin{aligned} 3n &= 165 - 3 = 162 \\ n &= \frac{162}{3} = 54 \end{aligned}$$

Les entiers cherchés sont donc 54 55 56.

Exercice 25.

Lorsque l'on ajoute un certain entier $\boxed{a}$ au numérateur et au dénominateur de la fraction suivante :

$$\frac{61}{27}$$

on obtient une fraction qui vaut 2. Calculez a.

Exercice 26 *(l'âge de Vladimir)*.

Catherine a 30 ans de plus que son fils Vladimir. En 2012, ils avaient ensemble 56 ans. Quel était l'âge de Vladimir ?

Indication : noter x l'âge cherché et traduire l'énoncé par une équation.

Exercice 27 (résolu).

Mon **grand frère** a 20 euros dans son porte-monnaie. Cette somme est constituée de pièces de 1 euro et de pièces de 2 euros. Sachant qu'il a en tout 12 pièces, combien a-t-il de pièces de 1 euro et de pièces de 2 euros ?

Solution : notons x le nombre de pièces de 1 euro, et y le nombre de pièces de 2 euros présentes dans le porte-monnaie. Comme il y a en tout 12 pièces, on a :

$$x + y = 12$$

ce qui nous donne une **première équation**. D'autre part, la valeur de ces pièces est :

$$x \times 1 + y \times 2 = x + 2y = 20$$

ce qui nous donne une **deuxième équation**. On a donc à résoudre le **système** suivant de deux équations :

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x + 2y = 20 \end{cases}$$

On procède ainsi : on calcule y en fonction de x dans la première équation :

$$y = 12 - x$$

On reporte cette **expression** dans la deuxième équation et on obtient :

$$x + 2(12 - x) = 20$$

On développe et on réduit :

$$\begin{aligned} x + 24 - 2x &= 20 \\ -x + 24 &= 20 \\ -x &= -24 + 20 = -4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

On reporte cette valeur de x dans l'expression de y :

$$y = 12 - x = 12 - 4 = 8$$

Finalement, mon grand frère a dans son porte-monnaie 4 pièces de 1 euro et 8 pièces de 2 euros. Ce qui fait bien en tout 20 euros.

Exercice 28.

Résoudre les **systèmes** suivants de deux équations :

$$\begin{cases} 8x - 3y = -2 \\ 3x - y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 7y = -3 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 5y = -9 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Exercice 29.

Un cinéma a fait une recette de 1760 euros en vendant 202 billets à la séance de midi. Sachant que ce cinéma pratique pour cette séance deux tarifs : le tarif plein à 10 euros, le tarif réduit à 5 euros, combien de billets de chaque tarif ont-ils été vendus ?
Indication : noter p le nombre de billets vendus à tarif plein, et r le nombre de billets vendus à tarif réduit. Mettre en équations les informations données par l'énoncé. Résoudre le **système** formé par les deux équations trouvées.

Exercice 30.

Papa a fait 12 virements de deux sortes sur le compte de ma **grande sœur** : les uns de 25 euros, les autres de 14 euros. En tout il a viré 223 euros. Combien a-t-il fait de virements de chaque sorte ?

Exercice 31.

Un cinéma vend ses places suivant deux tarifs : 10 euros pour les adultes, 7 euros pour les enfants. Aujourd'hui, il a fait une recette de 352 euros en vendant 40 billets. Combien de billets de chaque tarif ont été vendus ? Noter a le nombre de billets vendus à tarif adulte, et e le nombre de billets vendus à tarif enfant.

Exercice 32.

Dans un magasin, Sophie achète 5 crayons et 2 cahiers, alors qu'Élodie achète 2 crayons et 5 cahiers. Tous les crayons sont au même prix, qu'on note x. Tous les cahiers sont au même prix, qu'on note y. On note S la dépense de Sophie, et E celle d'Élodie.

1. Calculer S et E en fonction de x et y.
2. On sait qu'un cahier coûte **le double** d'un crayon, et qu'Élodie a dépensé 3 euros **de plus** que Sophie.
   a/ Mettre en équations les deux informations précédentes.
   b/ Calculer x et y.
   c/ Combien ont dépensé chacune des filles. Vérifier les valeurs trouvées.

Exercice 33 (d'après brevet 2015)**.**

Une bibliothécaire passe commande de livres de mathématiques et de livres de français. Chaque livre de mathématiques coûte 15 euros et chaque livre de français coûte 10 euros. Sachant qu'elle a commandé 30 livres pour un montant total de 365 euros, combien de livres de chaque sorte a-t-elle commandés ?
Indication : noter m le nombre de livres de mathématiques commandés, et f le nombre de livres de français commandés.

Puissances

Exercice 34.

Écrire sous forme d'une seule puissance les expressions suivantes :

$$a = 2^{-3} \times 2^4 \qquad b = 3^{-3} \times 3 \qquad c = 2^5 \times 5^5 \qquad d = \frac{2^{-2}}{2^3}$$

Indication : • pour réduire b, on écrit $b = 3^{-3} \times 3 = 3^{-3} \times 3^1 = \ldots.$

• pour réduire d, on écrit $d = \dfrac{2^{-2}}{2^3} = 2^{-2} \times \dfrac{1}{2^3} = 2^{-2} \times 2^{-3} = \ldots$

Exercice 35.

Écrire sous forme d'une seule puissance les expressions suivantes :

$$a = 5^4 \times 5^{-4} \qquad b = 2^{-3} \times 2 \qquad c = 5^3 \times 2^3 \qquad d = \frac{2^5}{2}$$

Exercice 36.

Écrire sous forme d'une seule puissance les expressions suivantes :

$$2^3 \times 2^{-4} \qquad 2^{-3} \times 2^{-4} \qquad \frac{2^3}{2^{-4}} \qquad 5^3 \times 5^{-2} \qquad 5^{-3} \times 5^{-4} \qquad \frac{5^{-3}}{5^{-4}}$$

Exercice 37.

Écrire comme produit de puissances de 2 et 3 les nombres suivants :

$$(3 \times 2)^2 \qquad (3 \times 2)^{-3} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^2 \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^3 \qquad 6^{-2} \qquad 6^3$$

Exercice 38.

Écrire comme produit de puissances de 2 et 5 les nombres suivants :

$$(5 \times 2)^3 \qquad (5 \times 2)^{-2} \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^2 \qquad \left(\frac{5}{2}\right)^3 \qquad 10^{-2} \qquad 10^4$$

Exercice 39.

Écrire comme produit de puissances de 2 et 3 les nombres suivants :

$$9^3 \qquad 4^3 \qquad (2^3)^2 \qquad (2^2)^4 \qquad (2^{-1})^3 \qquad (2^{-3})^{-2} \qquad (3^2 \times 2)^3 \qquad (3 \times 2^{-1})^{-3}$$

Exercice 40.

Écrire comme produit de puissances de 2 et 3 les nombres suivants :

$$12^3 \qquad 18^4 \qquad \frac{6^2}{6^4} \qquad 0{,}5 \times 2^3 \qquad (3 \times 2)^{-3} \times 18 \qquad \frac{(2 \times 3)^2}{2^{-4}} \qquad 12^{-1} \times 6^{-2}$$

Exercice 41.

1. Calculer les nombres suivants :

$$(-1)^0 \qquad (-1)^1 \qquad (-1)^2 \qquad (-1)^3 \qquad (-1)^4 \qquad (-1)^5 \qquad (-1)^6 \qquad (-1)^7$$

2. Énoncer la règle générale qui donne la valeur de $(-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 42.

1. Calculer les nombres suivants :

$$2^0 \qquad 2^1 \qquad 2^2 \qquad 2^3 \qquad 2^4 \qquad 2^5 \qquad 2^6 \qquad 2^7 \qquad 2^8 \qquad 2^9 \qquad 2^{10}$$

2. Vérifier les formules suivantes en calculant explicitement les différentes puissances :

$$2^4 = (2^2)^2 \qquad 2^6 = (2^3)^2 \qquad 2^8 = (2^4)^2 \qquad 2^{10} = (2^5)^2$$

Exercice 43.

Écrire les nombres suivants sous forme d'une seule puissance de 2, 3, 5 ou 7 :

$$A = \frac{3^2}{3^3} \qquad B = \frac{5^2}{5^4} \qquad C = \frac{7^5}{7^2 \times 7^3} \qquad D = \frac{3^{-2}}{3^3} \qquad E = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \qquad F = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$$

Exercice 44.

Écrire chacun des nombres suivants en utilisant que des puissances 2, 3, 5, 7 :

$$A = 2^2 \times 9 \times 20 \qquad B = 360 \qquad C = 150 \times 12 \qquad D = 490^5 \qquad E = (36 \times 8^3)^2$$

Exercice 45.

Développer les expressions suivantes :

$$(ab)^2 \qquad \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad (a^2b)^3 \qquad (4a^2b)^2 \qquad \left(\frac{-a^2}{3}\right)^3 \qquad (ax^2)^{-3} \qquad \left(\frac{-a^3}{2}\right)^2$$

Exercice 46.

Soient a et b des réels $\neq 0$. Simplifier les expressions suivantes et les écrire sous la forme $\pm a^j b^k$ avec j, k entiers relatifs :

$$(ab)^{-4}\times\left(-a^3b\right)^{-5} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^2\times a^3b^5 \qquad \left(\frac{-a}{b}\right)^{-3}$$

$$\frac{a^2(bc)^3}{b^2a^3} \qquad \left(\frac{a}{bc}\right)^2\times\frac{b^3}{(a^3c)^4} \qquad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\left(\frac{b^2c}{a^3}\right)^3}$$

Exercice 47.

Mettre sous forme d'une seule puissance de 10 les expressions suivantes :

$$10^3\times 10^{-5} \qquad 10^{-3}\times 10^5 \qquad \frac{10^3}{10^{-5}} \qquad \frac{10^{-5}}{10^3} \qquad \frac{10^3\times 10^{-8}}{10^{-5}} \qquad \frac{1}{10^{-5}\times 10^3}$$

Exercice 48.

Calculer sous la forme d'un produit de puissances (éventuellement négatives) de nombres premiers distincts chacun des nombres suivants :

$$a = 6\times\left(\frac{4}{3}\right)^3\times\frac{15^2}{(2^2\times 70)^3} \qquad b = \frac{5^3\times 8^3\times 9^2}{15^{-3}\times 12^4} \qquad c = 1800\times\left(\frac{5}{4}\right)^{-3}\times\left(\frac{3}{7}\right)^3$$

les seuls nombres premiers intervenant éventuellement ici étant 2, 3, 5, 7.

Exercice 49 (résolu partiellement)**.**

Démontrer que les fractions suivantes sont décimales :

$$a = \frac{1}{5^4} \qquad b = \frac{1}{2^3\times 5^7} \qquad c = \frac{1}{2^5\times 5^2} \qquad d = \frac{1}{2^7}$$

Solution partielle : faisons-le pour b. On va se ramener à une puissance de 10 au dénominateur. Pour cela, on multiplie haut et bas par 2^4. On a donc :

$$b = \frac{1}{2^3\times 5^7} = \frac{2^4}{2^4\times 2^3\times 5^7}$$

On réduit ensuite le dénominateur :

$$b = \frac{2^4}{2^4\times 2^3\times 5^7} = \frac{2^4}{2^7\times 5^7} = \frac{2^4}{10^7} = 2^4\times 10^{-7}$$

on obtient bien un nombre décimal.

Exemple 50 (*un raisonnement par l'absurde*).

On se propose de prouver la formule

$$0^0 = 1$$

qui a été énoncée page 44. Supposons que 0^0 existe, et notons $x = 0^0$. On peut appliquer à x les formules élémentaires sur les puissances. Ainsi :

$$x^2 = \left(0^0\right)^2 = 0^{0\times 2} = 0^0 = x$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} x^2 - x &= 0 \\ x(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x = 0$ ou $x - 1 = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = 1$. Nous allons **raisonner par l'absurde**, et montrer que si

$$0^0 = 0$$

on aboutit à une contradiction. Ceci prouvera qu'il ne reste que la possibilité $0^0 = 1$, et c'est ce que nous voulons démontrer. Supposons donc $0^0 = 0$ alors

$$0^{-0} = 0^0 = 0$$

Donc 0^{-0} existe, et on a aussi

$$0^{-0} = \frac{1}{0^0} = \frac{1}{0}$$

qui n'existe pas, comme on l'a vu page 35. On arrive donc à une contradiction.

Inégalités, inéquations

Exercice 51.

1. Tracer l'axe réel orienté vers la droite, gradué en cm, de -6 à 6.
2. Placer sur cet axe les onze nombres du tableau suivant (si un nombre figure plusieurs fois dans le tableau, on ne le place qu'une fois sur l'axe) :

a	$-3{,}5$	$-3{,}5$	-2	-2	2	$-2{,}1$	$-2{,}1$
b	$5{,}2$	-4	1	-5	3	$-2{,}5$	$2{,}5$

3. Pour toutes les valeurs de a et b figurant dans les onze colonnes de ce tableau écrire celle des deux relations $a \leq b$ ou $a \geq b$ qui est exacte. La liste commence ainsi :

$$-3{,}5 \leq 5{,}2 \qquad -3{,}5 \geq -4 \qquad \text{etc.}$$

4. Compléter la relation d'ordre suivante avec les onze nombres du tableau :

$$-5 \leq -4 \leq \quad \dots \quad \leq 5{,}2$$

Exercice 52.

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl@{\qquad}rcl} x+3 & \leq & -4 & x-3 & \geq & 5 & -3+x & < & 5 \\ x-5 & \leq & -2 & 3+x & < & 1 & 1+x & > & 3 \end{array}$$

Exercice 53 (résolu partiellement)**.**

Après les avoir réduites, résoudre les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl@{\qquad}rcl} x-3 & \leq & 4 & -2x+3 & \geq & 5 & -3x & < & 5 \\ 4x-5 & \leq & -2 & 3x & < & x & -x & > & 3 \end{array}$$

Solution partielle :

• On va résoudre deux des inéquations, d'abord la troisième :

$$-3x < 5$$

Pour avoir x, on divise par -3 des deux côtés. Comme $-3 < 0$, le sens de l'inégalité change, et on obtient :

$$x > -\frac{5}{3}$$

• On résout maintenant la quatrième inéquation :

$$4x - 5 \leq -2$$

Pour isoler les x, on fait passer le -5 à droite, il devient $+5$:

$$\begin{array}{rcl} 4x & \leq & -2+5 \\ 4x & \leq & 3 \end{array}$$

Pour avoir x, on divise ensuite par 4 des deux côtés. Comme $4 > 0$, le sens de l'inégalité ne change pas, et on obtient :

$$x \leq \frac{3}{4}$$

Deux inéquations étranges

• Dans l'inéquation suivante :

$$-3x + 7 > 1 - 3x \tag{1}$$

on remarque que le terme $-3x$ figure des deux côtés. Donc il se simplifie, et on voit que l'inéquation (1) équivaut à l'inégalité :

$$7 > 1$$

où il n'y a plus d'inconnue. Comme cette inégalité est **vraie**, on en déduit que tous les réels sont solutions de l'inéquation (1). Si on note $\mathscr{S}$ l'**ensemble** des solutions de l'inéquation (1), on peut écrire :

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathbb{R}}$$

• Pour résoudre l'inéquation suivante :

$$2x - (2x - 1) < 0 \tag{2}$$

on développe le côté gauche. Il vient :

$$\begin{array}{rcl} 2x - 2x + 1 & < & 0 \\ 1 & < & 0 \end{array}$$

Il n'y a donc plus d'inconnue, mais l'inégalité est **fausse**. Donc l'inéquation (2) est équivalente à une inégalité fausse. On en déduit qu'aucun réel n'est solution de l'inéquation (2), cette inéquation est **impossible**. Si on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation (2), on écrit :

$$\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$$

le symbole $\emptyset$ désignant l'**ensemble vide**, ensemble qui n'a aucun élément, et qu'on a déjà rencontré dans l'ex. 18, p. 56.

Suite des inéquations

Exercice 54.

Après les avoir simplifiées ou réduites, résoudre les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} -4(x-3)+3 & \geq & 3 & \quad & 3x & \leq & 3x+1 & \quad & 3-(1+2x) & < & 1 \\ -3x+7 & > & 1-3x & & -3(x-7) & < & 3x & & x-(x-1) & < & 0 \end{array}$$

Exercice 55.

Après les avoir simplifiées ou réduites, résoudre les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} 4(5x-3)+7 & \geq & 3 & \quad & 3x & \leq & -3x+1 & \quad & 3-(1-5x) & < & 1 \\ -3x-7 & > & 1-3x & & 3(x+5) & < & -3x & & x-(2x-1) & < & 0 \end{array}$$

Exercice 56.

Après les avoir simplifiées ou réduites, résoudre les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} 4(x-3)+3 & \geq & -3 & \quad & 3x & \leq & -2x & \quad & 3-(1-2x) & \geq & 0 \\ -3x+7 & > & 1-4x & & -3(x+7) & \leq & 3x & & 2x-(x-1) & < & 0 \end{array}$$

20 Correction des questions

p. 34 On procède ainsi :

$$\begin{array}{rcl} (-3{,}75)+7 & = & 7-3{,}75 = 3{,}25 \\ 4{,}8-(-9{,}35) & = & 4{,}8+9{,}35 = 14{,}15 \\ -4{,}6+(-2{,}05) & = & -(4{,}6+2{,}05) = -6{,}65 \\ 3{,}97+(-7{,}6) & = & -(7{,}6-3{,}97) = -3{,}63 \end{array}$$

p. 44 On a :

$$\begin{aligned} a &= 3^4 \times 3^{-7} = 3^{4-7} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \\ b &= 2^7 \times 2 = 2^7 \times 2^1 = 2^{7+1} = 2^8 = 256 \\ c &= 5^4 \times 2^4 = (5 \times 2)^4 = 10^4 = 10\,000 \end{aligned}$$

Pour calculer d, il y a deux méthodes :

- soit **remonter** le 2 au numérateur, réduire, **descendre** le 2^{-6} au dénominateur :

$$d = \frac{2^{-5}}{2} = 2^{-5} \times \frac{1}{2} = 2^{-5} \times \frac{1}{2^1} = 2^{-5} \times 2^{-1} = 2^{-5-1} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

- soit **descendre** les puissances aux dénominateurs, réduire :

$$d = \frac{2^{-5}}{2} = 2^{-5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^5} \times \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2^5 \times 2^1} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

21 Correction des exercices

Ex. 1, p. 52. 1. En procédant comme dans l'exemple corrigé, on obtient :

$$\begin{aligned} a + b &= 0{,}3 + 6 = 6{,}9 \\ -a + b &= -0{,}3 + 6 = 6 - 0{,}3 = 5{,}7 \\ -a + c &= -0{,}3 + (-2) = -0{,}3 - 2 = -(0{,}3 + 2) = -2{,}3 \\ c - b &= -2 - 6 = -(2 + 6) = -8 \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{6}{0{,}3} = \frac{60}{3} = 20 \\ \frac{a}{c} &= \frac{0{,}3}{-2} = -\frac{0{,}3}{2} = -\frac{3}{20} \\ \frac{b}{c} &= \frac{6}{-2} = -\frac{6}{2} = -3 \end{aligned}$$

Ex. 2, p. 52. On calcule :

$$\begin{aligned} A = \frac{5}{12} - \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\right) &= \frac{5}{12} - \left(\frac{5}{6} - \frac{8}{6}\right) = \frac{5}{12} - \left(-\frac{3}{6}\right) = \frac{5}{12} + \frac{3}{6} = \frac{5}{12} + \frac{6}{12} = \frac{11}{12} \\ B = \left(\frac{9}{16} - \frac{2}{8}\right) + \frac{1}{4} &= \frac{9}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{9}{16} \\ D = \frac{5}{6} - \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\right) &= \cancel{\frac{5}{6}} - \left(\cancel{\frac{5}{6}} - \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} \\ E = \left(\frac{9}{16} + \frac{2}{8}\right) + \frac{1}{4} &= \frac{9}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{4} = \frac{13}{16} + \frac{1}{4} = \frac{13}{16} + \frac{4}{16} = \frac{17}{16} \\ F = \frac{1}{15} + \left(2 + \frac{7}{3}\right) &= \frac{1}{15} + \frac{6}{3} + \frac{7}{3} = \frac{1}{15} + \frac{13}{3} = \frac{1}{15} + \frac{65}{15} = \frac{66}{15} = \frac{22}{5} \end{aligned}$$

$$C = \frac{1}{15} - \left(2 - \frac{7}{3}\right) = \frac{1}{15} - \left(\frac{6}{3} - \frac{7}{3}\right) =$$
$$\frac{1}{15} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{15} + \frac{1}{3} = \frac{1}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Ex. 3, p. 52. On développe et on réduit :

$$A = -\frac{8}{5}\left(\frac{5}{6} - 3 + \frac{5}{2}\right) = -\frac{8}{5} \times \frac{5}{6} + \frac{8}{5} \times 3 - \frac{8}{5} \times \frac{5}{2} =$$
$$-\frac{8}{6} + \frac{24}{5} - \frac{8}{2} = -\frac{4}{3} + \frac{24}{5} - 4 = -\frac{20}{15} + \frac{72}{15} - \frac{60}{15} = -\frac{8}{15}$$

$$B = -\frac{4}{3}\left(2 - \frac{5}{4} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{4}{3} \times 2 + \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} + \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} =$$
$$-\frac{8}{3} + \frac{5}{3} + \frac{4}{2} = -\frac{3}{3} + 2 = -1 + 2 = 1$$

$$C = -\frac{2}{3}\left(\frac{5}{4} - 1 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} =$$
$$-\frac{5}{6} + \frac{2}{3} + 1 = -\frac{5}{6} + \frac{4}{6} + 1 = -\frac{1}{6} + 1 = -\frac{1}{6} + \frac{6}{6} = \frac{5}{6}$$

Ex. 4, p. 53. Pour A, on simplifie le produit d'abord :

$$A = \frac{2}{5} - \frac{5}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{5} - \frac{5}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{5} - \frac{5}{6} = \frac{12 - 25}{30} = -\frac{13}{30}$$

Pour B, on réduit d'abord la parenthèse :

$$B = \left(\frac{2}{5} - \frac{5}{8}\right) \times \frac{4}{3} = \frac{16 - 25}{40} \times \frac{4}{3} = -\frac{9}{40} \times \frac{4}{3} = -\frac{9}{10} \times \frac{1}{3} = -\frac{3}{10}$$

Pour C, on calcule naturellement :

$$C = \frac{2}{5} \times \frac{-1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{15} - \frac{1}{2} = -\frac{4}{30} - \frac{15}{30} = -\frac{19}{30}$$

Pour D, comme il y a une simplification de 2 par 10 en vue, on développe le produit

$$D = \frac{3}{4} - 2\left(\frac{3}{5} - \frac{7}{10}\right) = \frac{3}{4} - \frac{6}{5} + \frac{7}{5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{15 + 4}{20} = \frac{19}{20}$$

Pour E, on réduit d'abord la parenthèse :

$$\frac{3}{4} - 2 = \frac{3}{4} - \frac{8}{4} = -\frac{5}{4}$$

et on reporte :

$$E = \left(\frac{3}{4} - 2\right) \times \frac{3}{5} - \frac{7}{10} = -\frac{5}{4} \times \frac{3}{5} - \frac{7}{10} = -\frac{3}{4} - \frac{7}{10} = -\frac{15}{20} - \frac{14}{20} = -\frac{29}{20}$$

Pour F, on développe :

$$F = \frac{2}{5}\left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{15} - \frac{1}{5} = -\frac{2}{15} - \frac{3}{15} = -\frac{5}{15} = -\frac{1}{3}$$

Ex. 5, p. 53. 1. Voici les résultats :

$$a+bc = 3+6\times(-2)=3-12=-9 \qquad a+\frac{b}{c} = 3+\frac{6}{-2}=3-3=0$$

$$a-\frac{c}{b} = 3-\frac{-2}{6}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3} \qquad \frac{-a+c}{b} = \frac{-3+(-2)}{6}=-\frac{5}{6}$$

$$\frac{c-b}{a} = \frac{-2-6}{3}=-\frac{8}{3}$$

2. Et la suite :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}+\frac{1}{b} &= \frac{1}{3}+\frac{1}{6} = \frac{2}{6}+\frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\\
\frac{1}{a}-\frac{1}{b} &= \frac{1}{3}-\frac{1}{6} = \frac{2}{6}-\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\\
\frac{1}{c}+\frac{1}{b} &= \frac{1}{-2}+\frac{1}{6} = -\frac{3}{6}+\frac{1}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}\\
\frac{1}{c}-\frac{1}{b} &= \frac{1}{-2}-\frac{1}{6} = -\frac{3}{6}-\frac{1}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}\\
\frac{b}{a}+\frac{a}{b} &= \frac{6}{3}+\frac{3}{6} = \frac{12}{6}+\frac{3}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Ex. 6, p. 53. Voici les résultats :

$$2\pi-3\pi = (2-3)\times\pi = (-1)\times\pi = -\pi \qquad \pi+\frac{3}{2}\pi = (1+\frac{3}{2})\times\pi = \frac{5}{2}\pi$$

$$\pi-\frac{3}{2}\pi = (1-\frac{3}{2})\times\pi = \frac{1}{2}\pi \qquad \frac{2}{\pi}-\frac{5}{\pi} = -\frac{3}{\pi}$$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5} = \frac{5\pi}{10}-\frac{2\pi}{10} = \frac{3\pi}{10}$$

Ex. 7, p. 53. Voici les résultats :

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}\left(6-\frac{1}{3}\right) &= \frac{3}{4}\times 6 - \frac{3}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{3}{2}\times 3-\frac{1}{4} = \frac{9}{2}-\frac{1}{4} = \frac{18}{4}-\frac{1}{4} = \frac{17}{4}\\
\frac{3}{4}\left(4+\frac{1}{6}\right) &= \frac{3}{4}\times 4 + \frac{3}{4}\times\frac{1}{6} = 3+\frac{1}{8} = \frac{24}{8}+\frac{1}{8} = \frac{25}{8}\\
\frac{3}{\pi}\left(6\pi-\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{3}{\pi}\times 6\pi - \frac{3}{\pi}\times\frac{\pi}{3} = 18-1 = 17\\
\frac{3\pi}{4}\left(\frac{1}{6\pi}+\frac{1}{3\pi}\right) &= \frac{3\pi}{4}\times\frac{1}{6\pi} + \frac{3\pi}{4}\times\frac{1}{3\pi} = \frac{1}{8}+\frac{1}{4} = \frac{1}{8}+\frac{2}{8} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

CORRIGÉS

Ex. 8, p. 53. Voici les résultats :

$$\frac{3}{4}(6-2)=\frac{3}{4}\times 4=3$$

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)=-\frac{3}{4}\times 1=-\frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{\pi}(6\pi-2\pi)=-\frac{3}{\pi}\times(4\pi)=-12$$

$$\frac{3\pi}{5}\left(\frac{1}{6\pi}-\frac{1}{3\pi}\right)=\frac{3\pi}{5}\left(\frac{1}{6\pi}-\frac{2}{6\pi}\right)=\frac{3\pi}{5}\times\frac{-1}{6\pi}=-\frac{1}{10}$$

Ex. 9, p. 53. Voici les résultats :

$$\begin{aligned}
A &= 5-(2+3x)=5-2-3x=3-3x\\
B &= 4-x+(2x-7)=4-x+2x-7=-3+x\\
C &= -(4x+3)-(5+4x)=-4x-3-5-4x=-8x-8\\
D &= -(1+2x)-(1-3x)=-1-2x-1+3x=-2+x
\end{aligned}$$

Ex. 10, p. 53. Voici les résultats :

$$\begin{aligned}
A &= 4(x-3)+2=4x-12+2=4x-10\\
B &= 3a-(3+2a)=3a-3-2a=a-3\\
C &= 3-(2+x)=3-2-x=1-x\\
D &= 4(1-a)-3=4-4a-3=1-4a\\
E &= 3(x-2)-2(1-x)=3x-6-2+2x=5x-8\\
F &= 2-3(1-x)=2-3+3x=-1+3x
\end{aligned}$$

Ex. 11, p. 54. Voici les résultats, on ne peut pas les simplifier davantage :

$$\begin{aligned}
A &= 1+x(x+2)=1+x^2+2x\\
B &= x-(x+2)=x-x-2=-2\\
C &= 1+2x(x-2)=1+2x^2-4x\\
D &= 1-x(3x-2)=1-3x^2+2x\\
E &= 2+x-x(1-x)=2+x-x+x^2=2+x^2\\
F &= 1-x(1+x)=1-x-x^2
\end{aligned}$$

Ex. 12, p. 54. Voici les autres résultats, on ne peut pas les simplifier davantage :

$$\begin{aligned}
A &= (x+1)(x+2)=x^2+2x+x+2=x^2+3x+2\\
B &= (x-1)(x+2)=x^2+2x-x-2=x^2+x-2\\
C &= (2x+1)(x-2)=2x^2-4x+x-2=2x^2-3x-2\\
E &= (2-x)(1-x)=2-2x-x+x^2=2-3x+x^2\\
F &= (1-x)(1+x)=1+x-x-x^2=1-x^2
\end{aligned}$$

Ex. 13, p. 54. Voici les résultats, on ne peut pas les simplifier davantage :

$$\begin{array}{rcl} A &=& (x-3)(x+2) = x^2+2x-3x-6 = x^2-x-6 \\ B &=& (2x-1)(x-4) = 2x^2-8x-x+4 = 2x^2-9x+4 \\ C &=& (-x+5)(x+2) = -x^2-2x+5x+10 = -x^2+3x+10 \\ D &=& (3-2x)(-x+4) = -3x+12+2x^2-8x = -11x+12+2x^2 \\ E &=& (2+x)(4-x) = 8-2x+4x-x^2 = 8+2x-x^2 \\ F &=& (1-2x)(1+x) = 1+x-2x-2x^2 = 1-x-2x^2 \end{array}$$

Ex. 14, p. 54. 1. L'aire du grand carré est $S=(a+b)^2$.
2. Les aires des carrés sont a^2 pour le petit, b^2 pour le grand. Les deux rectangles ayant les mêmes dimensions, ont la même aire qui est ab.
3. La somme des quatre aires précédentes est donc $S'=a^2+b^2+ab+ab$, qui se réduit en $S'=a^2+b^2+2ab$.
4. Comme $S=S'$, on déduit :

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$$

cqfd

Ex. 15, p. 55. On applique les identités remarquables (*voir* prop. 4, p. 41) et on trouve :

$$\begin{array}{rcl} A &=& (x+1)^2 \;=\; x^2+2x+1 \\ B &=& (1-x)^2 \;=\; 1-2x+x^2 \\ C &=& \left(\frac{1}{2}+x\right)\times\left(\frac{1}{2}-x\right) \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^2-x^2 = \frac{1}{4}-x^2 \\ D &=& (3-2x)^2 \;=\; 3^2-2\times 3\times 2\times x+(2x)^2 = 9-12x+4x^2 \\ E &=& (3x-2)(3x+2) \;=\; (3x)^2-2^2 = 9x^2-4 \\ F &=& \left(\frac{1}{2}-3x\right)^2 \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}\times 3x+(3x)^2 = \frac{1}{4}-3x+9x^2 \end{array}$$

Ex. 16, p. 55. On applique les identités remarquables (*voir* prop. 4, p. 41) et on trouve :

$$\begin{array}{rcl} A &=& \left(\frac{x}{2}+5\right)^2 \;=\; \left(\frac{x}{2}\right)^2+2\times\frac{x}{2}\times 5+5^2 = \frac{x^2}{4}+5x+25 \\ B &=& \left(\frac{x}{4}+2\right)^2 \;=\; \left(\frac{x}{4}\right)^2+2\times\frac{x}{4}\times 2+2^2 = \frac{x^2}{16}+x+4 \\ C &=& \left(5x+\frac{1}{2}\right)^2 \;=\; (5x)^2+2\times 5x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 25x^2+5x+\frac{1}{4} \end{array}$$

Ex. 17, p. 56. On trouve :

$$\begin{array}{rcl} A &=& \left(\frac{x}{2}+3\right)^2 \;=\; \left(\frac{x}{2}\right)^2+2\times\frac{x}{2}\times 3+3^2 = \frac{x^2}{4}+3x+9 \\ B &=& \left(\frac{x}{3}-2\right)^2 \;=\; \left(\frac{x}{3}\right)^2-2\times\frac{x}{3}\times 2+2^2 = \frac{x^2}{9}-\frac{4}{3}x+4 \\ C &=& \left(5x-\frac{1}{2}\right)^2 \;=\; (5x)^2-2\times 5x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 25x^2-5x+\frac{1}{4} \end{array}$$

Ex. 18, p. 56. On a les équivalences suivantes :

$$4(x-3)+3=-3 \Leftrightarrow 4x-12=-6 \Leftrightarrow 4x=6 \Leftrightarrow x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}}$$

$$3x=-2x \Leftrightarrow 5x=0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$$

$$3-(1-2x)=0 \Leftrightarrow 3-1+2x=0 \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=-1}$$

$$-3(x+7)=0 \Leftrightarrow x+7=0 \Leftrightarrow \boxed{x=-7}$$

$$2x-(2x-1)=0 \Leftrightarrow 1=0 \Leftrightarrow \boxed{\mathscr{S}=\emptyset}$$

Ex. 19, p. 56. 1. On calcule $2x+3$ lorsque $x=\frac{3}{2}$. On trouve :

$$2x+3=2\times\frac{3}{2}+3=3+3\neq 0$$

Donc $\frac{3}{2}$ n'est pas solution de l'équation (1).
2. On calcule $-5x$ lorsque $x=-5$. On trouve :

$$-5x=-5\times(-5)=25\neq -25$$

Donc -5 n'est pas solution de l'équation (2).
3. On calcule $x+1$ et $2x+3$ lorsque $x=-1$. On trouve :

$$x+1=-1+1=0 \qquad 2x+3=2\times(-1)+3=-2+3=1$$

Or $0\neq 1$, donc -1 n'est pas solution de l'équation (3).
4. On calcule $-6x+2$ et $-x-13$ lorsque $x=3$. On trouve :

$$-6x+2=-6\times 3+2=-18+2=-16 \qquad -x-13=-3-13=-16$$

Comme les deux valeurs sont égales, $\boxed{3 \text{ est solution}}$ de l'équation (4).
5. On calcule $-\frac{6}{5}x+12$ lorsque $x=-10$. On trouve :

$$-\frac{6}{5}x+12=-\frac{6}{5}\times(-10)+12=12+12=24$$

Donc $\boxed{-10 \text{ est solution}}$ de l'équation (5).
6. On calcule $\frac{1}{3}+x$ lorsque $x=1$. On trouve :

$$\frac{1}{3}+x=\frac{1}{3}+1=\frac{1}{3}+\frac{3}{3}=\frac{4}{3}\neq -\frac{1}{3}$$

Donc 1 n'est pas solution de l'équation (6).
7. On calcule $\frac{5}{7}x$ lorsque $x=\frac{14}{5}$. On trouve :

$$\frac{5}{7}x=\frac{5}{7}\times\frac{14}{5}=2$$

Donc $\boxed{\frac{14}{5} \text{ est solution}}$ de l'équation (7).

Ex. 20, p. 57. On sait que pour tuer une division par 2 on multiplie par 2 des deux côtés (*voir* § 7, p. 37). On a donc :

$$\frac{x}{2} = 8 \;\Leftrightarrow\; \cancel{2} \times \frac{x}{\cancel{2}} = 2 \times 8 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = 16}$$

Voici la résolution des autres équations :

$$3 - x = \frac{2}{5} \;\Leftrightarrow\; -x = \frac{2}{5} - 3 = \frac{2}{5} - \frac{15}{5} = -\frac{13}{5} \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = \frac{13}{5}}$$

$$3x = \frac{3}{7} \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = \frac{1}{7}}$$

$$-3x - 5 = 2 \;\Leftrightarrow\; -3x = 5 + 2 = 7 \Leftrightarrow 3x = -7 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = -\frac{7}{3}}$$

Ex. 21, p. 57. On sait que pour tuer une multiplication par $\frac{3}{2}$ on multiplie par $\frac{2}{3}$ des deux côtés car $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$ (*voir* § 17, p. 50). Donc :

$$\frac{3}{2}x = \frac{3}{7} \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}x \;=\; \frac{2}{3} \times \frac{3}{7} \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = \frac{2}{7}}$$

Pour la suivante, on a :

$$\frac{-3x}{4} - 5 = 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{-3}{4}x = 2 + 5 = 7$$

Pour tuer la multiplication par $-\frac{3}{4}$ on multiplie par $-\frac{4}{3}$ des deux côtés. On obtient :

$$x = -\frac{4}{3} \times 7 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = -\frac{28}{3}}$$

Les deux autres équations se traitent de même :

$$\frac{2x}{3} - 3 = -5 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = -5 + 3 = -2 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{2} \times (-2) = -3 \Leftrightarrow \boxed{x = -3}$$

$$-\frac{5x}{2} = 7 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{2}{5} \times 7 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = -\frac{14}{5}}$$

Ex. 22, p. 57. On a vu en classe de 5ᵉ que pour résoudre l'équation :

$$\frac{6x - 3}{4} = \frac{5x - 8}{2}$$

il est commode de multiplier des deux côtés par 4 pour **chasser les dénominateurs** :

$$4 \times \frac{6x - 3}{4} = 4 \times \frac{5x - 8}{2}$$

On simplifie ensuite :

$$6x - 3 = 2 \times (5x - 8)$$

CORRIGÉS

et on résout comme d'habitude :

$$6x - 3 = 2 \times (5x - 8) = 10x - 16 \;\Leftrightarrow\; 6x - 10x = -16 + 3$$
$$\Leftrightarrow\; -4x = -13 \;\Leftrightarrow\; 4x = 13 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = \frac{13}{4}}$$

En **règle générale** pour chasser les dénominateurs a et b, on multiplie des deux côtés par un multiple commun de a et b, par exemple $\text{ppcm}(a, b)$ (*voir* déf. 1, p. 20).

Passons maintenant aux autres équations :

$$\frac{2x+3}{3} = \frac{2-x}{5} \;\Leftrightarrow\; 15 \times \frac{2x+3}{3} = 15 \times \frac{2-x}{5} \;\Leftrightarrow\; 5(2x+3) = 3(2-x)$$
$$\Leftrightarrow\; 10x + 15 = 6 - 3x \;\Leftrightarrow\; 13x = -9 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = -\frac{9}{13}}$$

$$\frac{x-1}{5} = \frac{3x+6}{7} \;\Leftrightarrow\; 35 \times \frac{x-1}{5} = 35 \times \frac{3x+6}{7} \;\Leftrightarrow\; 7(x-1) = 5(3x+6)$$
$$\Leftrightarrow\; 7x - 7 = 15x + 30 \;\Leftrightarrow\; -8x = 37 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = -\frac{37}{8}}$$

$$\frac{3x}{4} - 5 = \frac{x-3}{2} \;\Leftrightarrow\; 4 \times \left(\frac{3x}{4} - 5\right) = 4 \times \frac{x-3}{2} \;\Leftrightarrow\; 3x - 20 = 2x - 6$$
$$\Leftrightarrow\; x = -6 + 20 = 14 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = 14}$$

$$\frac{2x}{3} - 3 = \frac{1-x}{6} \;\Leftrightarrow\; 6 \times \left(\frac{2x}{3} - 3\right) = 6 \times \frac{1-x}{6} \;\Leftrightarrow\; 4x - 18 = 1 - x$$
$$\Leftrightarrow\; 5x = 19 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = \frac{19}{5}}$$

$$\frac{2x-1}{3} + \frac{x+1}{6} = \frac{x+5}{2} \;\Leftrightarrow\; 6 \times \left(\frac{2x-1}{3} + \frac{x+1}{6}\right) = 6 \times \frac{x+5}{2}$$
$$\Leftrightarrow\; 4x - 2 + x + 1 = 3x + 15 \Leftrightarrow\; 2x = 16 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = 8}$$

Ex. 23, p. 57. On fait d'abord tout passer à gauche dans notre équation :

$$x^3 - x^2 = 0$$

Ensuite on factorise par x^2 :

$$x^2 \times (x - 1) = 0$$

On applique alors la règle d'annulation (*voir* th. 5, p. 42) :

$$x^2 \times (x-1) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x^2 = 0 \;\text{ ou }\; x - 1 = 0) \;\Leftrightarrow (x = 0 \;\text{ ou }\; x = 1)$$

Notre équation a donc **deux solutions** :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0, 1\}}$$

Noter qu'on a utilisé la propriété suivante $x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ qui résulte de la règle d'annulation : $x \times x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ex. 24, p. 57. 2. On note n le plus petit des quatre entiers inconnus. Puisque ces entiers sont consécutifs, les trois autres sont $n+1$, $n+2$, $n+3$. La somme de ces quatre entiers vaut donc :

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4n+6$$

On a donc :

$$\begin{aligned} 4n+6 &= 726 \\ 4n &= 726-6 = 720 \\ n &= \frac{720}{4} = 180 \end{aligned}$$

Les entiers cherchés sont donc 180 181 182 183.

Ex. 25, p. 58. On cherche donc $a \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait :

$$\frac{61+a}{27+a}=2$$

C'est une équation en a. On la résout en multipliant des deux côtés par $27+a$:

$$\begin{aligned} 61+a &= 2(27+a) = 54+2a \\ a-2a &= 54-61 \\ -a &= -7 \\ a &= 7 \end{aligned}$$

On vérifie :

$$\frac{61+7}{27+7}=\frac{68}{34}=2$$

Ex. 26, p. 58. En 2012, l'âge de Vladimir était donc x, et celui de sa mère $30+x$. On en déduit :

$$\begin{aligned} x+(30+x) &= 56 \\ 2x+30 &= 56 \\ 2x= &= 56-30 = 26 \\ x &= \frac{26}{2} = 13 \end{aligned}$$

Vladimir avait donc 13 ans, et sa mère en avait 43. On vérifie $43+13=56$.

Ex. 28, p. 59. 1. Le système S_1 est composé de deux équations d'inconnues x et y. Dans ces équations, les coefficients de x et y sont : 8, -3, 3, -1. Le plus simple est -1. Il va nous permettre de calculer y en fonction de x dans la deuxième équation. On a :

$$y=3x-8 \tag{1}$$

On reporte cette expression de y dans la première équation, et on obtient :

$$\begin{aligned} 8x-3(3x-8) &= -2 \\ -x+24 &= -2 \\ -x &= -26 \\ x &= 26 \end{aligned}$$

CORRIGÉS

On a donc trouvé x. Pour trouver y, on porte cette valeur de x dans l'expression (1). On obtient :

$$y = 3 \times 26 - 8 = 78 - 8 = 70$$

On a donc prouvé l'**implication directe** :

$$S_1 \ \Rightarrow \ (x = 26 \ \text{ et } \ y = 70)$$

mais on n'a pas prouvé l'équivalence. Au **stade élémentaire** où nous sommes, il faut vérifier la **réciproque**, c'est-à-dire prouver :

$$(x = 26 \ \text{ et } \ y = 70) \ \Rightarrow \ S_1$$

Il suffit pour cela de vérifier directement que les valeurs $(x = 26 \ \text{ et } \ y = 70)$ satisfont le système S_1. Calculons donc :

$$8x - 3y = 8 \times 26 - 3 \times 70 = 208 - 210 = -2$$

c'est bien la valeur attendue dans la première. Calculons ensuite :

$$3x - y = 3 \times 26 - 70 = 78 - 70 = 8$$

c'est la valeur attendue dans la deuxième équation. Finalement, on a prouvé l'**équivalence** :

$$S_1 \ \Leftrightarrow \ (x = 26 \ \text{ et } \ y = 70)$$

2. On montre par la même méthode qu'on a :

$$S_2 \ \Leftrightarrow \ (x = -41 \ \text{ et } \ y = -23) \qquad\qquad S_3 \ \Leftrightarrow \ (x = -27 \ \text{ et } \ y = -9)$$

Ex. 29, p. 59. Suivant les notations de l'énoncé, le nombre de billets vendus et la recette peuvent se calculer ainsi :

$$\begin{aligned} p + r &= 202 & (1) \\ 10p + 5r &= 1760 & (2) \end{aligned}$$

De l'équation (1), on déduit :

$$r = 202 - p$$

Portant ceci dans (2), il vient :

$$\begin{aligned} 10p + 5(202 - p) &= 1760 \\ 10p + 1010 - 5p &= 1760 \\ 5p &= 750 \\ p &= \frac{750}{5} = 150 \end{aligned}$$

On a donc vendu $\boxed{p = 150}$ billets à tarif plein. On en déduit :

$$r = 202 - 150 = 52$$

donc on a vendu $\boxed{r = 52}$ billets à tarif réduit.

Réciproquement, ces valeurs satisfont aux relations (1) et (2) car :

$$p + r = 150 + 52 = 202 \qquad\qquad 10p + 5r = 10 \times 150 + 5 \times 52 = 1500 + 260 = 1760$$

Ex. 30, p. 59. Notons g le nombre de **gros virements** de 25 euros, et p le nombre de **petits virements** de 14 euros. On a :

$$\begin{aligned} g+p &= 12 & (1)\\ 25g+14p &= 223 & (2) \end{aligned}$$

De l'équation (1), on déduit :

$$g = 12 - p$$

Portant ceci dans (2), il vient :

$$\begin{aligned} 25(12-p)+14p &= 223\\ 300-25p+14p &= 223\\ -11p &= 223-300 = -77\\ p &= 7 \end{aligned}$$

On a donc trouvé $\boxed{p=7}$. On en déduit :

$$g = 12 - p = 12 - 7 = 5$$

donc $\boxed{g=5}$. Réciproquement, ces valeurs satisfont aux relations (1) et (2) car :

$$g+p = 5+7 = 12 \qquad 25g+14p = 25\times 5 + 14\times 7 = 125+98 = 223$$

Finalement, Papa a fait 5 virements à 25 euros et 7 virements à 14 euros.

Ex. 31, p. 59. Cet exercice est en tout point semblable à l'ex. 29, p. 59. On a donc :

$$\begin{aligned} a+e &= 40 & (1)\\ 10a+7e &= 352 & (2) \end{aligned}$$

De l'équation (1), on déduit :

$$e = 40 - a$$

Portant ceci dans (2), il vient :

$$\begin{aligned} 10a+7(40-a) &= 352\\ 10a+280-7a &= 352\\ 3a &= 72\\ a &= \frac{72}{3} = 24 \end{aligned}$$

On a donc vendu $\boxed{a=24}$ billets à tarif adulte. On en déduit :

$$e = 40 - 24 = 16$$

donc on a vendu $\boxed{e=16}$ billets à tarif enfant.

Réciproquement, ces valeurs satisfont aux relations (1) et (2) car :

$$a+e = 24+16 = 40 \qquad 10a+7e = 10\times 24 + 7\times 16 = 240+112 = 352$$

Ex. 32, p. 59. Pour y voir plus clair, dressons un tableau avec les données de l'énoncé :

	crayons	cahiers
Sophie	5	2
Élodie	2	5
prix unitaire	x	y

1. La somme dépensée par Sophie est :

$$S = 5x + 2y$$

Celle dépensée par Élodie est :

$$E = 2x + 5y$$

2. a/ Si on met en équations, on obtient :

$$y = 2x \qquad E = S + 3$$

b/ Si on évalue l'équation $E = S + 3$ en fonction de x uniquement, on obtient :

$$\begin{aligned} 2x + 5 \times (2x) &= 5x + 2 \times (2x) + 3 \\ 12x &= 9x + 3 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$y = 2x = 2 \times 1 = 2$$

c/ Puis :

$$S = 5x + 2y = 5 + 4 = 9 \qquad E = 2x + 5y = 2 + 10 = 12$$

Donc :

$$\boxed{\text{Élodie a dépensé 12 euros, et Sophie 9 euros.}}$$

On voit bien qu'Élodie a dépensé 3 euros de plus que Sophie.

Ex. 33, p. 60. Cet exercice étant semblable aux exercices n. 29 p. 59, 30 p. 59, 31 p. 59 dont nous avons donné une correction détaillée, nous nous limitons aux points principaux :

$$\begin{aligned} m + f &= 30 && (1) \\ 15m + 10f &= 365 && (2) \end{aligned}$$

Ce système implique :

$$f = 30 - m$$

puis :

$$\begin{aligned} 15m + 10(30 - m) &= 365 \\ 5m + 300 &= 365 \\ 5m &= 65 \\ m &= \frac{65}{5} = 13 \end{aligned}$$

Si $m = 13$ alors $f = 30 - m = 30 - 13 = 17$.

On a donc prouvé que les équations (1) et (2) impliquent $m = 13$ et $f = 17$. Réciproquement, ces valeurs satisfont bien aux relations (1) et (2) car :

$$m + f = 13 + 17 = 30 \qquad 15m + 10f = 15 \times 13 + 10 \times 17 = 365$$

La bibliothécaire a donc commandé $\boxed{13}$ livres de mathématiques et $\boxed{17}$ de français.

Ex. 34, p. 60. On a :

$a = 2^{-3} \times 2^4 = 2^{-3+4} = 2^1 = 2$ $\quad b = 3^{-3} \times 3 = 3^{-3} \times 3^1 = 3^{-3+1} = 3^{-2}$

$c = 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$ $\quad d = \dfrac{2^{-2}}{2^3} = 2^{-2} \times \dfrac{1}{2^3} = 2^{-2} \times 2^{-3} = 2^{-2-3} = 2^{-5}$

Ex. 35, p. 60. On a :

$a = 5^4 \times 5^{-4} = 5^{4-4} = 5^0 = 1$ $\quad b = 2^{-3} \times 2 = 2^{-3} \times 2^1 = 2^{-3+1} = 2^{-2}$

$c = 5^3 \times 2^3 = (5 \times 2)^3 = 10^3$ $\quad d = \dfrac{2^5}{2} = \dfrac{2^5}{2^1} = 2^5 \times 2^{-1} = 2^{5-1} = 2^4$

Ex. 36, p. 60. On a :

$2^3 \times 2^{-4} = 2^{3-4} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ $\quad 2^{-3} \times 2^{-4} = 2^{-3-4} = 2^{-7}$

$\dfrac{2^3}{2^{-4}} = 2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ $\quad 5^3 \times 5^{-2} = 5^{3-2} = 5^1 = 5$

$5^{-3} \times 5^{-4} = 5^{-3-4} = 5^{-7}$ $\quad \dfrac{5^{-3}}{5^{-4}} = 5^{-3} \times 5^4 = 5^{-3+4} = 5^1 = 5$

Ex. 37, p. 60. On a :

$(3 \times 2)^2 = 3^2 \times 2^2$ $\quad (3 \times 2)^{-3} = 3^{-3} \times 2^{-3}$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{2^2}{3^2} = 2^2 \times 3^{-2}$ $\quad \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{3^3}{2^3} = 3^3 \times 2^{-3}$

$6^{-2} = (2 \times 3)^{-2} = 2^{-2} \times 3^{-2}$ $\quad 6^3 = (2 \times 3)^3 = 2^3 \times 3^3$

Ex. 38, p. 60. On a :

$(5 \times 2)^3 = 5^3 \times 2^3$ $\quad (5 \times 2)^{-2} = 5^{-2} \times 2^{-2}$

$\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = \dfrac{2^2}{5^2} = 2^2 \times 5^{-2}$ $\quad \left(\dfrac{5}{2}\right)^3 = \dfrac{5^3}{2^3} = 5^3 \times 2^{-3}$

$10^{-2} = (2 \times 5)^{-2} = 2^{-2} \times 5^{-2}$ $\quad 10^4 = (2 \times 5)^4 = 2^4 \times 5^4$

Ex. 39, p. 60. On a :

$9^3 = (3^2)^3 = 3^{2\times 3} = 3^6$ $\quad 4^3 = (2^2)^3 = 2^{2\times 3} = 2^6$

$(2^3)^2 = 2^{3\times 2} = 2^6$ $\quad (2^2)^4 = 2^{2\times 4} = 2^8$

$(2^{-1})^3 = 2^{-1\times 3} = 2^{-3}$ $\quad (2^{-3})^{-2} = 2^{-3\times(-2)} = 2^6$

$(3^2 \times 2)^3 = (3^2)^3 \times 2^3 = 3^{2\times 3} \times 2^3 = 3^6 \times 2^3$

$(3 \times 2^{-1})^{-3} = 3^{-3} \times (2^{-1})^{-3} = 3^{-3} \times 2^{-1\times(-3)} = 3^{-3} \times 2^3$

Ex. 40, p. 61. On a :

$$12^3 = (3\times 4)^3 = (3\times 2^2)^3 = 3^2\times (2^2)^3 = 3^2\times 2^6$$
$$18^4 = (2\times 9)^4 = (2\times 3^2)^4 = 2^4\times (3^2)^4 = 2^4\times 3^8$$
$$\frac{6^2}{6^4} = 6^2\times 6^{-4} = (2\times 3)^2\times (2\times 3)^{-4}$$
$$= 2^2\times 3^2\times 2^{-4}\times 3^{-4} = 2^{2-4}\times 3^{2-4} = 2^{-2}\times 3^{-2}$$
$$0{,}5\times 2^3 = \frac{1}{2}\times 2^3 = 2^{-1}\times 2^3 = 2^{-1+3} = 2^{-2}$$
$$(3\times 2)^{-3}\times 18 = 3^{-3}\times 2^{-3}\times 2\times 3^2 = 2^{-3+1}\times 3^{-3+2} = 2^{-2}\times 3^{-1}$$
$$\frac{(2\times 3)^2}{2^{-4}} = 2^2\times 3^2\times 2^4 = 2^{2+4}\times 3^2 = 2^6\times 3^2$$
$$12^{-1}\times 6^{-2} = (3\times 4)^{-1}\times (2\times 3)^{-2} = (3\times 2^2)^{-1}\times 2^{-2}\times 3^{-2} =$$
$$3^{-1}\times 2^{-2}\times 2^{-2}\times 3^{-2} = 3^{-1-2}\times 2^{-2-2} = 3^{-3}\times 2^{-4}$$

Ex. 41, p. 61. On a :

$$\begin{array}{llll} (-1)^0 = 1 & (-1)^1 = -1 & (-1)^2 = 1 & (-1)^3 = -1 \\ (-1)^4 = 1 & (-1)^5 = -1 & (-1)^6 = 1 & (-1)^7 = -1 \end{array}$$

En fait,

$$\boxed{(-1)^n \text{ vaut } 1 \text{ si } n = 0, 2, 4, \ldots, \text{ c'est-à-dire, si } n \textbf{ est pair}.}$$

$$\boxed{(-1)^n \text{ vaut } -1 \text{ si } n = 1, 3, 5, \ldots, \text{ c'est-à-dire, si } n \textbf{ est impair}.}$$

Ex. 42, p. 61. 1. On calcule de proche en proche par la règle :

$$2^{n+1} = 2\times 2^n$$

$$\begin{array}{llllll} 2^0 = 1 & 2^1 = 2 & 2^2 = 4 & 2^3 = 8 & 2^4 = 16 & 2^5 = 32 \\ 2^6 = 64 & 2^7 = 128 & 2^8 = 256 & 2^9 = 512 & 2^{10} = 1024 & \end{array}$$

2. Les formules

$$2^4 = (2^2)^2 \qquad 2^6 = (2^3)^2 \qquad 2^8 = (2^4)^2 \qquad 2^{10} = (2^5)^2$$

proviennent toutes de la sixième formule donnée à la prop. 4, p. 44 :

$$(u^\alpha)^\beta = u^{\alpha\beta}$$

que l'on utilise dans le sens inverse.

Ex. 43, p. 61. On a :

$$A = \frac{3^2}{3^3} = 3^2 \times 3^{-3} = 3^{2-3} = 3^{-1} \qquad B = \frac{5^2}{5^4} = 5^2 \times 5^{-4} = 5^{2-4} = 5^{-2}$$

$$C = \frac{7^5}{7^2 \times 7^3} = \frac{7^5}{7^5} = 1 \qquad D = \frac{3^{-2}}{3^3} = 3^{-2} \times 3^{-3} = 3^{-2-3} = 3^{-5}$$

$$E = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = (2^{-1})^5 = 2^{-1\times 5} = 2^{-5} \qquad F = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = (5^{-1})^{-2} = 5^{-1\times(-2)} = 5^2$$

Ex. 44, p. 61. On a :

$$A = 2^2 \times 9 \times 20 = 2^2 \times 3^2 \times 2^2 \times 5 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$

$$B = 360 = 36 \times 10 = (2^2 \times 3^2) \times 2 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$C = 150 \times 12 = (15 \times 10) \times (2^2 \times 3) = (3 \times 5 \times 2 \times 5) \times 2^2 \times 3 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$$

$$D = 490^5 = (7^2 \times 2 \times 5)^5 = (7^2)^5 \times 2^5 \times 5^5 = 2^5 \times 5^5 \times 7^{2\times 5} = 2^5 \times 5^5 \times 7^{10}$$

$$E = (36 \times 8^3)^2 = 36^2 \times ((2^3)^3)^2 = (2^2 \times 3^2)^2 \times 2^{3\times 3\times 2} = 2^4 \times 3^4 \times 2^{18}$$

Ex. 45, p. 61. On a :

$$(ab)^2 = a^2b^2 \qquad \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \qquad (a^2b)^3 = (a^2)^3b^3 = a^6b^3$$

$$(4a^2b)^2 = 4^2(a^2)^2b^2 = 16a^4b^2 \qquad \left(\frac{-a^2}{3}\right)^3 = -\frac{(a^2)^3}{3^3} = -\frac{a^6}{27}$$

$$(ax^2)^{-3} = a^{-3}(x^2)^{-3} = a^{-3}x^{-6} \qquad \left(\frac{-a^3}{2}\right)^2 = \frac{(a^3)^2}{2^2} = \frac{a^6}{4}$$

Ex. 46, p. 62. On a :

$$(ab)^{-4} \times (-a^3b)^{-5} = -a^{-4}b^{-4} \times (a^3)^{-5}b^{-5} = -a^{-4}b^{-9} \times a^{-15} = -a^{-19}b^{-9}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 \times a^3b^5 = \frac{a^2}{b^2} \times a^3b^5 = a^5b^{-2}b^5 = a^5b^3$$

$$\left(\frac{-a}{b}\right)^{-3} = -\frac{a^{-3}}{b^{-3}} = -a^{-3}b^3$$

$$\frac{a^2(bc)^3}{b^2a^3} = a^2b^3c^3b^{-2}a^{-3} = a^{-1}bc^3$$

$$\left(\frac{a}{bc}\right)^2 \times \frac{b^3}{(a^3c)^4} = a^2b^{-2}c^{-2}b^3(a^3c)^{-4} = a^2bc^{-2}a^{-12}c^{-4} = a^{-10}bc^{-6}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\left(\frac{b^2c}{a^3}\right)^3} = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{b^2c}{a^3}\right)^{-3} = a^2b^{-2}(b^2ca^{-3})^{-3} = a^2b^{-2}b^{-6}c^{-3}a^9 = a^{11}b^{-8}c^{-3}$$

Ex. 47, p. 62. On a :

$$10^3 \times 10^{-5} = 10^{3-5} = 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01 \qquad 10^{-3} \times 10^5 = 10^{-3+5} = 10^2 = 100$$

$$\frac{10^3}{10^{-5}} = 10^3 \times 10^5 = 10^{3+5} = 10^8 \qquad \frac{10^{-5}}{10^3} = 10^{-5-3} = 10^{-8}$$

$$\frac{10^3 \times 10^{-8}}{10^{-5}} = \frac{10^{-5}}{10^{-5}} = 1 \qquad \frac{1}{10^{-5} \times 10^3} = \frac{1}{10^{-2}} = 10^2$$

Ex. 48, p. 62. On a :

$$\begin{aligned} a = 6 \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 \times \frac{15^2}{(2^2 \times 70)^3} &= 2 \times 3 \times (2^2 \times 3^{-1})^3 \times (3 \times 5)^2 \times (2^2 \times 7 \times 2 \times 5)^{-3} \\ &= 2 \times 3 \times 2^6 \times 3^{-3} \times 3^2 \times 5^2 \times 2^{-6} \times 7^{-3} \times 2^{-3} \times 5^{-3} \\ &= 2^{-2} \times 5^{-1} \times 7^{-3} \end{aligned}$$

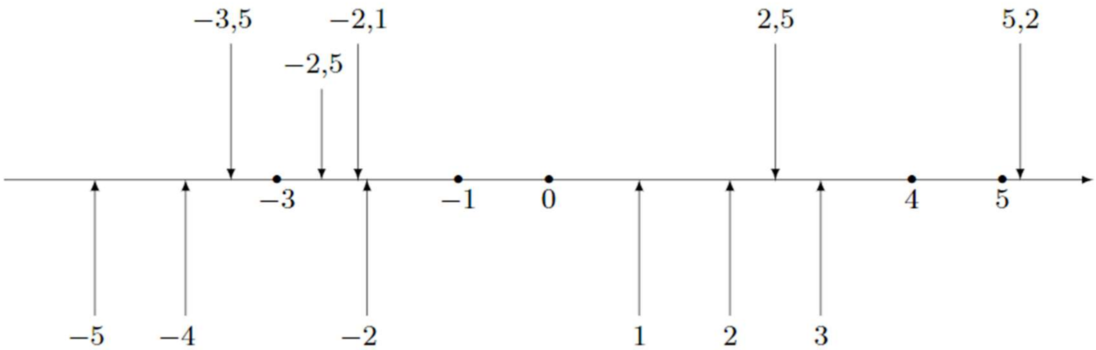
$$\begin{aligned} b = \frac{5^3 \times 8^3 \times 9^2}{15^{-3} \times 12^4} &= 5^3 \times (2^3)^3 \times (3^2)^2 \times (3 \times 5)^3 \times (3 \times 2^2)^{-4} \\ &= 5^3 \times 2^9 \times 3^4 \times 3^3 \times 5^3 \times 3^{-4} \times 2^{-8} = 2 \times 3^3 \times 5^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c = 1800 \times \left(\frac{5}{4}\right)^{-3} \times \left(\frac{3}{7}\right)^3 &= (2 \times 3^2) \times (2^2 \times 5^2) \times 5^{-3} \times (2^2)^3 \times 3^3 \times 7^{-3} \\ &= 2^3 \times 3^5 \times 5^{-1} \times 7^{-3} \times 2^6 = 2^9 \times 3^5 \times 5^{-1} \times 7^{-3} \end{aligned}$$

Ex. 49, p. 62. On se ramène à une puissance de 10 au dénominateur :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{5^4} = \frac{2^4}{2^4 \times 5^4} = \frac{16}{10^4} = 16 \times 10^{-4} \\ c &= \frac{1}{2^5 \times 5^2} = \frac{5^3}{2^5 \times 5^2 \times 5^3} = \frac{125}{10^5} = 125 \times 10^{-5} \\ d &= \frac{1}{2^7} = \frac{5^7}{5^7 \times 2^7} = \frac{5^7}{10^7} = 5^7 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

Ex. 51, p. 63. 1. et 2.



3. On a les relations :

$-3{,}5 \leq 5{,}2 \quad -3{,}5 \geq -4 \quad -2 \leq 1 \quad -2 \geq -5 \quad 2 \leq 3 \quad -2{,}1 \geq -2{,}5 \quad -2{,}1 \leq 2{,}5$

4. Voici l'ordre complet des onze éléments du tableau :

$$-5 \leq -4 \leq -3{,}5 \leq -2{,}5 \leq -2{,}1 \leq -2 \leq 1 \leq 2 \leq 2{,}5 \leq 3 \leq 5{,}2$$

Ex. 52, p. 64. • Résolvons la première inéquation :

$$x + 3 \leq -4$$

Pour isoler x, on fait passer $+3$ à droite comme pour une équation. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} x & \leq & -4 - 3 \\ x & \leq & -7 \end{array}$$

• Passons à la deuxième inéquation :

$$x - 3 \geq 5$$

On procède comme pour la première :

$$\begin{array}{rcl} x & \geq & 5 + 3 \\ x & \geq & 8 \end{array}$$

Les autres inéquations se traitent de la même façon, et on trouve :

$$-3 + x < 5 \Leftrightarrow x < 8 \qquad x - 5 \leq -2 \Leftrightarrow x \leq 3$$

$$3 + x < 1 \Leftrightarrow x < -2 \qquad 1 + x > 3 \Leftrightarrow x > 2$$

Ex. 53, p. 64. • Résolvons la première inéquation :

$$x - 3 \leq 4$$

Pour isoler x, on fait passer -3 à droite comme pour une équation. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} x & \leq & 4 + 7 \\ x & \leq & 11 \end{array}$$

• Passons à la deuxième :

$$-2x + 3 \geq 5$$

D'abord, on fait passer $+3$ à droite et on réduit :

$$\begin{array}{rcl} -2x & \geq & 5 - 3 \\ -2x & \geq & 2 \end{array}$$

Ensuite, pour avoir x, il faut diviser par -2. Or $-2 < 0$ donc le sens de l'inéquation change :

$$\begin{array}{rcl} x & \leq & \dfrac{2}{-2} \\ x & \leq & -1 \end{array}$$

• Pour l'inéquation suivante, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} 3x &\leq x \\ 2x &\leq 0 \\ x &\leq 0 \end{aligned}$$

• Passons à la dernière inéquation. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} -x &> 3 \\ x &< -3 \end{aligned}$$

qu'on obtient en multipliant par -1 des deux côtés. Le sens change car $-1 < 0$.

Ex. 54, p. 65. • Première inéquation :

$$-4(x-3)+3 \geq 3$$

On simplifie les 3 :

$$\begin{aligned} -4(x-3)+\cancel{3} &\geq \cancel{3} \\ -4(x-3) &\geq 0 \end{aligned}$$

On divise par -4. Comme $-4 < 0$, le sens change. On termine ensuite la résolution :

$$\begin{aligned} -4(x-3) &\geq 0 \\ x-3 &\leq 0 \\ x &\leq 3 \end{aligned}$$

• Deuxième inéquation :

$$3x \leq 3x+1$$

On simplifie les $3x$ et on continue la résolution :

$$\begin{aligned} \cancel{3x} &\leq \cancel{3x}+1 \\ 0 &\leq 1 \end{aligned}$$

Cette inégalité est toujours vraie (*voir* inéquations étranges, p. 64), donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathbb{R}}$$

• Troisième inéquation :

$$3-(1+2x) < 1$$

Comme elle n'a rien de particulier, on développe :

$$\begin{aligned} 3-1-2x &< 1 \\ 2-2x &< 1 \\ -2x &< 1-2 \\ -2x &< -1 \end{aligned}$$

On divise par -2. Comme $-2 < 0$, le sens change. On obtient :

$$x > \frac{1}{2}$$

• Les autres inéquations se traitent de façon analogue, et on trouve :

$$-3x+7>1-3x \;\Leftrightarrow\; \mathscr{S}=\mathbb{R} \qquad\qquad -3(x-7)<3x \;\Leftrightarrow\; x>\frac{7}{2}$$

$$x-(x-1)<0 \;\Leftrightarrow\; 1<0 \;\Leftrightarrow\; \mathscr{S}=\emptyset$$

(*voir* inéquations étranges, p. 65)

Ex. 55, p. 65. On trouve :

$$4(5x-3)+7\geq 3 \;\Leftrightarrow\; x>\frac{2}{5} \qquad\qquad 3x\leq -3x+1 \;\Leftrightarrow\; x\leq\frac{1}{6}$$

$$3-(1-5x)<1 \;\Leftrightarrow\; x<-\frac{1}{5} \qquad\qquad -3x-7>1-3x \;\Leftrightarrow\; \mathscr{S}=\emptyset$$

(*voir* inéquations étranges, p. 65, pour cette quatrième inéquation).

$$3(x+5)<-3x \;\Leftrightarrow\; x<-\frac{5}{2} \qquad\qquad x-(2x-1)<0 \;\Leftrightarrow\; x>1$$

Ex. 56, p. 65. On trouve :

$$4(x-3)+3\geq -3 \;\Leftrightarrow\; x>\frac{3}{2} \qquad\qquad 3x\leq -2x \;\Leftrightarrow\; x\leq 0$$

Pour résoudre cette dernière inéquation, on a regroupé d'abord les x à gauche :

$$\begin{array}{rcl} 3x & \leq & -2x \\ 3x+2x & \leq & 0 \\ 5x & \leq & 0 \\ x & \leq & 0 \end{array}$$

Pour les suivantes, on trouve :

$$3-(1-2x)\geq 0 \;\Leftrightarrow\; x\geq -1 \qquad\qquad -3x+7>1-4x \;\Leftrightarrow\; x>-6$$

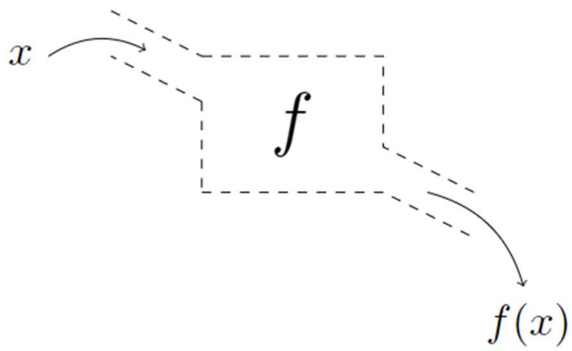
$$-3(x+7)\leq 3x \;\Leftrightarrow\; x\geq -\frac{7}{2} \qquad\qquad 2x-(x-1)<0 \;\Leftrightarrow\; x<-1$$

Chapitre 3

Fonction d'une variable réelle

1 Introduction aux fonctions

On reprend l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels (*voir* § 2, p. 32), Une **machine** $\boxed{f}$ fabrique pour tout réel $\boxed{x}$ une image réelle notée $\boxed{f(x)}$. Le schéma est le suivant :



Cette machine est appelée fonction $\boxed{f}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On la désigne par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction f produit donc une **image** notée $f(x)$. Au collège, les fonctions considérées sont souvent données par des **formules algébriques** comme :

$$\begin{aligned} x &\mapsto 5x - 3 \\ x &\mapsto -\frac{1}{3}x^2 - x + 3 \\ x &\mapsto -2x^2 + (1+x)(2x - x^2) \end{aligned}$$

ATTENTION ! f n'est pas un nombre $\boxed{f(x) \neq f \times x}$ mais f est une machine qui transforme un nombre x en un nombre $f(x)$.

Notons f la fonction $x \mapsto 5x - 3$, ce qui signifie que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = 5x - 3$$

Calculons quelques images :

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 5 \times 0 - 3 \ = \ -3 \\ f(\frac{-1}{2}) & = & 5 \times \dfrac{-1}{2} - 3 \ = \ \dfrac{-5}{2} - 3 \ = \ -\dfrac{5}{2} - \dfrac{6}{2} \ = \ \dfrac{-11}{2} \\ f(\pi) & = & 5 \times \pi - 3 \ = \ 5\pi - 3 \end{array}$$

qu'on ne peut pas simplifier. La calculette donne $5\pi - 3 \approx 12{,}7$. De façon imagée, on peut donc dire que **la machine f produit les images** suivantes :

$$\begin{array}{rcl} 0 & \mapsto & -3 \\ \dfrac{-1}{2} & \mapsto & \dfrac{-11}{2} \\ \pi & \mapsto & 5\pi - 3 \end{array}$$

2 Monômes, polynômes

Définition 1. *Un **monôme** est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto ax^n$ où a est un réel ne dépendant pas de x, et n un entier ≥ 0 appelé **degré** du monôme. On appelle **polynôme** une somme de monômes.*

Pour mieux comprendre la suite, on peut imaginer que f est le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 1 - x^2 + 5x - x^3 - 4x$$

Réduire f c'est l'écrire comme somme de monômes de degrés tous différents, en appliquant autant de fois que nécessaire la règle :

$$ax^n + bx^n = (a+b)x^n$$

Une fois f réduit, il y a deux possibilités :

• soit tous les monômes de f se sont simplifiés, et alors $f(x) = 0$ pour tout réel x.

• soit il reste au moins un monôme. On admet que les différents monômes restant ne dépendent pas de la façon dont on a réduit f. Cette écriture de f est **unique** (à l'ordre près des monômes). On l'appelle **l'écriture réduite** de f.

Le degré du monôme de plus haut degré figurant dans cette écriture réduite est appelé **degré** de f, on le note $\deg f$.

Sur l'exemple précédent :

$$f(x) = x^2 + 1 - x^2 + 5x - x^3 - 4x$$

on peut simplifier et réduire :

$$f(x) = \cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2} + 5x - x^3 - 4x = 1 + x - x^3$$

Donc f est de degré 3.

Questions (correction p. 89)

Développer et réduire le polynôme défini par :

$$f(x) = -2x^2 + (1+x)(2x - x^2)$$

Déterminer son degré.

3 Factorisation des polynômes

Définition 2. ***Factoriser*** *un polynôme f, c'est l'écrire comme produit de polynômes :*

$$f = g \times h$$

dont les degrés sont ≥ 1.

Exemple : Supposons que le polynôme f soit défini par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 3(x-1)(2x-5)$$

On remarque que $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. On a donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2 - 3(x-1)(2x-5) \\ &= (x-1)(x - 1 - 3(2x-5)) \\ &= (x-1)(-5x+14) \end{aligned}$$

On a factorisé f par deux facteurs, tous deux de degré 1.

Questions (correction p. 89)

Mettez x en facteurs dans le polynôme défini par :

$$f(x) = -2x^2 + 5x$$

Mettez $x+1$ en facteurs dans le polynôme défini par :

$$g(x) = x^2 - 1 + 3(x+1)$$

4 Exercices

Exercice 1.

On pose $f(x) = (5x-2)(x-4)$.

1. Développer et réduire $f(x)$.
2. On dispose maintenant de deux formules pour $f(x)$: l'une **factorisée**, donnée par l'énoncé, l'autre **développée** et réduite, que l'on vient de calculer. Utiliser ces deux formules pour calculer de **deux façons différentes** les nombres :

$$f(2) \qquad f(1) \qquad f\left(\frac{2}{5}\right) \qquad f(-5) \qquad f\left(\frac{1}{5}\right) \qquad f(0)$$

Exercice 2.

1. Soit un nombre. On lui ajoute 2, puis on élève le résultat au carré. Traduire les deux actions précédentes par une formule algébrique :

$$x \mapsto \dots$$

2. Soit un nombre. On l'élève au carré ; on ajoute 2 au résultat. Traduire les deux actions précédentes par une formule algébrique :

$$x \mapsto \dots$$

3. Soit un nombre. On lui ajoute 4 ; on multiplie le résultat par le nombre du départ ; on ajoute 4 au résultat. Traduire les trois actions précédentes par une formule algébrique :

$$x \mapsto \dots$$

Exercice 3.

On pose $f(x) = (2x - 5)(x - 3)$.

1. Développer et réduire $f(x)$.
2. On dispose maintenant de deux formules pour $f(x)$: l'une **factorisée**, donnée par l'énoncé, l'autre **développée** et réduite, que l'on vient de calculer. En utilisant chaque fois **la formule la plus commode**, calculer les nombres :

$$f(2) \qquad f(1) \qquad f\left(\frac{5}{2}\right) \qquad f(3) \qquad f\left(\frac{-1}{2}\right) \qquad f(0)$$

Exercice 4 (d'après brevet 2015)**.**

Sophie habite Toulouse. L'année prochaine, elle devra se rendre souvent à Bordeaux. Elle consulte les tarifs de train entre les deux villes :

- un aller-retour coûte 40 euros ;
- si elle achète un abonnement pour une année à 442 euros, un aller-retour ne coûte plus que 20 euros.

On souhaite aider Sophie à choisir la formule la moins chère. Pour cela, on note x le nombre d'aller-retour qu'elle prévoit de faire l'année prochaine.

1. Calculer en fonction de x le prix $f(x)$ qu'elle paiera si elle n'a **pas d'abonnement**.
2. Calculer en fonction de x le prix $g(x)$ qu'elle paiera **en tout** si elle prend un **abonnement**.
3. Résoudre l'inéquation $g(x) \leq f(x)$.
4. Rédiger une **phrase claire** en français qui explique quelle est la formule la moins chère, suivant le nombre de voyages envisagés.

Exercice 5 (d'après brevet 2015).

La distance d'arrêt est la distance que parcourt un véhicule entre le moment où son conducteur voit un obstacle et le moment où le véhicule s'arrête.

Une formule permettant de calculer, par temps sec, la distance d'arrêt $d(v)$, en fonction de la vitesse v est :

$$d(v) = \frac{5}{18} \times v + 0{,}006 \times v^2$$

où $d(v)$ est exprimée en m et v en km/h

1. Un conducteur roule à 130 km/h sur l'autoroute. Surgit un obstacle à 100 m de lui. Pourra-t-il s'arrêter à temps ?
2. Au code de la route, on donne la règle suivante pour calculer de tête sa distance d'arrêt : « Pour une vitesse comprise entre 50 et 90, multiplier par lui-même le chiffre des dizaines de la vitesse ». Vérifier que cette règle est satisfaisante lorsque $v = 50$ ou $v = 70$; moins satisfaisante pour $v = 90$.

5 Correction des questions

p. 87 On trouve :

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 + (1+x)(2x - x^2) \\ &= \cancel{-2x^2} + 2x - x^2 + \cancel{2x^2} - x^3 \\ &= 2x - x^2 - x^3 \end{aligned}$$

Donc le degré de $f(x)$ est 3.

p. 87 On trouve :

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 + 5x \\ &= x(-2x + 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 - 1 + 3(x+1) \\ &= (x-1)(x+1) + 3(x+1) \\ &= (x+1)(x-1+3) \\ &= (x+1)(x+2) \end{aligned}$$

On a utilisé l'identité remarquable (*voir* prop. 4, p. 41) :

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

6 Correction des exercices

Ex. 1, p. 87. 1. On développe et on réduit :

$$\begin{aligned} f(x) &= (5x-2)(x-4) \\ &= 5x^2 - 20x - 2x + 8 \\ &= 5x^2 - 22x + 8 \end{aligned}$$

2. a/ Calculons avec la formule **factorisée** :

$$\begin{aligned} f(2) &= (5\times 2-2)(2-4) \\ &= 8\times(-2) \\ &= -16 \\ f(1) &= (5-2)(1-4) \\ &= 3\times(-3) \\ &= -9 \\ f(\frac{2}{5}) &= (5\times\frac{2}{5}-2)\times A \\ &= 0\times A \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-5) &= (5\times(-5)-2)(-5-4) \\ &= (-27)(-9) \\ &= 243 \\ f(\frac{1}{5}) &= (5\times\frac{1}{5}-2)(\frac{1}{5}-4) \\ &= (1-2)\times\frac{-19}{5} \\ &= \frac{19}{5} \\ f(0) &= (0-2)(0-4) \\ &= 8 \end{aligned}$$

Dans le calcul de $f(\frac{2}{5})$, nous avons désigné par A une expression que nous n'avons pas calculée car elle est multipliée par 0, et donc sa valeur n'a pas d'importance.

b/ Avec la formule **développée**, nous allons voir que nous obtenons bien sûr les mêmes résultats :

$$\begin{aligned} f(2) &= 5\times 2^2 - 22\times x + 8 \\ &= 20 - 44 + 8 \\ &= -16 \\ f(1) &= 5\times 1 - 22\times 1 + 8 \\ &= 5 - 22 + 8 \\ &= -9 \\ f(\frac{2}{5}) &= 5\times\frac{4}{25} - 22\times\frac{2}{5} + 8 \\ &= \frac{4}{5} - \frac{44}{5} + 8 \\ &= -\frac{40}{5} + 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-5) &= 5\times 25 + 22\times 5 + 8 \\ &= 125 + 110 + 8 \\ &= 243 \\ f(\frac{1}{5}) &= 5\times\frac{1}{25} - \frac{22}{5} + 8 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{22}{5} + 8 \\ &= -\frac{21}{5} + 8 \\ &= \frac{19}{5} \\ f(0) &= 5\times 0 - 22\times 0 + 8 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Ex. 2, p. 88. Voici les trois formules :

$x \mapsto (x+2)^2$ $\qquad$ $x \mapsto x^2 + 2$ $\qquad$ $x \mapsto (x+4)\times x + 4$

Ex. 3, p. 88. 1. On développe et on réduit :

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-5)(x-3) \\ &= 2x^2 - 6x - 5x + 15 \\ &= 2x^2 - 11x + 15 \end{aligned}$$

2. On évalue $f(x)$ pour les valeurs de x indiquées :

$$\begin{aligned} f(2) &= (2\times 2-5)(2-3) \\ &= (-1)\times(-1) \\ &= 1 \\ f(1) &= 2-11+15 \\ &= 6 \\ f(\frac{5}{2}) &= (2\times\frac{5}{2}-5)\times A \\ &= 0\times A \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) &= (2\times 3-5)(3-3) \\ &= A*0 \\ &= 0 \\ f(\frac{-1}{2}) &= (2\times\frac{-1}{2}-5)(\frac{-1}{2}-3) \\ &= (-1-5)(\frac{-1-6}{2}) \\ &= -6\times\frac{-7}{2} \\ &= 3\times 7 \\ &= 21 \\ f(0) &= 0-0+15 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Dans deux calculs, nous avons désigné par A une expression que nous n'avons pas calculée car elle est multipliée par 0, et donc sa valeur n'a pas d'importance.

Ex. 4, p. 88. 1. Supposons que Sophie n'ait pas acheté d'abonnement. Elle paye alors 40 euros chaque aller-retour, et si elle fait x aller-retour, elle payera donc :

$$f(x) = 40\times x$$

2. Supposons que Sophie ait acheté un abonnement à 442 euros. Si elle fait x aller-retour, elle aura donc payé **en tout** :

$$g(x) = 442 + 20\times x$$

3. Pour savoir dans quelle condition la formule avec abonnement est moins chère, on résout l'équation :

$$\begin{aligned} g(x) &\leq f(x) \\ 442+20x &\leq 40x \end{aligned}$$

Par commodité, on permute les deux côtés, et on continue à résoudre par équivalences :

$$\begin{aligned} 40x &\geq 442+20x \\ 40x-20x &\geq 442 \\ 20x &\geq 442 \\ x &\geq \frac{442}{20} \\ x &\geq 22{,}1 \end{aligned}$$

4. La solution trouvée est donc $x \geq 22{,}1$. Mais, puisque x est un **nombre entier** de voyages, on voit que c'est à partir de 23 voyages que la formule avec abonnement est moins chère que l'autre formule.

Conclusion : si Sophie veut faire 1, 2, ..., 22 voyages, la formule sans abonnement est moins chère. Si elle veut faire 23 voyages ou plus, la formule avec abonnement est moins chère.

Ex. 5, p. 89. 1. On calcule la distance d'arrêt lorsque $v = 130$ par la formule :

$$d(v) = \frac{5}{18} \times v + 0{,}006 \times v^2$$

on trouve :

$$d(130) \approx 137{,}5$$

Il faut donc environ 137 m pour s'arrêter lorsque l'on roule à 130 km/h. On ne pourra donc pas s'arrêter avant l'obstacle situé à 100 m.

2. Notons $r(v)$ la distance d'arrêt donnée par la règle du code de la route.
Le tableau ci-contre compare $r(v)$ et $d(v)$ pour trois valeurs de v. On voit que l'approximation de $d(v)$ par $r(v)$ est bonne pour $v = 70$, moins bonne pour $v = 50$, et encore moins bonne pour $v = 90$.

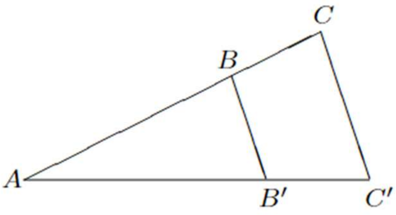
v	50	70	90
$r(v)$	25	49	81
$d(v)$	28,9	48,8	73,6

Chapitre 4

Géométrie plane

Dans ce chapitre, les longueurs sont mesurées avec une **unité arbitraire**.

1 Théorème de Thalès



Théorème 1. (théorème de Thalès) *Soit ACC' un triangle, et soient des points $B \in (AC)$ et $B' \in (AC')$. Alors :*

$$(BB') \mathbin{/\!/} (CC') \Rightarrow \left(\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{BB'}{CC'}\right)$$

Pour retenir les trois quotients, il faut noter que :
- les deux premiers portent sur des longueurs issues de A,
- le troisième porte sur des longueurs transversales,
- les deux égalités sont du type :

$$\frac{\text{petit}}{\text{grand}} = \frac{\text{petit}}{\text{grand}} = \frac{\text{petit}}{\text{grand}}$$

Questions (correction p. 117)

1. Construire un segment $[AC']$ horizontal de longueur 7 cm.
2. Construire avec le compas le point C au-dessus de (AC'), tel que :

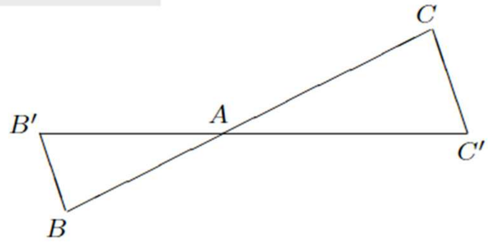
$$AC = 6 \text{ cm} \qquad C'C = 4 \text{ cm}$$

3. Placer B' sur le segment $[AC']$ tel que $AB' = 5$ cm.
4. La parallèle à $(C'C)$ issue de B' coupe (AC) en un point B. Construire B.
5. Mesurer $B'B$. Vérifier $B'B \approx 2{,}9$ cm. Mesurer AB. Vérifier $AB \approx 4{,}3$ cm.
6. Calculer les trois quotients du th. de Thalès. Vérifier qu'ils valent **environ 0,7**.

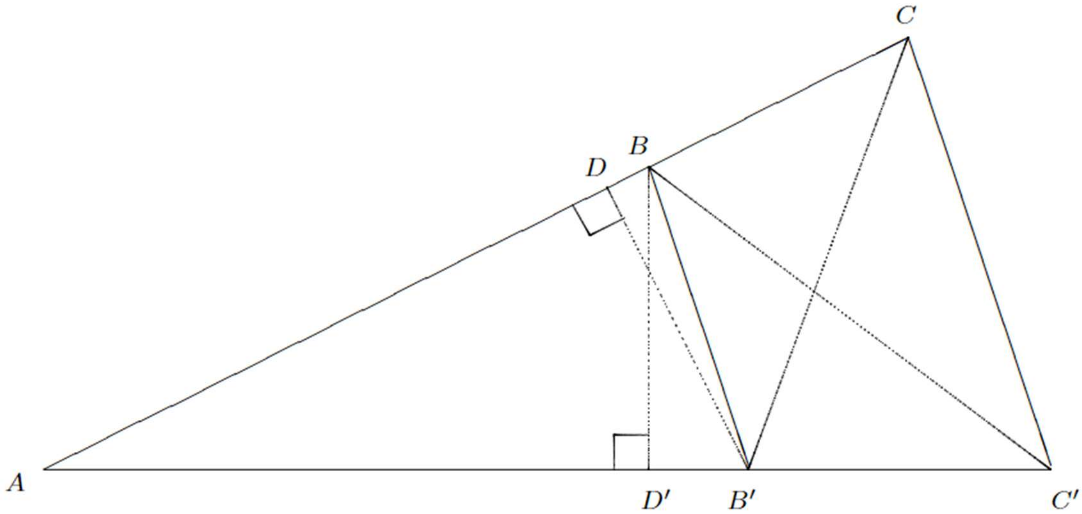
Théorème 2. (réciproque du théorème de Thalès) *Soit ACC' un triangle, et soient des points $B \in (AC)$ et $B' \in (AC')$. On suppose que A, B, C d'une part, et A, B', C' d'autre part sont placés dans le* **même ordre**. *Alors :*

$$\left(\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}\right) \Rightarrow (BB') \mathbin{/\!/} (CC')$$

Il y a une deuxième configuration pour le th. de Thalès et sa réciproque, avec les mêmes hypothèses, et les mêmes conclusions. C'est lorsque le point A est situé entre B et C, et donc aussi entre B' et C'.



On se propose de **démontrer** en partie le théorème de Thalès. Pour ce faire, on reprend la première figure complétée avec les segments $[BC']$ et $[B'C]$ en traits pleins, et les hauteurs $[BD']$ et $[B'D]$ en pointillés :



• Les triangles $BB'C$ et $BB'C'$ ont la même base $[BB']$. De plus, la hauteur de $BB'C$ relative à C, et la hauteur de $BB'C'$ relative à C' sont égales car ce sont les écarts entre deux droites parallèles. Donc les triangles $BB'C$ et $BB'C'$ ont la même aire :

$$\mathscr{A}(BB'C) = \mathscr{A}(BB'C')$$

• Les triangles $BB'A$ et $BB'C$ ont la même hauteur $[B'D]$. Donc :

$$\mathscr{A}(BB'A) = \frac{1}{2}AB \times B'D \qquad \mathscr{A}(BB'C) = \frac{1}{2}BC \times B'D$$

Si on fait les quotients, on en déduit :

$$\frac{\mathscr{A}(BB'A)}{\mathscr{A}(BB'C)} = \frac{AB}{BC}$$

• Si on faisait le même raisonnement avec les triangles $BB'A$ et $BB'C'$, on obtiendrait :

$$\frac{\mathscr{A}(BB'A)}{\mathscr{A}(BB'C')} = \frac{AB'}{B'C'}$$

• Comme on a montré que $\mathscr{A}(BB'C) = \mathscr{A}(BB'C')$, on a donc :

$$\frac{\mathscr{A}(BB'A)}{\mathscr{A}(BB'C)} = \frac{\mathscr{A}(BB'A)}{\mathscr{A}(BB'C')}$$

d'où :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'}$$

Les propriétés des proportions permettent alors d'écrire :

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB+BC}{AB'+B'C'} = \frac{AC}{AC'}$$

Donc, en permutant les moyens :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$$

On a donc prouvé que les deux premiers **quotients du th. de Thalès** sont égaux.

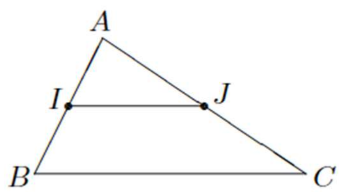
On va donner maintenant quelques conséquences du th. de Thalès et de sa réciproque, dont certains ont été démontrés en classe de 5[e] en utilisant des parallélogrammes.

2 Droite des milieux

Définition 1. *La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est appelée* ***droite des milieux*** *de ce triangle.*

Théorème 2. (droite des milieux) *Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté.*

Proposition 3. *Dans un triangle, la droite issue du milieu d'un côté, et parallèle à un deuxième côté, passe par le milieu du troisième côté.*

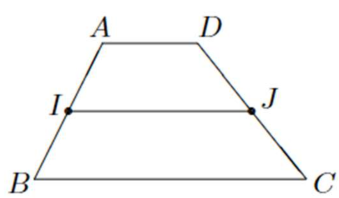


Proposition 4. *Si I et J sont les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$ on a :*

$$IJ = \frac{BC}{2}$$

Définition 5. *Un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés parallèles.*

Proposition 6. *Dans un trapèze $ABCD$, de côtés parallèles $[BC]$ et $[AD]$, la droite (IJ) qui passe par les milieux des deux autres côtés est parallèle à (BC). De plus, on a :*

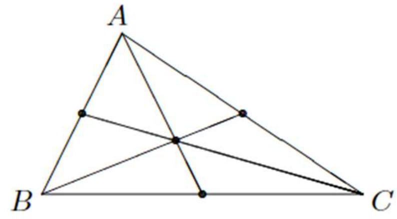


$$IJ = \frac{BC+AD}{2}$$

3 Médianes d'un triangle

Définition 1. *Dans un triangle on appelle* ***médiane*** *toute droite issue d'un sommet et passant par le milieu du côté opposé.*

Proposition 2. *Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un même point appelé* ***centre de gravité du triangle****.*



Proposition 3. *Le centre de gravité d'un triangle est situé au tiers de chaque médiane en partant des milieux des côtés.*

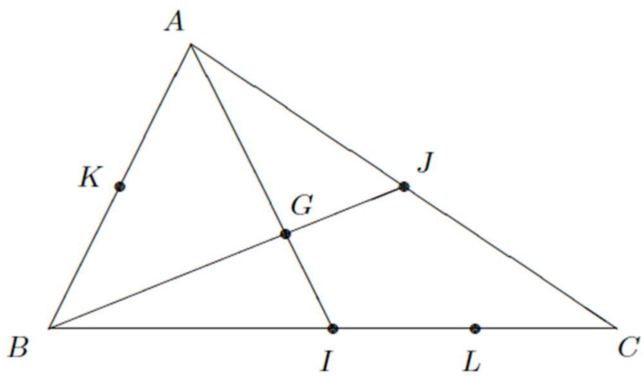
Questions (correction p. 117)

1. Dans un repère, gradué en cm, placer les points suivants :

$$A(0, -4) \qquad B(2, 0) \qquad C(-2; 4)$$

2. Tracer le triangle ABC. Placer les milieux I et J de $[BC]$ et $[CA]$.
3. Tracer la médiane relative à A et la médiane relative à B.
4. Ces deux médianes se coupent au point G. Marquer ce point.
5. Mesurer IA et IG. Vérifiez que G est bien au tiers de $[IA]$.
6. Mesurer JB et JG. Vérifiez que G est bien au tiers de $[JB]$.

On va démontrer les deux propositions en même temps. Introduisons les points I, J, K milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Considérons les médianes (AI) et (BJ), et leur point d'intersection qu'on note G. Introduisons enfin le point L milieu de $[IC]$.



- Dans le triangle AIC, la droite (LJ) est droite des milieux. On a donc :

$$(LJ) \mathbin{/\!/} (IA)$$

On applique le théorème de Thalès dans le triangle BJL. On obtient :

$$\frac{BG}{BJ} = \frac{BI}{BL} = \frac{2}{3}$$

donc $BG = \dfrac{2}{3}BJ$, ce qui entraîne $GJ = \dfrac{1}{3}BJ$. On peut donc dire que la médiane (AI) coupe la médiane (BJ) en un point G qui est situé au tiers de $[BJ]$ à partir de J.

• On monterait de même que la troisième médiane (CK) coupe la médiane (BJ) en un point qui est situé au tiers de $[BJ]$ à partir de J, donc en G. Les trois médianes sont donc **concourantes** en G.

• Puisqu'on a montré que G est situé au tiers de $[BJ]$ à partir de J, par un raisonnement analogue, on montrerait que G est aussi situé au tiers de $[AI]$ à partir de I et au tiers de $[CK]$ à partir de K. Ceci achève la démonstration.

Terminons ce paragraphe par une propriété de certaines médianes :

Proposition 4. *Si dans un triangle, une médiane est aussi bissectrice, alors le triangle est isocèle.*

4 Théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore est un des outils les plus puissants dont on dispose en classe de 4[e] pour démontrer des formules de géométrie. Avant de l'énoncer, il nous faut préparer le terrain :

Théorème 1. *Pour tout réel $a \geq 0$ il existe un unique réel x qui soit **positif**, et tel que $x^2 = a$. On l'appelle la **racine carrée** de a, on le note :*

$$x = \sqrt{a}$$

$$\sqrt{1} = 1 \qquad \sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{16} = 4 \qquad \sqrt{25} = 5 \qquad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{0{,}25} = 0{,}5 \qquad \sqrt{2} = 1{,}414... \qquad \sqrt{3} = 1{,}732... \qquad \sqrt{5} = 2,\ 236...$$

Corollaire 2. *Pour tous réels $x, a \geq 0$ on a :*

$$x^2 = a \ \Leftrightarrow \ x = \sqrt{a}$$

Corollaire 3. *Pour tout réel $a \geq 0$ on a :*

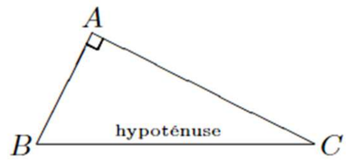
$$(\sqrt{a})^2 = a \qquad \sqrt{a^2} = a \qquad \sqrt{a^4} = a^2$$

Corollaire 4. *Pour tous réels $a, b \geq 0$ on a :*

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{si} \quad b \neq 0$$

Revenons maintenant à la géométrie :

Définition 5. *Dans un triangle rectangle, l'**hypoténuse** est le côté situé en face de l'angle droit, c'est **le plus grand** des côtés.*



ATTENTION ! Noter l'orthographe d'**hypoténuse** : ce mot ne comporte qu'un seul "h", et il est au début.

L'étymologie grecque est **hypo** = sous et **ténuse** = tendu : côté tendu sous l'angle droit. En grec, il y a deux lettres pour donner le son "t". L'une est τ (= tau) qui se transcrit par le "t" latin, l'autre est θ (= thêta) qui se transcrit par "th". Ceci explique la différence entre :

$\tau \to$ hypo $\boxed{\text{t}}$ énuse $\qquad\qquad$ $\theta \to$ hypo $\boxed{\text{th}}$ èse

Théorème 6. (théorème de Pythagore) *Dans un triangle rectangle le* ***carré de l'hypoténuse*** *est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$$

Si ABC est rectangle en A, on a donc :

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$$

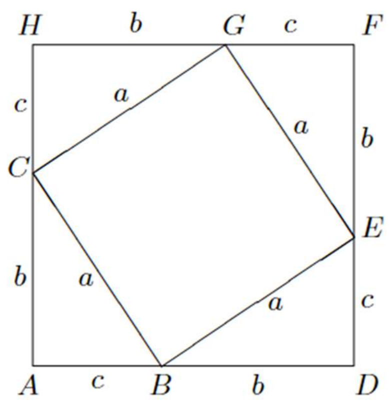
expression qui ne se simplifie pas en général. En particulier, $\sqrt{AB^2 + AC^2} \neq AB + AC$.

Il est utile de savoir calculer les **formules dérivées** du théorème de Pythagore. Par exemple, si on veut calculer le côté AB de l'angle droit, on retourne l'expression du carré de l'hypoténuse :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

et on fait passer AC^2 à droite. On obtient :

$$\boxed{AB^2 = BC^2 - AC^2}$$



Pour **démontrer** le théorème de Pythagore, on place bout à bout quatre triangles rectangles **copies de** ABC. On admet qu'on peut les disposer comme sur la figure ci-contre, de sorte que les points A, B, D soient alignés, de même, D, E, F, de même F, G, H, de même H, C, A. On note comme d'habitude :

$$AB = c \qquad BC = a \qquad CA = b$$

On démontre facilement les points suivants :

- Le grand quadrilatère $ADFH$ est un carré.
- Les quatre angles du petit quadrilatère $BEGC$ sont droits. Comme ses quatre côtés sont égaux, c'est un carré.
- L'aire S du grand carré peut se calculer ainsi :

$$S = (b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$$

- On peut aussi calculer S sous la forme :

$$\begin{aligned} S &= \text{aire } BEGC + 4 \times \text{aire } ABC \\ &= a^2 + 4 \times \frac{1}{2} \times bc \\ &= a^2 + 2bc \end{aligned}$$

• En comparant les deux expressions de S on déduit :

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Théorème 7. (réciproque du théorème de Pythagore) *Si dans un triangle ABC on a :*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

alors ABC est rectangle en A.

Exemple : Le **triangle égyptien**. On a $3^2 + 4^2 = 5^2$. Un triangle dont les côtés ont pour longueur 3, 4 et 5 est donc rectangle, et son hypoténuse vaut 5.

5 Deux formules usuelles

Les deux formules suivantes sont d'un **usage constant** en géométrie. Elles seront démontrées en exercice (ex. 19, p. 107 et 21, p. 107) :

Proposition 1. *La diagonale d'un carré de côté a vaut $a\sqrt{2}$.*

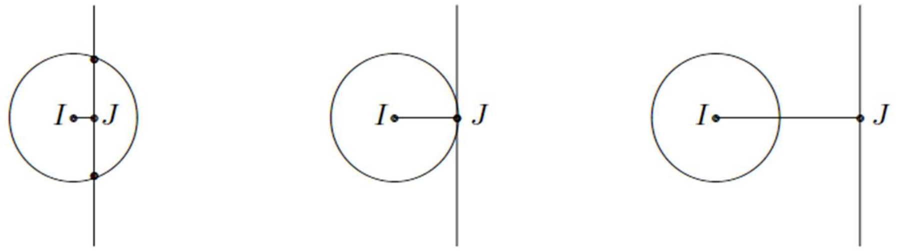
Proposition 2. *La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a vaut $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.*

6 Positions relatives d'une droite et d'un cercle

Une droite et un cercle peuvent être sécants, tangents ou disjoints :

Proposition 1. *Dans le plan de la géométrie plane, on considère une droite d et un cercle $\mathscr{C}$. Soient I le centre, r le rayon du cercle. Soit J la projection orthogonale de I sur d.*

- *Si $IJ < r$ alors $\mathscr{C}$ et d sont **sécants** en deux points distincts.*
- *Si $IJ = r$ alors $\mathscr{C}$ et d sont **tangents** en J.*
- *Si $IJ > r$ alors $\mathscr{C}$ et d sont **disjoints**.*



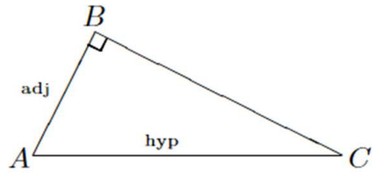
sécants tangents disjoints

7 Cosinus d'un angle

Le cosinus d'un angle est une **grandeur abstraite** qu'on ne peut pas mesurer avec un rapporteur, et qui remplace l'angle lui-même. Le cosinus permet de **calculer** des angles et de démontrer des formules de géométrie.

Définition 1. *Soit ABC un triangle rectangle en B. On pose :*

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$



Proposition 2. *Pour tout angle aigu A on a :*

$$0 < \cos A < 1$$

Un cosinus n'est ni une longueur, ni un angle : c'est un nombre **sans unité de mesure**. On peut montrer que plus l'angle est grand, plus le cosinus est petit. Ainsi, on prouvera en exercice (*voir* ex. 32, p. 111 et ex. 35, p. 112) les formules suivantes :

$$\boxed{\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0{,}866... \qquad \boxed{\cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0{,}707... \qquad \boxed{\cos 60 = \frac{1}{2}} = 0{,}5$$

Si on veut calculer un cosinus avec une calculette, on tape la touche $\boxed{\text{cos}}$ Par exemple :

$$\text{cos}(47)\text{=}0{,}6819...$$

Supposons, au contraire, qu'on ait calculé le cosinus d'un angle $\boxed{\alpha \text{ inconnu}}$ par la formule :

$$\cos\alpha = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

et qu'on ait trouvé, par exemple :

$$\cos\alpha = 0{,}2$$

Pour trouver la valeur de α, on tape la touche $\boxed{\text{acos}}$ de la calculette de la façon suivante :

$$\alpha\text{=acos}(0{,}2)\text{=}78°4630...$$

et on vérifie que cette valeur est correcte en prenant son cosinus :

$$\cos\alpha\text{=}\cos(78{,}4630...)\text{=}0{,}2$$

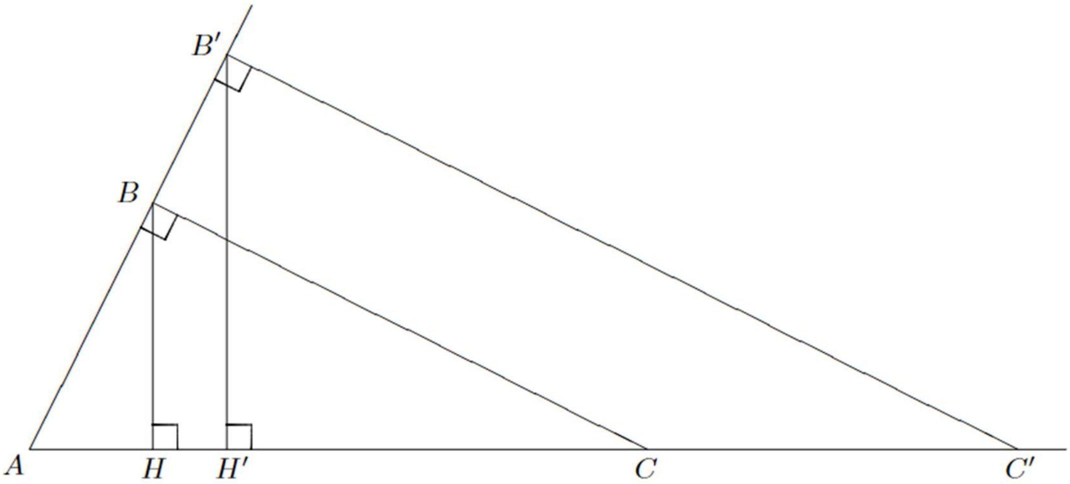
Plus généralement, pour tout angle α et tout réel a tel que $0 < a < 1$, on a :

$$\boxed{\cos\alpha = a \;\Leftrightarrow\; \alpha = \text{acos}\ a}$$

En résumé, la touche $\boxed{\text{cos}}$ **calcule le cosinus** d'un angle, et la touche $\boxed{\text{acos}}$ **calcule l'angle** dont on connaît le cosinus. On trouvera des exemples concrets dans les exercices, en particulier ex. 36, p. 112 et ex. 37 p. 112.

Sur certaines calculettes, la touche $\boxed{\text{acos}}$ est nommée $\boxed{\text{arccos}}$ ou $\boxed{\cos^{-1}}$

Revenons à la définition du cosinus, et agrandissons la figure du triangle ABC. Traçons de plus la hauteur $[BH]$ et les droites $(B'C') /\!/ (BC)$ et $(B'H') /\!/ (BH)$, issues d'un point quelconque $B' \in (AB)$:



On montre (*voir* ex. 29, p. 110) qu'on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}$$

et d'après le **théorème de Thalès**, on a aussi :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} \qquad\qquad \frac{AH}{AB} = \frac{AH'}{AB'}$$

On peut donc calculer le cosinus de l'angle aigu situé entre deux droites sécantes, en se ramenant au cosinus d'un angle aigu de **n'importe quel** triangle rectangle dont deux côtés sont sur les droites, par exemple ABC ou $AB'C'$ ou AHB ou $AH'B'$, etc.

8 Projection orthogonale et cosinus d'un angle

Soient deux demi-droites $[Ax)$ et $[Ay)$ formant un angle aigu :

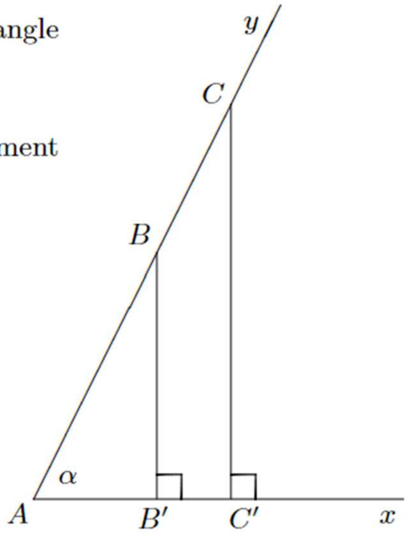
$$\alpha = \widehat{xAy}$$

Deux points B et C de $[Ay)$ se projettent orthogonalement en B' et C' sur $[Ax)$. On a :

$$\begin{aligned} AB' &= AB \times \cos\alpha \\ AC' &= AC \times \cos\alpha \end{aligned}$$

On en déduit, en soustrayant :

$$B'C' = BC \times \cos\alpha$$



On a donc démontré le résultat suivant, utilisé en **physique** pour calculer des **forces** :

Théorème 3. (théorème de la projection orthogonale) *La projection orthogonale entre deux axes formant un angle aigu α multiplie les distances par* $\cos\alpha$.

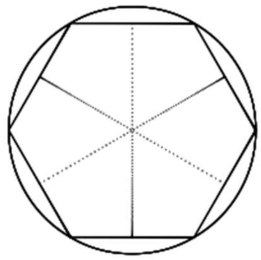
Corollaire 4. *La projection du milieu de deux points est le milieu des projections de ces deux points.*

9 Polygones

Définition 1. *Un polygone (non croisé) est une **ligne brisée fermée** qui ne se recoupe pas, et qui est composée d'un nombre fini de segments. Ces segments sont les **côtés** du polygone, leurs extrémités sont les **sommets** du polygone.*

Définition 2. *Un polygone est dit **régulier** si tous ses côtés ont même longueur et si tous ses angles sont égaux.*

Proposition 3. *Dans un polygone **régulier** les médiatrices des côtés sont concourantes en un même point, appelé **centre** du polygone. Il existe un cercle centré en ce point, et qui contient tous les sommets du polygone. On l'appelle le **cercle circonscrit** au polygone.*



10 Exercices

Théorème de Thalès

Exercice 1.

(unité le cm) Soit $AC'C$ un triangle tel que :

$$AC' = 7 \qquad AC = 6 \qquad C'C = 8$$

1. Tracer $[AC']$ horizontal. Construire C avec le compas. Tracer le triangle.
2. Soit $B \in [AC]$ tel que $AB = 3$. La parallèle à (CC') issue de B coupe (AC') en B'. Placer B, construire B'.
3. Calculer AB'. Vérifier sur la figure.
4. Calculer BB'. Vérifier sur la figure.
5. Vérifier qu'on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{BB'}{CC'}$$

Exercice 2.

(unité le cm) Soit ABC un triangle tel que :

$$BC = 4 \qquad BA = 5 \qquad CA = 3$$

1. Tracer le segment $[BC]$ horizontal. Construire le point A. Tracer $[BA]$ et $[CA]$.
2. Quelle est la particularité visible du triangle ABC ?
3. Soit le point $D \in [AC]$ tel que $AD = 2$. Marquer le point D.
4. La droite issue de D et parallèle à (BC) coupe (AB) et E. Marquer le point E.
   a/ Par le théorème de Thalès, calculer AE. Vérifier sur la figure.
   b/ Calculer de même ED. Vérifier sur la figure.

Exercice 3.

(unité le cm) Soit ABC un triangle tel que :

$$BC = 7 \qquad BA = 4 \qquad CA = 5$$

1. Tracer le segment $[BC]$ horizontal. Construire le point A. Tracer $[BA]$ et $[CA]$.

Soit D le point de $[BC]$ tel que $BD = 3$. La parallèle à (BA) issue de D coupe (CA) en E. La parallèle à (CA) issue de D coupe (BA) en F.

2. Compléter la figure.
3. Écrire les égalités entre les trois quotients du théorème de Thalès correspondant aux parallèles (CA) et (DF).
   a/ Calculer BF. Vérifier sur la figure.
   b/ Calculer DF. Vérifier sur la figure.
4. Écrire les égalités entre les trois quotients du théorème de Thalès correspondant aux parallèles (BA) et (DE).
   a/ Calculer CE. Vérifier sur la figure.
   b/ Calculer DE. Vérifier sur la figure.

Exercice 4.

1. Tracer un segment $[AB]$ horizontal.
2. Construire un point C au-dessus de (AB) tel que $(BC) \perp (BA)$.
3. Construire un point D au-dessus de (AB) tel que $(AD) \perp (AB)$.
4. Les droites (AC) et (BD) se coupent en E. Le point E se projette en F sur (AB). Compléter la figure.
5. On pose $a = AD$, $b = BC$, $c = AB$, $x = FE$. Montrer qu'on a :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Exercice 5.

(unité le cm) Soit ABC un triangle tel que :

$$BC = 5 \qquad BA = 3 \qquad CA = 4$$

1. Tracer le segment $[BC]$ horizontal. Construire le point A. Tracer $[BA]$ et $[CA]$.

2. Vérifier que ABC est un triangle rectangle.
3. Soit un point $M \in [BC]$. Ce point se projette en H sur $[AC]$ et en K sur $[AB]$. Compléter la figure.
4. On pose $CM = x$. Calculer MH et MK en fonction de x. Vérifier qu'on trouve :

$$MH = \frac{3}{5}x \qquad\qquad MK = 4 - \frac{4}{5}x$$

5. Résoudre l'équation $MH = MK$.
6. Que peut-on dire du quadrilatère $MHAK$ lorsque $MH = MK$? Expliquer.

Exercice 6.

Soit ABC un triangle. La bissectrice intérieure de $\widehat{A}$ coupe $[BC]$ en I. La parallèle à (AB), issue de I, coupe (AC) en J. La parallèle à (AC), issue de I, coupe (AB) en K.

1. Construire la figure.
2. Montrer que le quadrilatère $AJIK$ est un losange. On pourra procéder ainsi :
   a/ Montrer que $AJIK$ est un parallélogramme.
   b/ Montrer, par les angles alternes-internes, que le triangle AJI est isocèle.
   c/ Conclure.
3. On note, comme d'habitude, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Montrer, par le théorème de Thalès, que le losange $AJIK$ a pour côté :

$$\frac{bc}{b+c}$$

Exercice 7 (*la bissectrice*)**.**

Soit ABC un triangle. La bissectrice intérieure de $\widehat{A}$ coupe $[BC]$ en I. La parallèle à (AI), issue de C, coupe (BA) en D.

1. Construire la figure.
2. Utiliser les angles pour montrer que le triangle ACD est isocèle en A.
3. On note comme d'habitude $a = BC \quad b = CA \quad c = AB$. Par le théorème de Thalès, démontrer qu'on a :

$$BI = \frac{ac}{b+c}$$

4. En déduire :

$$CI = \frac{ab}{b+c} \qquad\qquad \frac{BI}{c} = \frac{CI}{b}$$

Droite des milieux, médianes

Exercice 8.

Soit ABC un triangle. On note I, J K les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

1. Tracer le triangle ABC assez grand.
2. Placer les points I, J K.
3. a/ Mesurer $[BC]$ et $[KJ]$. Vérifier $BC = 2KJ$.
   b/ Mesurer $[CA]$ et $[IK]$. Vérifier $CA = 2IK$.
   c/ Procéder de même avec $[AB]$ et $[JI]$.

Exercice 9.

(unité le cm) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points suivants :

$$B(0;0) \qquad I(3;0) \qquad K(1;2)$$

2. Tracer le point C, symétrique de B par rapport à I.
3. Tracer le point A, symétrique de B par rapport à K.
4. Tracer le triangle ABC.
5. Montrer qu'on a :
$$(KI) \mathbin{/\!\!/} (AC)$$
6. Mesurer KI et AC. Vérifier qu'on a : $AC = 2KI$.

Exercice 10.

Soit ABC un triangle. On note I, J, K les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

1. Tracer le segment $[BC]$ horizontal, et compléter la figure.
2. Montrer que le quadrilatère $AKIJ$ est un parallélogramme.
3. Citer deux autres parallélogrammes visibles sur la figure.

Exercice 11.

Dans un triangle ABC, on partage le côté $[AC]$ en trois segments égaux par les points I, J tels que :
$$AI = IJ = JC$$

1. Tracer le triangle ABC avec $[BC]$ horizontal. Placer I, J.

- La parallèle à (AB) issue de I coupe la droite (BC) en I'
- La parallèle à (AB) issue de J coupe la droite (BC) en J'

2. Montrer que les points I' et J' partagent le côté $[BC]$ en trois segments égaux.

Exercice 12.

Soit ABC un triangle. On note M, N P les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$.

1. Tracer le segment $[BC]$ horizontal, et compléter la figure.
2. Soient les points I et J milieu des segments $[NB]$ et $[NC]$.
   a/ Placer les points I et J.
   b/ Montrer que les droites (MI), (AN), (PJ) sont parallèles.
   c/ Montrer que le quadrilatère $IJPM$ est un parallélogramme.

Exercice 13.

(unité le cm) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placez les points suivants :

$$A(-3;1) \qquad B(4;-3) \qquad C(3;4)$$

2. Tracer le triangle ABC. Placer les milieux I et J de $[BC]$ et $[CA]$.
3. Tracer la médiane relative à A et la médiane relative à B.
4. Ces deux médianes se coupent au point G. Marquer ce point.
5. Mesurer approximativement IA et IG. Vérifiez que G est bien au tiers de $[IA]$.
6. Questions analogues avec la médiane $[JB]$.
7. Tracer la droite (CG). Montrer qu'elle est médiane.

Exercice 14.

(unité le cm) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placez les points suivants :

$$A(-1;0) \qquad B(4;3) \qquad G(2;-1)$$

2. Tracer $[AB]$.
3. Construire le point C tel que G soit le centre de gravité du triangle ABC.

Théorème de Pythagore

Exercice 15.

(unité le cm)

1. Tracer un carré de côté 5.
2. Calculer la diagonale de ce carré (valeur exacte et valeur approchée).
3. Vérifier sur la figure.

Exercice 16.

(unité le cm)

1. Tracer un rectangle de côtés 8 et 5.
2. Calculer la diagonale de ce rectangle (valeur exacte et valeur approchée).
3. Vérifier sur la figure.

Exercice 17.

(unité le cm)

1. Tracer un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit valent 5 et 12.
2. Calculer son hypoténuse.
3. Vérifier sur la figure.

Exercice 18.

(unité le cm)

1. Tracer un segment $[BC]$ horizontal de longueur 8.
2. Tracer le demi-cercle supérieur de diamètre $[BC]$.
3. Avec le compas, construire le point A appartenant au demi-cercle, tel que $BA = 5$.
4. Tracer $[AB]$ et $[AC]$. Utiliser le **théorème du demi-cercle** pour montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
5. Calculer AC (valeur exacte et valeur approchée).
6. Vérifier sur la figure.

Exercice 19 (*hauteur d'un triangle équilatéral*)**.**

On se propose de calculer la **hauteur d'un triangle équilatéral**, c'est-à-dire, de **démontrer** la prop. 2, p. 99. Soit donc un triangle équilatéral ABC de côté a. Soit I le milieu de $[BC]$. On sait que la médiatrice de $[BC]$ est la droite (AI) et donc AI est aussi la hauteur relative à A.

1. Dessiner la figure en prenant $[BC]$ horizontal.
2. Calculer AI^2 par le théorème de Pythagore.
3. En déduire :

$$AI = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 20.

(unité le cm)

1. Tracer un triangle équilatéral ABC de côté 8. Placer le point I le milieu de $[BC]$.
2. Utiliser une propriété de la médiatrice d'un segment pour montrer qu'on a :

$$(AI) \perp (BC)$$

3. Calculer AI (valeur exacte et valeur approchée). Vérifier sur la figure.

Exercice 21 (*diagonale d'un carré*)**.**

On se propose de calculer la **diagonale d'un carré**, c'est-à-dire, de **démontrer** la prop. 1, p. 99. Soit donc un carré $ABCD$ de diagonale $[AC]$ et de côté a.

1. Dessiner la figure en prenant $[AB]$ horizontal.
2. Calculer AC^2 par le théorème de Pythagore. En déduire :

$$AC = a\sqrt{2}$$

Exercice 22.

On se propose de prouver le résultat suivant :

Les segments de tangentes à un cercle issues d'un même point ont même longueur.

On considère donc un cercle $\mathscr{C}$ de centre I, et un point M extérieur à ce cercle. Le cercle de diamètre $[MI]$ coupe $\mathscr{C}$ en deux points que l'on note A et B.

1. Démontrer les relations suivantes :
$$(AI) \perp (AM) \qquad\qquad (BI) \perp (BM)$$
2. En déduire que les droites (AM) et (BM) sont tangentes à $\mathscr{C}$.
3. Par le théorème de Pythagore, montrer que :
$$AM = BM$$
4. Montrer que la droite (IM) est la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 23.

(unité arbitraire, mais assez grande pour que la figure soit lisible) Soit $ABCD$ un carré de côté 1, de diagonale $[BD]$. Soit M un point quelconque de la demi-droite $[BC)$. On note $a = BM$. Les droites (AM) et (BD) se coupent en I.

1. Faire une figure assez grande avec (BC) horizontale, B à gauche de C, A au-dessus de B, M à droite de C.
2. Montrer par le théorème de Thalès qu'on a :
$$IB = \frac{a\sqrt{2}}{a+1}$$
(introduire la droite issue de A et parallèle à (BD)).
3. Montrer que l'aire de AIB vaut :
$$S = \frac{a}{2a+2}$$

Exercice 24.

On considère un triangle ABC, rectangle en A. On note H, le pied de la hauteur relative à A. On pose $h = AH$ et, comme d'habitude $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

1. Calculer de deux façons différentes l'aire S de ABC. En déduire la formule :
$$bc = ah$$
2. À l'aide du théorème de Pythagore et de la formule précédente, démontrer qu'on a :
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

Exercice 25 (*la ligne d'horizon*).

Je suis sur mon bateau, au milieu d'une mer calme. Pour mieux voir au loin, je grimpe sur le mat, à une hauteur h.

1. Montrer que j'aperçois la ligne d'horizon à la distance suivante :
$$d = \sqrt{2rh + h^2} \tag{1}$$
où r est le rayon de la Terre.
2. On suppose $h = 3$ m, $r = 6400$ km. Convertir h en km. Appliquer la formule (1) et vérifier qu'on trouve :
$$d \approx \sqrt{38{,}4} \approx 6{,}2 \text{ km}$$
3. Rédiger une phrase simple en français énonçant le résultat de cet exercice.

Exercice 26.

(unité le cm)

1. Tracer un segment $[BC]$ horizontal de longueur 13.
2. Construire un point A tel que $BA = 5$ et $CA = 12$.
3. Démontrer, par la réciproque du théorème de Pythagore, que le triangle ABC est rectangle.
4. Mesurer les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Vérifier qu'ils sont complémentaires.

Exercice 27.

(unité le cm)

1. Tracer un segment $[BC]$ horizontal de longueur 8,7.
2. Construire un point A tel que $BA = 6$ et $CA = 6{,}3$.
3. Démontrer, par la réciproque du théorème de Pythagore, que le triangle ABC est rectangle (on pourra calculer les carrés avec la calculette).
4. Mesurer les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Vérifier qu'ils sont complémentaires.

Exercice 28 (*lunules d'Hippocrate*).

• On a déjà évoqué le **papyrus de Rhindt** dans l'avant-propos de ce livre (*voir* p. 5). Il date du XVI^e siècle avant Jésus-Christ, et a été écrit par le scribe **Ahmès**. Il est rédigé en écriture **hiératique**, simplification des **hiéroglyphes**. Il semble qu'il était utilisé dans les écoles où l'on formait les enfants qui devaient devenir scribes.

Ahmès s'intéresse en particulier au problème de la **quadrature du cercle** : construire avec la règle et le compas, un carré ayant même périmètre (ou même aire) qu'un cercle donné. Il écrit que l'aire d'un disque de diamètre 9 est sensiblement égale à l'aire d'un carré de côté 8. Ce qui correspond à :

$$\pi \approx \left(\frac{4}{3}\right)^4 = 3{,}160\ldots$$

• **Hippocrate de Chios** vécut à Athènes, à l'époque de **Périclès**, au V^e siècle avant Jésus-Christ. Mathématicien et astronome, ses cours étaient suivis par des élèves et des disciples. Il ne reste aucun de ses écrits mais ses recherches en géométrie ont influencé

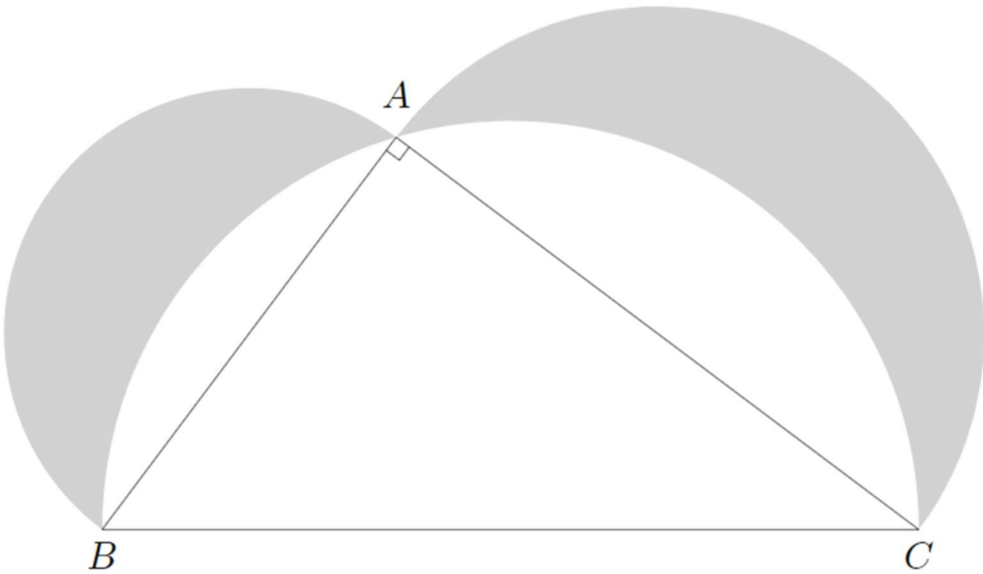
Euclide, un siècle plus tard. Il n'a pas pu résoudre le problème de la quadrature du cercle, mais ce problème l'a conduit à s'intéresser à certaines **lunules** que l'on construit ainsi.

On considère un triangle ABC rectangle en A. À l'extérieur de ce triangle, on trace les deux **lunules** qu'on a grisées ci-dessous. Leur bord intérieur est un demi-cercle de diamètre $[BC]$, leur bord extérieur est composé d'un demi-cercle de diamètre $[AB]$ et d'un demi-cercle de diamètre $[AC]$.

On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $S=$ aire du triangle ABC, $\ell_1 =$ aire de la petite lunule, $\ell_2 =$ aire de la grande lunule. On note encore :

$$\begin{aligned} S_1 &= \ell_1 + \ell_2 + \text{ aire du demi-disque de diamètre } [BC] \\ S_2 &= S + \text{ aire des deux demi-disques de diamètre } [AB] \text{ et } [AC] \end{aligned}$$

1. Montrer que $S_1 = S_2$.
2. En déduire que l'**aire totale** des deux lunules est égale à S.



Exercice 29.

On considère un triangle ABC, rectangle en B. On considère le point H, pied de la hauteur relative à B. On note $h = BH$ et, comme d'habitude $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

1. On pose $x = AH$. Appliquer le théorème de Pythagore dans les triangles BHA et BHC, et utiliser le développement de $(b - x)^2$ pour montrer qu'on a :

$$BH^2 = HA \times HC$$

2. Utiliser la formule précédente et le théorème de Pythagore pour prouver :

$$AB^2 = AH \times AC$$

3. Déduire de cette dernière formule l'égalité suivante :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}$$

Exercice 30 (d'après brevet 2018).

(unité le cm)

1. Construire un segment $[AD]$ horizontal de longueur 7. Sur ce segment, marquez le point F tel que $AF = 2{,}5$.
2. Au-dessus de la droite (AD) tracez le point E tel que $AE = 4{,}2$ et $DE = 5{,}6$.
3. Montrer que le triangle ADE est rectangle en E.
4. La droite issue de F et parallèle à (DE) coupe (AE) en G. Tracez le point G puis calculer AG.

Exercice 31 (d'après brevet 2018).

(unité le cm)

1. Construire un carré $ABCD$ de côté 3, et de diagonale $[AC]$.
2. Le cercle de centre A, et qui passe par C coupe la **demi-droite** $[AB)$ en E. Placer E. Calculer DE. Montrer qu'on trouve :
$$DE = \sqrt{27} \approx 5{,}2$$
3. Vérifier sur la figure.

Cosinus d'un angle

Exercice 32.

(grande unité pour bien voir)

1. Construire un triangle équilatéral ABC de côté 1, tel que $[BC]$ soit horizontal.
2. Soit I le milieu de $[BC]$. Montrer qu'on a :
$$\widehat{ABC} = 60° \qquad \widehat{BAI} = 30°$$
3. Calculer $\boxed{\cos 60°}$ et $\boxed{\cos 30°}$.

Exercice 33.

(unité le cm)

1. Tracer un segment $[AB]$ horizontal de longueur 5 cm.
2. Tracer le demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$, situé au-dessus de la droite (AB).
3. Placer un point $C \in \mathscr{C}$ sur ce demi-cercle, à l'endroit de votre choix. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.
4. Exprimer $\cos A$ en fonction de AC.
5. On suppose que AC prend les valeurs 1, 2, 3, 4. Recopier et calculer le tableau :

AC	1	2	3	4
$\cos A$				
A				

On donnera les valeurs exactes de $\cos A$ et les valeurs approchées **entières** de A.

6. Vérifier que plus A est grand, plus $\cos A$ est petit.

Exercice 34.

1. Tracer un segment $[AB]$ horizontal de longueur 5 cm.
2. Tracer le demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$, situé au-dessus de la droite (AB).
3. Placer le point $C \in \mathscr{C}$, tel que :
$$\widehat{BAC} = 47°$$
4. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.
5. Exprimer $\cos A$ en fonction de AC.
6. En déduire qu'on a :
$$AC = 5 \cos 47$$
7. Avec la calculette, donner une valeur approchée au dixième de AC à l'aide de la formule précédente. Comparer avec la valeur mesurée sur la figure.

Exercice 35.

(grande unité pour bien voir) On se propose de **calculer** $\boxed{\cos 45°}$ Pour ce faire, on considère un carré $ABCD$ de diagonale $[AC]$ et de côté 1.

1. Dessiner la figure en prenant $[AB]$ horizontal.
2. Montrer qu'on a :
$$\widehat{BAC} = 45°$$
3. Utiliser la formule donnant la **diagonale d'un carré** (prop. 1, p. 99) pour calculer $\cos 45°$.

Exercice 36.

(unité le cm) Soit ABC un triangle rectangle en B, tel que :

$$AB = 6 \qquad\qquad AC = 8$$

1. Tracer le triangle avec $[AB]$ horizontal.
2. Calculer BC^2. Vérifier à la calculette et sur la figure qu'on trouve $BC \approx 5{,}3$.
3. Calculer $\cos A$.
4. En déduire la valeur de A (*voir* p. 100 pour la méthode). Vérifier sur la figure qu'on trouve :
$$A \approx 41{,}4°$$

Exercice 37.

(unité le cm) On considère un triangle ABC isocèle en A, tel que $AC = 8$ et $BC = 6$. On note I le milieu de $[BC]$, et K le pied de la hauteur relative à C.

1. Calculer $\cos \widehat{ABC}$.
2. Calculer $\cos \widehat{KBC}$ en fonction de BK. En déduire la valeur exacte de BK et montrer que $AK = \dfrac{23}{4} = 5{,}75$. Vérifier sur la figure.
3. En déduire que :
$$\cos \widehat{BAC} = \frac{23}{32}$$

4. À l'aide d'une calculatrice, déterminer les valeurs arrondies entières de $\alpha = \widehat{BAC}$ et $\beta = \widehat{ABC}$.
5. Vérifier ces valeurs sur la figure. Vérifier qu'on a bien $\alpha + 2\beta = 180$.

Exercice 38.

(unité le cm)

1. Tracer un segment $[BC]$ horizontal de longueur 5.
2. Construire un point A tel que $BA = 3$ et $CA = 4$.
3. Démontrer, par la réciproque du théorème de Pythagore, que le triangle ABC est rectangle.
4. Calculer les valeurs exactes de $\cos B$ et $\cos C$.
5. En déduire, par la calculette, des valeurs approchées des angles B et C.
6. Vérifier les valeurs trouvées en mesurant les angles B et C avec un rapporteur.
7. Vérifier qu'on a $B + C = 90°$.

Exercice 39.

(unité le cm) Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que :

$$AB = 6 \qquad\qquad AC = 8$$

Soit H le pied de la hauteur relative à A.

1. Tracer le triangle et la hauteur AH.
2. Calculer BC^2 puis BC.
3. Calculer $\cos B$ et $\cos C$ dans le triangle ABC.
4. Montrer qu'on a aussi :
$$\cos B = \frac{BH}{6}$$
5. En déduire que $BH = \dfrac{36}{10} = 3{,}6$. Vérifier sur la figure.
6. Montrer qu'on a aussi :
$$\cos C = \frac{CH}{8}$$
7. En déduire que $CH = \dfrac{64}{10} = 6{,}4$. Vérifier sur la figure.
8. Déterminer la valeur de AH en calculant de deux façons différentes l'aire du triangle ABC. Vérifier sur la figure la valeur trouvée.

Exercice 40.

(unité le cm) Soit ABC un triangle tel que :

$$AB = 13 \qquad BC = 5 \qquad CA = 12$$

1. Tracer le triangle ABC.
2. Il semble que le triangle soit rectangle : le démontrer par un calcul.
3. Calculer $\cos A$. En déduire une valeur approchée de l'angle A.

4. Calculer $\cos B$. En déduire une valeur approchée de l'angle B.
5. Vérifier qu'on a :

$$\widehat{A} + \widehat{B} = 90^\circ$$

6. Pouvait-on le prévoir ?

Exercice 41.

(unité au choix)

1. Utiliser un demi-cercle auxiliaire pour construire un triangle ABC, rectangle en C, et tel que :

$$AB = 8 \qquad \widehat{A} = 40^\circ$$

2. Calculer l'angle $\widehat{B}$. Vérifier sur la figure.
3. Donner l'expression théorique de $\cos A$. En déduire :

$$AC = 8\cos 40$$

4. En déduire une valeur approchée de AC. Vérifier sur la figure.

Exercice 42.

Soit ABC un triangle rectangle en C. Soit H le pied de la hauteur relative à C.

1. Faire une figure avec $[AB]$ horizontal, assez grand. Tracer le triangle ABC et la hauteur (CH).
2. Calculer de deux façons différentes le nombre :

$$\cos A$$

3. En déduire l'égalité suivante :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC}$$

4. Déduire de cette égalité qu'on a la formule :

$$AC^2 = AH \times AB$$

Exercice 43.

(unité le cm)

1. Construire un triangle ABC tel que : $AC = 8{,}5 \quad AB = 4 \quad CB = 7{,}5$.
2. Démontrer par le calcul que ce triangle est rectangle.
3. Calculer les nombres : $\cos A$ et $\cos C$.
4. En déduire qu'on a :

$$\widehat{A} = 61^\circ927... \qquad \widehat{C} = 28^\circ072...$$

5. En déduire les valeurs approchées entières les meilleures de $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$.
6. Vérifier sur la figure avec le rapporteur.

Exercice 44 (*la formule du cosinus*)**.**

Soit ABC un triangle dont les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont aigus. Soit H le pied de la hauteur de ce triangle relative à B. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $d = HA$, $e = HC$.

1. Montrer en appliquant deux fois le théorème de Pythagore qu'on a
$$a^2 - e^2 = c^2 - d^2$$
2. Calculer d en fonction de c et de $\cos A$. En déduire
$$e = b - c \times \cos A$$
3. Déduire des calculs précédents la **formule du cosinus**
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

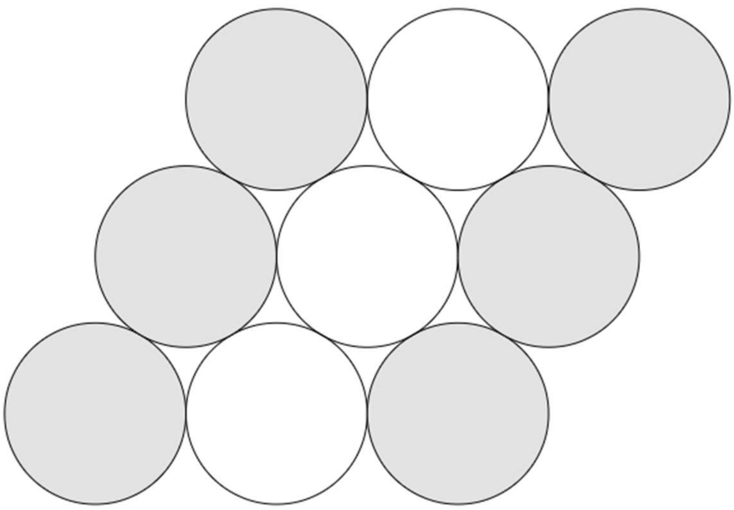
Exercice 45.

(unité le cm)

1. Tracer un triangle ABC tel que :
$$CA = 7 \qquad CB = 6 \qquad AB = 5$$
2. Vérifier que ce triangle n'est pas rectangle.
3. On note comme d'habitude :
$$a = CB \qquad b = CA \qquad c = AB$$
   a/ Compléter la formule du cosinus :
$$a^2 = b^2 + c^2 - \dots$$
   b/ Inverser cette formule pour obtenir $\cos A$ en fonction de a, b, c.
4. Calculer alors $\cos A$ dans le triangle ABC tracé au début.
5. En déduire, par le calcul, la valeur de l'angle $\widehat{A}$. Vérifier sur la figure.

Récréation 46.

Empilement de disques

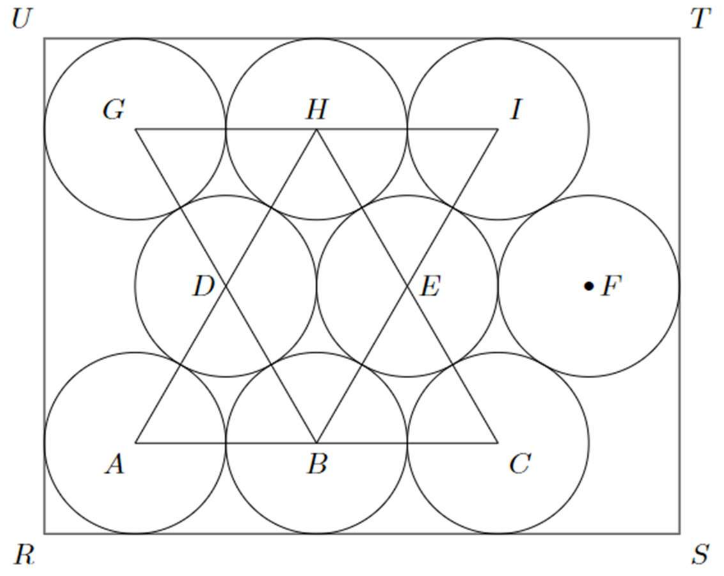


Exercice 47 (*empilement de cercles*).

(unité le cm)

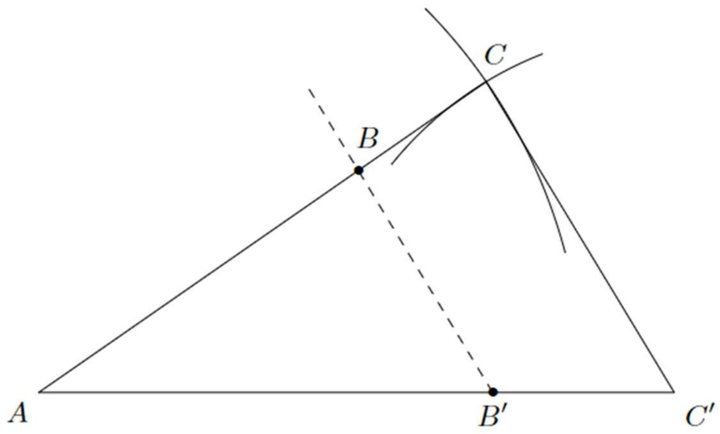
1. Construire un triangle équilatéral ACH de côté 4, comme sur la figure ci-dessous.
2. Marquer les points B, D, E, milieux des côtés de ACH.
3. Construire G et I symétriques de B par rapport à D et E.
4. Construire F symétrique de D par rapport à E.
5. Tracer les neuf cercles de centre A, B, C, D, E, F, G, H, I, et de rayon 1. Vérifier que certains sont tangents entre eux comme sur la figure.
6. Tracer le plus petit rectangle de côtés horizontaux ou verticaux et qui contient les neuf cercles.
7. On note R, S, T, U, les sommets du rectangle disposés comme sur la figure. Calculer les dimensions du rectangle. Vérifiez qu'on trouve :

$$RS = 7 \qquad RU = 2 + 2\sqrt{3}$$



11 Correction des questions

p. 93 1. On a placé C' à droite de A.
2. On trace la figure à la règle et au compas : on pique en A, on ouvre de 6 cm, on trace un petit arc de cercle. On pique en C', on ouvre de 4 cm, on trace un petit arc de cercle. Le point C se trouve à l'intersection des deux arcs :



6. Puisque $(BB') /\!/ (CC')$, par le th. de Thalès (*voir* th. 1, p. 93) on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{BB'}{CC'}$$

On va vérifier ces deux égalités approximativement avec les valeurs données par l'énoncé et les valeurs mesurées sur la figure. D'après l'énoncé, on a $\dfrac{AB'}{AC'} = \dfrac{5}{7} \approx 0{,}7$. De plus, puisque $AB = 4{,}3$, on a $\dfrac{AB}{AC} \approx \dfrac{4{,}3}{6} \approx 0{,}7$. Et puisque $B'B \approx 2{,}9$, on a $\dfrac{BB'}{CC'} \approx \dfrac{2{,}9}{4} \approx 0{,}7$.

p. 96

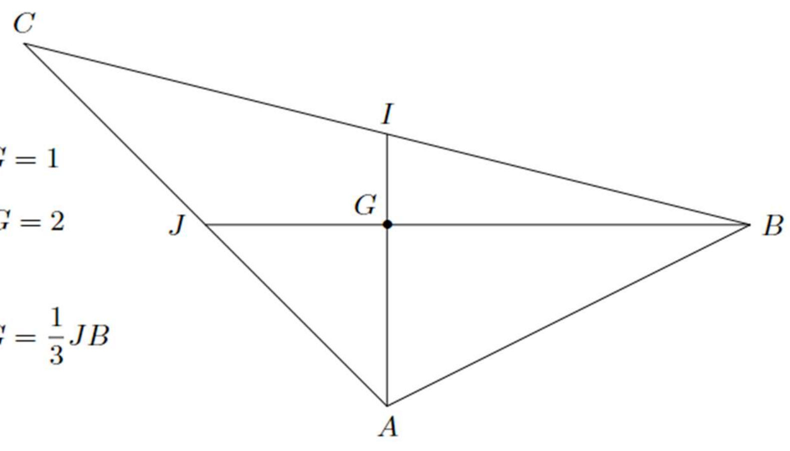
On mesure et on trouve :

$$IA = 3 \qquad IG = 1$$

$$JB = 6 \qquad JG = 2$$

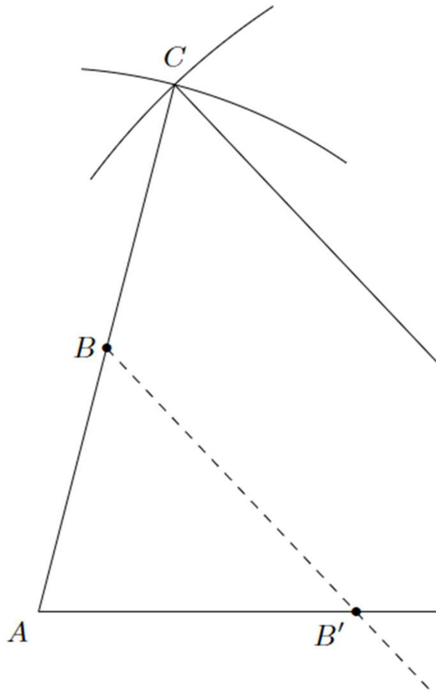
On a bien

$$IG = \frac{1}{3}IA \qquad JG = \frac{1}{3}JB$$



12 Correction des exercices

Ex. 1, p. 102. 1. **Classiquement**, le point C est à l'intersection d'un arc de cercle de centre A, de rayon 6 cm, et d'un arc de cercle de centre C', de rayon 8 cm.



2. On a $AB = 3$ donc $AB = \dfrac{1}{2} \times AC$. Or $B \in [AC]$, donc B est le milieu de $[AB]$.

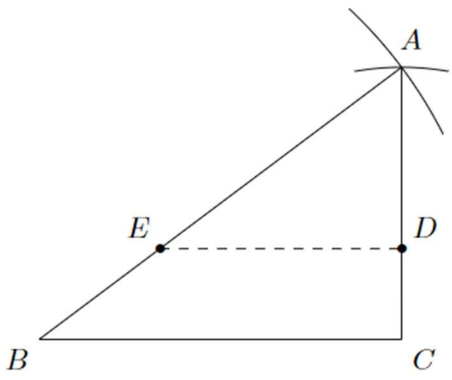
3. et 4. On trouve $AB' = 3{,}5$ cm et $BB' = 4$ cm. On a donc $AB' = \dfrac{1}{2} \times AC'$. Or $B' \in [AC']$ donc B' est le milieu de $[AC']$.

5. On calcule les trois quotients :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \frac{AB'}{AC'} = \frac{3{,}5}{7} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \qquad \frac{BB'}{CC'} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

On constate qu'ils sont égaux, comme prévu par le th. de Thalès.

Ex. 2, p. 103. 1. Le point A est à l'intersection d'un arc de cercle de centre B, de rayon 5 cm, et d'un arc de cercle de centre C, de rayon 3 cm.



2. On constate avec l'équerre que l'angle $\widehat{C}$ est droit.
4. Puisque $(ED) /\!\!/ (BC)$, le th. de Thalès s'applique, et on a :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$$

Comme on veut AE et que l'on ne connaît pas ED, on raye le troisième quotient. Il reste :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \cancel{\frac{ED}{BC}}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{AE}{5} = \frac{2}{3}$$

Donc, $AE = 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \approx 3{,}3$ cm. Pour calculer DE, on raye le premier quotient :

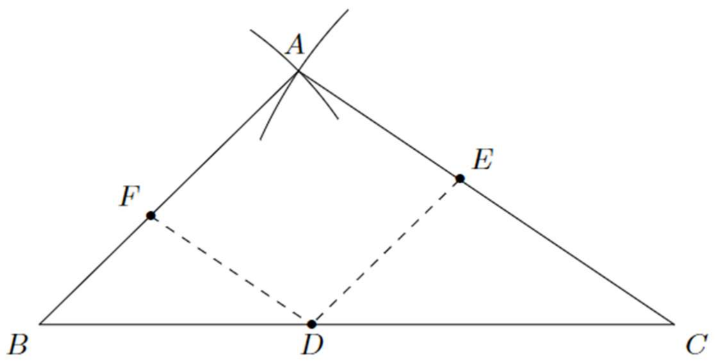
$$\cancel{\frac{AE}{AB}} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$$

Il reste :

$$\frac{2}{3} = \frac{ED}{4}$$

Donc, $ED = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \approx 2{,}7$ cm

Ex. 3, p. 103. 1. Le point A est à l'intersection d'un arc de cercle de centre B, de rayon 4 cm, et d'un arc de cercle de centre C, de rayon 5 cm.



3. Puisque $(CA) \parallel (DF)$, le th. de Thalès s'applique, et on a :

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BF}{BA} = \frac{DF}{CA}$$

Comme on veut BF et que l'on ne connaît pas DF, on raye le troisième quotient :

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BF}{BA} = \cancel{\frac{DF}{CA}}$$

il reste :

$$\frac{3}{7} = \frac{BF}{4}$$

Donc, $BF = 4 \times \frac{3}{7} = \frac{12}{7} \approx 1{,}7$ cm. Pour calculer DF, on raye le deuxième quotient. Il reste :

$$\frac{3}{7} = \frac{DF}{5}$$

Donc, $DF = 5 \times \frac{3}{7} = \frac{15}{7} \approx 2{,}1$ cm

4. Puisque $(BA) \parallel (DE)$, le th. de Thalès s'applique, et on a :

$$\frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CA} = \frac{DE}{BA}$$

Comme on veut CE et que l'on ne connaît pas DE, on raye le troisième quotient :

$$\frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CA} = \cancel{\frac{DE}{BA}}$$

il reste :

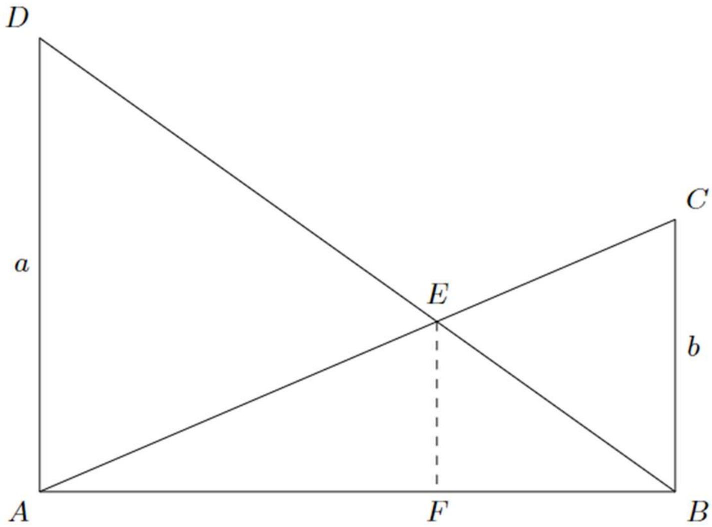
$$\frac{4}{7} = \frac{CE}{5}$$

Donc, $CE = 5 \times \frac{4}{7} = \frac{20}{7} \approx 2{,}9$ cm. Pour calculer DE, on raye le deuxième quotient. Il reste :

$$\frac{4}{7} = \frac{DE}{4}$$

Donc, $DE = 4 \times \frac{4}{7} = \frac{16}{7} \approx 2{,}3$ cm.

Ex. 4, p. 103. 1. Voici la figure :



5. Puisque $(FE) /\!\!/ (BC)$, le th. de Thalès s'applique, et on a :

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{FE}{BC}$$

Comme on ne connaît rien du deuxième quotient, on le supprime :

$$\frac{AF}{AB} = \cancel{\frac{AE}{AC}} = \frac{FE}{BC}$$

Il reste :

$$\frac{AF}{c} = \frac{x}{b} \tag{1}$$

Puisque $(FE) /\!\!/ (AD)$, le th. de Thalès s'applique, et on a :

$$\frac{BF}{BA} = \frac{BE}{BD} = \frac{FE}{AD}$$

Comme on ne connaît rien du deuxième quotient, on le supprime :

$$\frac{BF}{BA} = \cancel{\frac{BE}{BD}} = \frac{FE}{AD}$$

Il reste :

$$\frac{BF}{c} = \frac{x}{a} \tag{2}$$

On ajoute les relations (1) et (2). On obtient :

$$\frac{AF + BF}{c} = \frac{x}{a} + \frac{x}{b}$$

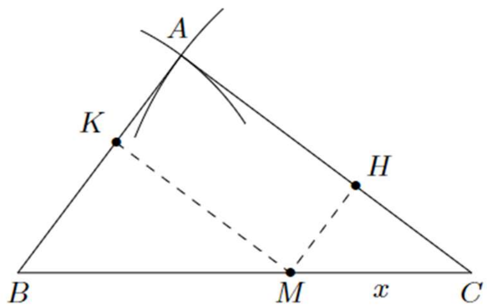
Or $\dfrac{AF + BF}{c} = \dfrac{c}{c} = 1$. Donc :

$$1 = \frac{x}{a} + \frac{x}{b}$$

On divise ensuite par x des deux côtés, et on obtient :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Ex. 5, p. 103. 1. Le point A est à l'intersection d'un arc de cercle de centre B, de rayon 3 cm, et d'un arc de cercle de centre C, de rayon 4 cm.



4. Puisque (BA) et (MH) sont perpendiculaires à (AC), elles sont parallèles entre elles. Le th. de Thalès s'applique donc, et on a :

$$\frac{CM}{CB} = \frac{CH}{CA} = \frac{MH}{BA}$$

Comme on veut MH et que l'on ne connaît pas CH, on raye le deuxième quotient. Il reste :

$$\frac{x}{5} = \frac{MH}{3}$$

Donc, $MH = 3 \times \dfrac{x}{5} = \dfrac{3}{5}x$.

Passons au calcul de MK. Puisque (CA) et (MK) sont perpendiculaires à (AB), elles sont parallèles entre elles. Le th. de Thalès s'applique, et on a :

$$\frac{BM}{BC} = \frac{BK}{BA} = \frac{MK}{CA}$$

Comme on veut MK et que l'on ne connaît pas BK, on raye le deuxième quotient. Il reste :

$$\begin{aligned} \frac{5-x}{5} &= \frac{MK}{4} \\ 1 - \frac{x}{5} &= \frac{MK}{4} \end{aligned}$$

Donc, $MK = 4 \times \left(1 - \dfrac{x}{5}\right) = 4 - \dfrac{4}{5}x$.

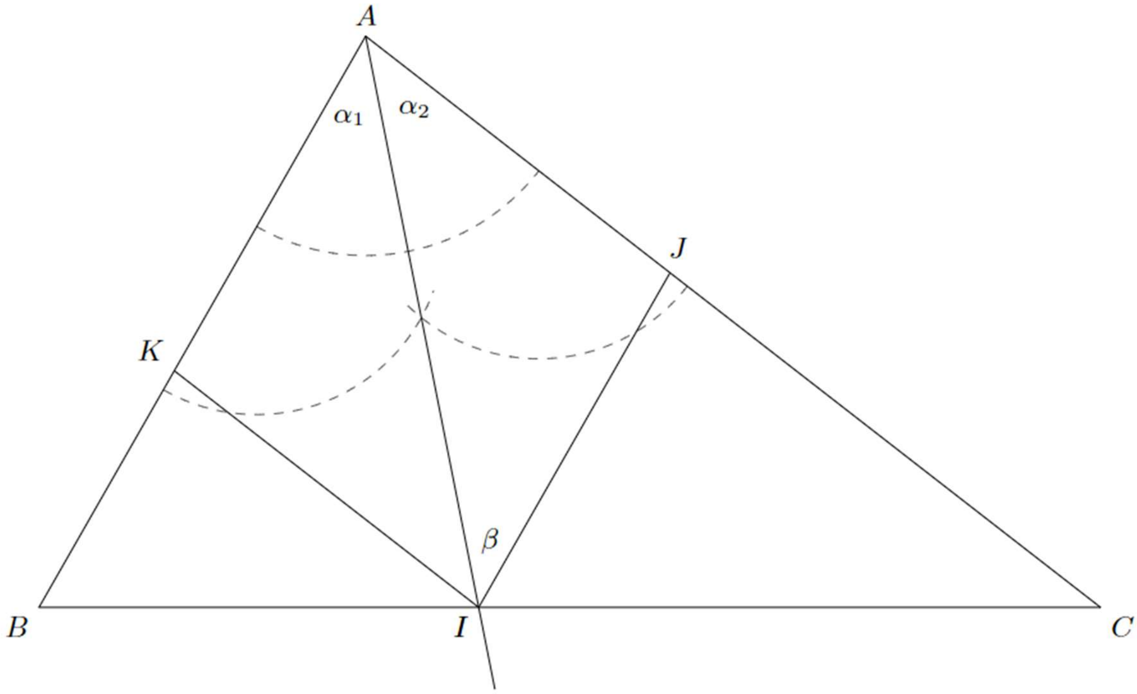
5. On résout :

$$\begin{aligned} MH &= MK \\ \frac{3}{5}x &= 4 - \frac{4}{5}x \\ 3x &= 20 - 4x \\ x &= \frac{20}{7} \end{aligned}$$

6. Le quadrilatère $MHAK$ a ses angles droits en H, A, K, c'est donc un rectangle. Si, de plus $MH = MK$, alors c'est un carré.

CORRIGÉS

Ex. 6, p. 104. 1. Pour construire la bissectrice de $\widehat{A}$ on a d'abord tracé un arc de cercle de centre A. Il coupe $[AB]$ et $[AC]$ en deux points. On pique en chacun de ces deux points, avec la **même ouverture** de compas, et on trace deux arcs de cercles. À l'intersection de ces deux arcs, on a un point de la bissectrice.



2. a/ Par construction, les côtés opposés du quadrilatère $AJIK$ sont parallèles. C'est donc un parallélogramme.
b/ On note α_1 et α_2 les deux angles égaux définis par la bissectrice de $\widehat{A}$, et $\beta = \widehat{AIJ}$. Puisque $(AK) /\!\!/ (IJ)$, les angles α_1 et β sont alternes-internes (*voir* déf. 5, p. 16), donc égaux. Et puisque $\alpha_2 = \alpha_1$, on en déduit $\alpha_2 = \beta$. Le triangle AJI a donc deux angles égaux autres que $\widehat{J}$. On en déduit qu'il est isocèle en J, et donc $JA = JI$.
c/ Il s'ensuit que le parallélogramme $AJIK$ a deux côtés **consécutifs** égaux, c'est donc un losange, et ses **quatre côtés** sont égaux.
3. On a $(AB) /\!\!/ (IJ)$. On peut donc appliquer le th. de Thalès. On obtient :

$$\frac{CJ}{CA} = \frac{CI}{CB} = \frac{JI}{AB}$$

Comme on ne connaît rien sur CI, on raye le deuxième quotient :

$$\frac{CJ}{CA} = \cancel{\frac{CI}{CB}} = \frac{JI}{AB}$$

il reste, en notant $x = JA = JI$:

$$\frac{b-x}{b} = \frac{x}{c}$$

On égale les produits en croix et on obtient :

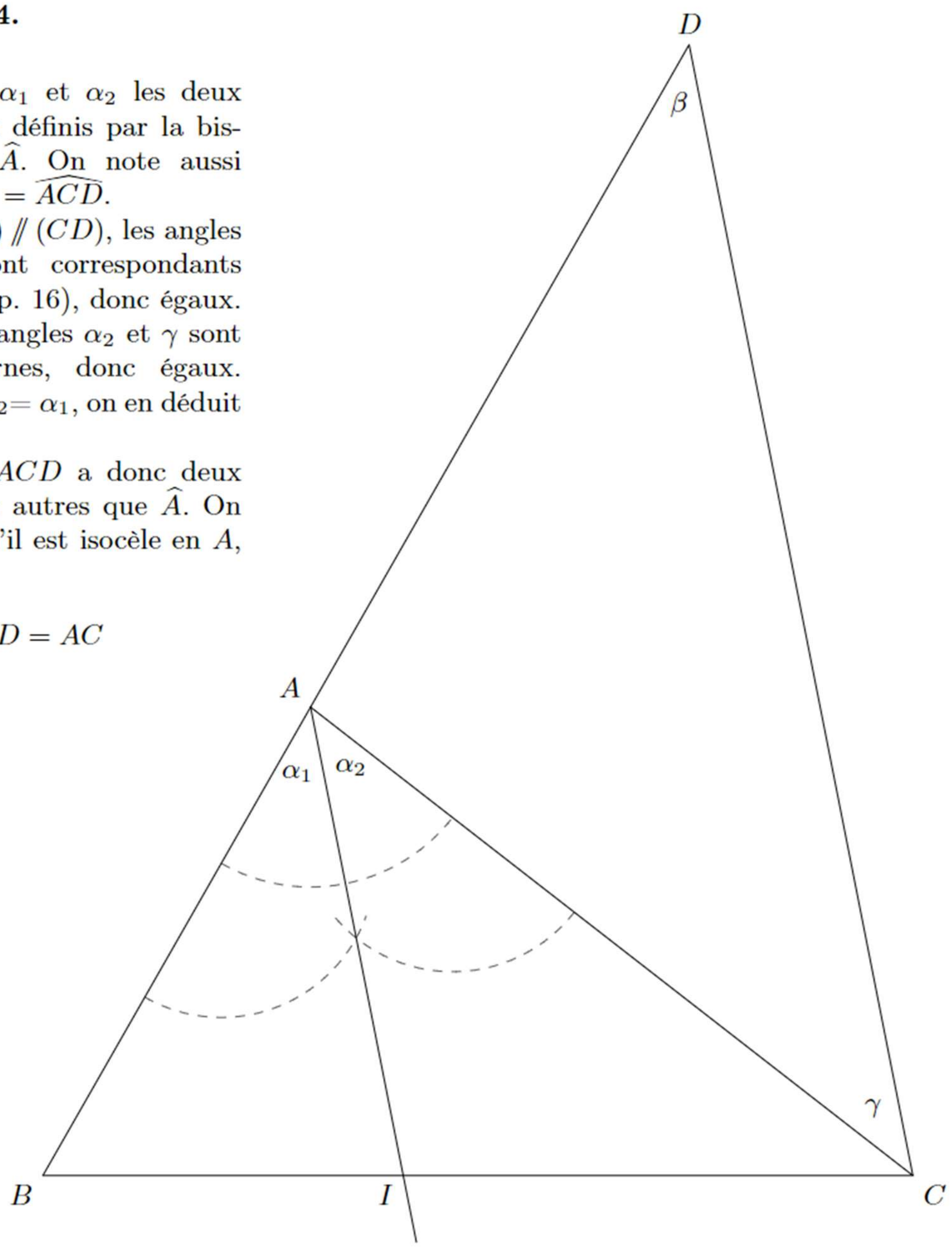
$$bx = c(b-x) \;\Leftrightarrow\; (b+c)x = bc \;\Leftrightarrow\; x = \frac{bc}{b+c}$$

cqfd

Ex. 7, p. 104.

2. On note α_1 et α_2 les deux angles égaux définis par la bissectrice de $\widehat{A}$. On note aussi $\beta = \widehat{ADC}$, $\gamma = \widehat{ACD}$.
Puisque $(AI) \mathbin{/\!/} (CD)$, les angles α_1 et β sont correspondants (*voir* déf. 5, p. 16), donc égaux. De plus, les angles α_2 et γ sont alternes-internes, donc égaux. Et puisque $\alpha_2 = \alpha_1$, on en déduit $\gamma = \beta$.
Le triangle ACD a donc deux angles égaux autres que $\widehat{A}$. On en déduit qu'il est isocèle en A, et donc

$$AD = AC$$



3. Puisque $(AI) \mathbin{/\!/} (CD)$, on peut appliquer le th. de Thalès, et on obtient :

$$\frac{BI}{BC} = \frac{BA}{BD} = \frac{IA}{CD}$$

Comme on ne connaît rien sur IA, on raye le troisième quotient :

$$\frac{BI}{BC} = \frac{BA}{BD} = \cancel{\frac{IA}{CD}}$$

0r $BD = BA + AD = c + b$. On obtient donc :

$$\frac{BI}{a} = \frac{c}{b+c}$$

On en déduit

$$BI = \frac{ac}{b+c}$$

4. On calcule ensuite :

$$CI = BC - BI = a - \frac{ac}{b+c} = \frac{ab}{b+c}$$

On divise les expressions de BI et CI et on obtient :

$$\frac{BI}{c} = \frac{a}{b+c} \qquad \frac{CI}{b} = \frac{a}{b+c}$$

et donc :

$$\frac{BI}{c} = \frac{CI}{b}$$

Ex. 8, p. 104.

3. On donne les mesures obtenues sur la figure, en cm :

$BC = 7 \qquad KJ = 3{,}5$

$CA = 5{,}4 \qquad IK = 2{,}7$

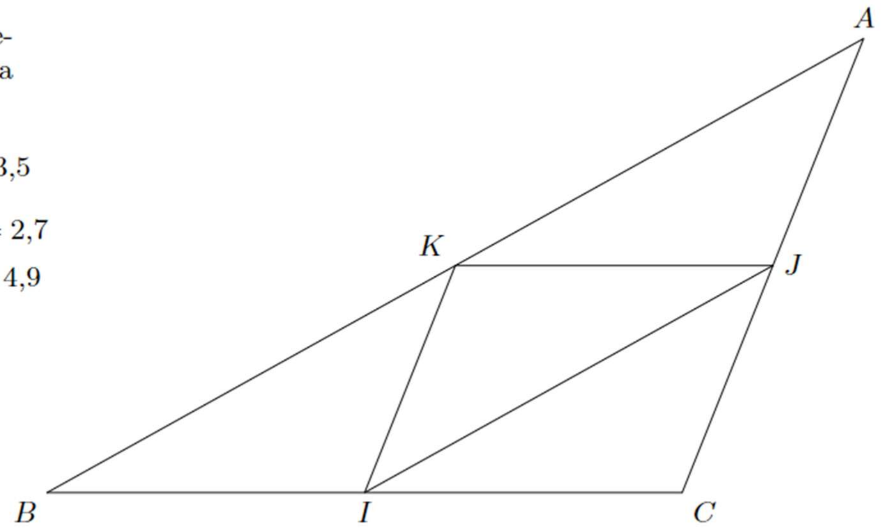
$AB = 9{,}8 \qquad JI = 4{,}9$

On a bien :

$$BC = 2KJ$$

$$CA = 2IK$$

$$AB = 2JI$$



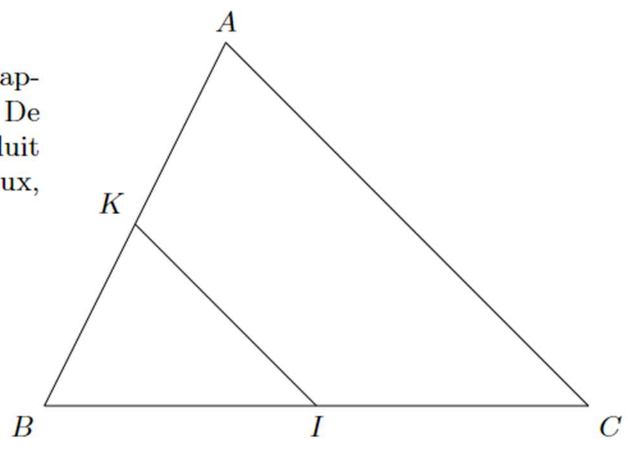
Ex. 9, p. 105.

5. Dire que C est symétrique de B par rapport à I signifie que I est milieu de $[BC]$. De même, K est milieu de $[AB]$. On en déduit (*voir* p. 95) que (KI) est droite des milieux, donc :

$$(KI) \mathbin{/\!/} (AC) \qquad AC = 2KI$$

6. On mesure et on trouve en cm :

$$AC \approx 5{,}7 \qquad KI \approx 2{,}8$$

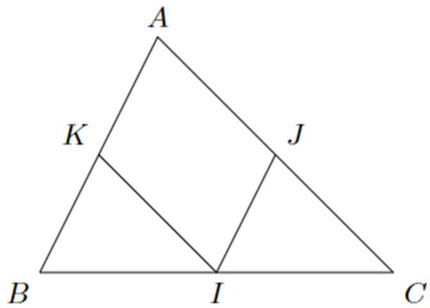


On n'a pas $AC = 2KI$ mais seulement $AC \approx 2KI$ car les mesures ne sont pas précises.

Ex. 10, p. 105.

2. Puisque I, J, K sont les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, les droites (IJ), (JK), (KI) sont les trois droites des milieux du triangle ABC. On en déduit en particulier (*voir* th. 2, p. 95) que :

$$(IJ) \mathbin{/\!/} (AB) \qquad (IK) \mathbin{/\!/} (AC)$$



Le quadrilatère $AKIJ$ a donc ses côtés opposés parallèles : c'est un parallélogramme.

3. On montrerait de même que $BIJK$ et $CJKI$ sont des parallélogrammes.

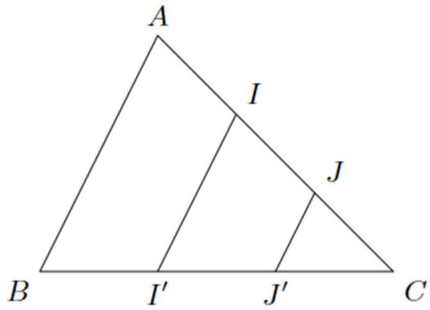
Ex. 11, p. 105.

Remarquons d'abord que si $I, J \in [AC]$, sont dans l'**ordre** A, I, J, C, alors l'énoncé :

"I, J partagent $[AC]$ en trois segments égaux"

équivaut à :

$$\frac{CJ}{CI} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{CI}{CA} = \frac{2}{3}$$



2. Puisque $(II') \mathbin{/\!/} (AB)$ et $(JJ') \mathbin{/\!/} (AB)$ on a $(II') \mathbin{/\!/} (JJ')$. On peut donc appliquer le th. de Thalès, et on obtient :

$$\frac{CJ}{CI} = \frac{CJ'}{CI'}$$

Or, par hypothèse, $\dfrac{CJ}{CI} = \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{\dfrac{CJ'}{CI'} = \dfrac{1}{2}}$. Par le th. de Thalès, on a aussi :

$$\frac{CI}{CA} = \frac{CI'}{CB}$$

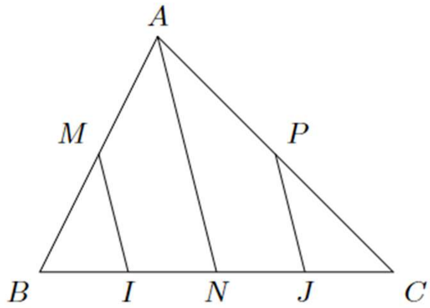
Or, par hypothèse, on a aussi $\dfrac{CI}{CA} = \dfrac{2}{3}$ donc $\boxed{\dfrac{CI'}{CB} = \dfrac{2}{3}}$

cqfd

CORRIGÉS

Ex. 12, p. 105.

2. Puisque I est milieu de $[BN]$ et M milieu de $[BA]$, la droite (MI) est droite des milieux dans le triangle BMI. On a donc (*voir* th. 2 et prop. 4, p. 95) :



$$(MI) \mathbin{/\!\!/} (AN) \quad \text{et} \quad MI = \frac{1}{2}AN$$

En raisonnant de façon analogue dans le triangle CPJ, on obtient :

$$(PJ) \mathbin{/\!\!/} (AN) \quad \text{et} \quad PJ = \frac{1}{2}AN$$

On en déduit :

$$(MI) \mathbin{/\!\!/} (PJ) \quad \text{et} \quad MI = PJ$$

Le quadrilatère $IJPM$ a donc deux côtés parallèles et égaux. D'après un critère (*voir* p. 17), on en déduit que c'est un parallélogramme.

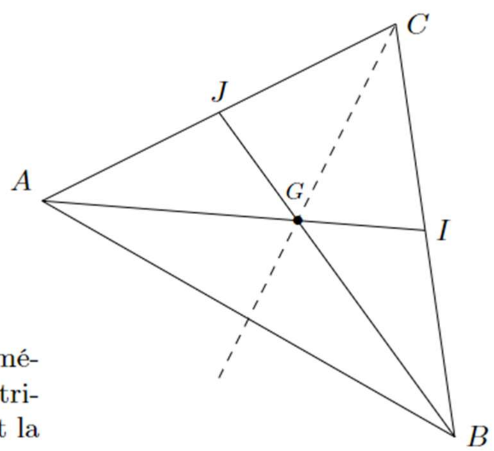
Ex. 13, p. 106.

5. On mesure et on trouve :

$$IA \approx 6{,}5 \qquad IG \approx 2{,}2$$

On a bien $IG \approx \dfrac{IA}{3}$

6. On mesure et on trouve :



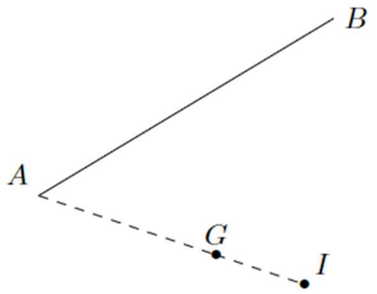
$$JB \approx 6{,}8 \qquad JG \approx 2{,}3$$

On a bien $JG \approx \dfrac{JB}{3}$

7. On sait (*voir* prop. 2, p. 96) que les trois médianes passent par le centre de gravité G du triangle. Comme (CG) passe par G et par C, c'est la troisième médiane.

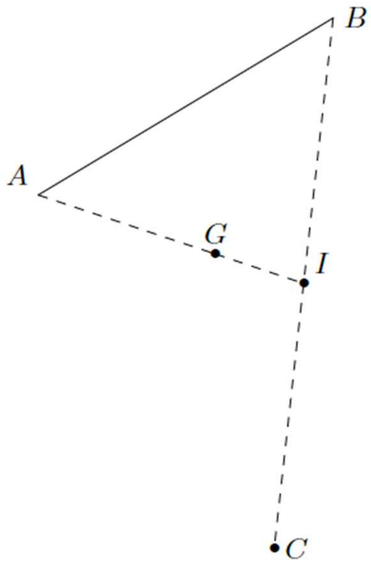
Ex. 14, p. 106.

3. Notons I le milieu de $[BC]$. Ce point est sur la médiane relative à A. Il est donc aligné avec A et G, de l'autre côté de A par rapport à G, et tel que (voir prop. 3, p. 96) :



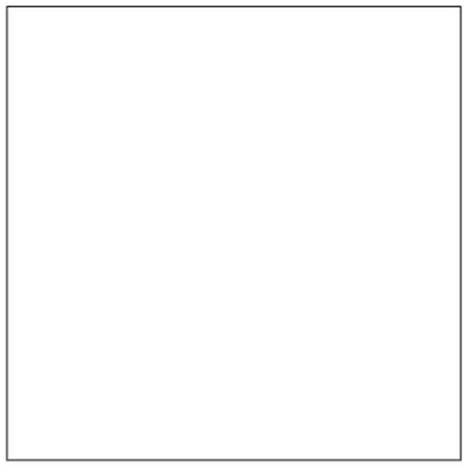
$$GI = \frac{1}{2}GA$$

On place ensuite C, symétrique de B par rapport à I :



Le point G est centre de gravité du triangle ABC.

Ex. 15, p. 106.



2. On sait (voir prop. 1, p. 99) que la diagonale d d'un carré de côté a vaut :

$$d = a\sqrt{2}$$

Si $a = 5$, on trouve $d = 5 \times \sqrt{2} \approx 7$.

Ex. 16, p. 106. On a tracé un rectangle $ABCD$ de dimensions 8 et 5. Puisque tous les angles du rectangle sont droits, le triangle ABC est rectangle en B. Par le th. de Pythagore, on a donc :

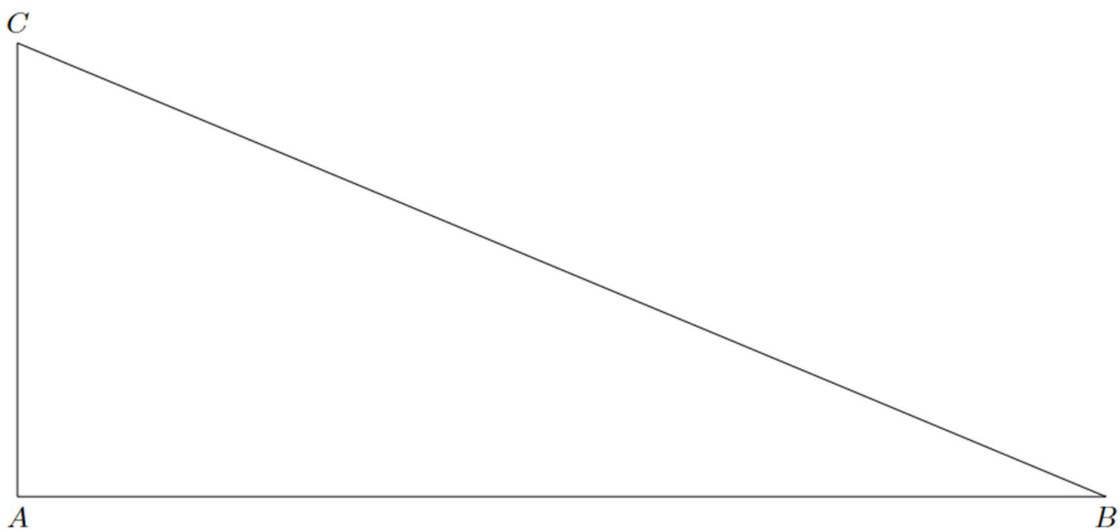
$$\begin{aligned} AC^2 &= BA^2 + BC^2 \\ &= 8^2 + 5^2 \\ &= 89 \end{aligned}$$

Donc $AC = \sqrt{89} \approx 9{,}4$ cm. Ce que l'on peut vérifier sur la figure :

Ex. 17, p. 106. Le triangle ABC est rectangle en A. Par le th. de Pythagore, on a donc :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 12^2 + 5^2 \\ &= 169 \end{aligned}$$

Donc $BC = \sqrt{169} = 13$ cm. Ce que l'on peut vérifier sur la figure :



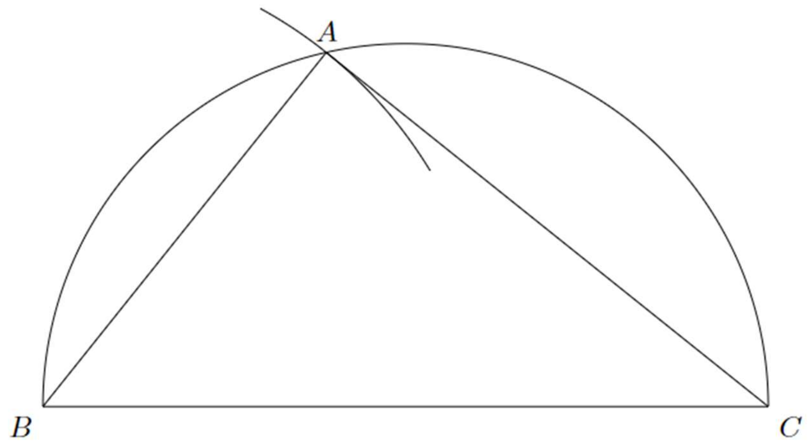
Ex. 18, p. 107. 4. Le point A appartient à un demi-cercle de diamètre $[BC]$. Le théorème du demi-cercle (*voir* th. 1, p. 17) affirme qu'alors :

$$(AB) \perp (AC)$$

Donc, le triangle ABC est rectangle en A.
5. Par le théorème de Pythagore, on a ensuite :

$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 - AB^2 \\ &= 8^2 - 5^2 \\ &= 39 \end{aligned}$$

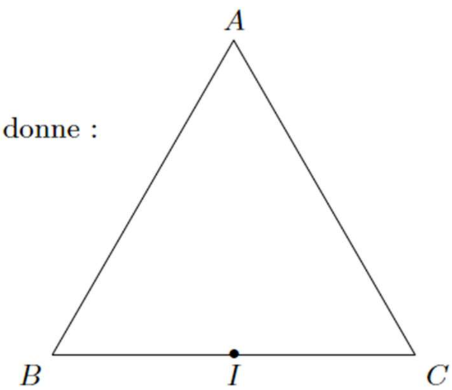
Donc $AC = \sqrt{39} \approx 6{,}2$ cm. Ce que l'on peut vérifier sur la figure :



Ex. 19, p. 107.

2. Puisque I est milieu de $[BC]$ on a :

$$BI = \frac{a}{2}$$



AIB étant rectangle en I, le théorème de Pythagore donne :

$$\begin{aligned} AI^2 &= AB^2 - BI^2 \\ &= a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= a^2 - \frac{a^2}{4} \\ &= a^2 \times \frac{3}{4} \end{aligned}$$

3. De cette relation, on déduit :

$$AI = \sqrt{a^2 \times \frac{3}{4}} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{\frac{3}{4}} = a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ex. 20, p. 107 2. Puisque le triangle ABC est équilatéral, on a $AB = AC$. Donc A est équidistant de B et C. Le point I étant milieu de $[BC]$, il est aussi équidistant de B et C. Les points A et I appartiennent donc tous les deux à la médiatrice de $[BC]$ par le th. 4, p. 15. On en déduit que cette médiatrice est la droite (AI) elle-même, et donc :

$$(AI) \perp (BC)$$

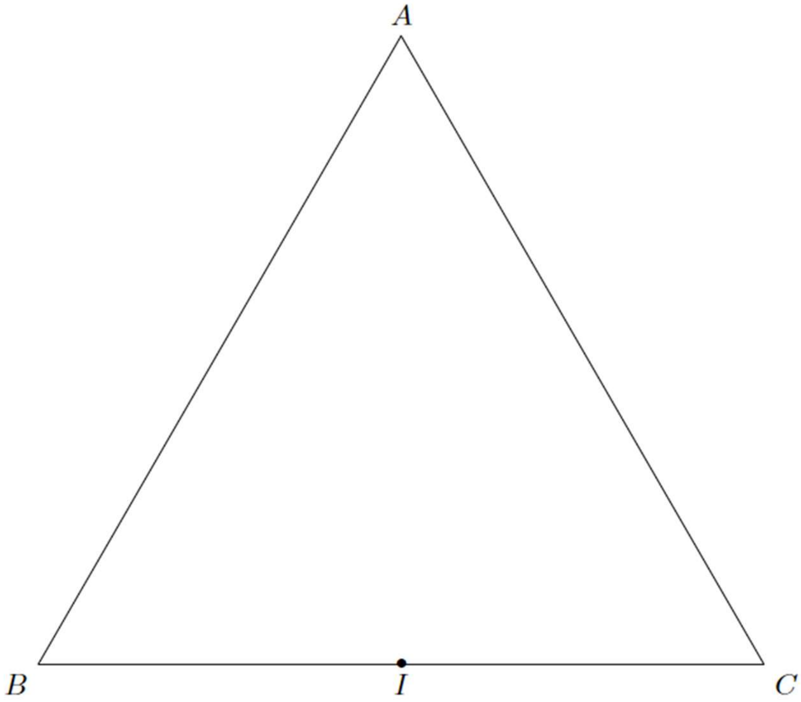
3. De cette relation, on déduit que la droite (AI) est aussi hauteur du triangle ABC. La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a (*voir* prop. 2, p. 99) vaut :

$$a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

on en déduit que :

$$AI = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}9 \text{ cm}$$

Ce que l'on peut vérifier sur la figure :



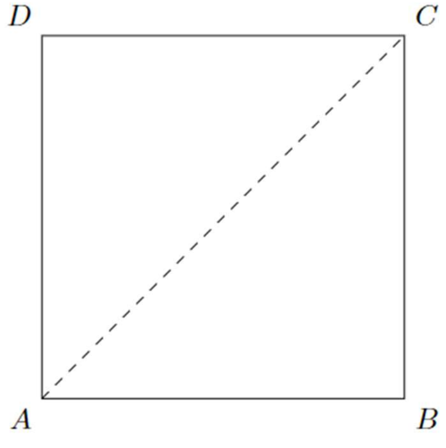
Ex. 21, p. 107. 2. Puisque $ABCD$ est un carré, tous ses angles sont droits, et le triangle ABC est rectangle en B.

Par le théorème de Pythagore, on a donc :

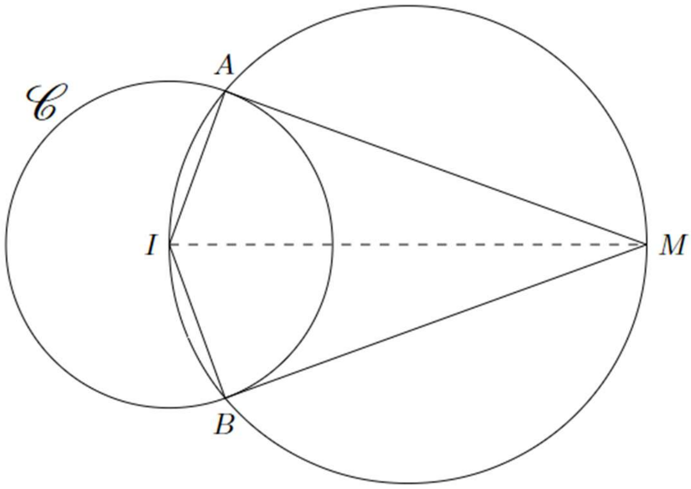
$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 + BA^2 \\ &= a^2 + a^2 \\ &= a^2 \times 2 \end{aligned}$$

De quoi on déduit :

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{a^2 \times 2} \\ &= \sqrt{a^2} \times \sqrt{2} \\ &= a\sqrt{2} \end{aligned}$$



Ex. 22, p. 108. Voici la figure :



1. Le point A appartient au cercle de diamètre $[MI]$. Le théorème du demi-cercle (*voir* th. 1, p. 17) dit qu'alors :

$$(AI) \perp (AM)$$

De façon analogue, on a :

$$(BI) \perp (BM)$$

2. La droite (AM) est issue du point $A \in \mathscr{C}$, et est perpendiculaire au rayon $[AI]$. Par la déf. 1, p. 18, on en déduit qu'elle est tangente à $\mathscr{C}$ en A. Raisonnement analogue pour la droite (BM).
3. Notons R le rayon de $\mathscr{C}$. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle IAM. On obtient :

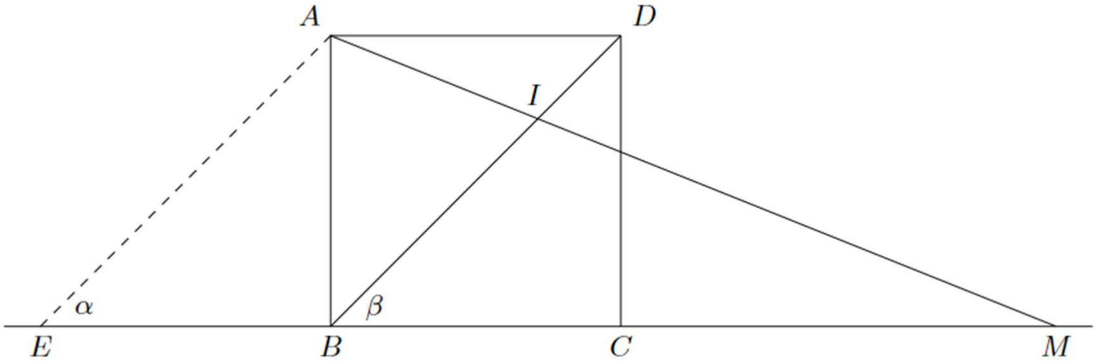
$$AM^2 = IM^2 - R^2$$

En raisonnant de façon analogue dans le triangle IBM, on trouve :

$$BM^2 = IM^2 - R^2$$

On en déduit $AM^2 = BM^2$ donc $AM = BM$.
4. On vient de voir que M est équidistant de A et B. Le point I est aussi équidistant de A et B puisque $IA = IB = R$. On en déduit (*voir* th. 4, p. 15) que M et I appartiennent tous deux à la médiatrice de $[AB]$. Donc la droite (IM) **est** la médiatrice de $[AB]$.

Ex. 23, p. 108. 1. Voici la figure :



Dans les démonstrations, on utilisera, **sans insister**, la propriété suivante (*voir* prop. 1, p. 99) : la diagonale d'un carré est égale à son côté multiplié par $\sqrt{2}$.

2. Notons E l'intersection de (BC) avec la droite issue de A et parallèle à (BD). Notons de plus :

$$\alpha = \widehat{BEA} \qquad\qquad \beta = \widehat{CBD}$$

Comme $ABCD$ est un carré, on a $\beta = 45°$. Puisque les droites (EA) et (BD) sont parallèles, les angles α et β sont correspondants (*voir* déf. 5, p. 16), donc égaux. On en déduit :

$$\alpha = 45°$$

Le triangle ABE étant rectangle en B, et ayant un angle de $45°$, son troisième angle vaut aussi $45°$. Ce triangle est donc isocèle en B : c'est donc un **demi-carré** de côté 1. On en déduit $AE = \sqrt{2}$. Par le théorème de Thalès, on a ensuite :

$$\frac{MI}{MA} = \frac{MB}{ME} = \frac{IB}{AE}$$

On ne connaît rien à MI, et il ne nous intéresse pas, donc on supprime le premier quotient :

$$\cancel{\frac{MI}{MA}} = \frac{MB}{ME} = \frac{IB}{AE}$$

Il nous reste :

$$\begin{aligned} \frac{MB}{ME} &= \frac{IB}{AE} \\ \frac{a}{a+1} &= \frac{IB}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

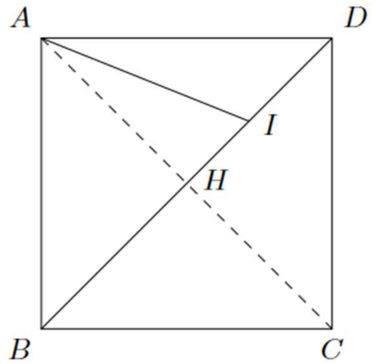
On retourne cette égalité :

$$\frac{IB}{\sqrt{2}} = \frac{a}{a+1}$$

On la multiplie par $\sqrt{2}$ des deux côtés, il vient :

$$IB = \frac{a\sqrt{2}}{a+1}$$

3. Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu. Si on note H l'intersection de (AC) avec (BD), on en déduit :



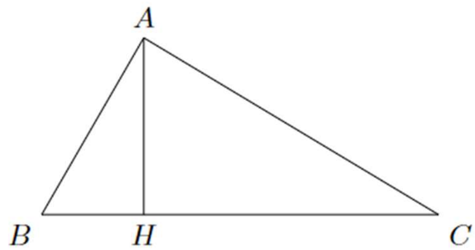
$$(AH) \perp (BD) \qquad AH = \frac{1}{2} \times AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La relation $(AH) \perp (BD)$ équivaut à $(AH) \perp (IB)$. Donc (AH) est la hauteur du triangle AIB relativement à A. On a donc :

$$S = \frac{1}{2} \times AH \times IB = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{a\sqrt{2}}{a+1} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} \times \frac{a \times \cancel{\sqrt{2}}}{a+1} = \frac{1}{2} \times \frac{a}{a+1} = \frac{a}{2a+2}$$

Ex. 24, p. 108. 1. Le triangle BAC est rectangle en A. Son aire vaut donc :

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2}bc$$



On peut aussi calculer l'aire en utilisant la base BC et la hauteur AH :

$$S = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2}ah$$

On égale ces deux expressions de S et on obtient :

$$bc = ah \tag{1}$$

2. Par le théorème de Pythagore, on a $a^2 = b^2 + c^2$ donc $a = \sqrt{b^2 + c^2}$. Portant ceci dans l'égalité (1), on obtient :

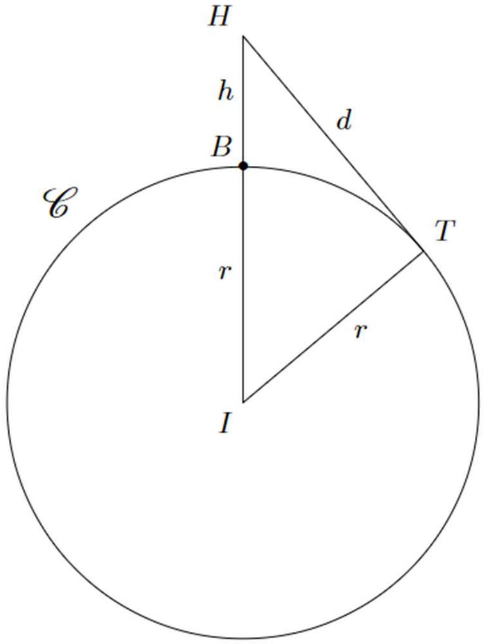
$$bc = \sqrt{b^2 + c^2} \times h$$

que l'on élève au carré : $b^2c^2 = (b^2 + c^2) \times h^2$. D'où on déduit, en isolant h^2 :

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{b^2c^2}{b^2+c^2} \\ \frac{1}{h^2} &= \frac{b^2+c^2}{b^2c^2} = \frac{b^2}{b^2c^2} + \frac{c^2}{b^2c^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} \end{aligned}$$

Ex. 25, p. 109. 1. On peut schématiser la situation par la figure ci-dessous, où le cercle $\mathscr{C}$, de centre I, représente la Terre, B est l'emplacement de mon bateau à la surface de la mer, H est le haut du mât où j'ai grimpé.

J'aperçois la ligne d'horizon au point $T \in \mathscr{C}$, tel que (HT) soit tangente à $\mathscr{C}$ en T, c'est-à-dire, tel que :



$$(HT) \perp (IT)$$

Par hypothèse, on a :

$$h = BH \qquad r = IT = IB$$

La distance qui me sépare de la ligne d'horizon est $d = HT$.
Puisque le triangle HTI est rectangle en T, le théorème de Pythagore s'applique, et on a :

$$\begin{aligned} d^2 &= IH^2 - IT^2 \\ &= (r+h)^2 - r^2 \\ &= 2rh + h^2 \end{aligned}$$

On en déduit :

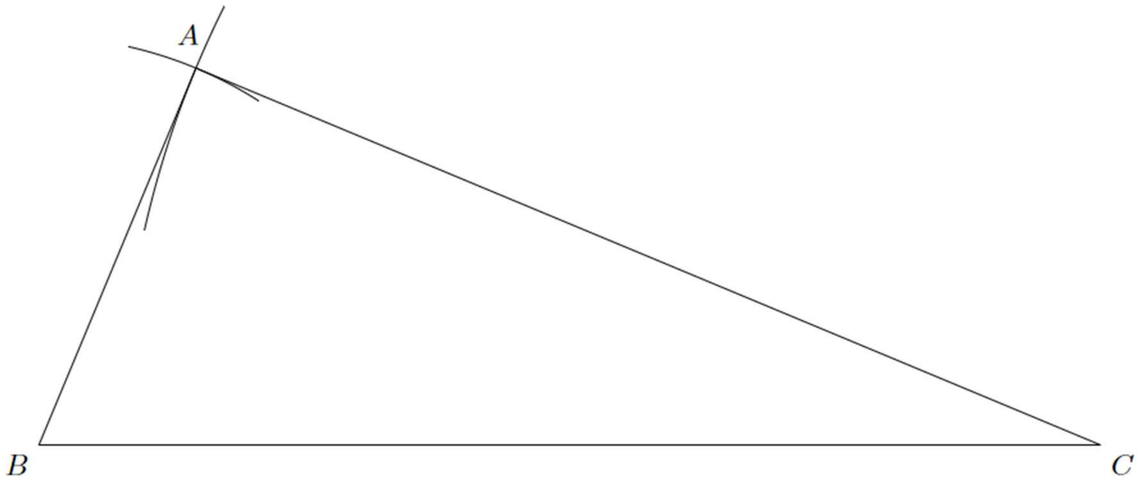
$$\boxed{d = \sqrt{2rh + h^2}}$$

2. On convertit h en km : 3 m $= 3.10^{-3}$ km, et on calcule d en km :

$$d = \sqrt{2 \times 6400 \times 3.10^{-3} + 9.10^{-6}} \simeq \sqrt{2 \times 6400 \times 3.10^{-3}} = \sqrt{38{,}4} \simeq 6{,}2$$

Noter qu'on a éliminé le terme 9.10^{-6} qui est **négligeable** devant 38,4.
3. En conclusion, lorsque je monte en haut du mât de mon bateau, je vois la ligne d'horizon à environ 6 km de distance.

Ex. 26, p. 109. 2. Le point A est à l'intersection d'un arc de cercle de centre B, de rayon 5 cm, et d'un arc de cercle de centre C, de rayon 12 cm. La figure est un peu réduite pour des raisons typographiques :



3. On calcule :

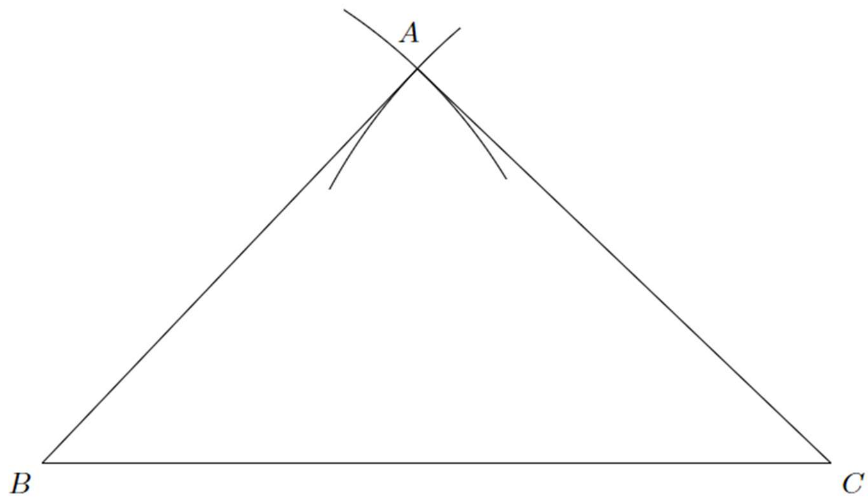
$$AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2 = BC^2$$

On constate donc que $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Par la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle ABC est rectangle en A.
4. On trouve approximativement :

$$\widehat{B} = 67^\circ \qquad\qquad \widehat{C} = 23^\circ$$

On a $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$, donc $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires.

Ex. 27, p. 109. 2. Le point A est à l'intersection d'un arc de cercle de centre B, de rayon 6 cm, et d'un arc de cercle de centre C, de rayon 6,3 cm.



3. On calcule :

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 6^2 + 6{,}3^2 = 36 + 39{,}69 = 75{,}69 \\ BC^2 &= 8{,}7^2 = 75{,}69 \end{aligned}$$

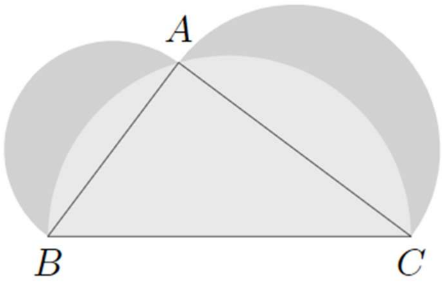
On constate que $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Par la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle ABC est rectangle en A.
4. On mesure sur la figure :

$$\widehat{B} = 46^\circ \qquad\qquad \widehat{C} = 44^\circ$$

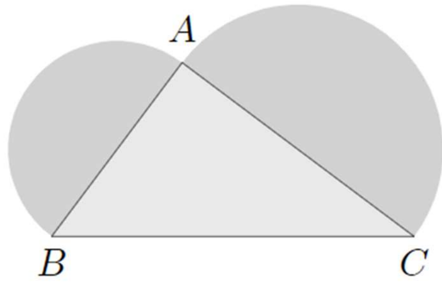
On a $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$, donc $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires.

Ex. 28, p. 109. 1. Les deux dessins ci-dessous prouvent l'égalité $S_1 = S_2$:

S_1 est la somme :
aire gris **moyen** + aire gris **pâle**



S_2 est la somme :
aire gris **pâle** + aire gris **moyen**



2. Puisque $S_1 = S_2$, on a :

$\ell_1 + \ell_2 +$ aire du demi-disque de diamètre $[BC] =$
$S +$ aire des deux demi-disques de diamètre $[AB]$ et $[AC]$

Donc la relation à prouver $\ell_1 + \ell_2 = S$ équivaut à la relation suivante :

(aire du demi-disque de diamètre $[BC]$) =
(aire des deux demi-disques de diamètre $[AB]$ et $[AC]$) (1)

On calcule les trois aires :

$$\begin{aligned}
\text{aire du demi-disque de diamètre } [BC] &= \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \times \pi \times BC^2 \\
\text{aire du demi-disque de diamètre } [AB] &= \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \times \pi \times AB^2 \\
\text{aire du demi-disque de diamètre } [AC] &= \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \times \pi \times AC^2
\end{aligned}$$

Donc l'égalité (1) équivaut à :

$$\frac{1}{8} \times \pi \times BC^2 = \frac{1}{8} \times \pi \times AB^2 + \frac{1}{8} \times \pi \times AC^2$$

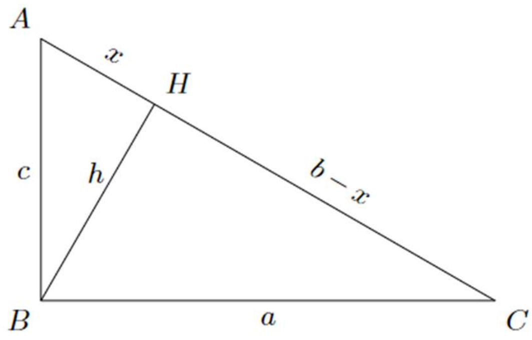
c'est-à-dire :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Or cette égalité est vraie, car c'est celle du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC.

Ex. 29, p. 110.

1. On applique le théorème de Pythagore dans les triangles BHA, BHC, ABC :



$$\begin{aligned} BH^2 &= c^2 - x^2 & (1) \\ BH^2 &= a^2 - (b-x)^2 & (2) \\ b^2 &= a^2 + c^2 & (3) \end{aligned}$$

En ajoutant les égalités (1) et (2), on obtient celle-ci :

$$2BH^2 = a^2 + c^2 - (x^2 + b^2 + x^2 - 2bx)$$

Par l'égalité (3), on a les simplifications suivantes :

$$2BH^2 = \cancel{a^2} + \cancel{c^2} - (x^2 + \cancel{b^2} + x^2 - 2bx)$$

Il reste :

$$2BH^2 = -2x^2 + 2bx$$

ce qui équivaut à :

$$BH^2 = -x^2 + bx = x(-x+b) = HA \times HC$$

On a donc prouvé l'égalité attendue :

$$BH^2 = HA \times HC \qquad (4)$$

2. On reprend (3) sous la forme $AB^2 = BH^2 + AH^2$, et on la transforme grâce à (4) :

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 = AH \times HC + AH^2 = AH \times (HC + AH) = AH \times AC$$

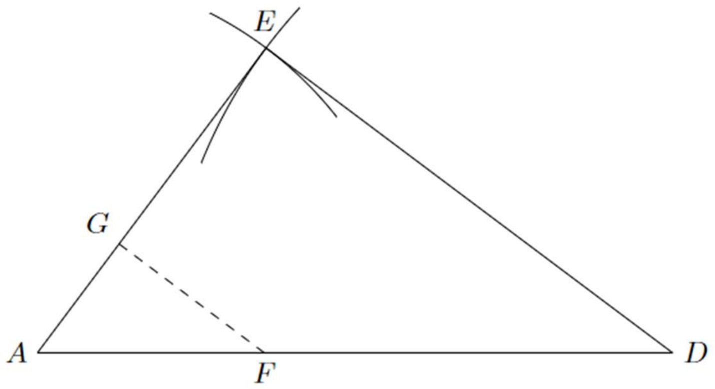
3. En faisant les **produits en croix**, on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = AH \times AC$$

et c'est précisément l'égalité que l'on vient de prouver.

CORRIGÉS

Ex. 30, p. 111. 1. et 2. Le point E est à l'intersection d'un arc de cercle de centre A, de rayon 4,2 cm, et d'un arc de cercle de centre D, de rayon 5,6 cm.



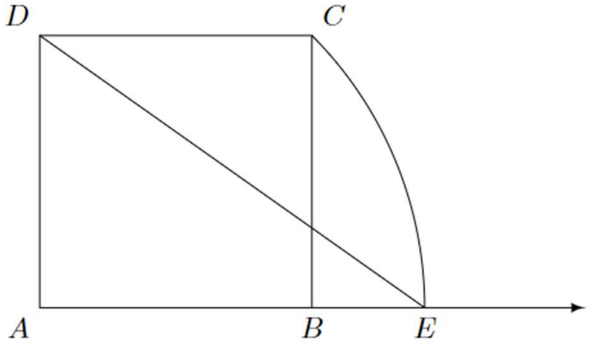
3. On calcule :

$$EA^2 + ED^2 = 4{,}2^2 + 5{,}6^2 = 17{,}64 + 31{,}36 = 49 = 7^2 = AD^2$$

On a donc $EA^2 + ED^2 = AD^2$. Par la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle ADE est rectangle en E.
4. Par le théorème de Thalès, on a :

$$\begin{aligned} \frac{AG}{AE} &= \frac{AF}{AD} \\ AG &= AE \times \frac{AF}{AD} \\ &= 4{,}2 \times \frac{2{,}5}{7} = 1{,}5 \end{aligned}$$

Ex. 31, p. 111. 1. Voici la figure :



2. Puisque $[AC]$ est la diagonale d'un carré de côté 3, on a :

$$AC = 3\sqrt{2}$$

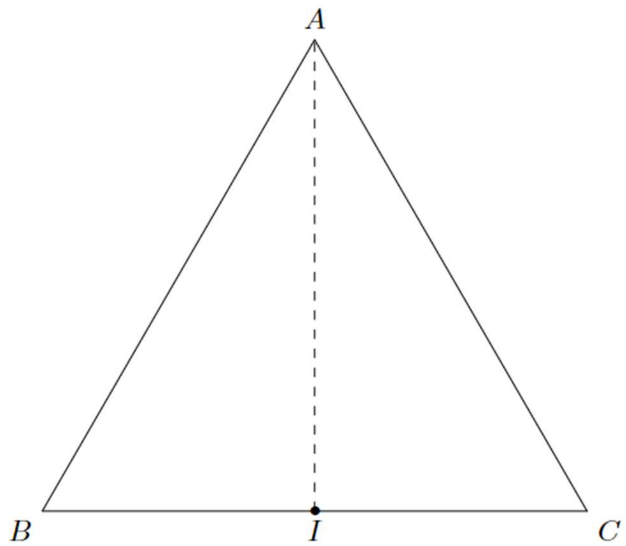
et donc, $AE = 3\sqrt{2}$. On applique ensuite le théorème de Pythagore, et on obtient :

$$\begin{aligned} DE^2 &= AD^2 + AE^2 \\ &= 3^2 + (3\sqrt{2})^2 \\ &= 9 + 18 = 27 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$DE = \sqrt{27} \approx 5{,}2$$

Ex. 32, p. 111.



2. On sait que les angles d'un triangle équilatéral sont tous égaux à 60°. Donc :

$$\widehat{ABC} = 60°$$

De plus, la droite (AI) est hauteur relative à A, donc :

$$(AI) \perp (BC)$$

Le triangle ABI est donc rectangle, et on sait que dans un tel triangle, les angles aigus sont complémentaires. On a donc :

$$\widehat{BAI} = 90 - \widehat{ABI} = 90 - 60 = 30°$$

On sait que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a (*voir* prop. 2, p. 99) est :

$$AI = a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

comme ici, $a = 1$, on en déduit :

$$AI = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. On a maintenant tous les éléments pour **calculer** nos cosinus sans calculette. On connaît la définition (*voir* déf. 1, p. 100) du cosinus d'un angle aigu α dans un triangle rectangle :

$$\cos\alpha = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

On l'applique et on obtient :

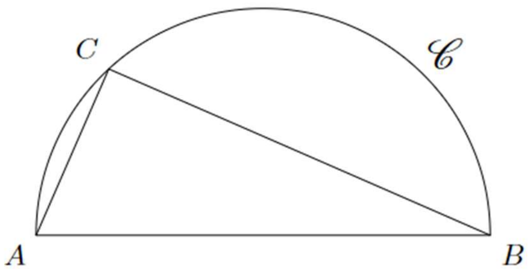
$$\cos 60 = \cos\widehat{ABI} = \frac{BI}{BA} = BI = \frac{1}{2} \qquad \cos 30 = \cos\widehat{BAI} = \frac{AI}{AB} = AI = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Finalement, on a **prouvé** :

$$\boxed{\cos 60 = \frac{1}{2}} = 0{,}5 \qquad \boxed{\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0{,}866...$$

Ce sont bien les valeurs annoncées p. 100 du cours.

Ex. 33, p. 111.



3. Le point C appartient au demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$. D'après le théorème du demi-cercle (th. 1, p. 17), on a

$$(CA) \perp (CB)$$

Donc, le triangle ABC est rectangle en C.

4. Dans le triangle rectangle ABC on a :

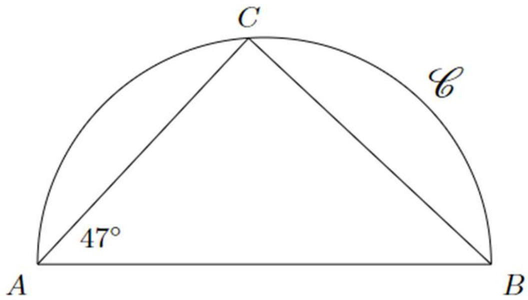
$$\cos A = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{5}$$

5. On a calculé le tableau suivant :

AC	1	2	3	4
$\cos A$	0,2	0,4	0,6	0,8
A	78°	66°	53°	37°

6. On voit que lorsque $\boxed{\cos A}$ **augmente** de 0,2 à 0,8 $\boxed{A}$ **diminue** de 78° à 37°.

Ex. 34, p. 112.



4. Le point C appartient au demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$. D'après le théorème du demi-cercle (th. 1, p. 17), on a donc :

$$(CA) \perp (CB)$$

et le triangle ABC est rectangle en C.

5. Dans ce triangle rectangle on a :

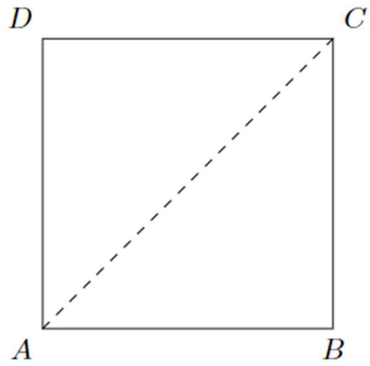
$$\cos 47 = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{5}$$

6. et 7. On en déduit :

$$\frac{AC}{5} = \cos 47 \;\Rightarrow\; AC = 5 \times \cos 47 \approx 3{,}4 \text{ cm}$$

Cette valeur $\boxed{AC \approx 3{,}4 \text{ cm}}$ est confirmée par la mesure directe sur la figure.

Ex. 35, p. 112.



2. Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A. Ses angles à la base sont donc égaux, et comme leur somme vaut $90°$, chacun vaut $45°$.
3. Par la prop. 1, p. 99, la diagonale $[AC]$ vaut :

$$AC = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

On en déduit :

$$\cos\ 45° = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

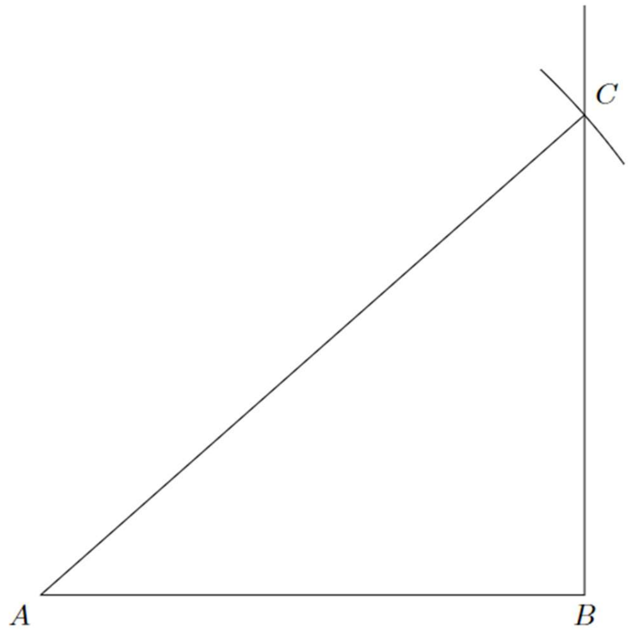
On peut transformer $\frac{1}{\sqrt{2}}$ pour qu'il n'y ait plus de racine en bas. Pour ce faire, on multiplie haut et bas par $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a donc prouvé :

$$\boxed{\cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Ex. 36, p. 112.



1. La construction du triangle ABC se fait avec l'équerre et le compas. On trace d'abord $[AB]$ horizontal de longueur 6. Issue de B, on trace un segment vertical pas trop court, vers le haut. On pique en A, et on trace un arc de cercle de 8, qui coupe le segment vertical. On obtient le point C à l'intersection.
2. Par le théorème de Pythagore, on a :

$$BC^2 = AC^2 - BA^2 = 8^2 - 6^2 = 28$$

On en déduit : $BC = \sqrt{28} \approx 5{,}3$

3. On a :

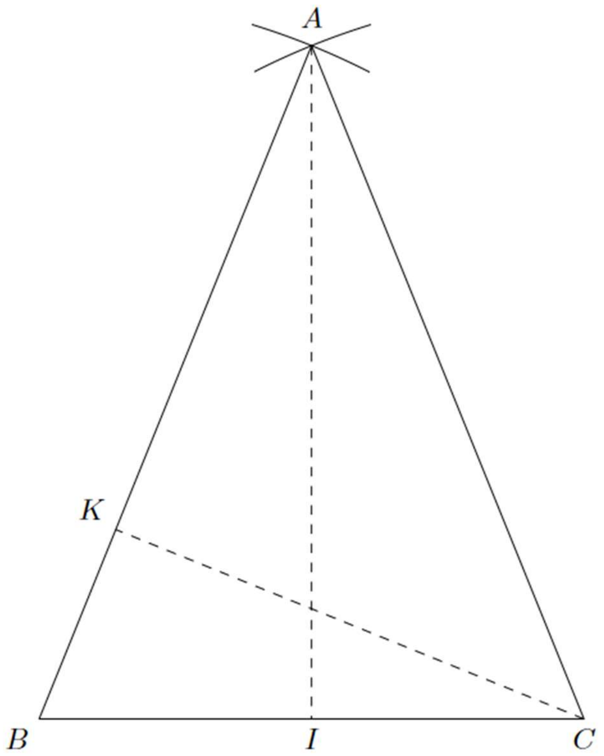
$$\cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

4. Pour obtenir la valeur de A, on utilise la fonction $\boxed{\text{acos}}$ de la calculette, comme expliqué p. 100 du cours :

$$A = \text{acos}\ \frac{3}{4}\ \approx\ 41{,}4°$$

CORRIGÉS

Ex. 37, p. 112.



Pour la construction de ABC, on trace deux arcs de cercles de centre B et C, de même rayon 8. Ils se coupent en A.

1. Puisque I est milieu de $[BC]$, la droite (AI) est médiane principale relative à A du triangle ABC. Et puisque ce triangle est isocèle en A, cette médiane est aussi hauteur. Donc AIB est rectangle en I. Dans ce triangle, on a :

$$\cos\widehat{ABC} = \cos\widehat{ABI} = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{BI}{BA} = \frac{3}{8}$$

2. Puisque (CK) est hauteur, le triangle BKC est rectangle en K. Dans ce triangle, on a :

$$\cos\widehat{KBC} = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{BK}{BC} = \frac{BK}{6}$$

Puisque $\widehat{KBC} = \widehat{ABI}$, leur cosinus sont égaux, donc :

$$\frac{BK}{6} = \frac{3}{8}$$

d'où :

$$BK = 6 \times \frac{3}{8} = \frac{9}{4}$$

On en déduit :

$$AK = AB - BK = 8 - \frac{9}{4} = \frac{23}{4} = 5{,}75$$

3. Puisque $\widehat{BAC} = \widehat{KAC}$, on a peut calculer $\cos\widehat{BAC}$ dans le triangle AKC qui est rectangle en K. On a donc :

$$\cos\widehat{BAC} = \cos\widehat{KAC} = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{AK}{AC} = \frac{AK}{8} = \frac{\frac{23}{4}}{8} = \frac{23}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{23}{32}$$

4. On utilise la fonction $\boxed{\text{acos}}$ de la calculette :

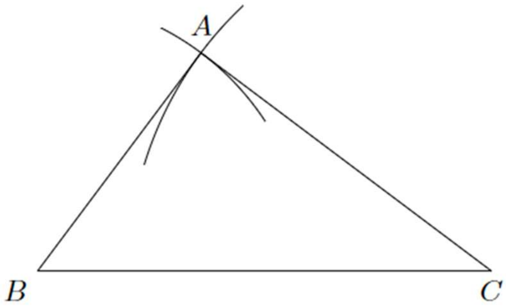
$$\cos\alpha = \frac{23}{32} \;\Leftrightarrow\; \alpha = \text{acos}\,\frac{23}{32} = 44{,}04.. \approx 44^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{3}{8} \;\Leftrightarrow\; \beta = \text{acos}\,\frac{3}{8} = 67{,}97.. \approx 68^\circ$$

5. On a $\alpha + 2\beta = 44 + 2 \times 68 = 180$. C'est bien la somme des angles du triangle ABC.

Ex. 38, p. 113.

2. Pour construire A, on trace un arc de cercle de centre B et de rayon 3, et un autre arc de centre C et de rayon 4. Ils se coupent en A.



3. On a :

$$BC^2 = 5^2 = 25$$

$$AB^2 = 3^2 = 9 \qquad AC^2 = 4^2 = 16$$

Puisque 25=9+16, on en déduit :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Par la réciproque du th. de Pythagore, on en déduit que ABC est rectangle en A. On reconnaît le **triangle égyptien 3 4 5** déjà évoqué p. 99 du cours.

4. Dans ce triangle rectangle, on a :

$$\cos B = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{BA}{BC} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad \cos C = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{CA}{CB} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

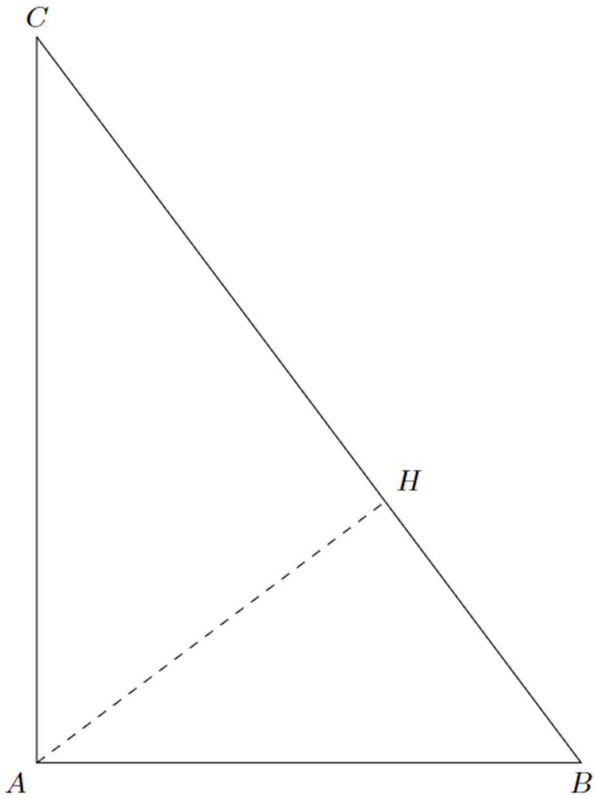
5. On utilise la fonction $\boxed{\text{acos}}$ de la calculette :

$$\cos B = 0{,}6 \iff B = \text{acos } 0{,}6 = 53{,}13.. \approx 53^\circ$$

$$\cos C = 0{,}8 \iff C = \text{acos } 0{,}8 = 36{,}86.. \approx 37^\circ$$

7. On a $B + C = 53 + 37 = 90°$. Les angles B et C sont **complémentaires** (*voir* déf. 2, p. 16), puisque ce sont les angles aigus d'un triangle rectangle (cor. 3, p. 16).

Ex. 39, p. 113.



2. Par le th. de Pythagore, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = $$
$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

On en déduit : $BC = \sqrt{100} = 10$

3. Dans le triangle rectangle ABC on a :

$$\cos B = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{BA}{BC} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

$$\cos C = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{CA}{CB} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

4. Dans le triangle rectangle AHB, rectangle en H, on a :

$$\cos B = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{BH}{BA} = \frac{BH}{6}$$

CORRIGÉS

5. On en déduit : $\dfrac{BH}{6} = \dfrac{6}{10}$, donc :

$$BH = 6 \times \frac{6}{10} = \frac{36}{10} = 3{,}6$$

6. Dans le triangle rectangle AHC, rectangle en H, on a :

$$\cos C = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{CH}{CB} = \frac{CH}{8}$$

7. On en déduit : $\dfrac{CH}{8} = \dfrac{8}{10}$, donc :

$$CH = 8 \times \frac{8}{10} = \frac{64}{10} = 6{,}4$$

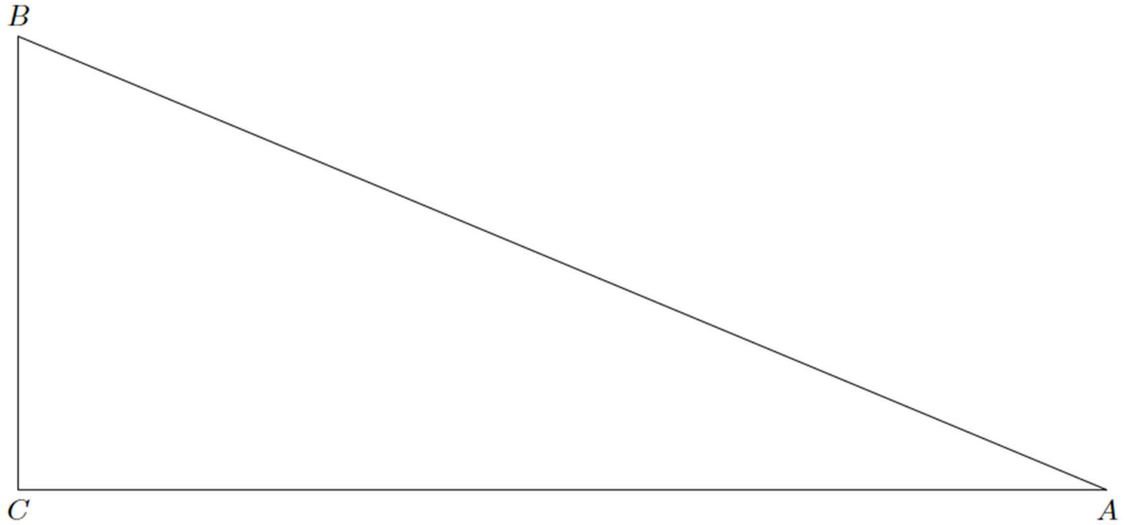
8. Puisque ABC est un triangle rectangle, son aire S peut se calculer de deux façons différentes :

$$S = \frac{1}{2} \times BC \times AH \qquad\qquad S = \frac{1}{2} \times AC \times AB$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} BC \times AH &= AC \times AB \\ AH &= \frac{AC \times AB}{BC} \\ &= \frac{8 \times 6}{10} = 4{,}8 \end{aligned}$$

Ex. 40, p. 113. 1. Voici la figure :



2. On a :

$$AB^2 = 13^2 = 169 \qquad CA^2 = 12^2 = 144 \qquad CB^2 = 5^2 = 25$$

Puisque 169=144+16, on en déduit :

$$AB^2 = CA^2 + CB^2$$

Par la réciproque du th. de Pythagore, on en déduit que ABC est rectangle en C.

3. et 4. Dans le triangle rectangle ABC on a :

$$\cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13}$$

$$\cos B = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{BC}{BA} = \frac{5}{13}$$

On utilise la fonction $\boxed{\text{acos}}$ de la calculette :

$$\cos A = \frac{12}{13} \Leftrightarrow A = \text{acos}\,\frac{12}{13} = 22{,}61.. \approx 23^\circ$$

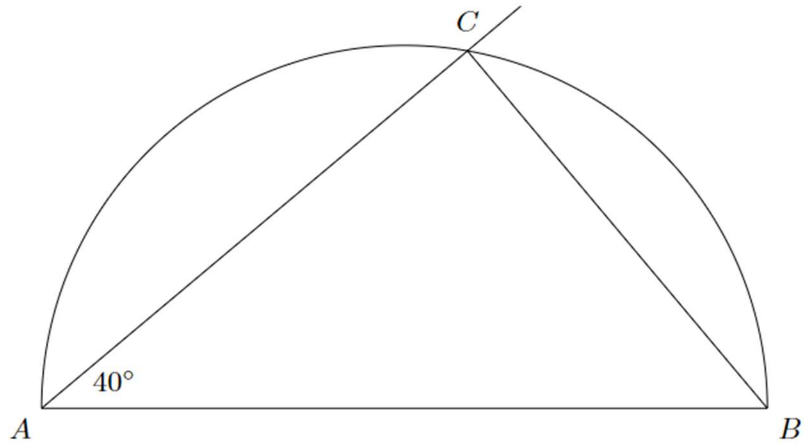
$$\cos B = \frac{5}{13} \Leftrightarrow A = \text{acos}\,\frac{5}{13} = 67{,}38.. \approx 67^\circ$$

5. On a :

$$\widehat{A} + \widehat{B} = 23 + 67 = 90^\circ$$

6. C'était prévisible, puisque, par le cor. 3, p. 16, les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.

Ex. 41, p. 114. 1. On trace d'abord $[AB]$ horizontal, de longueur 8. Puis le demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$, et une demi-droite issue de A, faisant un angle de 40° avec la demi-droite $[AB)$. L'intersection du demi-cercle et de la demi-droite donne C. Par le théorème du demi-cercle (th. 1, p. 17), le triangle ABC est rectangle en C.



2. Les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont complémentaires, car ce sont les angles aigus d'un triangle rectangle. On a donc :

$$\widehat{B} = 90 - \widehat{A} = 90 - 40 = 50^\circ$$

3. et 4. Dans le triangle rectangle ABC on a :

$$\cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{8}$$

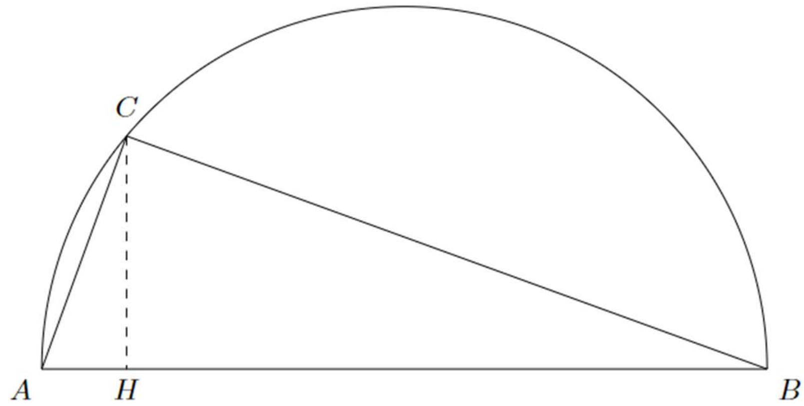
et comme, $\widehat{A} = 40$, on peut écrire :

$$\cos 40 = \frac{AC}{8}$$

D'où on tire :

$$AC = 8\cos 40 = 6{,}12... \approx 6{,}1$$

Ex. 42, p. 114. 1. On trace d'abord $[AB]$ horizontal. Puis le demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$, sur lequel on choisit un point C. Par le théorème du demi-cercle (th. 1, p. 17), le triangle ABC est rectangle en C.



2. Suivant qu'on calcule $\cos A$ dans l'un des triangles rectangles ABC ou ACH on obtient :

$$\cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{AC}{AB} \qquad \cos A = \frac{AH}{AC}$$

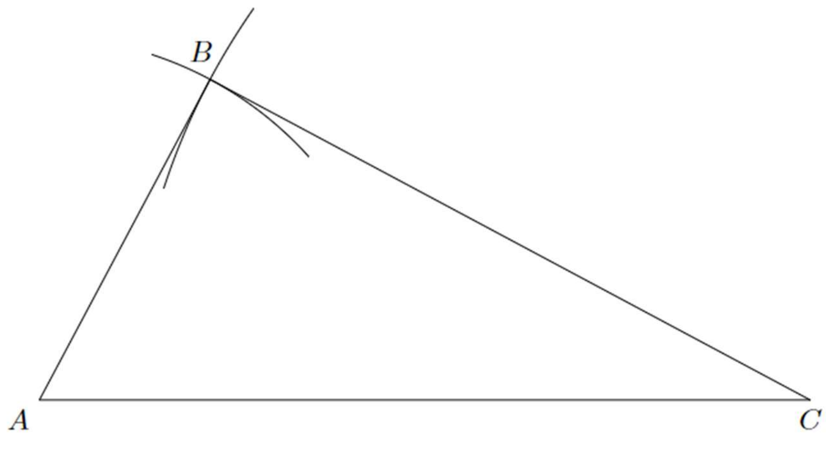
3. On en tire :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC}$$

4. La proportion précédente **équivaut** à l'égalité des produits en croix :

$$AC^2 = AH \times AB$$

Ex. 43, p. 114. 1. On trace $[AC]$ horizontal de longueur 8,5. Puis un arc de cercle de centre A et de rayon 4, et un arc de centre C et de rayon 7,5. Ils se coupent en B.



2. On a :

$$AC^2 = 8{,}5^2 = 72{,}25 \qquad BA^2 = 4^2 = 16 \qquad BC^2 = 7{,}5^2 = 56{,}25$$

Puisque 72,25=16+56,25, on en déduit :

$$AC^2 = BA^2 + BC^2$$

Par la réciproque du th. de Pythagore, on en déduit que ABC est rectangle en B.

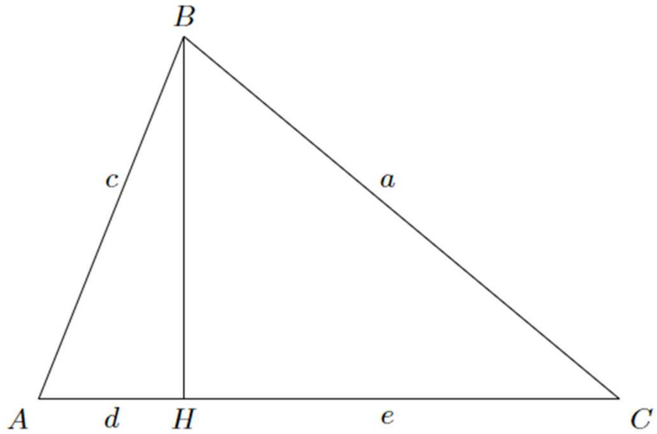
3. Dans le triangle rectangle ABC on a :

$$\cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{8{,}5} = \frac{8}{17}$$
$$\cos C = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{CB}{CA} = \frac{7{,}5}{8{,}5} = \frac{15}{17}$$

4. et 5. On utilise la fonction $\boxed{\text{acos}}$ de la calculette :

$$\cos A = \frac{8}{17} \Leftrightarrow A = \text{acos}\ \frac{8}{17} = 61°{,}92... \approx 62°$$
$$\cos C = \frac{15}{17} \Leftrightarrow A = \text{acos}\ \frac{15}{17} = 28°{,}07... \approx 28°$$

Ex. 44, p. 115. Voici la figure :



1. On applique le th. de Pythagore dans les triangles rectangles BHC et BHA :

$$BH^2 = a^2 - e^2 \qquad BH^2 = c^2 - d^2$$

On en déduit :

$$a^2 - e^2 = c^2 - d^2 \tag{1}$$

2. Dans le triangle rectangle BHA, on a :

$$\cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{AH}{AB} = \frac{d}{c}$$

On en déduit :

$$d = c \times \cos A$$

On a ensuite :

$$HC = AC - HA \Leftrightarrow e = b - d = b - c \times cosA$$

3. On reporte les relations obtenues $\boxed{d = c \times \cos A}$ et $\boxed{e = b - c \times cosA}$ dans la relation (1). Elle devient successivement :

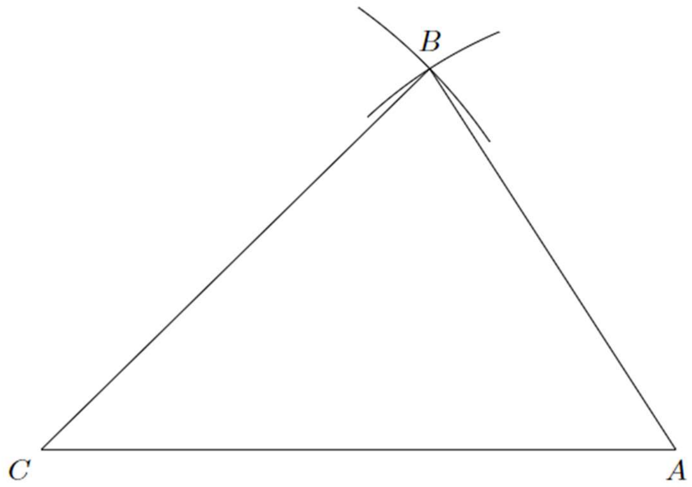
$$\begin{aligned} a^2 - (b - c \times cosA)^2 &= c^2 - (c \times \cos A)^2 \\ a^2 - (b^2 + c^2 \times cos^2 A - 2bc \times \cos A) &= c^2 - (c^2 \times \cos^2 A) \end{aligned}$$

où on a écrit, comme c'est l'usage $\boxed{\cos^2 A}$ au lieu de $(\cos A)^2$. On simplifie ensuite :

$$\begin{aligned} a^2 - (b^2 + \cancel{c^2 \times cos^2 A} - 2bc \times \cos A) &= c^2 - \cancel{c^2 \times \cos^2 A} \\ a^2 - b^2 + 2bc \times \cos A &= c^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

CORRIGÉS

Ex. 45, p. 115. 1. Voici la figure :



2. On calcule les carrés des trois côtés :

$$a^2 = 6^2 = 36 \qquad b^2 = 7^2 = 49 \qquad c^2 = 5^2 = 25$$

Si le triangle ABC était rectangle, son hypoténuse, qui est le plus grand de ses côtés, serait CA. Or $CA^2 = 7^2 = 49 \neq 36 + 25$. Donc, le triangle ABC n'est pas rectangle.
3. La formule du cosinus est :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Elle est équivalente à :

$$\begin{aligned} 2bc\cos A &= b^2 + c^2 - a^2 \\ \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \end{aligned}$$

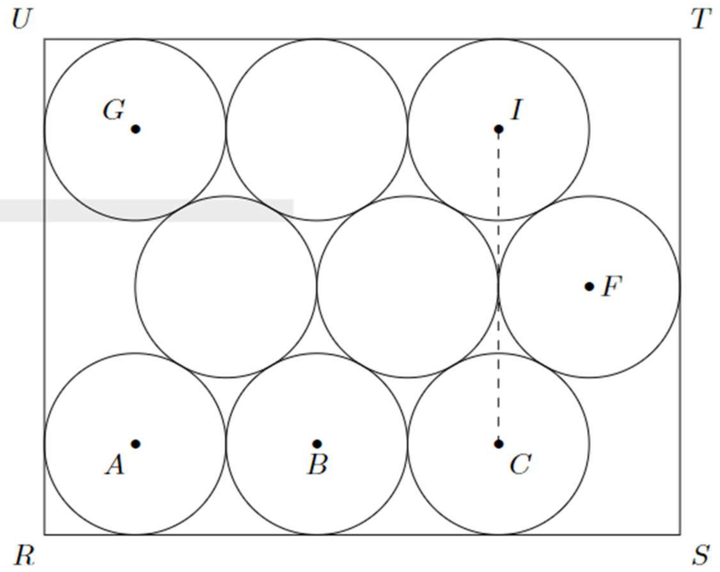
4. On l'applique avec les valeurs $a = 6$, $b = 7$, $c = 5$ et on obtient :

$$\cos A = \frac{7^2 + 5^2 - 6^2}{2 \times 7 \times 5} = \frac{49 + 25 - 36}{70} = \frac{38}{70} = \frac{19}{35}$$

5. On utilise la fonction $\boxed{\text{acos}}$ de la calculette :

$$\cos A = \frac{19}{35} \Leftrightarrow A = \text{acos}\,\frac{19}{35} = 57{,}12... \approx 57°$$

Ex. 47, p. 116. Nous reproduisons la figure simplifiée et complétée :



Grâce au pointillé $[IC]$, on voit que la longueur RS est la somme des diamètres des cercles centrés en A et B, du rayon du cercle de centre C, et du diamètre du cercle centré en F. On a donc :

$$RS = 2 + 2 + 1 + 2 = 7$$

Grâce encore au pointillé $[IC]$, on voit que la longueur RU est la somme de IC, du rayon du cercle de centre I, et du rayon du cercle de centre C.

Or IC est la hauteur du triangle équilatéral GBI qui a pour côté $GI = 4$. On en déduit :

$$IC = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Finalement :

$$RU = 2\sqrt{3} + 1 + 1 = 2 + 2\sqrt{3}$$

Chapitre 5

Vecteurs du plan

1 Vecteurs et translations

Définition 1. *Un vecteur du plan est un couple de réels. Ces deux réels sont appelés* ***coordonnées*** *du vecteur.*

Le symbole d'un vecteur est surmonté généralement d'une flèche, ainsi :

$$\vec{u} = (a; b) \qquad \vec{\imath} = (1; 0) \qquad \vec{\jmath} = (0; 1) \qquad \vec{v} = (-1{,}5\,; 3)$$

Le **vecteur nul** est noté :

$$\vec{0} = (0; 0)$$

L'**opposé** du vecteur $\vec{u} = (a; b)$ est le vecteur :

$$-\vec{u} = (-a\,; -b)$$

ATTENTION ! Les vecteurs $(a; b)$ et $(b; a)$ ne sont pas égaux sauf si $a = b$.

Définition 2. *À tout vecteur $\vec{u} = (a; b)$ est associé le schéma suivant :*

$$A(x; y) \quad \mapsto \quad A'(x + a\,; y + b)$$

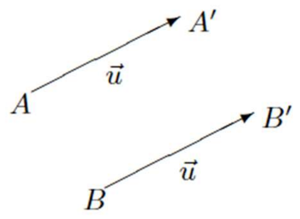
Ce schéma est appelé ***translation***. Il est noté t. On écrit $t(A) = A'$, et encore :

$$\boxed{A + \vec{u} = A'} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\overrightarrow{AA'} = \vec{u}}$$

Le point A' est appelé **translaté** de A par $\vec{u}$. Le vecteur $\vec{u}$ est un **objet algébrique** (couple de réels), mais l'écriture $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ donne une **représentation géométrique** de $\vec{u}$ que l'on peut imaginer comme une flèche allant de A jusqu'à A'.
De plus, on peut montrer que les deux relations algébriques :

$$t(A) = A' \quad \text{et} \quad t(B) = B'$$

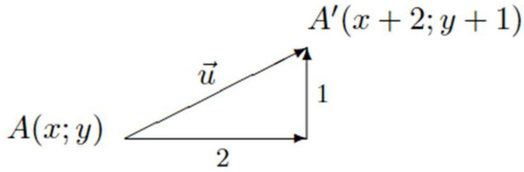
impliquent les deux relations géométriques suivantes :



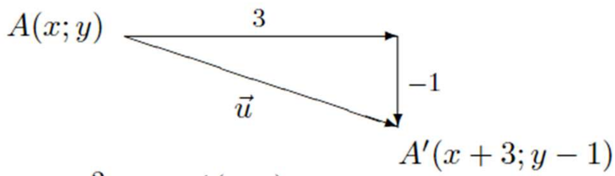
$$\begin{array}{rcl} (AA') & /\!\!/ & (BB') \\ AA' & = & BB' \end{array}$$

Un vecteur et sa translation associée sont définis par une **direction**, un **sens**, une **longueur**. La direction est celle de la droite (AA'), le sens va de A vers A', la longueur est AA'. Donnons quelques exemples :

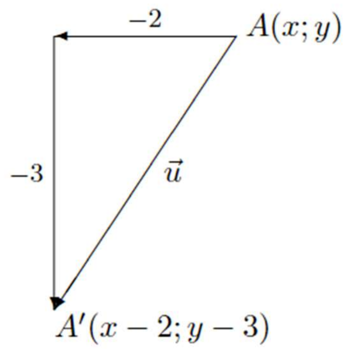
Supposons $\vec{u} = (2;1)$



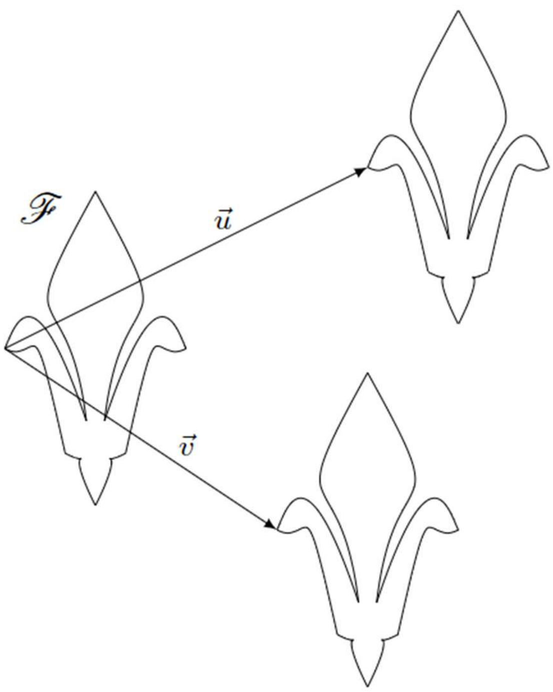
Supposons $\vec{u} = (3;-1)$



Supposons $\vec{u} = (-2;-3)$



À l'école primaire, on utilise des translations lorsque l'on veut répéter des figures. Ci-dessous, on a dessiné une figure $\mathscr{F}$, et on l'a translatée suivant le vecteur $\vec{u} = (4;2)$ qui monte vers la droite, et le vecteur $\vec{v} = (3\,;-2)$ qui descend vers la droite.



2 Calculs vectoriels

Quand on écrit un vecteur sous la forme $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, on dit que A est son **origine** et que B est son **extrémité**.

Proposition 1. *Soient A et B deux points et $\vec{u} = (a; b)$ un vecteur. On a :*

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad B = A + \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_B & = & x_A + a \\ y_B & = & y_A + b \end{cases}$$

Corollaire 2. *Pour tous points A et B on a :*

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,;\, y_B - y_A)$$

Pour retenir l'ordre $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$, on pense "**extrémité moins origine**". Du cor. 2, on déduit que pour tout point A on a :

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

Questions (correction p. 158)

(unité au choix) On se place dans un repère du plan. Soient les points $A(-2; 3)$, $B(1; 5)$, $C(2; -4)$.

1. Représenter les points A, B, C. Dessiner les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Corollaire 3. *Pour tous points A et B on a :*

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

Définition 4. *Si $\vec{u} = (a; b)$ et $\vec{v} = (a'; b')$ sont des vecteurs, leur **somme** est le vecteur, noté $\vec{u} + \vec{v}$, obtenu en **ajoutant** les coordonnées :*

$$\vec{u} + \vec{v} = (a + a'; b + b')$$

Questions (correction p. 158)

(unité au choix) On se place dans un repère du plan. Soient les vecteurs $\vec{u} = (-3; 2)$ et $\vec{v} = (-4; -1)$. Soient de plus les points O, A, B définis par :

$$O(0; 0) \qquad \overrightarrow{OA} = \vec{u} \qquad \overrightarrow{OB} = \vec{v}$$

1. Représenter les points O, A, B. Dessiner les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. On pose :

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

a/ Calculer le vecteur $\vec{w}$.
b/ Placer le point D, tel que $\overrightarrow{OD} = \vec{w}$.
c/ Vérifier à la règle que $OADB$ est un parallélogramme.

Proposition 5. (relation de Chasles) *Pour tous points A, B, C on a :*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Proposition 6. *Soient A, B, I des points. On a :*

$$I \textit{ est milieu du segment } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

Corollaire 7. *Soient des points A, B, C, D. On a :*

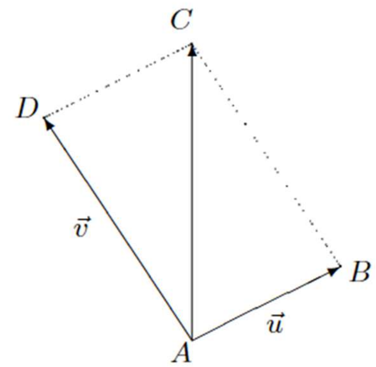
$$ABCD \textit{ est un parallélogramme } \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

Cet énoncé permet de **construire la somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par la **règle du parallélogramme**. On procède ainsi : on considère des points A, B, D, tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. On construit ensuite le point C, tel que $ABCD$ soit un **parallélogramme**. On a donc $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, et on en déduit :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

La relation de Chasles donne alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$



3 Vecteurs et géométrie

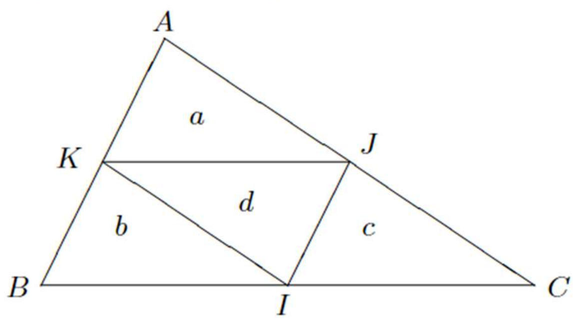
• Soit ABC un triangle, et I, J, K les milieux de ses côtés. Par le théorème de la **droite des milieux** (th. 2, p. 95) on sait que $AJIK$ est un parallélogramme. On en déduit :

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{KI}$$

En utilisant les parallélogrammes $KJIB$ et $KJCI$ on montre aussi :

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{JI}$$

$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{KJ}$$



Notons a, b, c, d les quatre petits triangles marqués sur la figure. Considérons les **translations** t_1, t_2, t_3 associées aux vecteurs $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BI}$. Les calculs précédents montrent qu'on a :

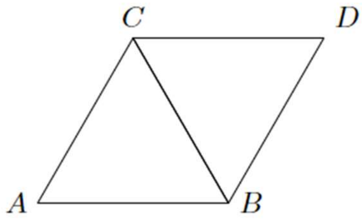
$$\boxed{t_1(a) = c} \qquad \boxed{t_2(a) = b} \qquad \boxed{t_3(b) = c}$$

Par contre, les triangles a et d ne se correspondent pas par une translation. On a :

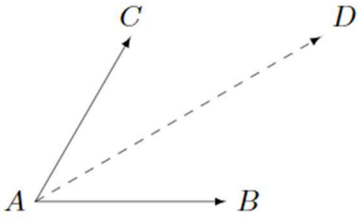
$$\boxed{r(a) = d}$$

où r est la **symétrie centrale** dont le centre est le milieu de $[KJ]$.

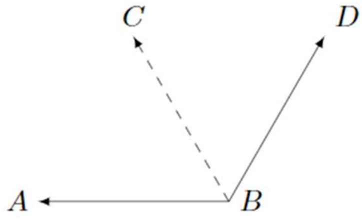
• On considère l'empilement ci-contre de deux triangles **équilatéraux** ABC et BDC. Le quadrilatère $ABDC$ a ses quatre côtés égaux, c'est donc un losange, et par conséquent c'est un parallélogramme, par la prop. 6, p. 17.



La règle du parallélogramme peut donc s'appliquer deux fois et on obtient :



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

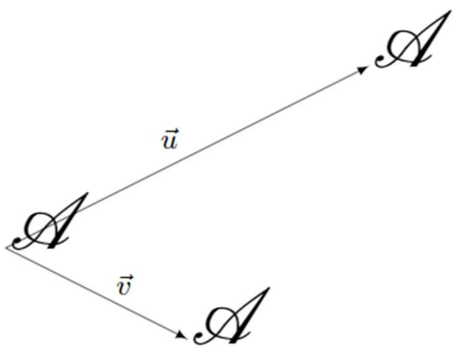


$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$$

4 Exercices

Exercice 1 (*translations*)**.**

(unité au choix)



La figure ci-dessus représente la lettre $\mathscr{A}$, ainsi que son image par la translation de vecteur $\vec{u} = (4; 2)$ et son image par la translation de vecteur $\vec{v} = (2; -1)$.

1. Dessiner de même la lettre $\mathscr{F}$, et ses images par les deux translations précédentes.
2. Dessiner une lettre au choix, et ses images par la translation de vecteur $\vec{u} = (-4; 1)$ et la translation de vecteur $\vec{v} = (3; 0)$.

Exercice 2.

(unité au choix). On se place dans un repère du plan. Soient les vecteurs $\vec{u} = (2; 1)$ et $\vec{v} = (-3; 2)$. Soient de plus les points O, A, B définis par :

$$O(0; 0) \qquad \overrightarrow{OA} = \vec{u} \qquad \overrightarrow{OB} = \vec{v}$$

1. Représenter les points O, A, B. Marquez les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Construire le point C tel que

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

3. Calculer les coordonnées de C. Vérifier sur la figure.

Exercice 3.

(unité au choix) Dans un repère du plan, on considère les points :

$$A(3;2) \qquad B(4;-1) \qquad C(-3;-3)$$

Soit de plus un point D inconnu.

1. Représenter les points A, B, C.
2. Calculer $\overrightarrow{BC}$.
3. Calculer les coordonnées que doit posséder D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme. Utiliser la règle :

$$ABCD \textit{ est un parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

4. Placer le point D sur la figure. Vérifier avec la règle qu'on a bien :

$$(AB) \mathbin{/\!/} (DC) \quad \text{et} \quad (BC) \mathbin{/\!/} (AD)$$

Exercice 4.

(unité au choix) On se place dans un repère du plan. Soient les points $A(-2;3)$, $B(1;5)$, $C(2;-4)$.

1. Représenter les points A, B, C. Dessiner les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Soit D le point tel que :
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$
Construire le point D par la **règle du parallélogramme**.
4. Calculer $\overrightarrow{AD}$
5. Calculer les coordonnées de D (il suffit de remarquer que D est le translaté de A par $\overrightarrow{AD}$).
6. Par la relation de Chasles, montrer qu'on a :
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Exercice 5.

(unité au choix) Dans un repère du plan, on considère les points :

$$A(-2;-1) \qquad B(3;0) \qquad C(4;1)$$

Soit de plus un point D inconnu.

1. Représenter les points A, B, C.

2. Calculer $\overrightarrow{BC}$.
3. Calculer les coordonnées que doit posséder D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme. Utiliser la règle :

$$ABCD \textit{ est un parallélogramme } \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

4. Placer le point D sur la figure. Vérifier avec la règle qu'on a bien :

$$(AB) /\!/ (DC) \quad \text{et} \quad (BC) /\!/ (AD)$$

Exercice 6.

(unité au choix). On se place dans un repère du plan. Soient les vecteurs $\vec{u} = (2{,}5\,;1)$ et $\vec{v} = (-4;3)$. Soient de plus les points O, A, B définis par :

$$O(0;0) \qquad \overrightarrow{OA} = \vec{u} \qquad \overrightarrow{OB} = \vec{v}$$

1. Représenter les points O, A, B. Marquer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Calculer le vecteur $\vec{w}$ tel que
$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$
3. Soient les points C et D définis par :
$$\overrightarrow{OC} = \vec{w} \qquad \overrightarrow{OD} = -\vec{w}$$
   a/ Placer les points C et D.
   b/ Montrer que O est milieu de $[CD]$.

Exercice 7.

Soit ABC un triangle. On définit le point D par la relation :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$$

1. Calculer $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}$ en décomposant $\overrightarrow{BD}$ par la relation de Chasles.
2. En déduire que B est milieu de $[DC]$.

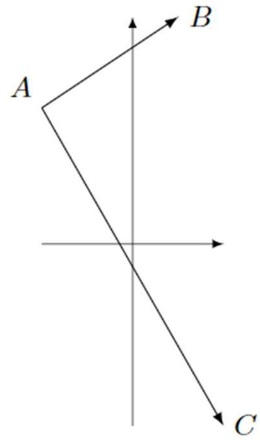
Exercice 8.

(unité au choix). Dans un repère du plan, on considère les points : $A(3;2)$ $B(4;-1)$ $C(-3;-3)$.

1. Représenter ces trois points.
2. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$.
3. Calculer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.
4. Vérifier qu'on trouve :
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$
5. Montrer qu'on pouvait le prévoir sans calculer les vecteurs.

5 Correction des questions

p. 153 On applique les formules :

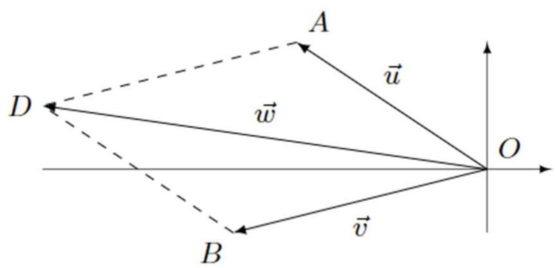


$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A\,;\, y_B - y_A)\\ &= (1-(-2)\,;\,5-3)\\ &= (3\,;\,2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= (x_C - x_A\,;\, y_C - y_A)\\ &= (2-(-2)\,;\,-4-3)\\ &= (4\,;\,-7)\end{aligned}$$

p. 153 2. a/ On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w} &= \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\\ &= (-3\,;\,2) + (-4\,;\,-1)\\ &= (-3+(-4)\,;\,2+(-1))\\ &= (-7\,;\,1)\end{aligned}$$



b/ On a $\overrightarrow{OD} = \vec{w}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{O + \vec{w} = D}$$

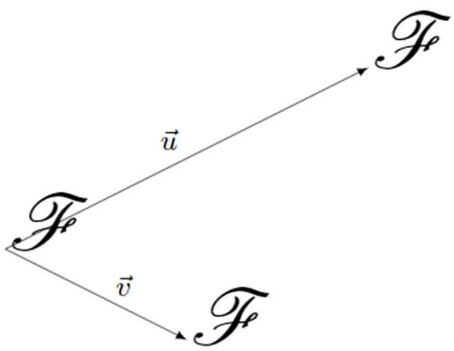
Comme le point O a pour coordonnées $(0;0)$, les coordonnées de D sont les mêmes que celles de $\overrightarrow{w}$, et donc :

$$D(-7;1)$$

6 Correction des exercices

Ex. 1, p. 155. 1. La lettre $\mathscr{F}$ et ses translatés par les vecteurs :

$$\vec{u} = (4;2) \qquad\qquad \vec{v} = (2;-1)$$



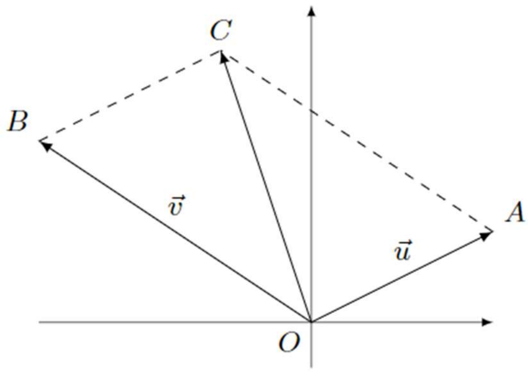
2. La lettre $\mathscr{D}$ et ses translatés par les vecteurs :

$\vec{u} = (-4; 1)$ $\vec{v} = (3; 0)$

Ex. 2, p. 155. 2. On construit $\overrightarrow{OC}$ par la règle du parallélogramme.

3. On calcule ensuite le vecteur $\overrightarrow{OC}$ en utilisant les coordonnées et la définition d'une somme de deux vecteurs :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ &= \vec{u} + \vec{v} \\ &= (2\,;\,1) + (-3\,;\,2) \\ &= (2 + (-3)\,;\,1 + 2) \\ &= (-1\,;\,3)\end{aligned}$$



Comme on a :

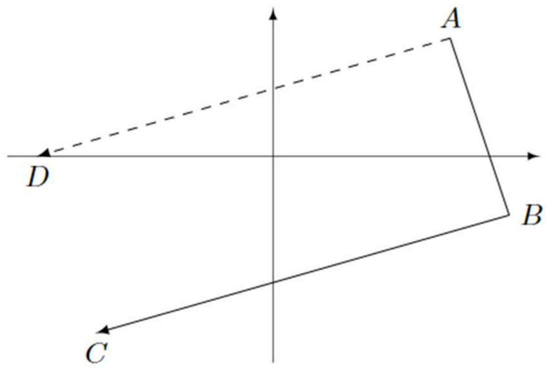
$$\boxed{O + \overrightarrow{OC} = C}$$

et que le point O a pour coordonnées $(0; 0)$, les coordonnées de C sont les mêmes que celles de $\overrightarrow{OC}$, donc :

$$C(-1; 3)$$

Ex. 3, p. 156. 2. On applique la règle de calcul des coordonnées d'un vecteur :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= (x_C - x_B\,;\,y_C - y_B) \\ &= (-3 - 4\,;\,-3 - (-1)) \\ &= (-7\,;\,-2)\end{aligned}$$



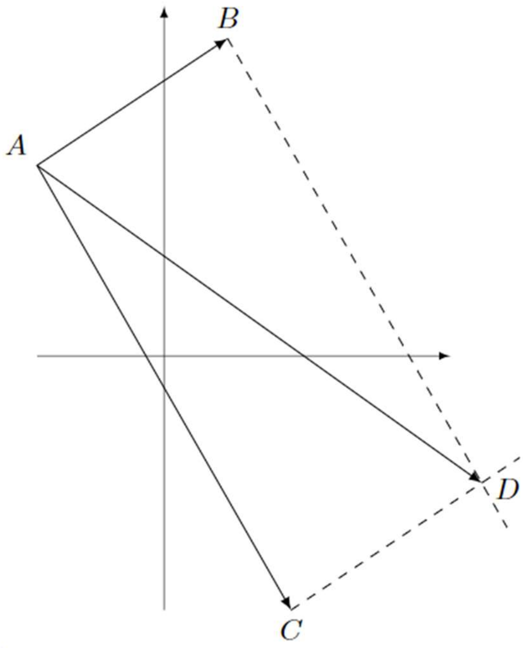
3. Puisque $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, on a :

$$D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC}$$

On en déduit que les coordonnées de D peuvent s'obtenir en ajoutant les coordonnées de A avec celles de $\overrightarrow{BC}$:

$$D = (3; 2) + (-7; -2) = (-4; 0)$$

Ex. 4, p. 156. 2. On applique la règle de calcul des coordonnées d'un vecteur :



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A\,;\, y_B - y_A)\\ &= (1-(-2)\,;\, 5-3)\\ &= (3\,;\, 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= (x_C - x_A\,;\, y_C - y_A)\\ &= (2-(-2)\,;\, -4-3)\\ &= (4\,;\, -7)\end{aligned}$$

3. On trace la parallèle à (AC) issue de B, et la parallèle à (AB) issue de C. Elles se coupent au point D cherché.
4. On utilise la définition de D :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (3;2) + (4;-7) = (7;-5)$$

5. On utilise la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$:

$$D = A + \overrightarrow{AD} = (-2;3) + (7;-5) = (5;-2)$$

6. On part de l'hypothèse :

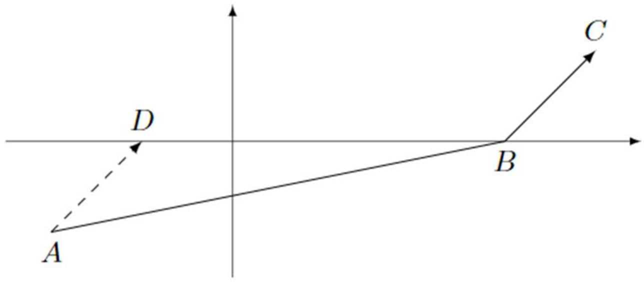
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

On isole $\overrightarrow{AB}$ et on calcule :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$$

Ex. 5, p. 156. 2. On applique la règle de calcul des coordonnées d'un vecteur :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= (x_C - x_B\,;\, y_C - y_B)\\ &= (4-3\,;\, 1-0)\\ &= (1\,;\, 1)\end{aligned}$$



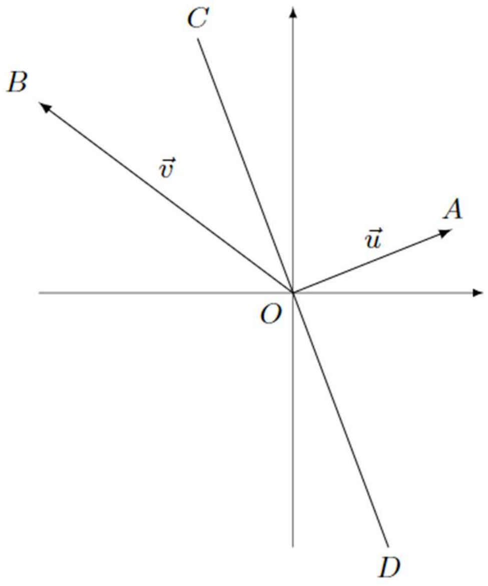
3. Puisque $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, on a :

$$D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC}$$

On en déduit que les coordonnées de D peuvent s'obtenir en ajoutant les coordonnées de A avec celles de $\overrightarrow{BC}$:

$$D = (-2;-1) + (1;1) = (-1;0)$$

Ex. 6, p. 157. 1. La relation $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ équivaut à $A = O + \vec{u}$. Et puisque les coordonnées de O sont $(0,0)$, on en déduit que les coordonnées de A sont celles de $\vec{u}$. Par le même raisonnement on prouve que les coordonnées de B sont celles de $\vec{v}$. D'où la figure :



2. On applique la règle d'addition des vecteurs :

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{u} + \vec{v}\\ &= (2{,}5; 1) + (-4; 3)\\ &= (2{,}5 - 4; 1 + 3)\\ &= (-1{,}5; 4))\end{aligned}$$

3. a/ On raisonne comme à la question 1., et on déduit que les coordonnées de C sont celles de $\vec{w}$. Par ailleurs, la relation $\overrightarrow{OD} = -\vec{w}$ montre que les coordonnées de $\overrightarrow{OD}$, qui sont celles de D, sont les opposées de celles de $\vec{w}$. Ceci permet de placer C et D.

3. b/ Par la prop. 6, p. 154 on a :

$$\boxed{O \text{ est milieu de } [CD] \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}}$$

Pour montrer que O est milieu de $[CD]$, il suffit donc de prouver que $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Mais justement, on a :

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{w} - \vec{w} = \vec{0}$$

cqfd

Ex. 7, p. 157. 1. et 2. Il est inutile de faire un schéma, car cet exercice est purement algébrique. Par la prop. 6, p. 154 on a :

$$\boxed{B \text{ est milieu de } [DC] \ \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}}$$

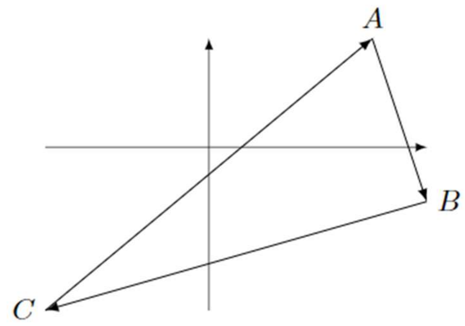
Pour montrer que B est milieu de $[DC]$, il suffit donc de prouver que $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$. Calculons donc, en procédant comme indiqué par l'énoncé, la somme :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \quad + \quad \overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB})\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

car $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$

Ex. 8, p. 157. 1. et 5. La figure montre que les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{CA}$$



tracent un parcours qui part de A et aboutit à A. Le résultat est donc nul ! On le confirme par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CA}\\ &= (\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{CA}\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

2. 3. 4. On applique la règle de calcul des coordonnées des vecteurs :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A; y_B - y_A)\\ &= (4-3; -1-2)\\ &= (1; -3)\end{aligned}$$

On a de même :

$$\overrightarrow{BC} = (-7; -2) \qquad \overrightarrow{CA} = (6; 5)$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = (1-7+6; -3-2+5) = (0; 0) = \vec{0}$$

Index

Mathématiques

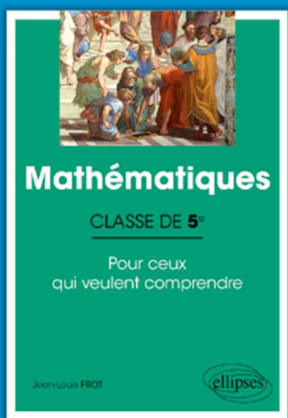
CLASSE DE 4^{e}

Pour bien faire comprendre les notions nouvelles du cours de mathématiques de quatrième, ce livre comporte des explications concrètes avec en première partie des révisions des années précédentes pour consolider les connaissances. Ces notions sont entrecoupées de petites questions posées à l'élève, qui sont résolues un peu plus loin.

Une série d'exercices clôt chaque chapitre, la plupart originaux. Ils sont corrigés entièrement pour montrer aux élèves les méthodes de raisonnement. Presque tous de niveau facile ou moyen, ils ont pour ambition première de faciliter l'assimilation du cours et d'entraîner l'élève à la pratique aisée des techniques de base.

Mais l'auteur n'a pas pu s'empêcher de glisser quand même quelques exercices plus relevés, intéressants et instructifs, destinés à faire aimer les mathématiques, et à donner aux enfants suffisamment de satisfaction pour justifier les efforts qu'ils auront consentis pour les comprendre et les résoudre.

***Jean-Louis Frot** a enseigné les mathématiques dans toutes les classes de la Sixième à la Terminale dans différents lycées, et en particulier seize ans au lycée Henri-IV à Paris. Il est auteur de plusieurs livres de mathématiques.*



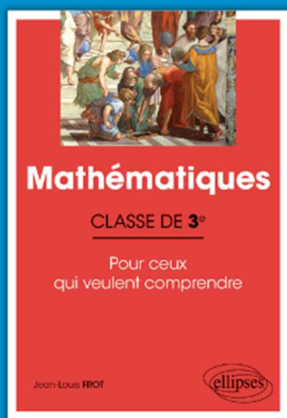


Illustration de couverture : Euclide représenté dans *La fresque de l'École d'Athènes* peinte par Raphaël, 1509-1511.

www.editions-ellipses.fr

9 782340 047310