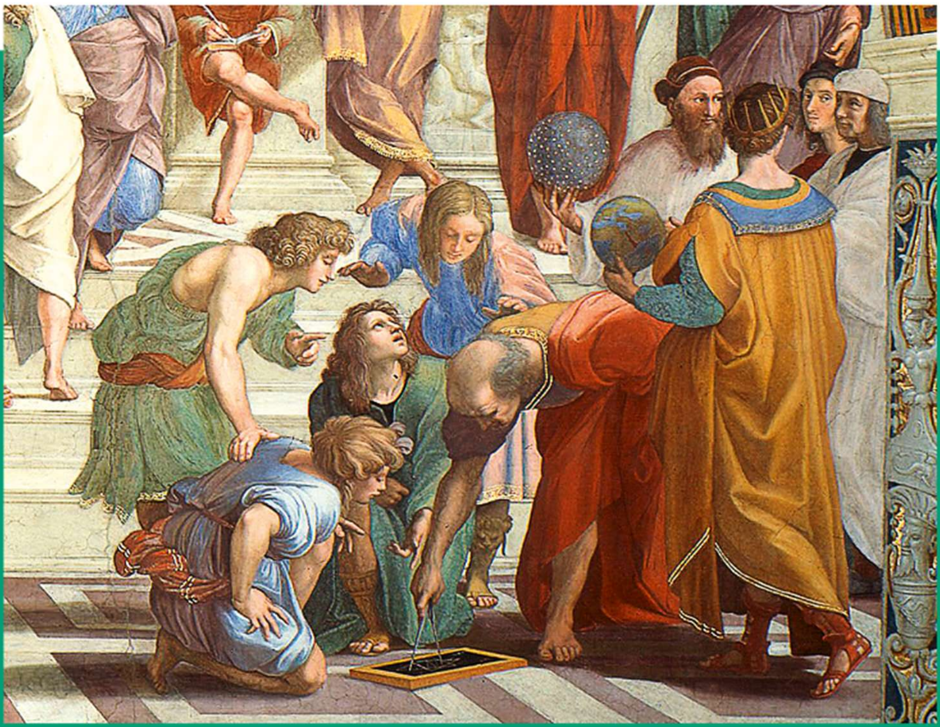


Mathématiques

CLASSE DE 5e

Pour ceux
qui veulent comprendre

Jean-Louis FROT

ellipses

Mathématiques

CLASSE DE 5^e^

Pour ceux
qui veulent comprendre

Jean-Louis FROT

ellipses

Avant-propos

Les années passées jadis au milieu de mes élèves de collège m'ont conduit à penser que dans les petites classes, il faut essayer de donner aux enfants :

le goût et l'émerveillement des nombres, des figures et des jolis calculs.

J'ai enseigné les mathématiques dans toutes les classes du collège et du lycée, mais surtout (dans des conditions très privilégiées, au lycée Henri IV, à Paris) en classes de première S et terminale S. Je sais que la principale difficulté pour enseigner les mathématiques est de les rendre humaines, attractives et intéressantes, ce qui ne veut pas dire ludiques ou amusantes car les mathématiques sont une chose sérieuse.

Bien souvent, les mathématiques sont enseignées de façon rébarbative et ennuyeuse. Pourtant, et j'ai pu le constater tout au long de ma carrière, la curiosité et l'intelligence des enfants et des jeunes ne demandent qu'à croître et à se fortifier. Il leur faut donc une **nourriture intellectuelle vivifiante**.

C'est ce qui m'a décidé à prendre la plume, avec l'intention d'écrire un livre de mathématiques de niveau collège qui contribuât à la formation des enfants, du point de vue intellectuel, humain, spirituel, et qui exaltât aussi le sens de la **beauté** et du **courage**, conscient que ces grands mots vont contre l'air du temps.

L'origine des mathématiques se perd dans la nuit des temps. On connaît le **papyrus de Rhindt**, découvert sur un site archéologique de Thèbes, en Égypte, qui date du XVI^e^ siècle avant Jésus-Christ. Il contient des problèmes résolus d'arithmétique et d'arpentage.

On doit aux Grecs de l'Antiquité, à partir du V^e^ siècle avant Jésus-Christ, les plus anciennes **démonstrations** écrites et rigoureuses qui nous soient parvenues. Elles portent sur la géométrie et l'arithmétique. Les grands mathématiciens de la Grèce antique sont Thalès, Euclide, Pythagore, Archimède, Diophante, etc.

Il semble que les mathématiques soient entrées en sommeil après le déclin et la chute de Rome (476), et qu'elles ne se soient réveillées que sous Charlemagne (800). Mais au cours de cette période de latence, des mathématiques venant de l'Inde et de la Chine ont été transmises et enrichies par des **mathématiciens chrétiens ou perses** du bassin méditerranéen qui écrivaient en latin, ou en arabe du fait des conquêtes musulmanes commencées au VII^e^ siècle et poursuivies bien au-delà. On connaît ainsi un écrit de quelques pages, datant du IX^e^ siècle, et qui a pour titre "*al jabr*" (algèbre). Le savant moine bénédictin Gerbert, de l'abbaye d'Aurillac, élu pape en 999 sous le nom de Sylvestre II, a introduit l'algèbre en Europe.

Le développement ultérieur des sciences est en grande partie dû aux progrès accomplis en mathématiques dans le formalisme et les notations, à partir du XV^e^ siècle (Chuquet, Viète) et à l'intrépidité de quelques expérimentateurs et géomètres (Cardan, Bombielli, Toriccelli, Galilée, Descartes, Pascal, Fermat, etc.). C'est le nouvel essor des mathématiques qui s'est produit dans l'Europe chrétienne qui a permis le développement spectaculaire de la physique à partir du XVII^e^ siècle.

Depuis cette époque, on ne peut plus **rien faire de sérieux** en sciences sans une formation de base solide en mathématiques. « La nature est un livre écrit en langage mathématique » disait Galilée au XVI^e^ siècle.

Les mathématiques sont le lieu privilégié des certitudes rationnelles, des notions abstraites et des démonstrations rigoureuses. Elles ont contribué au développement intellectuel de l'homme au cours des siècles, elles sont une de ses conquêtes, laborieusement acquise, elles constituent une composante majeure de la **culture universelle**.

Nombre de prélats et de princes chrétiens, depuis le Moyen Âge, n'ont pas hésité à se frotter aux sciences de leur époque, à les maintenir, à les protéger et à s'entourer de savants. On a déjà cité le pape de l'an mil, Gerbert d'Aurillac (Sylvestre II). Plus avant, on peut évoquer saint Augustin (mort en 430) qui relate quelques faits de ses années d'apprentissage dans ses *Confessions* (Liv. 4, chap. 16) :

« J'ai compris sans beaucoup de peine, et sans être aidé d'aucun homme tout ce que j'ai pu lire touchant l'art de l'Éloquence, la Dialectique, la Géométrie, la Musique et l'Arithmétique. »

En France, depuis le milieu des années 1980, les programmes de mathématiques du collège et du lycée ont été progressivement **bouleversés** et **saccagés**. Ayant déjà évoqué ce sujet dans l'épilogue du livre référencé en note [1], je ne dirai rien ici des partis pris idéologiques qui ont conduit à ces bouleversements et à ce saccage. Mais je dirai quelques mots des conséquences : il ne subsiste plus dans l'enseignement qui est dispensé aux élèves aujourd'hui, qu'une caricature grimaçante des mathématiques. Les mathématiques n'ont plus d'attrait pour les élèves, et la plupart d'entre eux en sont justement dégoûtés. Certains parviennent cependant à échapper au massacre, grâce à leurs parents qui ont les moyens de leur fournir une bonne instruction.

Je ne dis pas que les programmes de mathématiques des années 1950 à 1980 n'avaient pas de défauts, mais je dis que les programmes actuels ne sont plus des mathématiques. Et quand on feuillette la plupart des manuels français de mathématiques destinés à l'enseignement d'aujourd'hui, on est consterné, saisi de colère. Et on se dit :

Quel gâchis ! Quelle décadence ! Pauvres élèves !

Prenant la plume, disais-je, je me suis attaché, dans mes livres destinés au collège, à exposer et expliquer de mon mieux les bases de ce que doit être un enseignement de qualité. La matière abordée est accessible à un élève de niveau moyen, aidé d'un professeur qui choisira ce qui l'intéresse pour faire son cours. Mes livres ne sont qu'un outil entre les mains du professeur et de ses élèves. Le rôle du professeur est déterminant, c'est lui qui détient le savoir, c'est la référence, le modèle que l'enfant doit d'abord tâcher d'imiter lors de son initiation. Un bon professeur sait transmettre son enthousiasme. Il fait preuve de bienveillance, de patience et d'ingéniosité pour faire comprendre les mathématiques et les rendre familières. Tout un savoir non écrit passe par le professeur. Mais je ne voudrais pas laisser croire que je détiens une formule miracle pour enseigner les mathématiques, ou que les mathématiques sont une discipline facile, que l'on peut maîtriser sans efforts.

Pour bien faire comprendre les notions nouvelles, les livres comportent des explications concrètes et, aux niveaux 6ᵉ, 5ᵉ, 4ᵉ, ils sont parsemés de **petites questions** posées à l'élève, et qui sont résolues un peu plus loin.

Une série d'exercices clôt chaque chapitre, la plupart originaux. Ils sont **corrigés** entièrement pour montrer aux élèves les méthodes de raisonnement. Presque tous de niveau facile ou moyen, ils ont pour ambition première de faciliter l'assimilation du cours et d'entraîner l'élève à la pratique aisée des techniques de base, un peu comme les gammes et les exercices d'assouplissement des doigts pour le piano. Mais l'auteur n'a pas pu s'empêcher de glisser quand même quelques **exercices plus relevés**, intéressants et instructifs,

1. J.-L. Frot : *Mathématiques - Cours de haut niveau pour les élèves de Première et Terminale S qui envisagent une prépa - 2e édition révisée*, Ellipses (2018).

destinés à faire **aimer les mathématiques**, et à donner aux enfants suffisamment de satisfaction pour justifier les efforts qu'ils auront consentis pour les comprendre et les résoudre. (Pour les élèves qui veulent aller plus loin, il y a des exercices de niveau plus ambitieux dans le livre référencé en note [2]).

Il ne faut pas se précipiter sur les corrections d'exercices. Il faut se donner la peine de chercher pour avoir la **satisfaction de trouver** par soi-même. Si on parvient sans aide à résoudre ne serait-ce qu'une petite partie des questions, c'est déjà bien. Et puis, rien n'empêche de laisser de côté un exercice qui paraît hors d'atteinte à un moment donné, et d'y revenir un autre jour, lorsqu'on aura acquis plus de connaissances et d'aisance.

Un exercice doit toujours être d'abord cherché au brouillon. Quand on a résolu la première question au brouillon, on peut rédiger la solution de cette première question au propre. On passe ensuite à la deuxième question, et on continue de la même façon. Si on bute sur une question, on peut souvent l'admettre, et passer à la suivante sans dommage.

Un cours de mathématique introduit et explique des notions nouvelles. Si on veut en tirer profit, ces notions doivent être **étudiées** avec soin pour pouvoir les comprendre, et doivent ensuite être **apprises** par cœur, jusqu'à pouvoir **réciter** définitions, règles et théorèmes (*voir* ci-après). C'est un bon entraînement pour les élèves de **travailler à deux**, de réciter et de s'interroger à tour de rôle. Le livre de mathématiques doit devenir un compagnon familier auquel on pourra même avoir recours l'année suivante. L'idéal étant de conserver précieusement ses livres de mathématiques des quatre années du collège.

Le style mathématique

On verra apparaître, au fil des pages de ce livre, les mots suivants :

- **définition** (abrégé parfois en **déf.**) dit ce que signifie un mot mathématique nouveau,
- **proposition** (abrégé parfois en **prop.**) = propriété,
- **théorème** (abrégé parfois en **th.**) = propriété importante,
- **corollaire** (abrégé parfois en **cor.**) = conséquence.

On donne dans le livre (lorsque c'est possible) des définitions rigoureuses des termes que l'on utilise. Ensuite, on énonce (et démontre parfois) des propositions et des théorèmes. Pour formaliser les énoncés, on utilise des symboles $\boxed{\in}$ (*voir* p. 77), $\boxed{\neq}$ (*voir* p. 15), $\boxed{\Rightarrow}$ (*voir* p. 77), $\boxed{\Leftrightarrow}$ (*voir* p. 84), $\boxed{\perp}$ et $\boxed{/\!\!/}$ (*voir* p. 17), etc. Leur définition précise et leur emploi sont donnés dans le livre aux pages que l'on vient d'indiquer. Faisons ici un survol :

Symbole	Lecture	Exemple	Traduction
$\in$	appartient	$A \in d$	A est un point de d.
$\neq$	différent	$1 \neq 0$	1 n'est pas nul.
$\Rightarrow$	implique, alors	$x = 1 \Rightarrow x \neq 0$	Si $x = 1$ alors il n'est pas nul.
$\Leftrightarrow$	équivaut	$a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$	a^2 est nul équivaut à a est nul.
$\perp$	perpendiculaire	$d_1 \perp d_2$	d_1 et d_2 sont perpendiculaires.
$/\!\!/$	parallèle	$d_1 /\!\!/ d_2$	d_1 et d_2 sont parallèles.

2. J.-L. Frot : *Mathématiques, exercices avec corrigés et rappels de cours pour ceux qui veulent s'initier pour de bon, 6e à 3e , 2e édition révisée*, Clovis (2020).

Prenons pour exemple l'énoncé suivant :

Théorème 1. (théorème des perpendiculaires) *Si deux droites* ***du plan*** *sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles.*

Il peut se formuler ainsi, les symboles d_1, d_2, d désignant des droites du plan :

$$\boxed{(d_1 \perp d \ \text{ et } \ d_2 \perp d) \Rightarrow d_1 \parallel d_2}$$

Les textes mathématiques comportent parfois un vocabulaire lourd, pénible à écrire et à lire pour le débutant. Quand quelques abréviations et symboles peuvent alléger le style et mieux faire **comprendre l'essentiel**, on les utilise. Comparer :

“ Les droites d_1 et d_2 sont parallèles d'après le théorème des perpendiculaires (*voir* théorème 1). ”

“ $d_1 \parallel d_2$ d'après le th. des perpendiculaires (*voir* th. 1). ”

On verra dans tout le livre, qu'abréviations et symboles mettent l'accent sur les **propriétés**, les **raisonnements**, et les **points importants**. Ils rendent le texte plus fluide, plus court, et donc plus facile à appréhender.

Ceci ne veut pas dire que l'auteur soit hostile ou indifférent au **beau style**. Ce qu'il veut ici, c'est donner au lecteur des modèles simples pour lui apprendre à réfléchir, raisonner et rédiger clairement.

Le livre de cinquième

Cette année, on découvre les **opérations sur les entiers relatifs** : règle de l'ascenseur pour l'addition (déf. 2, p. 27), règle des signes pour la multiplication (prop. 8, p. 30). C'est aussi les débuts du calcul algébrique : développement et factorisation dans un cadre modeste.

En arithmétique, on définit, pour deux entiers a et b, le ppcm (noté m) et le pgcd (noté d). On s'en sert pour calculer la somme $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ou pour simplifier la fraction $\frac{a}{b}$. On donne encore la formule merveilleuse :

$$md = ab$$

qui permet de calculer m quand on a d (ou d quand on a m).

En géométrie plane, on montre progressivement la différence entre une évidence et une **preuve logique**. On utilise des angles alternes-internes et des angles correspondants pour démontrer, suivant Euclide, que **la somme des angles d'un triangle vaut** $180°$ (th. 1, p. 80). On démontre ensuite le **théorème du demi-cercle** et sa réciproque. On démontre des alignements par des calculs d'angles. On introduit les symétries centrales et on construit des symétriques de figures diverses.

On utilise le symbole d'implication $\boxed{\Rightarrow}$ déjà vu en classe de 6^{e}, on introduit le nouveau symbole $\boxed{\Leftrightarrow}$, et on expose la notion de **réciproque** et d'équivalence au chap. 6.

En géométrie dans l'espace, on se familiarise avec les droites, les plans, et la notion d'orthogonalité de droites et de plans. On construit des polyèdres à partir du cube, et on vérifie à chaque fois la formule de Descartes-Euler : $s + f = a + 2$

Alors, hardi petits !

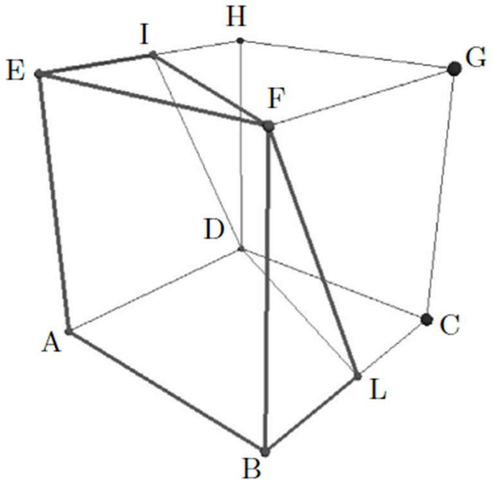

H
I
G
E
F
D
C
A
L
B

Table des matières

Rappels de quelques résultats

Chapitre 1

Équations

Équations avec addition ou soustraction

Soient a et b des nombres quelconques.

• Pour résoudre $\boxed{x + a = b}$ **je fais passer** mon $\boxed{+a}$ de l'autre côté, il devient $\boxed{-a}$:

$$x + a = b \qquad\qquad x = b - a$$

• Pour résoudre $\boxed{x - a = b}$ **je fais passer** mon $\boxed{-a}$ de l'autre côté, il devient $\boxed{+a}$:

$$x - a = b \qquad\qquad x = b + a$$

Équations avec multiplication ou division

Soient a et b des nombres quelconques, avec la restriction $\boxed{a \text{ différent de } 0}$ qui s'écrit $a \neq 0$ en utilisant le symbole $\boxed{\neq}$ qui se lit "**différent de**".

• Pour résoudre $\boxed{a \times x = b}$ **je divise par** $\boxed{a}$ des deux côtés :

$$a \times x = b \qquad \text{équivaut à} \qquad x = \frac{b}{a}$$

Pour $\boxed{\text{tuer une multiplication}}$ on divise.

$\boxed{\text{Bien noter la différence entre } \textbf{diviser} \text{ et } \textbf{faire passer}}$

• Pour résoudre $\boxed{\dfrac{x}{a} = b}$ **je multiplie par** $\boxed{a}$ des deux côtés :

$$\boxed{\dfrac{x}{a} = b \qquad \text{équivaut à} \qquad x = a \times b}$$

Pour $\boxed{\text{tuer une division}}$ on multiplie.

$\boxed{\text{Bien noter la différence entre \textbf{multiplier} et \textbf{faire passer}}}$

Chapitre 2

Géométrie plane

Définition 2. *Un **triangle rectangle** est un triangle qui a un angle droit.*

Définition 3. *Un **rectangle** est un quadrilatère ayant ses **quatre angles droits**.*

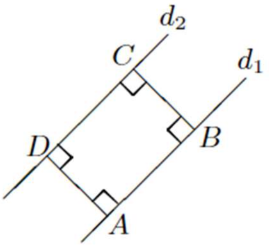
Proposition 4. *Si un quadrilatère **du plan** a trois angles droits, c'est un **rectangle**, et son quatrième angle est **droit** aussi.*

Définition 5. *Deux droites d_1 et d_2 sont **parallèles**, et on écrit :*

$$d_1 \,/\!\!/\, d_2$$

*s'il existe un **rectangle** $ABCD$, tel que*

$$d_1 = (AB) \quad \text{et} \quad d_2 = (CD)$$



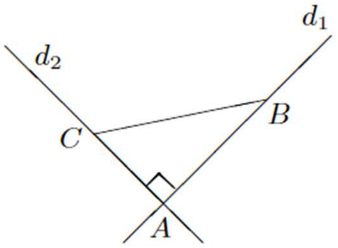
Autrement dit, **l'écart** entre les deux droites est partout le même : $AD = BC$

Définition 6. *Deux droites d_1 et d_2 sont **perpendiculaires** et on écrit :*

$$d_1 \perp d_2$$

*s'il existe un triangle ABC, **rectangle** en A, et tel que*

$$d_1 = (AB) \quad \text{et} \quad d_2 = (AC)$$



Autrement dit, on peut placer une **équerre** ABC qui s'ajuste entre les deux droites.

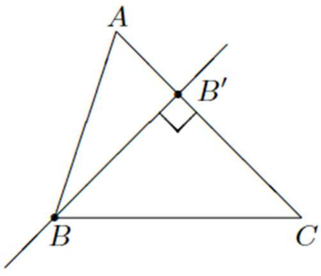
Théorème 7. (postulat des parallèles d'Euclide) *Par un point, il passe une droite unique, parallèle à une droite donnée.*

Théorème 8. (un axiome d'Euclide) *Par un point, il passe une droite unique, perpendiculaire à une droite donnée.*

Théorème 9. (théorème des perpendiculaires) *Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles.*

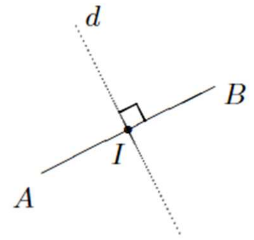
Théorème 10. (théorème des parallèles) *Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

Définition 11. *On appelle **hauteur** d'un triangle une **droite** issue d'un sommet et perpendiculaire au côté opposé.*

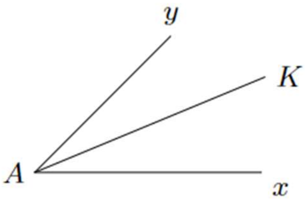


Sur la figure ci-contre, on a dessiné la **hauteur issue de** B. Elle coupe la droite (AC) en un point B'. On dit que le côté $[AC]$ est la **base** associée à la hauteur (BB'). On dit aussi que le **segment** $[BB']$ est une hauteur.

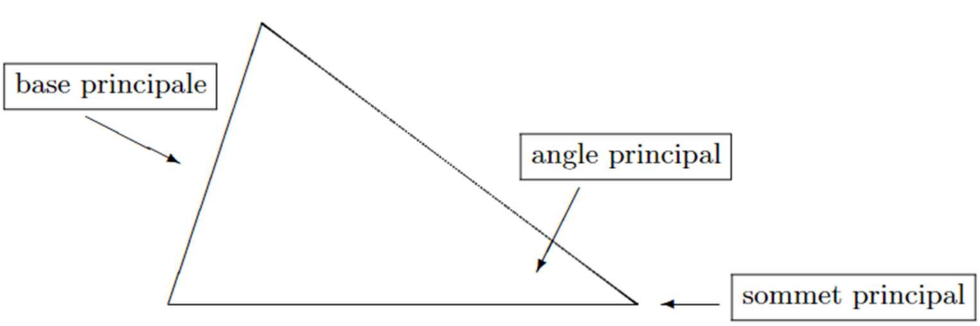
Définition 12. *La **médiatrice** d'un segment est la droite issue du milieu de ce segment, et qui lui est perpendiculaire.*



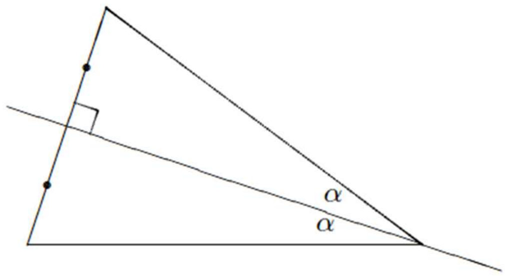
Définition 13. *La bissectrice d'un angle est la demi-droite issue du sommet de cet angle, et qui partage l'angle en **deux angles égaux**.*



Définition 14. *Un triangle **isocèle** a deux côtés égaux. Le sommet d'où partent ces deux côtés est appelé **sommet principal**. Le côté en face de ce sommet est appelé **base principale**.*



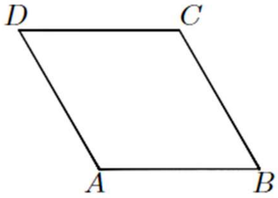
Proposition 15. *Dans un triangle isocèle la médiatrice de la base principale est aussi bissectrice de l'angle principal et hauteur relative au sommet principal.*



Définition 16. *Dans un triangle isocèle la médiatrice de la base principale est appelée* ***médiatrice principale*** *du triangle. Elle est dite aussi* ***bissectrice principale*** *et* ***hauteur principale*** *du triangle.*

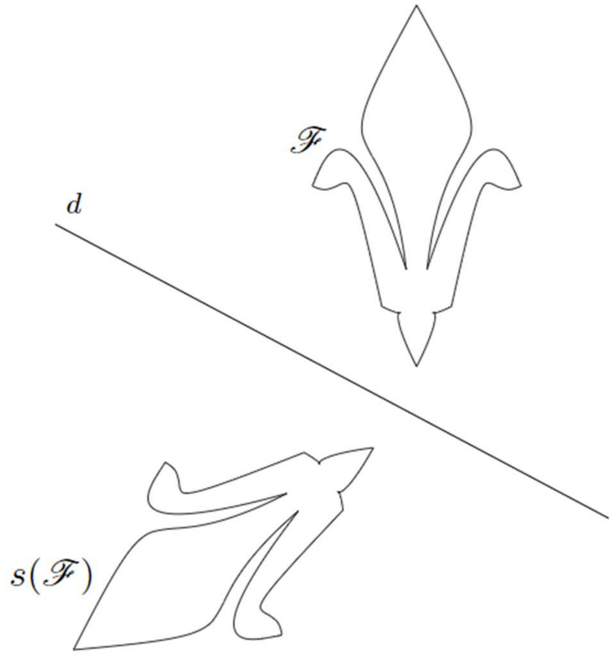
Proposition 17. *Si dans un triangle, une hauteur est aussi bissectrice, alors le triangle est isocèle.*

Définition 18. *Un* ***losange*** *est un quadrilatère dont les quatre côtés ont même longueur.*



Proposition 19. *Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires et ont le même milieu.*

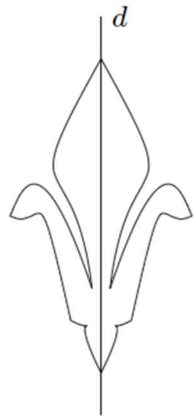
Définition 20. *Soient d une droite, et s la symétrie d'axe d. Soit $\mathscr{F}$ une figure. La* ***figure symétrique*** *de $\mathscr{F}$ par rapport à d est notée $s(\mathscr{F})$. C'est l'ensemble de tous les symétriques des points de $\mathscr{F}$ par rapport à d.*

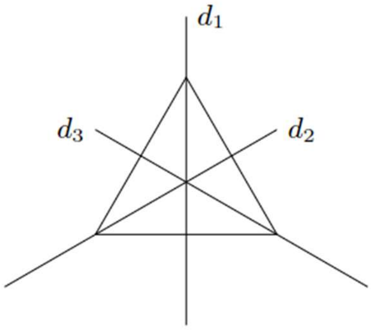


Définition 21. *On dit qu'une figure $\mathscr{F}$ admet un **axe de symétrie** $\boxed{d}$ si la figure symétrique de $\mathscr{F}$ par rapport à d est $\mathscr{F}$ elle-même.*

La fleur admet **un** axe de symétrie.

Le triangle équilatéral admet **trois** axes de symétrie.





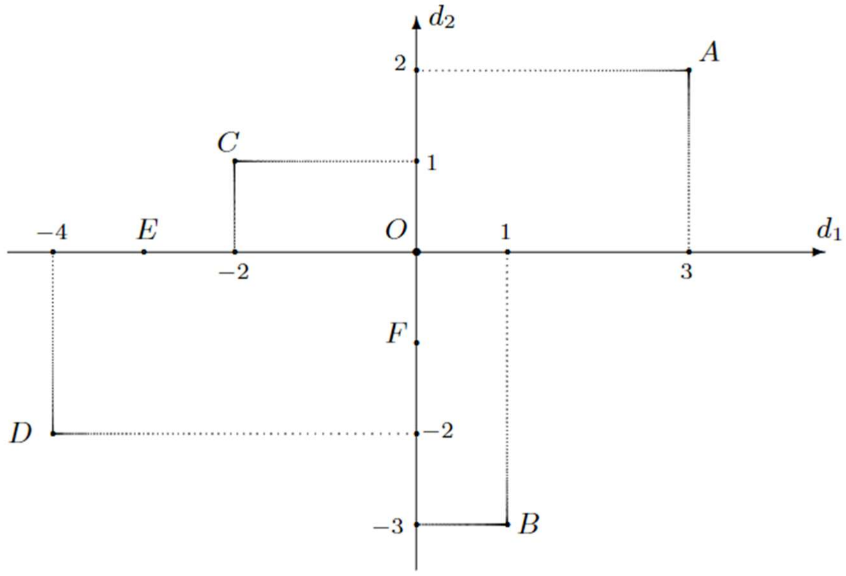
Chapitre 3

Coordonnées dans le plan

Définition 1. *Un **repère du plan** est constitué de deux axes d_1 et d_2 de même origine O. L'axe horizontal d_1 est appelé **axe des abscisses** (il est orienté vers la droite) ; l'axe vertical d_2 est appelé **axe des ordonnées** (il est orienté vers le haut).*

Représentons par exemple les points suivants :

$A(3;2)$ $B(1;-3)$ $C(-2;1)$ $D(-4;-2)$ $E(-3;0)$ $F(0;-1)$

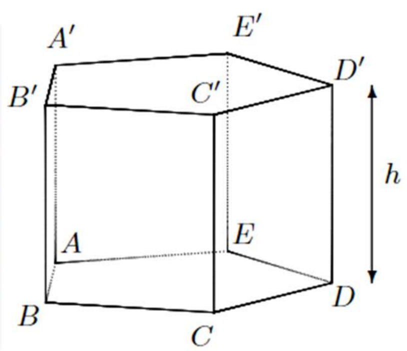


Si un point a une ordonnée nulle, comme le point E, il est sur l'axe des abscisses. Si un point a une abscisse nulle, comme le point F, il est sur l'axe des ordonnées. Le point O, de coordonnées $(0;0)$, est à l'intersection des deux axes.

Chapitre 4

Géométrie dans l'espace

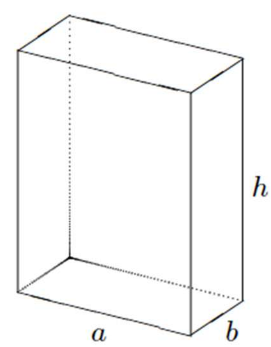
Définition 1. *Soit h un nombre > 0. Dans un plan horizontal, on considère un **polygone**, qu'on appelle **base**. De chaque sommet du polygone, on élève un segment vertical de longueur h. Les extrémités supérieures de ces segments sont les sommets du polygone supérieur. Les deux polygones et les rectangles latéraux forment un **prisme droit**. Le nombre h est appelé **hauteur** du prisme.*



Pour abréger, on dit souvent **prisme**, sans spécifier prisme droit. Sur la figure ci-dessus, la base du prisme est un pentagone $ABCDE$, et le prisme comporte 10 **sommets**, 15 **arêtes**, 7 **faces**.

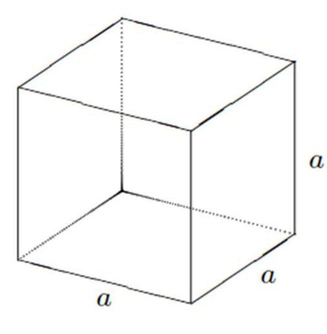
On a $h = AA' = BB' = CC' = DD' = EE'$

Définition 2. *Un **pavé droit** est un prisme droit dont la base est un rectangle.*



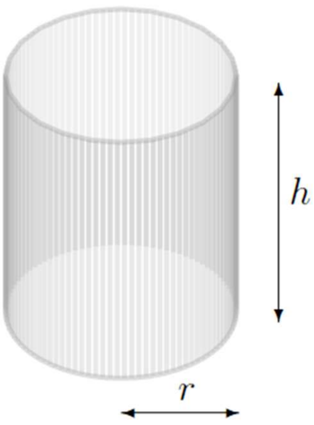
Toutes les faces d'un pavé droit sont des rectangles. Un pavé droit a **trois dimensions**, appelées largeur, profondeur, hauteur. Il a 8 sommets, 12 arêtes, 6 faces.

Définition 3. *Un **cube** est un pavé droit dont toutes les **faces** qui sont des carrés.*



L'expression "arête du cube" désigne aussi la **longueur** a de chaque arête. Sur la figure ci-contre le cube est vu en **perspective**. On a dessiné en traits forts les 9 arêtes visibles, et en pointillés les 3 arêtes situées derrière.

Définition 4. *Soient r et h deux nombres. Dans un plan horizontal, on considère un cercle de rayon r. En chaque point du cercle, on élève un segment vertical de longueur h. L'ensemble de tous ces segments est une* ***surface*** *appelée* ***cylindre****.*



Le nombre r est le **rayon du cylindre**, h est sa **hauteur**. Sur la figure ci-contre, le cylindre est vu en perspective.

Proposition 5. *Le volume V d'un* **prisme** *ou d'un* **cylindre** *d'aire de base $\mathscr{B}$ et de hauteur h est :*

$$\boxed{V = \mathscr{B}h}$$

Dans le cas d'un **cube** d'arête a, toutes les faces étant des carrés de côté a, on a :

$$\mathscr{B} = a^2 \qquad h = a$$

et on retrouve le volume du cube donné à l'école primaire :

$$V = a^3$$

Dans le cas d'un **pavé droit** de dimensions de base a, b, et de hauteur h, on retrouve la formule :

$$V = abh$$

Classe de cinquième

Chapitre 1

Les entiers relatifs

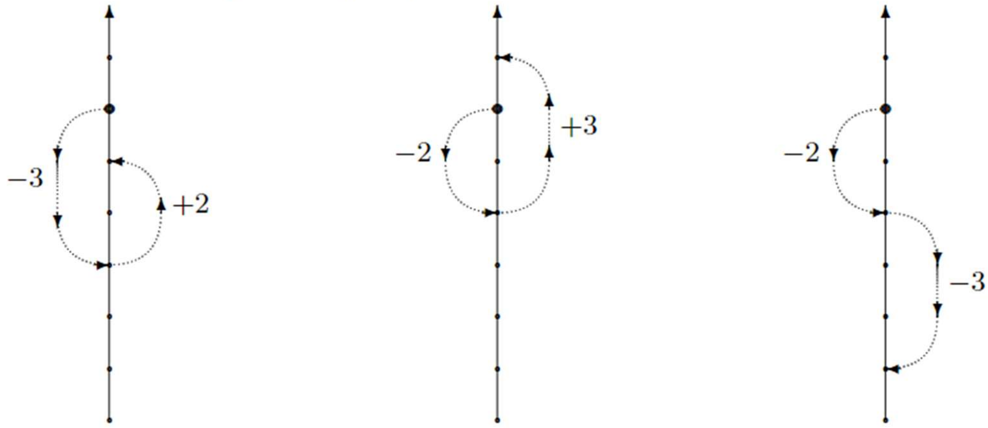
1 L'addition des entiers relatifs

Définition 1. *Un **entier relatif** est soit positif :* $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ *soit négatif :* $0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots$

En classe de 6^{e}, les entiers relatifs, positifs ou négatifs, ont servi pour repérer les points sur une droite graduée, ou dans le plan avec abscisse et ordonnée (*voir* p. 21).

Définition 2. (règle de l'addition) *Pour ajouter entre eux des relatifs, on utilise la **règle de l'ascenseur**.*

On imagine un ascenseur, dont la cabine peut monter (signe +) ou descendre (signe −) d'un certain nombre d'étages. Dans les trois exemples ci-dessous, le niveau du sol, pris comme origine, est marqué d'un gros point :



Parti de l'origine, on descend de 3, puis on monte de 2. En tout, on a **descendu** de 1. On écrit :

$$(-3) + 2 = -1$$

Parti de l'origine, on descend de 2, puis on monte de 3. En tout, on a **monté** de 1. On écrit :

$$(-2) + 3 = 1$$

Parti de l'origine, on descend de 2, puis encore de 3. En tout, on a **descendu** de 5. On écrit :

$$(-2) + (-3) = -5$$

Noter que **la somme de deux entiers négatifs est un entier négatif**.

L'addition des entiers positifs, c'est l'addition ordinaire :

$$(+2) + (+3) = 2 + 3 = 5$$

Quand on débute, on doit s'entraîner à faire les petits dessins de la méthode de l'ascenseur. On peut aussi appliquer la méthode de tête.

Questions (correction p. 39)

- Vérifier les formules suivantes :

$$\begin{aligned}(-3) + 5 &= 2 \\ 2 + (-2) &= 0 \\ 3 + (-5) &= -2 \\ (-3) + (-4) &= -7\end{aligned}$$

- Calculer les sommes :

$$\begin{aligned}(-3) + (-2) &= \\ 4 + (-4) &= \\ 4 + (-5) &= \\ 7 + (-2) &= \end{aligned}$$

2 Opposé et soustraction

Définition 3. *Pour obtenir l'opposé d'un relatif on change son signe.*

Ainsi, le nombre $\boxed{3}$ a pour opposé $\boxed{-3}$. Le nombre $\boxed{-2}$ a pour opposé $\boxed{2}$.

Le nombre $\boxed{b}$ a pour opposé $\boxed{-b}$. Le nombre $\boxed{-b}$ a pour opposé $\boxed{b}$

Proposition 4. *L'opposé d'un opposé est le nombre lui-même :*

$$-(-b) = b$$

Définition 5. (soustraction) *Pour retrancher un relatif, on ajoute son opposé.*

Ce qui peut s'énoncer ainsi :

$$\boxed{a - b = a + (-b)}$$

On a par exemple :

$$a - 2 = a + (-2)$$

et puisque $-(-b) = b$, on a aussi :

$$\boxed{a - (-b) = a + b}$$

Trois formules à **savoir par cœur** :

$$\boxed{0 + a = a} \qquad \boxed{a - 0 = a} \qquad \boxed{0 - a = -a}$$

Proposition 6. (calculs d'opposés) *Si a et b sont des entiers relatifs, on a :*

$$\begin{array}{rcl} -(a+b) & = & -a-b \\ -(a-b) & = & -a+b \\ -(-a-b) & = & a+b \end{array}$$

On a par exemple :

$$c-(a-b)=c-a+b$$

Si la parenthèse est précédée du signe $\boxed{+}$ on peut la retirer :

$$c+(a+b)=c+a+b \qquad c+(a-b)=c+a-b \qquad c+(-a-b)=c-a-b$$

Proposition 7. (mise en facteur du signe $\boxed{-}$) *Si a et b sont des entiers relatifs, on a :*

$$\begin{array}{rcl} a-b & = & -(-a+b) \\ -a+b & = & -(a-b) \\ -a-b & = & -(a+b) \end{array}$$

3 Retour sur l'addition des relatifs

Lorsque l'on ajoute des relatifs, il y **deux cas faciles** où la règle de l'ascenseur est aisée à appliquer :

1/ Si on ajoute deux positifs (comme à l'école primaire), la somme est positive :

$$2+3=5$$

2/ Si on ajoute deux négatifs, la somme est négative :

$$(-2)+(-3)=-5$$

On va expliquer maintenant les **deux cas difficiles** où l'on ajoute deux nombres de signes contraires. On définit d'abord la **valeur absolue** d'un nombre : c'est **le nombre sans le signe**. Ainsi, la valeur absolue de -3 c'est 3 et la valeur absolue de 2 c'est 2.

Ajoutons donc deux entiers de signes contraires. Il y a deux cas :

3/ Si c'est le nombre positif qui a la plus grande valeur absolue, la somme est positive car **on monte plus** qu'on ne descend :

$$(-2)+3=3+(-2)=3-2=1$$

et on voit que $(-2)+3$ se ramène à une **soustraction** de l'école primaire.

4/ Si c'est le nombre négatif qui a la plus grande valeur absolue, la somme est négative car **on descend plus** qu'on ne monte :

$$(-3)+2=-3+2=-(3-2)=-(1)=-1$$

et on voit que $(-3)+2$ se ramène à une **soustraction** de l'école primaire, suivie d'un changement de signe.

Questions (correction p. 39)

Calculer les sommes suivantes par la méthode précédente :

$$\begin{array}{rl}(-3)+7 & = \\ 4+(-9) & = \\ 4+(-2) & = \\ 3+(-7) & = \end{array}$$

4 Distance entre deux points

La soustraction des relatifs a des applications à la géométrie, lorsque l'on repère les points par abscisse et ordonnée. Si deux points sont sur une même **horizontale** ils ont la **même ordonnée**, et leur distance est égale à la différence de leurs abscisses :

la plus grande − la plus petite

Ainsi, sur la figure ci-contre, on a :

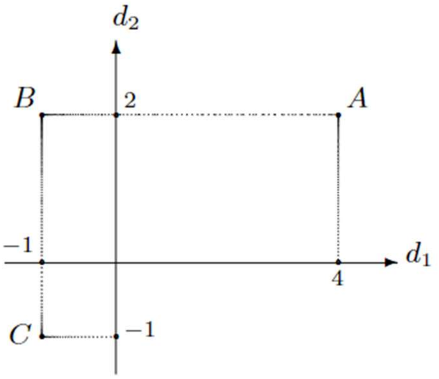
$$AB = x_A - x_B = 4 - (-1) = 4 + 1 = 5$$

Si deux points sont sur une même **verticale** ils ont la **même abscisse**, et leur distance est égale à la différence de leurs ordonnées :

la plus grande − la plus petite

Ainsi, sur la figure ci-contre, on a :

$$BC = y_B - y_C = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$$



5 Multiplication des entiers relatifs

Proposition 8. (règle des signes)
- *Le produit de deux positifs est positif.*
- *Le produit d'un positif et d'un négatif est négatif.*
- *Le produit de deux négatifs est positif.*

ce qui peut se résumer ainsi :

+ par + = +	+ par − = −	− par + = −	− par − = +

Exemples :

$$\begin{array}{rcccl}(+2)\times(+3) & = & +6 & = & 6 \\ (+2)\times(-5) & = & -10 & & \\ (-4)\times(-3) & = & +12 & = & 12\end{array}$$

Trois formulas à **savoir par cœur** :

$\boxed{a \times 1 = a}$ $\boxed{a \times (-1) = -a}$ $\boxed{a \times 0 = 0}$

ATTENTION ! Il ne faut pas confondre :

$$(-3) + 5 \qquad \text{et} \qquad (-3) \times 5$$

• L'addition $(-3) + 5$ se fait en appliquant la **règle de l'ascenseur** : on descend de 3 puis on monte de 5, donc on a monté en tout de 2. On en déduit :

$$(-3) + 5 = 2$$

• La multiplication $(-3) \times 5$ se fait en **multipliant** sans les signes : $3 \times 5 = 15$, puis en appliquant la **règle des signes**

$$\boxed{- \text{ par } + \ = \ -}$$

On en déduit :

$$(-3) \times 5 = -15$$

6 Développement d'un produit

Proposition 9. *Si a, b, c sont des relatifs, on a :*

$$\boxed{a \times (b + c) = a \times b \ + \ a \times c}$$

Proposition 10. *Si a, b, c sont des relatifs, on a :*

$$\boxed{a \times (b - c) = a \times b \ - \ a \times c}$$

On a par exemple :

$$\begin{aligned} 2 \times \Big(3 + (-5)\Big) &= 2 \times 3 \ + \ 2 \times (-5) \qquad \text{On a développé le produit.} \\ &= 6 + (-10) \qquad \text{On a réduit les deux produits.} \\ &= -4 \qquad \text{On a réduit la somme.} \end{aligned}$$

On peut aussi faire **d'abord** la somme entre parenthèses, puis le produit :

$$\begin{aligned} 2 \times \Big(3 + (-5)\Big) &= 2 \times (-2) \\ &= -4 \end{aligned}$$

On trouve bien sûr la même chose par les deux méthodes.

7 Mise en facteur

Rappelons d'abord un point de vocabulaire vu en classe de 6e :

dans l'expression $\boxed{a \times b}$ on dit que a et b sont les **facteurs** du produit.

$$a \times b$$

1er facteur   2e facteur

Proposition 11. *Si a, b, c sont des relatifs, on a :*

$$\boxed{a \times b \ + \ a \times c = a \times (b+c)}$$

Les expressions $a \times b$ et $a \times c$ ont le facteur a en commun. Pour le mieux voir, on peut le souligner, et écrire les expressions sous la forme :

$$\underline{a} \times b \qquad \underline{a} \times c \qquad \underline{a} \times (b+c)$$

Appliquer la règle de transformation :

$$\underline{a} \times b \ + \ \underline{a} \times c \ \longrightarrow \ \underline{a} \times (b+c)$$

c'est mettre a **en facteur**. La **factorisation** est l'opération inverse du **développement.**

Voyons maintenant la factorisation avec une soustraction :

Proposition 12. *Si a, b, c sont des relatifs, on a :*

$$\boxed{a \times b \ - \ a \times c = a \times (b-c)}$$

On dit qu'on a mis a **en facteur**.

On utilise souvent aussi la formule avec les multiplications inversées :

$$\boxed{b \times a \ + \ c \times a = a \times (b+c)}$$

Voyons des exemples. On veut factoriser $3x + 5x$. On peut procéder ainsi :

$$3 \times \underline{x} \ + \ 5 \times \underline{x} = \underline{x} \times (3+5) = x \times 8 = 8x$$

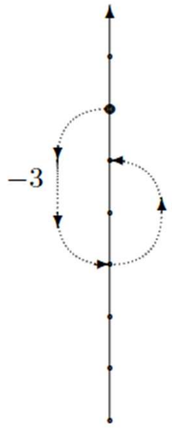
Pour factoriser $3x - 5x$, on procède de même :

$$3 \times \underline{x} \ - \ 5 \times \underline{x} = \underline{x} \times (3-5) = x \times (-2) = -2x$$

8 Pour réviser ce chapitre

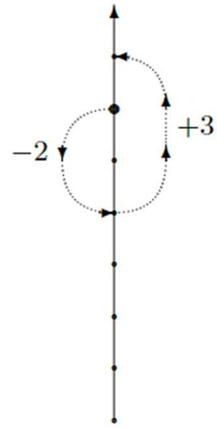
La règle de l'ascenseur (p. 27)

La cabine d'un ascenseur peut monter (signe $+$) ou descendre (signe $-$) d'un certain nombre d'étages. Dans les trois exemples ci-dessous, le niveau du sol, pris comme origine, est marqué d'un gros point :



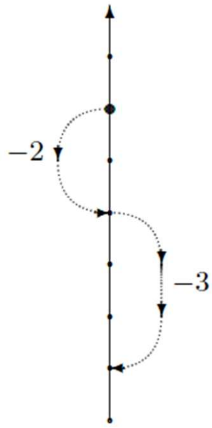
Parti de l'origine, on descend de 3, puis on monte de 2. En tout, on a **descendu** de 1. On écrit :

$$(-3) + 2 = -1$$



Parti de l'origine, on descend de 2, puis on monte de 3. En tout, on a **monté** de 1. On écrit :

$$(-2) + 3 = 1$$



Parti de l'origine, on descend de 2, puis encore de 3. En tout, on a **descendu** de 5. On écrit :

$$(-2) + (-3) = -5$$

Opposé et soustraction (p. 28)

Le nombre $\boxed{3}$ a pour opposé $\boxed{-3}$. Le nombre $\boxed{-2}$ a pour opposé $\boxed{2}$.

$$-(-b) = b$$

$$\boxed{a - b = a + (-b)}$$

$$\boxed{a - (-b) = a + b}$$

Trois formules à **savoir par cœur** :

$$\boxed{0 + a = a} \qquad \boxed{a - 0 = a} \qquad \boxed{0 - a = -a}$$

Les signes $-$ et $+$ devant une parenthèse (p. 29)

$$\begin{aligned} -(a+b) &= -a - b \\ -(a-b) &= -a + b \\ -(-a-b) &= a + b \end{aligned}$$

On a par exemple :

$$c-(a-b)=c-a+b$$

Inversement, on peut mettre le signe $\boxed{-}$ en facteur devant une parenthèse :

$$\begin{array}{rcl} a-b &=& -(-a+b) \\ -a+b &=& -(a-b) \\ -a-b &=& -(a+b) \end{array}$$

Si la parenthèse est précédée du signe $\boxed{+}$ on peut la retirer :

$$c+(a+b)=c+a+b \qquad c+(a-b)=c+a-b \qquad c+(-a-b)=c-a-b$$

Multiplication des entiers relatifs (p. 30)

Voici la **règle des signes** :

+ par + = +	+ par − = −	− par + = −	− par − = +

Exemples :

$$\begin{array}{rcl} (+2)\times(+3) &=& +6 = 6 \\ (+2)\times(-5) &=& -10 \\ (-4)\times(-3) &=& +12 = 12 \end{array}$$

Trois formules à **savoir par cœur** :

$$\boxed{a\times 1=a} \qquad \boxed{a\times(-1)=-a} \qquad \boxed{a\times 0=0}$$

Développement d'un produit (p. 31)

$$\boxed{a\times(b+c)=a\times b\ +\ a\times c}$$

$$\boxed{a\times(b-c)=a\times b\ -\ a\times c}$$

Mise en facteur (p. 32)

$$\boxed{a\times b\ +\ a\times c=a\times(b+c)}$$

$$\boxed{a\times b\ -\ a\times c=a\times(b-c)}$$

Quand on peut appliquer ces formules, on dit qu'on a mis a **en facteur**. On utilise souvent aussi les formules avec les multiplications inversées :

$$\boxed{b\times a\ +\ c\times a=a\times(b+c)}$$

$$\boxed{b\times a\ -\ c\times a=a\times(b-c)}$$

9 Exercices

On rappelle les deux règles de priorité des opérations :

1/ La **multiplication** est prioritaire sur l'addition et sur la soustraction.

Ainsi, par exemple :

$$2+3\times 5 = 2+\underbrace{3\times 5} = 2+15 = 17$$

$$10-2\times 7 = 10-\underbrace{2\times 7} = 10-14 = -4$$

2/ Les calculs entre **parenthèses** sont prioritaires.

Ainsi :

$$(2-3)\times 5 = \underbrace{(2-3)}\times 5 = (-1)\times 5 = -5$$

Exercice 1.

Calculer les sommes suivantes :

$$a=-3+(-2),\quad b=3+(-2),\quad c=(-5)+2$$

Exercice 2.

Calculer les différences suivantes :

$$d=-3-(-2),\quad e=-3-(-5),\quad f=(-5)-2$$

Exercice 3.

On suppose : $a=-2\quad b=4\quad c=-10\quad d=-4$. Calculer les expressions suivantes :

$a+b \qquad a-b \qquad -a+b \qquad c+b \qquad c-b \qquad -c+d \qquad a+d \qquad -d+a$

Exercice 4.

On suppose : $a=2\quad b=-3\quad c=10\quad d=-5$. Calculer les expressions suivantes :

$a+b \qquad a-b \qquad -a+b \qquad c+b \qquad c-b \qquad -c+d \qquad a+d \qquad -d+a$

Exercice 5.

On suppose : $a=-3\quad b=4\quad c=-7\quad d=-4$. Calculer les expressions suivantes :

$a+c \qquad -a-c \qquad a-c \qquad -a+c \qquad b-d \qquad b+d \qquad c+b \qquad c-b \qquad -c+d \qquad c+d$

Exercice 6.

On suppose : $a=-2\quad b=4\quad c=10\quad d=-4$. Calculer les expressions suivantes :

$a\times b \qquad a\times c \qquad a\times d \qquad b\times c \qquad a+b \qquad -c+d \qquad c-b \qquad -d+a$

Exercice 7.

On suppose : $a = 2$ $b = -5$ $c = -10$ $d = 3$. Calculer les expressions suivantes :

$$a \times b \qquad a \times c \qquad a \times d \qquad b \times c \qquad c - b \qquad -c + d \qquad a + d \qquad -d + a$$

Exercice 8.

1. Recopier les tableaux et compléter les **additions** :

$+$	-3	5	-7
2	-1		
-5		0	
4			-3

$+$	3	-5	-1
2			
-8			
6			

2. Recopier les tableaux et compléter les **multiplications** :

$\times$	-3	5	-7
2	-6		
-5		-25	
4			-28

$\times$	3	-5	-1
2			
-8			
6			

Exercice 9.

On suppose : $a = 2$ $b = -3$ $c = 10$. Calculer les expressions suivantes :

$$a + bc \qquad a - bc \qquad -ac + b \qquad c + bc \qquad bc - b$$

Exercice 10.

On suppose : $a = 2$ $b = -3$ $c = 10$ $d = -5$. Calculer de deux façons différentes les expressions suivantes :

$$a \times (b + c) \qquad a \times (b - c) \qquad c \times (b + d) \qquad d \times (b - c)$$

Exercice 11.

Factoriser les expressions suivantes :

$$ad + ab \qquad ad - ab \qquad 2x + ax \qquad 3x - 7x \qquad -3x + ax$$

Exercice 12.

Factoriser et réduire les expressions a, b, c, d suivantes :

$$a = 2x + 3x \qquad b = 5y - 7y \qquad c = 8z - 3z \qquad d = -3t + t$$

Dans d, on pourra écrire $t = 1 \times t$.

Exercice 13.

Réduire les expressions suivantes :

$2a + 5a$ $\qquad -2a + 3a$ $\qquad 3b - 8b$

$2a - 3b - 5a$ $\qquad -2a + 5b + 3a$ $\qquad -2a + 3b + 5a - 8b$

$-2x - 3b - 5x$ $\qquad -2x + 5b - 3x$ $\qquad -2a + 3x + 5a - 8b$

Exercice 14.

Soient les expressions :

$$x = -2a + 5b + 3a - 8b \qquad y = 2a - 3b + 8b$$

1. Réduire x.
2. Réduire y en mettant un $+$ **devant** b dans la factorisation :

$$y = 2a - 3\underline{b} + 8\underline{b} = \boxed{2a \ + \ \underline{b} \times (-3 + 8)} = \text{etc.}$$

Recopier ce début de calcul, et le **terminer**.

3. Calculer x, y lorsque $a = -1$, $b = 3$.

Exercice 15.

Soient les expressions :

$$x = 2a + 5b - 3a - 5b \qquad y = -3a - 5b + 2b$$

1. Réduire x.
2. Réduire y en mettant un $+$ **devant** b dans la factorisation :

$$y = -3a - 5\underline{b} + 2\underline{b} = \boxed{-3a \ + \ \underline{b} \times (-5 + 2)} = \text{etc.}$$

Recopier ce début de calcul, et le **terminer**.

3. Calculer x, y lorsque $a = -1$, $b = 3$.

Exercice 16.

Calculer sans parenthèses puis réduire si possible les expressions $a,\ b,\ c,\ d$ suivantes :

$a = -(2 - x)$ $\qquad b = -y + (5 - 7y)$ $\qquad c = 5 - (3 + z)$ $\qquad d = 5 - (3 - z)$

Exercice 17.

Calculer sans parenthèses puis réduire si possible les expressions $a,\ b,\ c,\ d$ suivantes :

$a = 1 - (x + 3)$ $\qquad b = 2y + (-5 - 7y)$ $\qquad c = -5 + (3 + z)$ $\qquad d = -5 - (3 + z)$

Exercice 18.

Soient les expressions :

$$x = -2a - 2b + 5a + 8b \qquad y = -2a + 5b - 3a - 8b$$

1. Réduire x, y.
2. Calculer x, y lorsque $a = -3$, $b = 2$.

Exercice 19.

Soient les expressions :

$$x = 2c - 3b - 5c + 8b \qquad y = -2a + 5c + 3a - 8c \qquad z = -2a - 5c + 5a + 8b + 4c$$

1. Réduire x, y, z.
2. Calculer x, y, z lorsque $a = -1$, $b = -2$, $c = 3$.

Exercice 20.

Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$\begin{array}{rclrcl} A &=& 5 - (2 + 3x) & B &=& 4 - x + (2x - 7) \\ C &=& -(4x + 3) - (5 + 4x) & D &=& 1 + 2x - (1 - 3x) \end{array}$$

Exercice 21.

Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$\begin{array}{rclrclrcl} A &=& 4(x - 3) + 2 & B &=& 3a - (3 + 2a) & C &=& 3 - (2 + x) \\ D &=& 4(1 - a) - 3 & E &=& 3(x - 2) - 2(1 - x) & F &=& 2 - 3(1 - x) \end{array}$$

Exercice 22.

1. Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$\begin{array}{rclrclrcl} A &=& 4(x + 3) - 2 & B &=& 3a + (3 + 2a) & C &=& 3 - (2 - x) \\ D &=& 4(1 - a) + 3 & E &=& 3(x - 2) - (1 - x) & F &=& 2 + 3(1 - x) \end{array}$$

2. Calculer A lorsque $x = 3$. Vérifier qu'on trouve $A = 22$.
3. Calculer C et E lorsque $x = 2$.
4. Calculer B et D lorsque $a = 0$.

Exercice 23.

(unités cm et cm^2) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points suivants :

$$A(-1;-2) \quad B(4;-2) \quad C(4;1) \quad D(-1;1)$$

2. Calculer les distances AB et CD en utilisant les abscisses.
3. Calculer les distances AD et BC en utilisant les ordonnées.
4. On admet que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.
   a/ Calculer son périmètre p.
   b/ Calculer son aire S.

10 Correction des questions

p. 28

$$\begin{aligned}(-3)+(-2) &= -5\\ 4+(-4) &= 4-4=0\\ 4+(-5) &= -1\\ 7+(-2) &= 7-2=5\end{aligned}$$

p. 30

$$\begin{aligned}(-3)+7 &= 7+(-3)=7-3=4\\ 4+(-9) &= 4-9=-(9-4)=-5\\ 4+(-2) &= 4-2=2\\ 3+(-7) &= -7+3=-(7-3)=-4\end{aligned}$$

11 Correction des exercices

Ex. 1, p. 35. Par la règle de l'ascenseur on obtient : $a=-5,\ b=1,\ c=-3$. On notera que le calcul :

$$b=3+(-2)$$

revient à la soustraction de l'école primaire : $b=3-2=1$.

Ex. 2, p. 35. On applique la règle de la soustraction :

$$a-b=a+(-b)$$

qui ramène une soustraction à un calcul d'opposé et une addition. On obtient :

$$\begin{aligned}d&=-3-(-2)=-3+2=-1\\ e&=-3-(-5)=-3+5=2\\ f&=(-5)-2=-5+(-2)=-7\end{aligned}$$

Ex. 3, p. 35. On a :

$a+b=-2+4=2$ | $a-b=-2-4=-2+(-4)=-6$

$-a+b=-(-2)+4=2+4=6$ | $c+b=-10+4=-6$

$c-b=-10-4=-10+(-4)=-14$ | $-c+d=-(-10)+(-4)=10-4=6$

$a+d=-2+(-4)=-6$ | $-d+a=-(-4)+(-2)=4+(-2)=2$

Ex. 4, p. 35.

$$a + b = 2 + (-3) = -1 \qquad a - b = 2 - (-3) = 2 + 3 = 5$$
$$-a + b = -2 + (-3) = -5 \qquad c + b = 10 + (-3) = 7$$
$$c - b = 10 - (-3) = 10 + 3 = 13 \qquad -c + d = -10 + (-5) = -15$$
$$a + d = 2 + (-5) = -3 \qquad -d + a = -(-5) + 2 = 5 + 2 = 7$$

Ex. 5, p. 35.

$$a + c = -3 + 4 = 1 \qquad -a - c = -(-3) - (-7) = 3 + 7 = -10$$
$$a - c = -3 - (-7) = -3 + 7 = 4 \qquad -a + c = -(-3) + (-7) = 3 + (-7) = -4$$
$$b - d = 4 - (-4) = 4 + 4 = 8 \qquad b + d = 4 + (-4) = 0$$
$$c + b = -7 + 4 = -3 \qquad c - b = -7 - 4 = -7 + (-4) = -11$$
$$-c + d = -(-7) + (-4) = 7 + (-4) = 3 \qquad c + d = -(-7) + (-4) = -11$$

Ex. 6, p. 35. On sait qu'un produit se calcule d'abord mentalement sans les signes. On met le signe ensuite, en appliquant la règle des signes (*voir* prop. 8, p. 30) :

$+$ par $+$ $=$ $+$ $\qquad$ $+$ par $-$ $=$ $-$ $\qquad$ $-$ par $+$ $=$ $-$ $\qquad$ $-$ par $-$ $=$ $+$

ATTENTION ! Il ne faut pas confondre le produit $\boxed{a \times b}$ et la somme $\boxed{a + b}$.

$$a \times b = -2 \times 4 = -8 \qquad a \times c = -2 \times 10 = -20$$
$$a \times d = -2 \times (-4) = 80 \qquad b \times c = 4 \times 10 = 40$$
$$a + b = -2 + 4 = 2 \qquad -c + d = -10 + (-4) = -14$$
$$c - b = 10 - 4 = 6 \qquad -d + a = -(-4) + (-2) = 4 + (-2) = 2$$

Ex. 7, p. 36.

ATTENTION ! Ne pas confondre multiplication $\boxed{\times}$ et addition $\boxed{+}$.

$$a \times b = 2 \times (-5) = -10 \qquad a \times c = 2 \times (-10) = -20$$
$$a \times d = 2 \times 3 = 6 \qquad b \times c = (-5) \times (-10) = 50$$
$$c - b = -10 - (-5) = -10 + 5 = -5 \qquad -c + d = -(-10) + 3 = 10 + 3 = 13$$
$$a + d = 2 + 3 = 5 \qquad -d + a = -3 + 2 = -1$$

Ex. 8, p. 36. On complète les tableaux comme indiqué :

+	−3	5	−7
2	−1	7	−5
−5	−8	0	−12
4	1	9	−3

+	3	−5	−1
2	5	−3	1
−8	−5	−13	−9
6	9	1	5

×	−3	5	−7
2	−6	10	−14
−5	15	−25	35
4	−12	20	−28

×	3	−5	−1
2	6	−10	−2
−8	−24	40	8
6	18	−30	−6

Ex. 9, p. 36.

$$a + bc = 2 + (-3) \times 10 = 2 + (-30) = -28$$
$$a - bc = 2 - (-3) \times 10 = 2 - (-30) = 2 + 30 = 32$$
$$-ac + b = -2 \times 10 + (-3) = -20 + (-3) = -23$$
$$c + bc = 10 + (-3) \times 10 = 10 + (-30) = -20$$
$$bc - b = -3 \times 10 - (-3) = -30 + 3 = -27$$

Ex. 10, p. 36.

$$a \times (b + c) = 2 \times (-3 + 10) = 2 \times 7 = 14$$
$$a \times b + a \times c = 2 \times (-3) + 2 \times 10 = -6 + 20 = 14$$

$$a \times (b - c) = 2 \times (-3 - 10) = 2 \times (-13) = -26$$
$$a \times b - a \times c = 2 \times (-3) - 2 \times 10 = -6 - 20 = -26$$

$$c \times (b + d) = 10 \times (-3 + (-5)) = 10 \times (-8) = -80$$
$$c \times b + c \times d = 10 \times (-3) + 10 \times (-5) = -30 + (-50) = -80$$

$$d \times (b - c) = -5 \times (-3 - 10) = -5 \times (-3 + (-10)) = -5 \times (-13) = 65$$
$$d \times b - d \times c = -5 \times (-3) - (-5) \times 10 = 15 - (-50) = 15 + 50 = 65$$

Ex. 11, p. 36.

$$ad + ab = \underline{a}d + \underline{a}b = \underline{a}(d + b)$$
$$ad - ab = \underline{a}d - \underline{a}b = \underline{a}(d - b)$$
$$2x + ax = 2\underline{x} + a\underline{x} = \underline{x}(2 + a)$$
$$2x - ax = 2\underline{x} - a\underline{x} = \underline{x}(2 - a)$$
$$\begin{aligned} 3x - 7x &= 3\underline{x} - 7\underline{x} \\ &= \underline{x}(3 - 7) = x \times (-4) = -4x \end{aligned}$$
$$-3x + ax = -3\underline{x} + a\underline{x} = \underline{x}(-3 + a)$$

Ex. 12, p. 36.

$$a = 2x + 3x = 2\underline{x} + 3\underline{x} = \underline{x}(2 + 3) = 5x$$
$$b = 5y - 7y = 5\underline{y} - 7\underline{y} = \underline{y}(5 - 7) = -2y$$
$$c = 8z - 3z = 8\underline{z} - 2\underline{z} = \underline{z}(8 - 3) = 5z$$
$$d = -3t + t = -3t + 1 \times t = -3\underline{t} + 1 \times \underline{t} = \underline{t}(-3 + 1) = -2t$$

Ex. 13, p. 37.

$$
\begin{aligned}
&2a+5a=a(2+5)=a\times 7=7a\\
&-2a+3a=a(-2+3)=a\times 1=a\\
&3b-8b=b(3-8)=b\times(-5)=-5b\\
&2a-3b-5a=2a-5a-3b=a(2-5)-3b=a\times(-3)-3b=-3a-3b\\
&-2a+5b+3a=-2a+3a+5b=a(-2+5)+5b=3a+5b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2a+3b+5a-8b=-2a+5a+3b-8b=7a-5b\\
&-2x-3b-5x=-2x-5x-3b=-7x-3b\\
&-2x+5b-3x=-2x-3x+5b=-5x+5b\\
&-2a+3x+5a-8b=-2a+5a+3x-8b=3a+3x-8b
\end{aligned}
$$

Ex. 14, p. 37. 1. et 2. On réduit comme demandé :

$$
\begin{aligned}
x&=-2a+5b+3a-8b=-2a+3a+5b-8b=a-3b\\
y&=2a-3\underline{b}+8\underline{b}=2a+\underline{b}\times(-3+8)=2a+b\times 5=2a+5b
\end{aligned}
$$

3. Si on remplace a par -1, et b par 3, on obtient :

$$
\begin{aligned}
x&=a-3b=-1-3\times 3=-1-9=-10\\
y&=2a+5b=2\times(-1)+5\times 3=-2+15=13
\end{aligned}
$$

Ex. 15, p. 37. 1. Dans x, on simplifie les $5b$:

$$x=2a+5b-3a-5b=2a+\cancel{5b}-3a-\cancel{5b}=2a-3a=-a$$

2. Dans y, on procède comme indiqué :

$$y=-3a-5\underline{b}+2\underline{b}=-3a+\underline{b}\times(-5+2)=-3a+b\times(-3)=-3a-3b$$

3. Si on remplace a par -1, et b par 3, on obtient :

$$
\begin{aligned}
x&=-a=-(-1)=1\\
y&=-3a-3b=-3\times(-1)-3\times 3=3-9=-6
\end{aligned}
$$

Ex. 16, p. 37.

$$
\begin{aligned}
a&=-(2-x)=-2+x\\
b&=-y+(5-7y)=-y+5-7y=-y-7y+5=-8y+5\\
c&=5-(3+z)=5-3-z=2-z\\
d&=5-(3-z)=5-3+z=2+z
\end{aligned}
$$

Ex. 17, p. 37.

$$a = 1 - (x+3) = 1 - x - 3 = 1 - 3 - x = -2 - x$$
$$b = 2y + (-5 - 7y) = 2y - 5 - 7y = 2y - 7y - 5 = -5y - 5$$
$$c = -5 + (3+z) = -5 + 3 + z = -2 + z$$
$$d = -5 - (3+z) = -5 - 3 - z = -8 - z$$

Ex. 18, p. 38. 1. On réduit x et y :

$$x = -2a - 2b + 5a + 8b = -2a + 5a - 2b + 8b = 3a + 6b$$
$$y = -2a + 5b - 3a - 8b = -2a - 3a + 5b - 8b = -5a - 3b$$

2. On remplace ensuite a par -3, et b par 2. On obtient :

$$x = 3a + 6b = 3 \times (-3) + 6 \times 2 = -9 + 12 = 3$$
$$y = -5a - 3b = -5 \times (-3) - 3 \times 2 = 15 - 6 = 9$$

Ex. 19, p. 38. 1. On réduit x, y, z :

$$x = 2c - 3b - 5c + 8b = 2c - 5c - 3b + 8b = -3c + 5b$$
$$y = -2a + 5c + 3a - 8c = -2a + 3a + 5c - 8c = a - 3c$$
$$z = -2a - 5c + 5a + 8b + 4c = -2a + 5a - 5c + 4c + 8b = 3a - c + 8b$$

2. On remplace ensuite a par -1, b par -2, c par 3. On obtient :

$$x = -3c + 5b = -3 \times 3 + 5 \times (-2) = -9 - 10 = -19$$
$$y = a - 3c = -1 - 3 \times 3 = -1 - 9 = -10$$
$$z = 3a - c + 8b = 3 \times (-1) - 3 + 8 \times (-2) = -3 - 3 - 16 = -6 - 16 = -22$$

Ex. 20, p. 38.

$$A = 5 - (2 + 3x) = 5 - 2 - 3x = 3 - 3x$$
$$B = 4 - x + (2x - 7) = 4 - x + 2x - 7 = 4 - 7 - x + 2x = -3 + x$$
$$C = -(4x + 3) - (5 + 4x) = -4x - 3 - 5 - 4x = -3 - 5 - 4x - 4x = -8 - 8x$$
$$D = 1 + 2x - (1 - 3x) = \cancel{1} + 2x - (\cancel{1} - 3x) = 2x + 3x = 5x$$

Ex. 21, p. 38.

$$A = 4(x - 3) + 2 = 4x - 4 \times 3 + 2 = 4x - 12 + 2 = 4x - 10$$
$$B = 3a - (3 + 2a) = 3a - 3 - 2a = 3a - 2a - 3 = a - 3$$
$$C = 3 - (2 + x) = 3 - 2 - x = 1 - x$$
$$D = 4(1 - a) - 3 = 4 - 4a - 3 = 4 - 3 - 4a = 1 - 4a$$
$$E = 3(x - 2) - 2(1 - x) = 3x - 3 \times 2 - 2 + 2x = -8 + 3x + 2x = -8 + 5x$$
$$F = 2 - 3(1 - x) = 2 - 3 + 3x = -1 + 3x$$

Ex. 22, p. 38. 1. On développe et on réduit :

$$A = 4(x+3) - 2 = 4x + 4 \times 3 - 2 = 4x + 12 - 2 = 4x + 10$$

$$B = 3a + (3 + 2a) = 3a + 3 + 2a = 3a + 2a + 3 = 5a + 3$$

$$C = 3 - (2 - x) = 3 - 2 + x = 1 + x$$

$$D = 4(1 - a) + 3 = 4 - 4a + 3 = 4 + 3 - 4a = 7 - 4a$$

$$E = 3(x - 2) - (1 - x) = 3x - 3 \times 2 - 1 + x = -6 - 1 + 3x + 2x = -7 + 5x$$

$$F = 2 - 3(1 - x) = 2 - 3 + 3x = -1 + 3x$$

2. Si $x = 3$ alors :

$$A = 4 \times 3 + 10 = 12 + 10 = 22$$

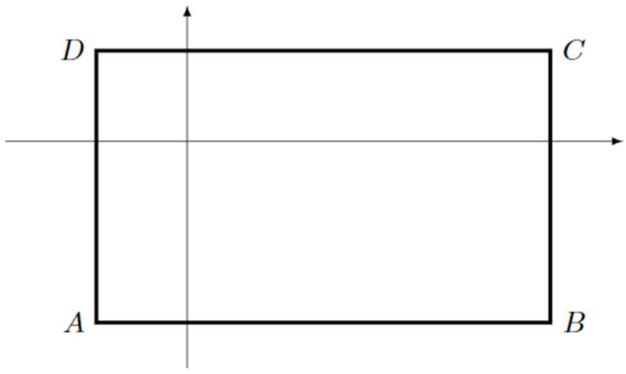
3. Si $x = 2$ alors :

$$C = 1 + 2 = 3 \qquad E = -7 + 5 \times 2 = -7 + 10 = 3$$

4. Si $a = 0$ alors :

$$B = 5 \times 0 + 3 = 0 + 3 = 3 \qquad D = 7 - 4 \times 0 = 7 - 0 = 7$$

Ex. 23, p. 38. 1. Voici la figure :



2. Comme $[AB]$ est horizontal, et que $x_B > x_A$, on a :

$$AB = x_B - x_A = 4 - (-1) = 5$$

et de même :

$$CD = x_C - x_D = 4 - (-1) = 5$$

3. Comme $[AD]$ est vertical, et que $y_D > y_A$, on a :

$$AD = y_D - y_A = 1 - (-2) = 3$$

et de même :

$$BC = y_C - y_B = 1 - (-2) = 3$$

4. a/ et b/ On a :

$$\begin{array}{rcl} p & = & 2(AB + BC) = 2 \times (5 + 3) = 2 \times 8 = 16 \\ S & = & AB \times BC = 5 \times 3 = 15 \end{array}$$

Chapitre 2

Arithmétique

1 Multiples et diviseurs

On rappelle les définitions suivantes :

Définition 1. *On dit qu'un entier a est* ***divisible*** *par un entier b si la division de a par b tombe juste, ce qui revient à dire qu'il existe un entier q tel que :*

$$a = b \times q$$

ce qui correspond à la division suivante :

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} 0 & q \end{array}$$

Définition 2. *Si a est divisible par b, on dit que b est un* ***diviseur*** *de a, et que a est un* ***multiple*** *de b.*

Proposition 3. *Les multiples non nuls de b sont : $b \quad 2b \quad 3b \quad 4b \quad 5b \quad 6b \ \ldots$ Il y en a une* ***infinité****.*

On a vu en classe de 6$^{\text{e}}$, comment on trouve les **diviseurs d'un entier** particulier en les associant deux à deux. On avait ainsi déterminé les diviseurs de 24 :

$$\underbrace{1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 24}$$

$$1 \quad \underbrace{2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12} \quad 24$$

$$1 \quad 2 \quad \underbrace{3 \ \ldots\ldots \ 8} \quad 12 \quad 24$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \underbrace{4 \quad 6} \quad 8 \quad 12 \quad 24$$

et les diviseurs de 16 :

$$\underbrace{1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 16}$$

$$1 \quad \underbrace{2 \ \ldots \ 8} \quad 16$$

$$1 \quad 2 \quad \boxed{4} \quad 8 \quad 16$$

2 Plus grand commun diviseur

Définition 4. *Soient a et b des entiers non nuls. On note* $\operatorname{pgcd}(a, b)$ *le* ***plus grand commun diviseur*** *des entiers a et b, c'est-à-dire le nombre qui divise* ***à la fois*** *a et b, et qui est le plus grand possible.*

Montrons comment on peut trouver les diviseurs communs de **deux nombres**. Considérons, par exemple, les diviseurs de 12 :

1	2	3	4	6	12

puis ceux de 8 :

1	2	4	8

Les **diviseurs communs** de 12 et de 8 sont donc :

1	2	4

et le plus grand d'entre eux est 4. D'où $\operatorname{pgcd}(8, 12) = 4$.

Questions (correction p. 50)

1/ Si b divise a que peut-on dire des diviseurs de a et de ceux de b ?
2/ Si b divise a que vaut $\operatorname{pgcd}(a, b)$?

On peut utiliser le pgcd pour **simplifier les fractions**. Reprenons les nombres 8 et 12. On sait que $\operatorname{pgcd}(8, 12) = 4$. On a de plus :

$$8 = 4 \times 2 \quad \text{et} \quad 12 = 4 \times 3$$

On en déduit que :

$$\frac{8}{12} = \frac{4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{2}{3}$$

3 Plus petit commun multiple

Définition 5. *Soient a et b des entiers non nuls. On note* $\operatorname{ppcm}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ *le* ***plus petit commun multiple*** *de a et b, c'est-à-dire le multiple* ***non nul*** *de a et de b qui est le plus petit possible.*

• Les multiples (non nuls) d'un nombre s'obtiennent en multipliant ce nombre par 1, puis 2, puis 3, etc. Par exemple, les multiples (non nuls) de 6 sont :

$$6 \quad 12 \quad 18 \quad 24 \quad 30 \quad 36 \quad 42 \quad 48 \quad 54 \quad \ldots$$

La liste ne s'arrête pas, elle est infinie. De même, les multiples (non nuls) de 8 sont :

$$8 \quad 16 \quad 24 \quad 32 \quad 40 \quad 48 \quad 56 \quad \ldots$$

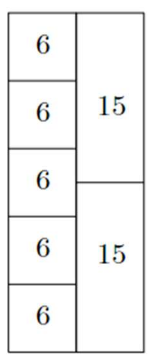
On voit donc que le premier **multiple commun** non nul de 6 et de 8 est 24. On a donc $\text{ppcm}(6,8) = 24$. De plus :

$$24 = 6 \times 4 = 8 \times 3$$

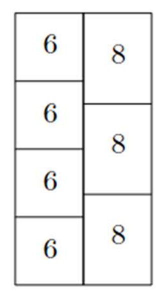
On montrerait de même que $\text{ppcm}(6,15) = 30$ et que :

$$30 = 6 \times 5 = 15 \times 2$$

Illustration de $\text{ppcm}(6,15) = 30$ et de $\text{ppcm}(6,8) = 24$:



$30 = 6 \times 5 = 15 \times 2$



$24 = 6 \times 4 = 8 \times 3$

On peut utiliser le ppcm pour **réduire les fractions au même dénominateur**. Reprenons les nombres 6 et 15. On a montré que :

$$\text{ppcm}\,(6,15) = 30 \quad \text{et} \quad 30 = 6 \times 5 = 15 \times 2$$

On en déduit :

$$\frac{a}{6} + \frac{b}{15} = \frac{a \times 5}{6 \times 5} + \frac{b \times 2}{15 \times 2} = \frac{5a}{30} + \frac{2b}{30} = \frac{5a + 2b}{30}$$

Questions (correction p. 51)

1/ Si b divise a que peut-on dire des multiples de a et de ceux de b ?
2/ Si b divise a que vaut $\text{ppcm}(a,b)$?

Proposition 6. (Formule merveilleuse) *: Soient a, b des entiers > 0. Si $d = \text{pgcd}\,(a,b)$ et $m = \text{ppcm}\,(a,b)$ on a :*

$$md = ab$$

On peut utiliser cette formule pour calculer un ppcm, si on a déjà calculé le pgcd.

4 Exercices

Exercice 1.

1. On suppose d'abord $a = 18 \quad b = 21$.
   (i) Calculer les diviseurs de a.
   (ii) Calculer les diviseurs de b.
   (iii) Déterminer les diviseurs communs de a et b. Calculer $\operatorname{pgcd}(a, b)$.
2. Reprendre les questions précédentes avec $a = 15 \quad b = 20$.
3. Reprendre les questions précédentes avec $a = 15 \quad b = 105$.
4. Reprendre les questions précédentes avec $a = 60 \quad b = 100$.

Exercice 2.

1. Calculer le ppcm de 8 et 10.
2. Calculer le ppcm de 12 et 18.

Exercice 3 (*les deux phares*)**.**

De ma fenêtre, le soir, je peux voir les signaux émis par deux phares. L'un envoie son signal toutes les 15 secondes, l'autre envoie le sien toutes les 12 secondes. À un instant donné, les deux signaux m'arrivent en même temps. Au bout de combien de temps cela se reproduira-t-il ?

Exercice 4 (*le carrelage*)**.**

Pour carreler le sol d'une salle de bains, on emploie des dalles carrées, toutes de même taille, et disposées côte à côte. La salle de bain est petite, rectangulaire, de longueur 2 m, de largeur 1,50 m. On note x le côté de toutes les dalles. On suppose que x est un nombre entier de cm.

1. Quelle est la plus grande valeur possible de x ?
2. Sur la feuille quadrillée de votre cahier, dessiner un rectangle de dimension 20 carreaux par 15 carreaux pour représenter la sol de la salle de bain. Dessiner le carrelage en prenant la plus grande valeur possible de x. Colorier les dalles.

Indication : On prend le cm comme unité. Les dimensions de la salle de bains sont donc 200 et 150. Calculer les diviseurs de 200 et de 150. Vérifier qu'ils en ont chacun 12. Calculer

$$\operatorname{pgcd}(200, 150)$$

En déduire que la plus grande valeur possible de x est 50.

Exercice 5 (d'après brevet 2015)**.**

Pour une fête, on décore les pièces de la maison avec des chandeliers garnis de bougies blanches et de bougies rouges. On dispose d'un nombre suffisamment grand de chandeliers, de **180** bougies blanches, de **108** bougies rouges.

On veut installer **toutes les bougies** sur des chandeliers ; qu'il y ait **le plus de chandeliers possibles** utilisés ; que tous ces chandeliers portent le même nombre de bougies blanches et le même nombre de bougies rouges.

On note c le nombre de chandeliers utilisés, b le nombre de bougies blanches sur chaque chandelier, r le nombre de bougies rouges sur chaque chandelier.

1. Montrer que $c \times b = 180$.
2. Calculer $c \times r$.
3. En déduire que c est un diviseur commun de 180 et 108, et que c'est le plus grand.
4. Déterminer tous les diviseurs de 180.
5. Déterminer tous les diviseurs de 108.
6. En déduire tous les diviseurs de commun de 180 et 108, et montrer que $c = 36$.
7. Il y aura donc 36 chandeliers utilisés. Combien y aura-t-il de bougies blanches et de bougies rouges sur chaque chandelier ?

Exercice 6 (d'après brevet Polynésie, 2017)**.**

Dans une bourgade, il y a deux lignes de bus qui partent de la place de la gare :
• Le bus n°1 part vers **l'est**, fait un circuit qui dessert plusieurs villages, revient à la gare, d'où il repart immédiatement pour un nouveau tour (on néglige les temps de descente et de montée des voyageurs transportés). Chaque tour dure **24 min**.
• Le bus n°2 part vers **l'ouest**, fait un circuit qui dessert plusieurs villages, revient à la gare, d'où il repart immédiatement pour un nouveau tour (on néglige encore les temps de descente et de montée des voyageurs transportés). Chaque tour dure **32 min**.

1. Dessiner un schéma des deux circuits.
2. Si le bus de la ligne n°1 et le bus de la ligne n°2 partent en même temps de la gare, au bout de combien de temps se retrouveront-ils **ensemble** à la gare ?

Exercice 7 (*la formule merveilleuse*)**.**

On se souvient de deux dates historiques fameuses que tous les petits écoliers de France apprenaient jadis :
• 496 = baptême de Clovis.
• 732 = Charles Martel arrête les Arabes à Poitiers.

Par jeu, on s'intéresse ici au ppcm et au pgcd de ces deux nombres. Mais comme ces nombres sont assez grands, leurs multiples sont très grands, et le calcul direct du ppcm est fastidieux. On va voir comment la **formule merveilleuse** nous évite ce labeur...

1. Calculer les diviseurs de 496. Vérifier qu'il y en a 10.
2. Calculer les diviseurs de 732. Vérifier qu'il y en a 12.
3. En déduire qu'on a :
$$\operatorname{pgcd}(496, 732) = 4$$
4. Pour deux entiers quelconques a et b, on note comme d'habitude $m = \operatorname{ppcm}(a, b)$ et $d = \operatorname{pgcd}(a, b)$. On rappelle la **formule merveilleuse** :
$$a \times b = m \times d$$
Utiliser cette formule pour montrer qu'on a
$$\operatorname{ppcm}(496, 732) = \frac{496 \times 732}{4} = 90\,768$$

Exercice 8 (*le bateau pirate*, d'après brevet 2019).

La dernière campagne du capitaine d'un **bateau pirate** a été très fructueuse. Grâce à l'ardeur des marins de son équipage, il a pu récolter un butin de 69 diamants, 1150 perles et 4140 pièces d'or.

1. Décomposer les nombres 69, 1150, 4140 en produits de facteurs premiers.
2. Pour les récompenser, le capitaine décide de partager équitablement le butin entre ses marins. Il veut que tous les diamants, les perles et les pièces soient distribués. Comment est-ce possible ? Combien y-a-t-il de marins ? Quelle sera la part de chacun ?

Exercice 9 (*mystérieux nombre* 37).

On considère des chiffres a, b, c, pris parmi les dix chiffres possibles : 0 1 2 ... 8 9. Certains des chiffres a, b, c, peuvent être égaux entre eux, ça n'a pas d'importance. En les plaçant côte à côte, on forme les trois nombres suivants :

$$abc \qquad bca \qquad cab$$

Pour éviter la confusion possible avec des produits, on marque une barre horizontale au-dessus de l'écriture de ces nombres. On a donc, par exemple :

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c \tag{1}$$

Enfin, on considère le nombre :

$$n = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$$

1. Donner pour le nombre $\overline{bca}$ une expression analogue à l'expression (1).
2. Même question pour $\overline{cab}$.
3. Calculer n en utilisant les expressions précédentes.
4. Montrer que n est divisible par 3, et par 37.
5. On rappelle que 37 est un nombre premier.

   a/ Calculer n lorsque $\overline{abc} = 128$. Décomposer n en produit de facteurs premiers.

   b/ Calculer n lorsque $\overline{abc} = 108$. Décomposer n en produit de facteurs premiers.

   c/ Calculer n lorsque $\overline{abc} = 818$. Décomposer n en produit de facteurs premiers.

5 Correction des questions

p. 46

1/ Supposons que b divise a. Alors il existe un entier q tel que $a = bq$. Si de plus c divise b, il existe un entier s tel que $b = cs$. On a donc :

$$a = bq = (cs)q = c(sq)$$

ce qui prouve que c divise a. Donc tous les diviseurs de b sont des diviseurs de a.

2/ Les diviseurs communs de a et b sont les diviseurs de b, donc $\text{pgcd}\,(a, b) = b$.

Donnons un exemple : Les diviseurs de 15 sont :

1	3	5	15

et ceux de 30 sont :

$\boxed{1}$	2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	6	10	$\boxed{15}$	30

On voit que tous les diviseurs de 15 sont diviseurs de 30, et pgcd $(15, 30) = 15$.

p. 47

1/ Supposons que b divise a. Ceci revient à dire que a est un multiple de b, et donc tous les multiples de a sont multiples de b. En effet :

$$(a = bq \quad \text{et} \quad c = as) \Rightarrow c = bqs = b(qs)$$

2/ Puisque a est un multiple de b, on a $\text{ppcm}(\text{a}, \text{b}) = a$.

6 Correction des exercices

Ex. 1, p. 48 1. On applique la méthode vue en cours (*voir* p. 45) pour calculer les diviseurs. On trouve que les diviseurs de 18 sont :

1	2	3	6	9	18

et que ceux de 21 sont :

1	3	7	21

On en déduit que les diviseurs communs de 18 et 21 sont 1 et 3, d'où pgcd $(18, 21) = 3$.

2. Les diviseurs de 15 sont :

1	3	5	15

ceux de 20 sont :

1	2	4	5	10	20

On voit que les diviseurs communs de 15 et 20 sont 1 et 5. On en déduit pgcd $(15, 20) = 5$.

3. On laisse au lecteur (qui a toute notre **sympathie**) le soin de calculer les 8 diviseurs de 105. Mais on n'a pas besoin de les connaître pour calculer pgcd $(15, 105)$ car on remarque que $105 = 15 \times 7$. Donc 15 est un diviseur de 105, et les diviseurs communs de 15 et 105 sont donc les diviseurs de 15. Le plus grand de ces diviseurs communs est donc 15 lui-même, d'où pgcd $(15, 105) = 15$.

4. Les diviseurs de 60 sont :

1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60

ceux de 100 sont :

1	2	4	5	10	20	25	50	100

On voit que les diviseurs communs de 60 et 100 sont 1, 2, 4, 5, 10, 20. On en déduit $\operatorname{pgcd}(60, 100) = 20$.

Ex. 2, p. 48 1. Pour calculer $\operatorname{ppcm}(8, 10)$, on applique la méthode vue en cours (*voir* p ; 47) : on calcule d'abord les multiples (non nuls) de 8 et de 10. Les multiples de 8 s'obtiennent en multipliant 8 par 1, puis 2, puis 3, etc. On obtient la liste :

$$8 \quad 16 \quad 24 \quad 32 \quad 40\ldots$$

Les multiples (non nuls) de 10 sont :

$$10 \quad 20 \quad 30 \quad 40\ldots$$

On voit que le premier **multiple commun** non nul de 8 et 10 est 40, et donc $\operatorname{ppcm}(8, 10) = 40$.

2. On montrerait de même que $\operatorname{ppcm}(12, 18) = 36$.

Ex. 3, p. 48 (*les deux phares*). Je verrai de nouveau le signal du premier phare dans 15 s, puis 15 s plus tard et ainsi de suite. Donc 15 s après le premier signal, 30 s après, etc. Les instants où je verrai de nouveau le signal du premier phare sont donc de la forme :

$$15 \qquad 15 + 15 = 2 \times 15 \qquad 15 + 15 + 15 = 3 \times 15 \qquad \ldots$$

Ce sont **tous les multiples** de 15 non nuls. De la même façon, les instants où je verrai de nouveau le signal de l'autre phare sont **tous les multiples** de 12 non nuls.

Les instants où je verrai de nouveau les deux signaux **en même temps** sont donc tous les nombres non nuls qui sont à la fois multiples de 15 et multiples de 12.
Or les multiples non nuls de 15 sont :

$$15 \quad 30 \quad 45 \quad 60 \quad 75 \quad 90 \quad 105 \quad 120 \quad 135 \ \ldots$$

et les multiples non nuls de 12 sont :

$$12 \quad 24 \quad 36 \quad 48 \quad 60 \quad 72 \quad 84 \quad 96 \quad 108 \quad 120 \quad 132 \ \ldots$$

On voit donc que **le plus petit multiple commun** de 15 et 12 est 60. C'est donc au bout de 60 s que je verrai en même temps, pour la deuxième fois, les signaux des deux phares.

Ex. 4, p. 48 (*le carrelage*).
1. Puisqu'en mettant côte à côte suffisamment de dalles carrées de côté x on peut atteindre une longueur de 200, c'est que x divise 200. Un raisonnement analogue montre que x divise 150. Donc x divise à la fois 200 et 150. C'est donc un diviseur commun de 200 et 150. Et la plus grande valeur possible de x est donc $\operatorname{pgcd}(200, 150)$.

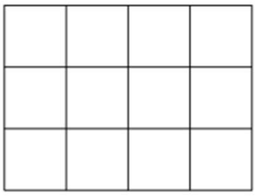
Or les diviseurs de 200 sont :

1	2	4	5	8	10	20	25	40	50	100	200

et ceux de 150 sont :

1	2	3	5	6	10	15	25	30	50	75	150

Donc pgcd $(200, 150) = 50$. Donc les plus grandes dalles qui permettent de carreler la salle de bains sont des dalles de 50 cm.



2. Si 20 carreaux du quadrillage de la feuille représentent 200 cm alors 5 carreaux représentent 50 cm. Il suffit donc de dessiner dans le rectangle 4 dalles de 5 carreaux dans le sens de la longueur et 3 dalles de 5 carreaux dans le sens de la largeur, comme sur la figure ci-contre.

Ex. 5, p. 48 1. et 2. Les formules $c \times b = 180$ et $c \times r = 108$ sont évidentes.

3. De ces formules il résulte que c est un diviseur de 180 et de 108. Comme l'énoncé impose que c soit le plus grand possible, on en déduit :

$$c = \text{pgcd}\,(180, 108)$$

4. et 5. Le nombre 180 a 18 diviseurs ; en voici la liste :

1	2	3	4	5	6	9	10	12	15	18	20	30	36	45	60	90	180

Les diviseurs de 108 sont :

1	2	3	4	6	9	12	18	27	36	54	108

6. On voit que les diviseurs communs de 180 et 108 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. On en déduit pgcd $(180, 108) = 36$, donc $c = 36$.

7. On a :

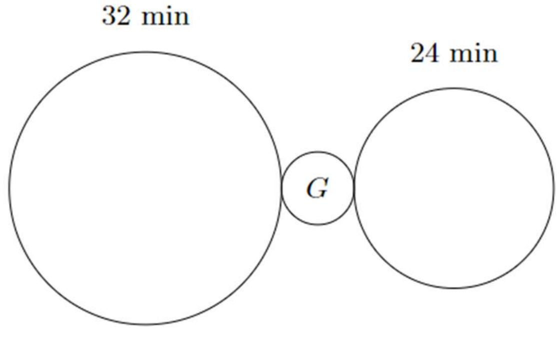
$$\begin{aligned} c \times b &= 180 \\ 30 \times b &= 180 \\ b &= \frac{180}{30} = 6 \end{aligned}$$

Il y aura donc 6 bougies blanches sur chaque chandelier. Si on résout en r l'équation :

$$c \times r = 108$$

on trouve $r = 3$. Donc il y aura 3 bougies rouges sur chaque chandelier.

Ex. 6, p. 49 1. Voici le schéma des deux circuits :



2. Les temps de retour à la gare du bus n°1 sont tous les multiples non nuls de 24 :

$$24 \quad 48 \quad 72 \quad 96\ldots$$

Les temps de retour à la gare du bus n°2 sont tous les multiples non nuls de 32 :

$$32 \quad 64 \quad 96\ldots$$

On voit que les deux bus se retrouveront ensemble à la gare pour la **première fois** au bout de 96 min, c'est-à-dire au bout d'une heure et 36 min.

Ex. 7, p. 49 1. Les diviseurs de 496 sont :

1	2	4	8	16	31	62	124	248	496

2. Les diviseurs de 732 sont :

1	2	3	4	6	12	61	122	183	244	366	732

3. On en déduit :

$$\operatorname{pgcd}(496, 732) = 4$$

4. Il suffit de faire $a = 496$, $b = 732$, $d = 4$ dans la formule merveilleuse, et on obtient l'équation :

$$4m = 496 \times 732$$

que l'on résout en m.

Ex. 8, p. 50 1. On utilise la méthode des séries de divisions, en essayant les petits nombres premiers dont on rappelle la liste :

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 13, \quad 17, \quad 19, \quad 23\ldots$$

$$\begin{array}{r|l} 69 & 3 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1150 & 2 \\ 575 & 5 \\ 115 & 5 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4140 & 2 \\ 2070 & 2 \\ 1035 & 3 \\ 345 & 3 \\ 115 & 5 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array}$$

On a donc :

$$69 = 3.23 \qquad 1150 = 2.5^2.23 \qquad 4140 = 2^2.3^2.5.23$$

2. On peut alors montrer que le seul diviseur commun > 1 des trois nombres est 23. Il y a donc 23 marins. Chacun d'entre eux recevra 3 diamants, $2.5^2 = 50$ perles, $2^2.3^2.5 = 180$ pièces d'or.

Ex. 9, p. 50 1. et 2. On a $\overline{bca} = 100b + 10c + a$ et $\overline{cab} = 100c + 10a + b$.

3. On ajoute ces deux relations à la relation (1) et on obtient :

$$\begin{aligned} n &= \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = (100a + 10b + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) \\ &= (100a + 10a + a) + (100b + 10b + b) + (100c + 10c + c) = 111a + 111b + 111c \\ &= 111(a + b + c) \end{aligned}$$

4. Or $111 = 3 \times 37$ donc :

$$n = 3 \times 37 \times (a + b + c)$$

ce qui montre que n est divisible par 3 et par 37.

5. a/ si $\overline{abc} = 128$, alors $a = 1$, $b = 2$, $c = 8$. Donc $n = 3 \times 37 \times (1+2+8) = 3 \times 37 \times 11$.

b/ si $\overline{abc} = 108$, on trouve $n = 3 \times 37 \times 9 = 3^3 \times 37$.

c/ si $\overline{abc} = 818$, on trouve $n = 3 \times 37 \times 17$.

Chapitre 3

Les nombres rationnels

1 Notions de base

Définition 1. *Un **nombre rationnel** est un entier relatif ou un quotient d'entiers relatifs.*

Exemples : 3, -3, $\frac{2}{3}$, $\frac{-5}{4}$, $\frac{-5}{-4}$ sont des nombres rationnels. Un nombre rationnel peut être entier, ainsi :

$$\frac{-12}{3} = -4 \qquad\qquad \frac{-8}{1} = -8$$

Définition 2. *Dans l'écriture $\frac{a}{b}$ d'un rationnel, $\boxed{a}$ est appelé **numérateur**, $\boxed{b}$ est appelé **dénominateur**.*

Proposition 3. (règle des signes) *Si a et b sont des entiers relatifs, et si $b \neq 0$, on a :*

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

Proposition 4. (simplification des quotients) *Si a, b et c sont des entiers relatifs, et si $b, c \neq 0$, on a :*

$$\frac{c \times a}{c \times b} = \frac{a}{b}$$

On a les formules suivantes :

$$\boxed{\frac{a}{a} = 1} \qquad \boxed{\frac{a}{1} = a} \qquad \boxed{\frac{0}{a} = 0}$$

2 Addition et soustraction

Proposition 5. (addition des rationnels) *Si a, b, c et d sont des des entiers relatifs, et si $b \neq 0$, on a :*

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{b} &= \frac{a+c}{b} \\ \frac{a}{b} - \frac{c}{b} &= \frac{a-c}{b} \end{aligned}$$

On remarque que la prop. 5 permet d'ajouter ou de retrancher des rationnels qui ont le **même dénominateur**, qui a été noté $\boxed{b}$ dans l'énoncé. Dans le cas général, pour ajouter ou retrancher deux rationnels, on commence par les transformer pour qu'ils aient même dénominateur. Ainsi, pour calculer :

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{15}$$

on choisit 15 comme **dénominateur commun**, et on **transforme l'écriture** du premier rationnel :

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{3 \times 5} = \frac{9}{15}$$

On peut alors écrire :

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{15} = \frac{9}{15} - \frac{2}{15} = \frac{9-2}{15} = \frac{7}{15}$$

Définition 6. (Réduction au même dénominateur) *Réduire deux rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ au même dénominateur c'est les écrire tous deux sous une forme où ils auront le même dénominateur. Le* ***dénominateur commun*** *de ces deux rationnels est un* ***multiple commun*** *de b et d, par exemple* $\operatorname{ppcm}(b, d)$.

Soit par exemple à calculer :

$$\frac{3}{10} + \frac{2}{15}$$

On a $\operatorname{ppcm}(10, 15) = 30$, et on peut écrire :

$$\frac{3}{10} + \frac{2}{15} = \frac{3 \times 3}{10 \times 3} + \frac{2 \times 2}{15 \times 2} = \frac{9}{30} + \frac{4}{30} = \frac{9+4}{30} = \frac{13}{30}$$

Questions (correction p. 66)

Calculer les sommes suivantes :

$$a = -\frac{3}{2} + \frac{5}{8} \qquad b = \frac{5}{12} + \frac{3}{8} \qquad c = -2 + \frac{3}{7} \qquad d = \frac{3}{4} - \frac{1}{6}$$

Proposition 7. (le signe $\boxed{-}$ devant une parenthèse) *Si r et s sont des nombres rationnels, on a :*

$$\begin{array}{rcl} -(-r) & = & r \\ -(r+s) & = & -r-s \\ -(r-s) & = & -r+s \\ -(-r-s) & = & r+s \end{array}$$

3 Multiplication

Les règles de multiplication des rationnels sont les mêmes que pour les fractions :

Proposition 8. *Si a, b et c sont des entiers relatifs, et si $b \neq 0$, on a :*

$$c \times \frac{a}{b} = \frac{c \times a}{b}$$

Proposition 9. *Si a, b, c et d sont des entiers relatifs, et si $b, d \neq 0$, on a :*

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Les signes se calculent par la **règle des signes** usuelle :

Proposition 10. (règle des signes) *Si r, s sont des nombres rationnels, on a :*

$$\begin{array}{lcccc} (-r) \times s & = & -rs & & \\ r \times (-s) & = & -rs & & \\ (-r) \times (-s) & = & r \times s & = & rs \end{array}$$

$-$ par $+$ $=$ $-$	$+$ par $-$ $=$ $-$	$-$ par $-$ $=$ $+$

Donnons deux exemples : 1/ Soit à calculer :

$$a = 3 \times \frac{-7}{15}$$

On applique la règle des signes et celle de la multiplication :

$$a = -\frac{3 \times 7}{15}$$

On n'effectue pas les multiplications car on remarque que $15 = 3 \times 5$ donc :

$$a = -\frac{3 \times 7}{3 \times 5}$$

et on peut simplifier par 3 :

$$a = -\frac{\cancel{3} \times 7}{\cancel{3} \times 5} = -\frac{7}{5}$$

2/ Soit à calculer :

$$b = \frac{-21}{2} \times \frac{5}{7}$$

On applique la règle des signes et celle de la multiplication :

$$b = -\frac{21}{2} \times \frac{5}{7} = -\frac{21 \times 5}{2 \times 7}$$

On n'effectue pas les multiplications car on remarque que $21 = 7 \times 3$ donc :

$$b = -\frac{7 \times 3 \times 5}{2 \times 7}$$

et on peut simplifier par 7 :

$$b = -\frac{\cancel{7} \times 3 \times 5}{2 \times \cancel{7}} = -\frac{3 \times 5}{2} = -\frac{15}{2}$$

Questions (correction p. 67)

Calculer les produits suivants :

$a = \frac{3}{2} \times \frac{-8}{5}$ $\qquad b = \frac{5}{12} \times \frac{8}{5}$ $\qquad c = -2 \times \frac{3}{8}$ $\qquad d = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6}$

• La multiplication par 1 ne change rien, alors que la multiplication par -1 change le signe. Ce qui signifie qu'on a, pour tout nombre rationnel r :

$$r \times 1 = r \qquad (-1) \times r = -r$$

$$1 \times r = r \qquad r \times (-1) = -r$$

• On prendra garde de ne pas confondre addition et multiplication :

$$r + 0 = r \qquad r \times 0 = 0$$

$$0 + r = r \qquad 0 \times r = 0$$

$$r + r = 2r \qquad r \times r = r^2$$

Proposition 11. (développement) *Si* r, s, t *sont des nombres rationnels, on a :*

$$\begin{aligned} r(s+t) &= rs + rt \\ r(s-t) &= rs - rt \end{aligned}$$

Soit par exemple à calculer :

$$a = \frac{-3}{4} \times \left(1 - \frac{4}{5}\right)$$

Il y a deux méthodes : on peut développer d'abord, en appliquant la règle des signes :

$$\begin{aligned} a &= \frac{-3}{4} \times 1 + \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{-3}{4} + \frac{3}{5} \end{aligned}$$

et ensuite ajouter. Pour l'addition, on prend 20 comme dénominateur commun :

$$\begin{aligned} a &= -\frac{3\times 5}{4\times 5}+\frac{3\times 4}{5\times 4} \\ &= -\frac{15}{20}+\frac{12}{20} \\ &= \frac{-15+12}{20} \\ &= \frac{-3}{20} \end{aligned}$$

On notera que cette première méthode est assez longue. La seconde méthode consiste à calculer d'abord la parenthèse et à multiplier ensuite :

$$\begin{aligned} a &= \frac{-3}{4}\times\left(1-\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{-3}{4}\times\left(\frac{5}{5}-\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{-3}{4}\times\frac{1}{5} \\ &= \frac{-3}{20} \end{aligned}$$

On voit que c'est beaucoup plus rapide... Mais il y a des cas où c'est la première méthode qui est la plus commode. Il faut **connaître les deux méthodes**.

Proposition 12. (mise en facteurs) *Si* r, s, t *sont des nombres rationnels, on a :*

$$\begin{aligned} sr+tr &= r(s+t) \\ sr-tr &= r(s-t) \end{aligned}$$

On dit qu'on a mis $\boxed{r}$ *en* ***facteur****.*

Comme on l'a vu avec les entiers au § 7, p. 32, on peut factoriser pour **simplifier** certaines expressions :

$$\begin{aligned} -20x+2x &= x(-20+2) \\ &= -18x \end{aligned}$$

La technique est la même avec les rationnels :

$$\begin{aligned} \frac{7}{3}\underline{x}-2\underline{x} &= \underline{x}\times\left(\frac{7}{3}-2\right) \\ &= x\times\left(\frac{7}{3}-\frac{6}{3}\right) \\ &= x\times\frac{1}{3} \\ &= \frac{x}{3} \end{aligned}$$

Questions (correction p. 67)

Factoriser les expressions suivantes :

$a = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{4}x$ $\qquad b = 3x - \frac{11}{5}x$ $\qquad c = \frac{2}{3}x - x$ $\qquad d = \frac{x}{5} - \frac{x}{2}$

Définition 13. *Si r et s sont des rationnels, et si $s \neq 0$, on pose :*

$$\frac{r}{s} = r \times \frac{1}{s}$$

Proposition 14. *Si a, b, c et d sont des entiers relatifs, et si les quotients existent, on a :*

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

4 Exercices

Exercice 1 (*table d'addition*).

Effectuez les additions suivantes :

$+$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{5}{3}$
$\frac{4}{5}$			
$-\frac{1}{5}$			
2			

Exercice 2.

Soient les nombres :

$$a = \frac{10}{3} \qquad b = -\frac{1}{6} \qquad c = -\frac{3}{4} \qquad d = \frac{4}{3}$$

Calculer sous forme de fractions irréductibles les nombres suivants :

$$a + b \qquad a + c \qquad a + d \qquad b + c \qquad b + d \qquad c + d$$

Exercice 3.

Soient les nombres :

$$a = \frac{16}{3} \qquad b = -\frac{1}{12} \qquad c = \frac{3}{4} \qquad d = 1$$

Calculer sous forme de fractions irréductibles les nombres suivants :

$$a+b \qquad a+c \qquad a+d \qquad b+c \qquad b+d \qquad c+d$$

Exercice 4.

Soient les nombres :

$$a = \frac{16}{3} \qquad b = -\frac{1}{12} \qquad c = \frac{3}{4} \qquad d = 1$$

Calculer sous forme de fractions irréductibles les nombres suivants :

$$a-b \qquad a-c \qquad a-d \qquad b-c \qquad b-d \qquad c-d$$

Exercice 5.

Calculez les **sommes** suivantes :

$$a = \frac{3}{2} + \frac{5}{3} \qquad b = \frac{-4}{5} + \frac{1}{8} \qquad c = -3 + \frac{-3}{8} \qquad d = \frac{5}{2} + \frac{-7}{10}$$

Exercice 6.

Calculez les **produits** suivants :

$$a = \frac{3}{2} \times \frac{5}{3} \qquad b = \frac{-4}{5} \times \frac{1}{8} \qquad c = -3 \times \frac{-3}{8} \qquad d = \frac{5}{2} \times \frac{-7}{10}$$

Exercice 7.

Calculez les produits suivants :

$$a = -\frac{3}{2} \times \frac{5}{7} \qquad b = \frac{-4}{5} \times \frac{-31}{20} \qquad c = -2 \times \frac{3}{8} \qquad d = \frac{3}{2} \times \frac{-6}{7}$$

Exercice 8.

Calculez les produits suivants :

$$a = -\frac{3}{2} \times \frac{4}{7} \qquad b = -4 \times \frac{7}{8} \qquad c = -5 \times \frac{-9}{20} \qquad d = \frac{3}{2} \times \frac{-8}{9}$$

Exemple 9.

Étudier les calculs suivants :

$$\frac{1}{3} \times 4 = \frac{1 \times 4}{3} = \frac{4}{3} \qquad 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4 \times 1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3} = 1{,}33333... \approx 1{,}3 \qquad \frac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75$$

Étudier les calculs et simplifications :

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{3 \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times 2 \times 5} = \frac{3}{2 \times 5} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

Exercice 10.

1. Vérifier les calculs suivants : simplifications par 2 puis division :

$$\frac{100}{4} = \frac{50}{2} = 25 \qquad \frac{200}{4} = \frac{100}{2} = 50$$

2. Vérifier les calculs suivants : simplification par 10, puis par 2, puis division :

$$\frac{500}{80} = \frac{50}{8} = \frac{25}{4} = 6{,}25$$

3. Vérifier les calculs suivants :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0{,}333... + 0{,}666... = 0{,}999...$$

mais on a aussi :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

donc :

$$\boxed{0{,}999... = 1}$$

4. Calculer :

$$\frac{5}{4} + \frac{7}{4}$$

a/ Sous **forme décimale**, après avoir divisé 5 par 4, et 7 par 4.
b/ En utilisant la règle d'**addition des fractions**.
c/ Comparez les résultats.

Exercice 11.

1. Résoudre les équations suivantes (*voir* les méthodes p. 15) :

$$x + \frac{3}{4} = 5 \qquad x - \frac{2}{3} = 1 \qquad -x + \frac{1}{8} = \frac{7}{16}$$

2. Résoudre les équations suivantes après les avoir multipliées chacune par un entier bien choisi dans le but de **chasser les dénominateurs** :

$$(a)\ \frac{3}{4}x = \frac{1}{4} \qquad (b)\ \frac{2}{3}x = \frac{4}{5} \qquad (c)\ \frac{3}{4}x = \frac{2}{3} \qquad (d)\ \frac{2}{3}x - 1 = \frac{4}{5} \qquad (e)\ 1 - \frac{3}{2}x = \frac{1}{3}$$

Exercice 12.

1. Vérifier les égalités suivantes :

(a) $\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{120}=\dfrac{13}{360}$ $\quad$ (b) $\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{14}=\dfrac{13}{84}$ $\quad$ (c) $\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{126}=\dfrac{13}{315}$

2. Calculer :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

3. Soit a un nombre quelconque $\neq 0$. Vérifier qu'on a :

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{a}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{6a}$$

Exercice 13.

Résoudre les équations suivantes :

$$x-7=\frac{1}{3} \qquad x+\frac{3}{4}=\frac{5}{2} \qquad x+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

Exercice 14.

Calculer de deux façons différentes l'expression suivante :

$$a=\frac{4}{21}\left(\frac{7}{10}-\frac{1}{4}\right)$$

Exercice 15.

Calculer de deux façons différentes les expressions suivantes :

$$a=5\left(\frac{7}{10}-\frac{11}{5}\right) \quad b=-4\left(\frac{7}{6}+\frac{11}{10}\right) \quad c=\frac{4}{3}\left(\frac{7}{10}-\frac{11}{4}\right) \quad d=\frac{-4}{3}\left(\frac{7}{20}+\frac{11}{4}\right)$$

Exercice 16.

Calculer de deux façons différentes les expressions suivantes :

$$a=5\left(7-\frac{11}{2}\right) \quad b=-4\left(\frac{7}{16}+1\right) \quad c=\frac{4}{3}\left(\frac{7}{10}-11\right) \quad d=\frac{-4}{3}\left(7+\frac{11}{4}\right)$$

Exercice 17.

Calculer par la méthode de votre choix les expressions suivantes :

$$a=\frac{3}{2}\times\left(\frac{-8}{3}+2\right) \qquad b=\frac{-1}{3}\times\left(\frac{-3}{8}+\frac{1}{2}\right) \qquad c=\frac{5}{2}\times\left(\frac{8}{5}-\frac{2}{15}\right)$$

Exercice 18.

x étant un rationnel quelconque non nul, simplifier les expressions suivantes :

$$a=\frac{x}{2}\times\left(\frac{-8}{x}+2\right) \qquad b=\frac{-x}{3}\times\left(\frac{-3}{8}+\frac{1}{2x}\right) \qquad c=\frac{5x}{2}\times\left(\frac{8}{5}-\frac{2}{15x}\right)$$

Exercice 19.

Réduire les expressions suivantes :

$$a=3x-\frac{11}{2}x \qquad b=-\frac{7}{16}x+5x \qquad c=\frac{7}{2}x-\frac{3}{5}x \qquad d=\frac{-4}{3}x+x$$

Exercice 20.

Réduire les expressions suivantes :

$$a = 2x - \frac{11}{3}x \qquad b = -\frac{7}{8}x - 5x \qquad c = \frac{x}{2} - \frac{3}{5}x \qquad d = \frac{5}{3}x - x$$

Exercice 21.

Calculer de deux façons différentes l'expression suivante :

$$a = \frac{4}{21}\left(\frac{7}{10} - \frac{1}{4}\right)$$

Exercice 22.

Soient a, b, c des nombres $\neq 0$. Démontrer les deux égalités suivantes :

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{a} - \frac{b}{c}\right) + \frac{a}{c} = \frac{c}{b} \qquad \frac{a}{b}\left(\frac{b}{c} + 1\right) - \frac{a}{c} = \frac{a}{b}$$

5 Correction des questions

p. 58 (Les additions)

• Pour calculer $a = -\frac{3}{2} + \frac{5}{8}$ on choisit 8 comme dénominateur commun. On a :

$$\frac{3}{2} = \frac{12}{8}$$

donc :

$$a = -\frac{12}{8} + \frac{5}{8} = \frac{-12+5}{8} = \frac{-7}{8}$$

• Pour calculer $b = \frac{5}{12} + \frac{3}{8}$ on choisit 24 comme dénominateur commun. On a :

$$\frac{5}{12} = \frac{10}{24} \qquad \frac{3}{8} = \frac{9}{24}$$

donc :

$$b = \frac{10}{24} + \frac{9}{24} = \frac{10+9}{24} = \frac{19}{24}$$

• Pour calculer $c = -2 + \frac{3}{7}$ on écrit :

$$-2 = \frac{-2}{1} = \frac{-14}{7}$$

donc :

$$c = \frac{-14}{7} + \frac{3}{7} = \frac{-14+3}{7} = \frac{-11}{7}$$

• Pour calculer $d = \frac{3}{4} - \frac{1}{6}$ on choisit 12 comme dénominateur commun. On a :

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} \qquad \frac{1}{6} = \frac{2}{12}$$

donc :

$$d = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9-2}{12} = \frac{7}{12}$$

p. 60 (Les multiplications)

- On a :

$$a = \frac{3}{2} \times \frac{-8}{5} = -\frac{3}{2} \times \frac{8}{5} = -\frac{3 \times 8}{2 \times 5} = -\frac{3 \times 2 \times 4}{2 \times 5} = -\frac{3 \times \cancel{2} \times 4}{\cancel{2} \times 5} = -\frac{12}{5}$$

- On a :

$$b = \frac{5}{12} \times \frac{8}{5} = \frac{5 \times 8}{12 \times 5} = \frac{\cancel{5} \times 8}{12 \times \cancel{5}} = \frac{8}{12}$$

Mais on peut encore simplifier car 8 et 12 sont divisibles par 4. On a :

$$b = \frac{4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{\cancel{4} \times 2}{\cancel{4} \times 3} = \frac{2}{3}$$

- On a :

$$c = -2 \times \frac{3}{8} = -\frac{2 \times 3}{8} = -\frac{2 \times 3}{2 \times 4} = -\frac{3}{4}$$

- Et enfin :

$$d = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{4 \times 6} = \frac{3}{4 \times 3 \times 2} = \frac{1}{4 \times 2} = \frac{1}{8}$$

p. 62 (Les factorisations)

- On a :

$$a = -\frac{5}{2} \times \underline{x} + \frac{3}{4} \times \underline{x} = \underline{x} \times \left(-\frac{5}{2} + \frac{3}{4}\right) = x \times \left(-\frac{10}{4} + \frac{3}{4}\right) = x \times \frac{-10+3}{4} = x \times \frac{-7}{4} = \frac{-7x}{4}$$

- On a :

$$b = 3 \times \underline{x} - \frac{11}{5} \times \underline{x} = \underline{x} \times \left(3 - \frac{11}{5}\right) = x \times \left(\frac{15}{5} - \frac{11}{5}\right) = x \times \frac{15-11}{5} = x \times \frac{4}{5} = \frac{4x}{5}$$

- On a :

$$c = \frac{2}{3} \times \underline{x} - 1 \times \underline{x} = \underline{x} \times \left(\frac{2}{3} - 1\right) = x \times \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{3}\right) = x \times \frac{2-3}{3} = x \times \frac{-1}{3} = \frac{-x}{3}$$

- Pour le calcul de d, on choisit 10 comme dénominateur commun :

$$b = \frac{1}{5} \times \underline{x} - \frac{1}{2} \times \underline{x} = \underline{x} \times \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) = x \times \left(\frac{2}{10} - \frac{5}{10}\right) = x \times \frac{2-5}{10} = x \times \frac{-3}{10} = \frac{-3x}{10}$$

CORRIGÉS

6 Correction des exercices

Ex. 1, p. 62. Calculons la première ligne :

$$\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4+1}{5}=\frac{5}{5}=1$$

$$\frac{4}{5}+\frac{4}{15}=\frac{12}{15}+\frac{4}{15}=\frac{12+4}{15}=\frac{16}{15}$$
$$\frac{4}{5}-\frac{5}{3}=\frac{12}{15}-\frac{25}{15}=\frac{12-25}{15}=\frac{-13}{15}$$

Le reste est analogue, et laissé au lecteur.

$+$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{5}{3}$
$\frac{4}{5}$	1	$\frac{16}{15}$	$-\frac{13}{15}$
$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{15}$	$-\frac{28}{15}$
2	$\frac{11}{5}$	$\frac{34}{15}$	$\frac{1}{3}$

Ex. 2, p. 62. On trouve :

$$a+b=\frac{10}{3}-\frac{1}{6}=\frac{20}{6}-\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$$
$$a+d=\frac{10}{3}+\frac{4}{3}=\frac{14}{3}$$
$$b+d=-\frac{1}{6}+\frac{4}{3}=-\frac{1}{6}+\frac{8}{6}=\frac{7}{6}$$
$$a+c=\frac{10}{3}-\frac{3}{4}=\frac{40}{12}-\frac{9}{12}=\frac{31}{12}$$
$$b+c=-\frac{1}{6}-\frac{3}{4}=-\frac{2}{12}-\frac{9}{12}=-\frac{11}{12}$$
$$c+d=-\frac{3}{4}+\frac{4}{3}=-\frac{9}{12}+\frac{16}{12}=\frac{7}{12}$$

Ex. 3, p. 63. On trouve :

$$a+b=\frac{16}{3}-\frac{1}{12}=\frac{64}{12}-\frac{1}{12}=\frac{63}{12}$$
$$a+d=\frac{16}{3}+1=\frac{16}{3}+\frac{3}{3}=\frac{19}{3}$$
$$b+d=-\frac{1}{12}+1=-\frac{1}{12}+\frac{12}{12}=\frac{11}{12}$$
$$a+c=\frac{16}{3}+\frac{3}{4}=\frac{64}{12}+\frac{9}{12}=\frac{73}{12}$$
$$b+c=-\frac{1}{12}+\frac{3}{4}=-\frac{1}{12}+\frac{9}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$
$$c+d=\frac{3}{4}+1=\frac{3}{4}+\frac{4}{4}=\frac{7}{4}$$

Ex. 4, p. 63. On trouve :

$$a-b=\frac{16}{3}+\frac{1}{12}=\frac{64}{12}+\frac{1}{12}=\frac{65}{12}$$
$$a-d=\frac{16}{3}-1=\frac{16}{3}-\frac{3}{3}=\frac{13}{3}$$
$$b-d=-\frac{1}{12}-1=-\frac{1}{12}-\frac{12}{12}=-\frac{13}{12}$$
$$a-c=\frac{16}{3}-\frac{3}{4}=\frac{64}{12}-\frac{9}{12}=\frac{55}{12}$$
$$b-c=-\frac{1}{12}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{12}-\frac{9}{12}=-\frac{10}{12}=-\frac{5}{6}$$
$$c-d=\frac{3}{4}-1=\frac{3}{4}-\frac{4}{4}=-\frac{1}{4}$$

Ex. 5, p. 63. On trouve :

$$a = \frac{3}{2} + \frac{5}{3} = \frac{9}{6} + \frac{10}{6} = \frac{19}{6} \qquad b = \frac{-4}{5} + \frac{1}{8} = \frac{-32}{40} + \frac{5}{40} = \frac{-27}{40}$$

$$c = -3 + \frac{-3}{8} = \frac{-24}{8} + \frac{-3}{8} = \frac{-27}{8} \qquad d = \frac{5}{2} + \frac{-7}{10} = \frac{25}{10} + \frac{-7}{10} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

Ex. 6, p. 63. On trouve :

$$a = \frac{3}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{\cancel{3} \times 5}{2 \times \cancel{3}} = \frac{5}{2} \qquad b = \frac{-4}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{-4 \times 1}{5 \times 8} = \frac{-\cancel{4} \times 1}{5 \times \cancel{4} \times 2} = \frac{-1}{10}$$

$$c = -3 \times \frac{-3}{8} = \frac{-3 \times (-3)}{8} = \frac{9}{8} \qquad d = \frac{5}{2} \times \frac{-7}{10} = \frac{5 \times (-7)}{2 \times 10} = \frac{\cancel{5} \times (-7)}{2 \times 2 \times \cancel{5}} = \frac{-7}{4}$$

Ex. 7, p. 63. On trouve :

$$a = -\frac{3}{2} \times \frac{5}{7} = -\frac{3 \times 5}{2 \times 7} = -\frac{15}{14}$$

$$b = \frac{-4}{5} \times \frac{-31}{20} = \frac{4 \times 31}{5 \times 20} = \frac{\cancel{4} \times 31}{5 \times \cancel{4} \times 5} = \frac{31}{25}$$

$$c = -2 \times \frac{3}{8} = \frac{-2 \times 3}{8} = \frac{-\cancel{2} \times 3}{\cancel{2} \times 4} = \frac{-3}{4}$$

$$d = \frac{3}{2} \times \frac{-6}{7} = \frac{3 \times (-6)}{2 \times 7} = \frac{3 \times (-\cancel{2} \times 3)}{\cancel{2} \times 7} = \frac{-9}{7}$$

Ex. 8, p. 63. On trouve :

$$a = -\frac{3}{2} \times \frac{4}{7} = -\frac{3 \times 4}{2 \times 7} = -\frac{3 \times 2 \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times 7} = -\frac{6}{7}$$

$$b = -4 \times \frac{7}{8} = \frac{-4 \times 7}{8} = \frac{-\cancel{4} \times 7}{\cancel{4} \times 2} = \frac{-7}{2}$$

$$c = -5 \times \frac{-9}{20} = \frac{5 \times 9}{20} = \frac{\cancel{5} \times 9}{\cancel{5} \times 4} = \frac{9}{4}$$

$$d = \frac{3}{2} \times \frac{-8}{9} = -\frac{3 \times 8}{2 \times 9} = -\frac{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 4}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3} = -\frac{4}{3}$$

Ex. 10, p. 64. 4. a/ Sous forme décimale :

$$\frac{5}{4} + \frac{7}{4} = 1{,}25 + 1{,}75 = 3$$

b/ En utilisant la règle d'addition des fractions :

$$\frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

c/ On trouve bien le **même résultat** par les deux modes de calcul.

Ex. 11, p. 64. Les méthodes de résolution des équations sont expliquées p. 15.
1. On isole x et on réduit le côté droit :

$$x+\frac{3}{4}=5 \quad \Leftrightarrow \quad x \; = \; 5-\frac{3}{4} \; = \; \frac{20}{4}-\frac{3}{4} \; = \; \frac{17}{4} \; \Leftrightarrow \; \boxed{x=\frac{17}{4}}$$

$$x-\frac{2}{3}=1 \; \Leftrightarrow \; x=1+\frac{2}{3} \; = \; \frac{3}{3}+\frac{2}{3} \; = \; \frac{5}{3} \; \Leftrightarrow \; \boxed{x=\frac{5}{3}}$$

$$-x+\frac{1}{8}=\frac{7}{16} \quad \Leftrightarrow \quad -x \; = \; \frac{7}{16}-\frac{1}{8} \; = \; \frac{7}{16}-\frac{2}{16} \; = \; \frac{5}{16} \quad \Leftrightarrow \; \boxed{x=-\frac{5}{16}}$$

2. (a) On multiplie par 4 des deux côtés de l'équation pour chasser le dénominateur 4 :

$$\frac{3}{4}x=\frac{1}{4} \; \Leftrightarrow \; 3x=1 \; \Leftrightarrow \; \boxed{x=\frac{1}{3}}$$

(b) On divise par 2 des deux côtés de l'équation pour la simplifier :

$$\frac{2}{3}x=\frac{4}{5} \; \Leftrightarrow \; \frac{1}{3}x=\frac{2}{5}$$

On multiplie ensuite par 15 des deux côtés pour chasser les dénominateurs 3 et 5 :

$$\frac{1}{3}x=\frac{2}{5} \; \Leftrightarrow \; 15\times\frac{1}{3}x=15\times\frac{2}{5} \; \Leftrightarrow \; 5x=6 \; \Leftrightarrow \; \boxed{x=\frac{6}{5}}$$

(c) On multiplie par 12 des deux côtés pour chasser les dénominateurs 4 et 3 :

$$\frac{3}{4}x=\frac{2}{3} \; \Leftrightarrow \; 12\times\frac{3}{4}x=12\times\frac{2}{3} \; \Leftrightarrow \; 9x=8 \Leftrightarrow \; \boxed{x=\frac{8}{9}}$$

(d) On fait passer -1 à droite et on réduit :

$$\frac{2}{3}x-1=\frac{4}{5} \; \Leftrightarrow \; \frac{2}{3}x=1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$$

On s'est ramené à l'équation $\frac{2}{3}x=\frac{9}{5}$. On la multiplie par 15 des deux côtés :

$$\frac{2}{3}x=\frac{9}{5} \; \Leftrightarrow \; 15\times\frac{2}{3}x=15\times\frac{9}{5} \; \Leftrightarrow \; 10x=27 \; \Leftrightarrow \; \boxed{x=\frac{27}{10}}$$

(e) On fait passer 1 à droite et on réduit :

$$1-\frac{3}{2}x=\frac{1}{3} \; \Leftrightarrow \; -\frac{3}{2}x=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$$

On s'est ramené à l'équation $-\frac{3}{2}x=-\frac{2}{3}$. On prend les opposés, et on multiplie par 6 des deux côtés :

$$-\frac{3}{2}x=-\frac{2}{3} \; \Leftrightarrow \; \frac{3}{2}x=\frac{2}{3} \; \Leftrightarrow \; 6\times\frac{3}{2}x=6\times\frac{2}{3} \; \Leftrightarrow \; 9x=4 \; \Leftrightarrow \; \boxed{x=\frac{4}{9}}$$

Ex. 12, p. 65. 1. (a) Plutôt que de calculer des ppcm, on se laisse guider par le résultat à obtenir. On cherche à obtenir 360 comme multiple de 36 et de 120. On remarque :

$$36 \times 10 = 360 \qquad 120 \times 3 = 360$$

On a donc :

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{120} = \frac{10}{360} + \frac{3}{360} = \frac{13}{360}$$

(b) Même méthode. On a :

$$12 \times 7 = 84 \qquad 14 \times 6 = 84$$

On a donc :

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{14} = \frac{7}{84} + \frac{6}{84} = \frac{13}{84}$$

(c) Il faut procéder différemment car 315 n'est pas multiple de 30, ni de 126.

On décompose 30 et 126 en produit de facteurs premiers. Pour cela, on fait des **divisions successives** par des nombres premiers petits comme en classe de sixième. On en déduit :

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5 \qquad 126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

Un multiple commun de 30 et 26 est donc :

$$2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 630$$

On a

$$30 \times 21 = 630 \qquad 126 \times 5 = 630$$

On a donc :

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{126} = \frac{21}{630} + \frac{5}{630} = \frac{26}{630} = \frac{13}{315}$$

2. On prend 8 comme dénominateur commun :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} + \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

3. On calcule la somme des deux quotients de gauche, et on obtient :

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{6a} = \frac{3}{6a} + \frac{1}{6a} = \frac{4}{6a} = \frac{2}{3a} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{a}$$

Ex. 13, p. 65. On isole x et on réduit le côté droit :

$$x - 7 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 7 + \frac{1}{3} = \frac{21}{3} + \frac{1}{3} = \frac{22}{3} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{22}{3}}$$

$$x + \frac{3}{4} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{10}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{7}{4}}$$

$$x + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}}$$

Ex. 14, p. 65. Première méthode, on calcule d'abord la parenthèse :

$$a = \frac{4}{21}\left(\frac{7}{10} - \frac{1}{4}\right) = \frac{4}{21}\left(\frac{14}{20} - \frac{5}{20}\right) = \frac{4}{21} \times \frac{9}{20} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{3} \times 7} \times \frac{\cancel{3} \times 3}{\cancel{4} \times 5} = \frac{3}{35}$$

Deuxième méthode, on développe d'abord le produit :

$$a = \frac{4}{21}\left(\frac{7}{10} - \frac{1}{4}\right) = \frac{4}{21} \times \frac{7}{10} - \frac{4}{21} \times \frac{1}{4} = \frac{\cancel{2} \times 2}{\cancel{7} \times 3} \times \frac{\cancel{7}}{\cancel{2} \times 5} - \frac{\cancel{4}}{21} \times \frac{1}{\cancel{4}} =$$
$$\frac{2}{15} - \frac{1}{21} = \frac{14}{105} - \frac{5}{105} = \frac{9}{105} = \frac{3}{35}$$

Ex. 15, p. 65. Première méthode, on calcule d'abord la parenthèse :

$$a = 5\left(\frac{7}{10} - \frac{11}{5}\right) = 5\left(\frac{7}{10} - \frac{22}{10}\right) = 5 \times \frac{-15}{10} = \cancel{5} \times \frac{-15}{\cancel{5} \times 2} = \frac{-15}{2}$$

Deuxième méthode, on développe d'abord le produit :

$$a = 5\left(\frac{7}{10} - \frac{11}{5}\right) = 5 \times \frac{7}{10} - 5 \times \frac{11}{5} = \cancel{5} \times \frac{7}{\cancel{5} \times 2} - \cancel{5} \times \frac{11}{\cancel{5}} = \frac{7}{2} - 11 = \frac{7}{2} - \frac{22}{2} = -\frac{15}{2}$$

Calculs de b par les deux méthodes :

$$b = -4\left(\frac{7}{6} + \frac{11}{10}\right) = -4\left(\frac{35}{30} + \frac{33}{30}\right) = -4 \times \frac{68}{30} = -4 \times \frac{34}{15} = -\frac{4 \times 34}{15} = -\frac{136}{15}$$

$$b = -4\left(\frac{7}{6} + \frac{11}{10}\right) = -4 \times \frac{7}{6} - 4 \times \frac{11}{10} = -2 \times \frac{7}{3} - 2 \times \frac{11}{5} = -\frac{14}{3} - \frac{22}{5} = -\frac{70}{15} - \frac{66}{15} = -\frac{136}{15}$$

Calculs de c :

$$c = \frac{4}{3}\left(\frac{7}{10} - \frac{11}{4}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{14}{20} - \frac{55}{20}\right) = \frac{4}{3} \times \frac{-41}{20} = -\frac{\cancel{4}}{3} \times \frac{41}{\cancel{4} \times 5} = -\frac{41}{15}$$

$$c = \frac{4}{3}\left(\frac{7}{10} - \frac{11}{4}\right) = \frac{4}{3} \times \frac{7}{10} - \frac{4}{3} \times \frac{11}{4} = \frac{\cancel{2} \times 2}{3} \times \frac{7}{\cancel{2} \times 5} - \frac{\cancel{4}}{3} \times \frac{11}{\cancel{4}} = \frac{14}{15} - \frac{11}{3} = \frac{14}{15} - \frac{55}{3} = -\frac{41}{15}$$

Calculs de d :

$$d = \frac{-4}{3}\left(\frac{7}{20} + \frac{11}{4}\right) = \frac{-\cancel{4}}{3} \times \frac{7}{\cancel{4} \times 5} + \frac{-\cancel{4}}{3} \times \frac{11}{\cancel{4}} = \frac{-7}{15} + \frac{-11}{3} = -\frac{7}{15} - \frac{55}{15} = -\frac{62}{15}$$

$$d = \frac{-4}{3}\left(\frac{7}{20} + \frac{11}{4}\right) = \frac{-4}{3} \times \frac{7}{20} + \frac{-4}{3} \times \frac{11}{4} = \frac{-\cancel{4}}{3} \times \frac{7}{\cancel{4} \times 5} + \frac{-\cancel{4}}{3} \times \frac{11}{\cancel{4}}$$
$$= -\frac{7}{15} - \frac{11}{3} = -\frac{7}{15} - \frac{55}{3} = -\frac{62}{15}$$

Ex. 16, p. 65. Première méthode, on calcule d'abord la parenthèse :

$$a = 5\left(7 - \frac{11}{2}\right) = 5\left(\frac{14}{2} - \frac{11}{2}\right) = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

Deuxième méthode, on développe d'abord le produit :

$$a = 5\left(7 - \frac{11}{2}\right) = 5 \times 7 - 5 \times \frac{11}{2} = 35 - \frac{55}{2} = \frac{70}{2} - \frac{55}{2} = \frac{15}{2}$$

Calculs de b par les deux méthodes :

$$b = -4\left(\frac{7}{16} + 1\right) = -4\left(\frac{7}{16} + \frac{16}{16}\right) = -4 \times \frac{23}{16} = -\cancel{4} \times \frac{23}{\cancel{4} \times 4} = -\frac{23}{4}$$

$$b = -4\left(\frac{7}{16} + 1\right) = -4 \times \frac{7}{16} - 4 = -\cancel{4} \times \frac{7}{\cancel{4} \times 4} - 4 = -\frac{7}{4} - 4 = -\frac{7}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{23}{4}$$

Calculs de c :

$$c = \frac{4}{3}\left(\frac{7}{10} - 11\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{7}{10} - \frac{110}{10}\right) = \frac{4}{3} \times \frac{-103}{10} = \frac{\cancel{2} \times 2}{3} \times \frac{-103}{\cancel{2} \times 5} = -\frac{206}{15}$$

$$c = \frac{4}{3}\left(\frac{7}{10} - 11\right) = \frac{4}{3} \times \frac{7}{10} - \frac{4}{3} \times 11 = \frac{\cancel{2} \times 2}{3} \times \frac{7}{\cancel{2} \times 5} - \frac{44}{3} = \frac{14}{15} - \frac{44}{3}$$
$$= \frac{14}{15} - \frac{220}{15} = -\frac{206}{15}$$

Calculs de d :

$$d = \frac{-4}{3}\left(7 + \frac{11}{4}\right) = \frac{-4}{3}\left(\frac{28}{4} + \frac{11}{4}\right) = \frac{-\cancel{4}}{3} \times \frac{39}{\cancel{4}} = -\frac{39}{3} = -13$$

$$d = \frac{-4}{3}\left(7 + \frac{11}{4}\right) = \frac{-4}{3} \times 7 + \frac{-\cancel{4}}{3} \times \frac{11}{\cancel{4}} = -\frac{28}{3} - \frac{11}{3} = -\frac{39}{3} = -13$$

Ex. 17, p. 65. Première méthode, on calcule d'abord la parenthèse :

$$a = \frac{3}{2} \times \left(\frac{-8}{3} + 2\right) = \frac{3}{2} \times \left(\frac{-8}{3} + \frac{6}{3}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{-2}{3} = -1$$

Deuxième méthode, on développe d'abord le produit :

$$a = \frac{3}{2} \times \left(\frac{-8}{3} + 2\right) = \frac{3}{2} \times \frac{-8}{3} + \frac{3}{2} \times 2 = \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{-\cancel{2} \times 4}{\cancel{3}} + 3 = -4 + 3 = -1$$

Calculs de b par les deux méthodes :

$$b = \frac{-1}{3} \times \left(\frac{-3}{8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{3} \times \left(\frac{-3}{8} + \frac{4}{8}\right) = \frac{-1}{3} \times \frac{1}{8} = -\frac{1}{24}$$

$$b = \frac{-1}{3} \times \left(\frac{-3}{8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{\cancel{3}} \times \frac{-\cancel{3}}{8} + \frac{-1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{6} = \frac{3}{24} - \frac{4}{24} = -\frac{1}{24}$$

Calculs de c :

$$c = \frac{5}{2} \times \left(\frac{8}{5} - \frac{2}{15}\right) = \frac{5}{2} \times \left(\frac{24}{15} - \frac{2}{15}\right) = \frac{5}{2} \times \frac{22}{15} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2} \times 11}{\cancel{5} \times 3} = \frac{11}{3}$$

$$c = \frac{5}{2} \times \left(\frac{8}{5} - \frac{2}{15}\right) = \frac{5}{2} \times \frac{8}{5} - \frac{5}{2} \times \frac{2}{15} = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

Ex. 18, p. 65. On développe le produit pour pouvoir simplifier :

$$a = \frac{x}{2} \times \left(\frac{-8}{x} + 2\right) = \frac{x}{2} \times \frac{-8}{x} + \frac{x}{2} \times 2 = -4 + x$$

$$b = \frac{-x}{3} \times \left(\frac{-3}{8} + \frac{1}{2x}\right) = \frac{-x}{3} \times \frac{-3}{8} + \frac{-x}{3} \times \frac{1}{2x} = \frac{x}{8} - \frac{1}{6}$$

$$c = \frac{5x}{2} \times \left(\frac{8}{5} - \frac{2}{15x}\right) = \frac{5x}{2} \times \frac{8}{5} - \frac{5x}{2} \times \frac{2}{15x} = 4x - \frac{1}{3}$$

Ex. 19, p. 65. On factorise par x et on réduit :

$$a = 3x - \frac{11}{2}x = \left(3 - \frac{11}{2}\right)x = \left(\frac{6}{2} - \frac{11}{2}\right)x = -\frac{5}{2}x$$

$$b = -\frac{7}{16}x + 5x = \left(-\frac{7}{16} + 5\right)x = \left(-\frac{7}{16} + \frac{80}{16}\right)x = \frac{73}{16}x$$

$$c = \frac{7}{2}x - \frac{3}{5}x = \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{5}\right)x = \left(\frac{35}{10} - \frac{6}{10}\right)x = \frac{29}{10}x$$

$$d = \frac{-4}{3}x + x = \left(\frac{-4}{3} + 1\right)x = -\frac{1}{3}x$$

Ex. 20, p. 66. On factorise par x et on réduit :

$$a = 2x - \frac{11}{3}x = \left(2 - \frac{11}{3}\right)x = \left(\frac{6}{3} - \frac{11}{3}\right)x = -\frac{5}{3}x$$

$$b = -\frac{7}{8}x - 5x = \left(-\frac{7}{8} - 5\right)x = \left(-\frac{7}{8} - \frac{40}{8}\right)x = -\frac{47}{8}x$$

$$c = \frac{x}{2} - \frac{3}{5}x = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5}\right)x = \left(\frac{5}{10} - \frac{6}{10}\right)x = -\frac{1}{10}x$$

$$d = \frac{5}{3}x - x = \left(\frac{5}{3} - 1\right)x = \frac{2}{3}x$$

Ex. 21, p. 66. La première méthode consiste d'abord à développer :

$$\begin{aligned} a = \frac{4}{21}\left(\frac{7}{10} - \frac{1}{4}\right) &= \frac{4}{21} \times \frac{7}{10} - \frac{4}{21} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{4}{10} \times \frac{7}{21} - \frac{1}{21} \times \frac{4}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{21} \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{14-5}{35} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{35} = \frac{3}{35} \end{aligned}$$

La deuxième méthode consiste à réduire d'abord la différence entre parenthèses :

$$\frac{7}{10} - \frac{1}{4} = \frac{14}{20} - \frac{5}{20} = \frac{9}{20}$$

puis reporter le résultat dans a :

$$a = \frac{4}{21}\left(\frac{7}{10} - \frac{1}{4}\right) = \frac{4}{21} \times \frac{9}{20} = \frac{4}{20} \times \frac{9}{21} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{35}$$

Ex. 22, p. 66. Pour la première égalité, on calcule d'abord :

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{a} - \frac{b}{c}\right) = \frac{\cancel{a}}{b} \times \frac{c}{\cancel{a}} - \frac{a}{\cancel{b}} \times \frac{\cancel{b}}{c} = \frac{c}{b} - \frac{a}{c}$$

puis on ajoute $\frac{a}{c}$ des deux côtés. On obtient :

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{a} - \frac{b}{c}\right) + \frac{a}{c} = \frac{c}{b} - \frac{a}{c} + \frac{a}{c} = \frac{c}{b}$$

Pour la deuxième égalité, on calcule d'abord :

$$\frac{a}{b}\left(\frac{b}{c} + 1\right) = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} + \frac{a}{b} = \frac{a}{\cancel{b}} \times \frac{\cancel{b}}{c} + \frac{a}{b} = \frac{a}{c} + \frac{a}{b}$$

puis on retranche $\frac{a}{c}$ des deux côtés. On obtient :

$$\frac{a}{b}\left(\frac{b}{c} + 1\right) - \frac{a}{c} = \frac{a}{c} + \frac{a}{b} - \frac{a}{c} = \frac{a}{b}$$

Chapitre 4

Géométrie plane

1 Médiatrices et cercle circonscrit

On rappelle la définition vue en classe de 6e (*voir* p. 18, déf. 12 du présent livre) :

Définition 1. *La* ***médiatrice*** *d'un segment est la droite issue du milieu de ce segment, et qui lui est perpendiculaire.*

On a vu aussi, en classe de 6e, que tout point de la **médiatrice** d'un segment, est **équidistant** des extrémités de ce segment :

Théorème 2. *Soient A et B deux points du plan, distincts, et soit d la médiatrice de $[AB]$. Pour tout point M du plan on a :*

$$M \in d \ \Rightarrow MA = MB$$

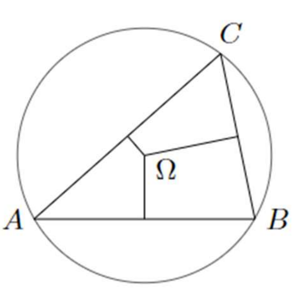
Rappelons que le symbole logique $\boxed{\in}$ se lit "**appartient à**", que $\boxed{\Rightarrow}$ se lit "**implique**" ou "**alors**" (*voir* p. 149). La **réciproque** de ce théorème est vraie, et dit que tout point **équidistant** de deux points, est sur la **médiatrice** du segment joignant ces deux points :

Théorème 3. *Soient A et B deux points du plan, distincts, et soit d la médiatrice de $[AB]$. Pour tout point M du plan on a :*

$$MA = MB \ \Rightarrow M \in d$$

Ces deux théorèmes vont nous permettre de démontrer la propriété suivante :

Proposition 4. *Les médiatrices des trois côtés d'un triangle sont* ***concourantes*** *en un même point Ω. Le cercle centré en Ω et passant par l'un des sommets du triangle passe aussi par les deux autres sommets.*



La lettre grecque Ω se lit "grand oméga".

Définition 5. *Le cercle précédent est appelé* ***cercle circonscrit*** *au triangle ABC.*

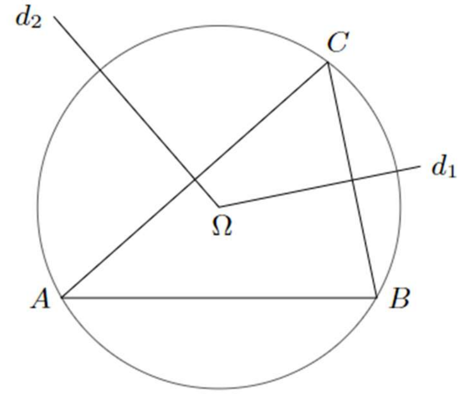
Démontrons la prop. 4 : soient d_1 et d_2 les médiatrices de $[BC]$ et $[AC]$. Elles se coupent en un point que nous notons Ω.
Par le th. 2, p. 77, puisque $\Omega \in d_1$ on a :

$$\Omega B = \Omega C$$

et puisque $\Omega \in d_2$ on a :

$$\Omega A = \Omega C$$

D'où on tire $\Omega A = \Omega B$. Par le th. 3, p. 77, on déduit alors que Ω appartient à la médiatrice de $[AB]$. Donc, les trois médiatrices passent par Ω. De plus, ce point est à égale distance de A, B, C. Il est donc le centre d'un cercle qui passe par ces trois points.
cqfd



2 Projection orthogonale

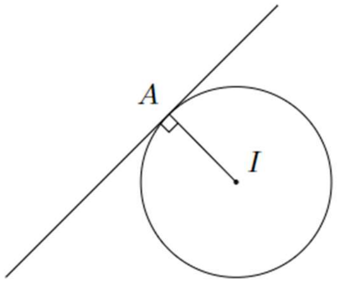
Rappelons la définition suivante :

Définition 1. *Soient I un point et d une droite. La* ***projection orthogonale*** *de I sur d est le point $A \in d$ tel que :*

$$(IA) \perp d$$

Définition 2. *Si A est la projection orthogonale de I sur d, la distance IA est appelée* ***distance*** *de I à d.*

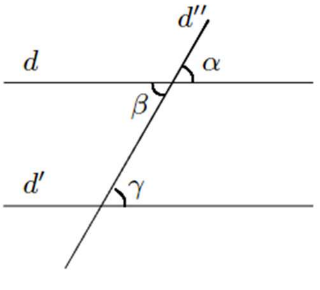
Définition 3. *Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre I, et soit un point A appartenant à $\mathscr{C}$. La droite issue de A et perpendiculaire à (IA) est appelée* ***tangente*** *en A au cercle. On dit que* **la droite et le cercle sont tangents** *en A.*



3 Complément sur les angles

Il est parfois commode de noter les angles avec les premières lettres de l'**alphabet grec** : α se prononce “alpha”, β se prononce “béta”, γ se prononce “gamma”.

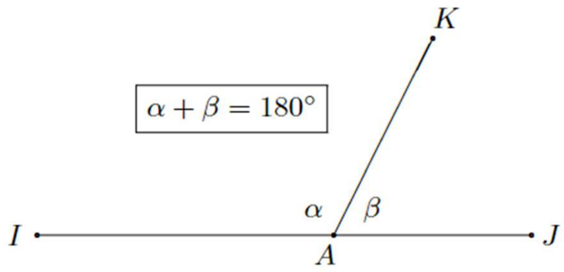
Définition 1. *Soient d et d' des droites* ***parallèles****, coupées par une droite d''. Ces trois droites définissent trois angles α, β et γ qui sont nommés ainsi :*
- *α et β opposés par le sommet,*
- *β et γ alternes-internes,*
- *α et γ correspondants.*



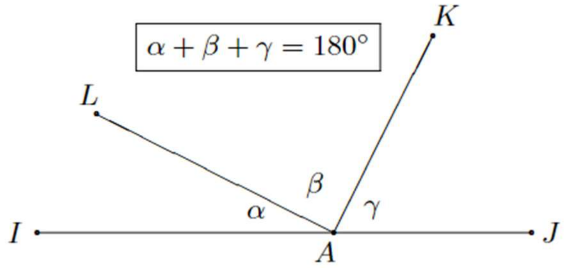
Proposition 2. *Les angles alternes-internes, opposés par le sommet, correspondants sont égaux.*

Définition 3. *Deux angles dont la somme vaut* $180°$ *sont dits* ***supplémentaires*** .

Proposition 4. *Soient* I, A, J *des points tels que* $A \in [IJ]$. *Pour tout point* $K \notin (IJ)$, *les angles* $\widehat{KAI}$ *et* $\widehat{KAJ}$ *sont supplémentaires.*



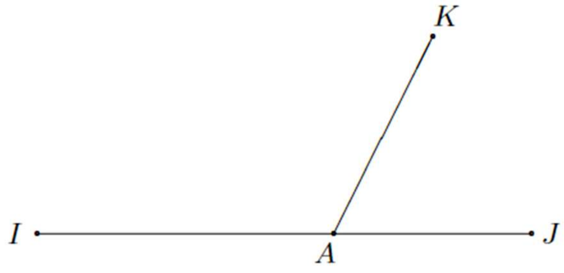
Autrement dit, si I, A, J sont **alignés**, alors les angles α et β forment un **angle plat**. On peut généraliser la prop. 4 avec toujours I, A, J **alignés**, et deux segments $[AK]$ et $[AL]$. On a alors **trois angles** dont la somme vaut $180°$:



Autrement dit, si I, A, J sont **alignés**, alors les angles α, β, γ forment un **angle plat**.

La prop. 4 admet une réciproque :

Proposition 5. *Soient* A, I, J, K *des points tels que* $\widehat{KAI} + \widehat{KAJ} = 180$. *Alors les points* I, A, J *sont alignés.*



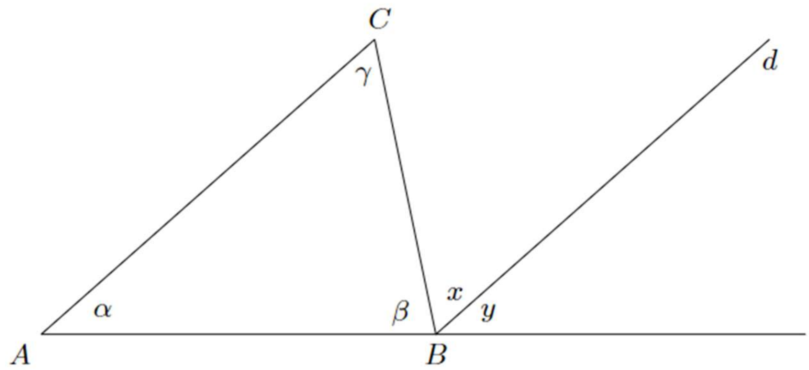
Cette proposition est souvent utilisée pour démontrer que des points sont alignés.

4 Les angles d'un triangle

On est maintenant en mesure de **démontrer** l'un des principaux résultats de la géométrie du triangle :

Théorème 1. *La somme des angles d'un triangle vaut* $180°$.

La démonstration est due à Euclide : soit un triangle ABC, comme sur la figure ci-dessous. On note α, β, γ ses trois angles. On prolonge le côté $[AB]$ au-delà de B. L'**idée remarquable** d'Euclide est d'introduire la demi-droite d, issue du point B et parallèle à la droite (AC). Notons x et y les nouveaux angles définis par cette demi-droite.



On se retrouve dans la situation de deux droites parallèles d et (AC), coupées par des sécantes (BC) et (AB). On voit que les angles γ et x sont **alternes-internes**, tandis que les angles α et y sont **correspondants**. On a donc :

$$\begin{aligned} \alpha &= y \\ \gamma &= x \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= y + \beta + x \\ &= 180 \end{aligned}$$

car les angles y, β et x forment un **angle plat**.

cqfd

Proposition 2. *Les deux angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.*

La **réciproque** de cette proposition est vraie :

Proposition 3. *Si un triangle a deux angles égaux alors il est isocèle.*

Du th. 1 et de la prop. 2 on déduit :

Corollaire 4. *Les trois angles d'un triangle équilatéral valent* $60°$.

Questions (correction p. 104)

Montrer que les trois angles d'un triangle équilatéral valent $60°$.

Définition 5. *Deux angles dont la somme vaut* $90°$ *sont dits* ***complémentaires****.*

Corollaire 6. *Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.*

Proposition 7. *Si un triangle est à la fois rectangle et isocèle, ses angles à la base valent* $45°$*.*

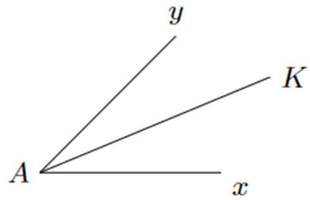
> **Questions (correction p. 104)**
>
> 1/ Tracer un triangle ABC tel que $\widehat{A} = 26°$ et $\widehat{B} = 64°$.
> 2/ Montrer que ce triangle est rectangle.
>
> 3/ a/ Tracer un segment $[AB]$ oblique. Placer un point C, tel que le triangle ABC soit à la fois **rectangle** et **isocèle** en C.
> b/ Calculer les angles du triangle ABC.

5 Bissectrices et cercle inscrit

On rappelle la proposition et la définition suivantes vues en classe de 6^e^ (*voir* p. 18, déf. 14) :

Proposition 1. *Soit* $\widehat{xAy}$ *un angle. Il existe une demi-droite* $[AK)$ *telle qu'on ait* $K \in \widehat{xAy}$ *et de plus :*

$$\widehat{KAx} = \widehat{KAy}$$



Définition 2. *La* ***demi-droite*** $[AK)$ *est appelée* ***bissectrice*** *de l'angle* $\widehat{xAy}$*. La bissectrice d'un angle est donc la demi-droite issue du sommet de cet angle, et qui partage l'angle en* ***deux angles égaux****.*

Soit un angle $\widehat{xAy} \neq 180°$. Pour tout point $M \in \widehat{xAy}$ notons I et J ses projections orthogonales sur les **droites** (Ax) et (Ay). Notons encore $[Az)$ la bissectrice de l'angle $\widehat{xAy}$. On a :

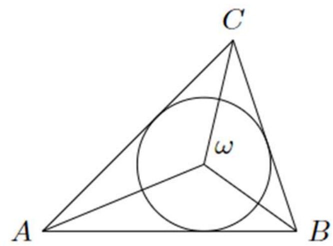
Proposition 3. $M \in [Az) \Rightarrow MI = MJ$

Cette proposition admet une **réciproque** qui est vraie aussi :

Proposition 4. $MI = MJ \Rightarrow M \in [Az)$

Ces deux propositions permettent de démontrer la propriété suivante, où l'on a utilisé la lettre grecque ω qui se lit "petit oméga" :

Proposition 5. *Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un même point* ω*. Le cercle centré en* ω *et* ***tangent*** *à l'un des côtés du triangle est* ***tangent*** *aux deux autres côtés.*



Définition 6. *Le cercle précédent est appelé* ***cercle inscrit*** *dans le triangle* ABC*.*

6 Théorème du demi-cercle

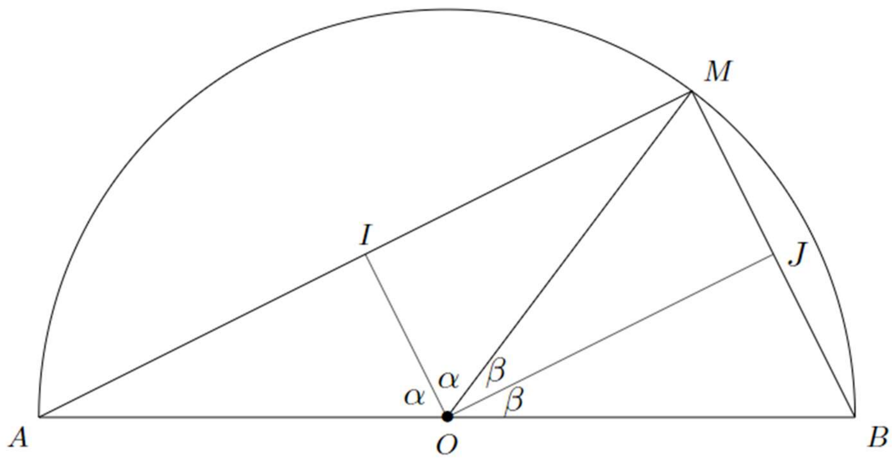
Théorème 1. (théorème du demi-cercle) *Pour tout point M d'un cercle de diamètre $[AB]$, si $M \neq A$ et $M \neq B$, alors $(MA) \perp (MB)$.*

Démonstration : notons O le milieu de $[AB]$. On a $OA = OM$ donc le triangle AOM est isocèle en O. Considérons sa médiatrice principale (OI). Elle est bissectrice de l'angle $\widehat{AOM}$ (*voir* p. 19, prop. 15). Notons

$$\alpha = \widehat{IOA} = \widehat{IOM}$$

Si, de même, nous considérons la médiatrice principale (OJ) du triangle isocèle BOM, elle est bissectrice de l'angle $\widehat{BOM}$, et on peut poser :

$$\beta = \widehat{JOB} = \widehat{JOM}$$



Avec ces notations, il vient :

$$\widehat{AOB} = 2\alpha + 2\beta \quad \text{et} \quad \widehat{IOJ} = \alpha + \beta = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$$

Comme les points A, O, B sont alignés, on a $\widehat{AOB} = 180$ et donc $\widehat{IOJ} = 90$. Le quadrilatère $OJMI$ a donc trois angles droits : en O, en J, en I. D'après la prop. 4, p. 17, c'est un rectangle et son quatrième angle est droit. Donc :

$$\widehat{AMB} = 90$$

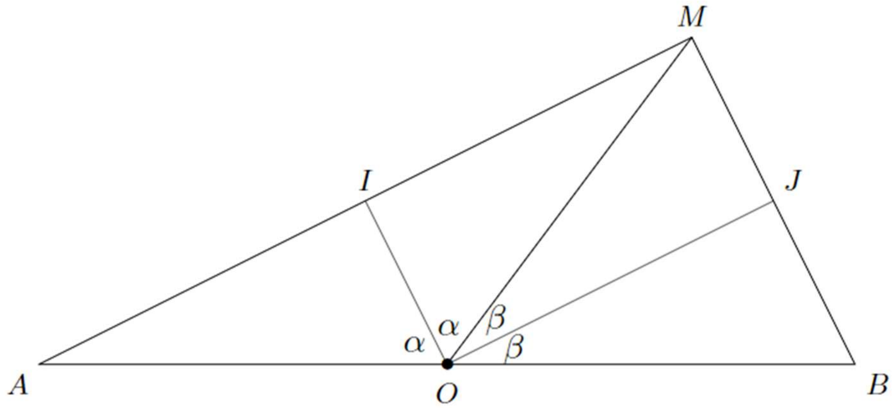
cqfd

Théorème 2. (réciproque du théorème du demi-cercle) *Si un triangle MAB est rectangle en M, son cercle circonscrit a pour diamètre $[AB]$.*

Démonstration : Notons O le centre du cercle circonscrit au triangle MAB. C'est l'intersection des médiatrices des côtés $[MA]$ et $[MB]$. On a :

$$OA = OB = OM$$

et tout revient à prouver que les points A, O, B sont **alignés**. Reprenons les notations et une partie de la figure précédentes :



Par hypothèses, le quadrilatère $OJMI$ a ses angles en M, en J, en I qui sont droits. C'est donc un rectangle, et son quatrième angle doit être droit aussi. Donc :

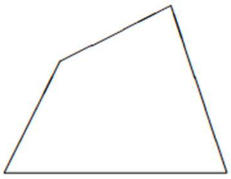
$$\widehat{IOJ} = 90$$

Mais comme $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{IOJ}$, on en déduit que $\widehat{AOB} = 180$

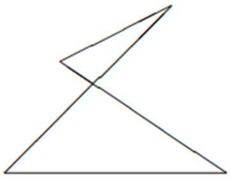
cqfd

7 Parallélogramme

Dans tout ce paragraphe, les quadrilatères considérés ne sont **pas croisés**.

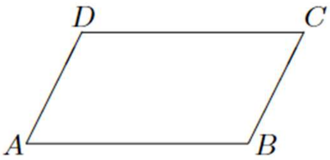


quadrilatère **non croisé**



quadrilatère **croisé**

Définition 1. *Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.*



Le mot parallélogramme est long : on l'abrège souvent avec le symbole $\boxed{/\!\!/ g}$ que l'on prononce parallélogramme.

Concernant les **angles**, en utilisant des angles correspondants et des angles alternes internes, on peut montrer :

Proposition 2. *Dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux, les angles consécutifs sont supplémentaires.*

On va donner maintenant des énoncés concernant les côtés d'un parallélogramme :

Proposition 3. *Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux.*

Plus précisément, on a le **critère**[1] suivant :

$$\boxed{\text{parallélogramme} \Leftrightarrow \text{deux côtés parallèles et égaux}}$$

où le symbole $\boxed{\Leftrightarrow}$ doit se lire "**équivaut à**" (*voir* § 1, p. 149). Concernant les longueurs des quatre côtés, on a l'**énoncé direct** :

Proposition 4. *Dans un parallélogramme, les deux couples de côtés opposés sont égaux.*

et l'**énoncé réciproque** :

Proposition 5. *Si un quadrilatère a ses deux couples de côtés opposés égaux, alors c'est un parallélogramme.*

qui est vrai aussi. On regroupe ces deux énoncés sous la forme d'une **équivalence** :

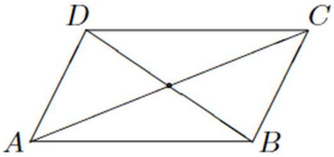
$$\boxed{\text{parallélogramme} \Leftrightarrow \text{deux couples de côtés opposés égaux}}$$

Concernant les diagonales il y a un **énoncé direct** :

Proposition 6. *Dans un parallélogramme, les diagonales ont le même milieu.*

et l'**énoncé réciproque** :

Proposition 7. *Un quadrilatère ayant ses diagonales de même milieu est un parallélogramme.*



qui est vrai aussi, On regroupe ces deux énoncés sous la forme d'une **équivalence** :

$$\boxed{\text{parallélogramme} \Leftrightarrow \text{diagonales de même milieu}}$$

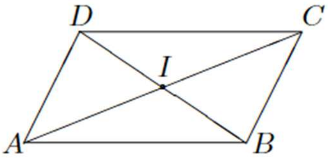
Par la prop. 19, p. 19, vue en classe de 6^{e}, on en déduit donc l'énoncé suivant :

Proposition 8. *Un losange est un parallélogramme.*

Définition 9. *On appelle **centre** d'un parallélogramme le milieu de ses diagonales.*

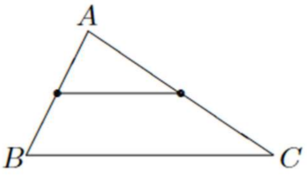
Définition 10. *Soit I un point. Pour tout point M du plan, on appelle **symétrique** de M par rapport à I le point M' tel que I soit le milieu de $[MM']$.*

Si donc on note I le centre du parallélogramme ci-contre, les points A et C sont symétriques par rapport à I. De même les points B et D.



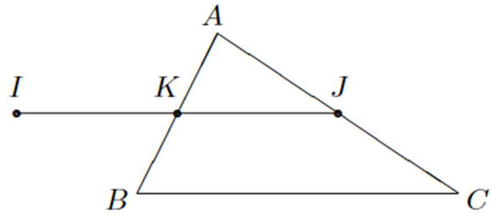
Les propriétés du parallélogramme permettent de démontrer certains **résultats** de géométrie. Par exemple, l'énoncé suivant :

Théorème 11. (droite des milieux) *Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté. Et le segment qui joint les milieux de ces deux côtés vaut la moitié du troisième côté.*



1. Un critère est une équivalence.

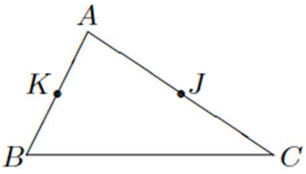
Démonstration : on note J et K les milieux de $[AC]$ et $[AB]$, et on considère le point I, symétrique de J par rapport à K.
Puisque K est milieu de $[AB]$ et de $[IJ]$, alors $AIBJ$ est un parallélogramme. Donc ses côtés opposés $[IB]$ et $[AJ]$ sont parallèles et égaux. Donc $[IB]$ et $[JC]$ sont aussi parallèles et égaux. Donc $IBCJ$ est un parallélogramme.
On en déduit :



$$(KJ) \mathbin{/\!\!/} (BC) \qquad \text{et} \qquad KJ = \frac{BC}{2}$$

Corollaire 12. *Dans un triangle, la droite issue du milieu d'un côté, et parallèle à un deuxième côté, passe par le milieu du troisième côté*

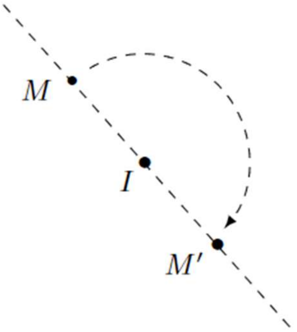
Démonstration : on note J et K les milieux de $[AC]$ et $[AB]$. Soit d la droite issue de J et parallèle à (BC). On sait, par le th. 11, que (JK) est parallèle à (BC). Les droites d et (JK) passent donc toutes deux par J et sont parallèles à une même droite. On en déduit qu'elles sont confondues, d'après le **postulat des parallèles** d'Euclide (*voir* th. 7, p. 18). Donc $K \in d$.



8 Symétrie centrale

Définition 1. *Soit I un point. Le point* ***symétrique*** *d'un point M par rapport à I est le point M', tel que I soit le milieu de $[MM']$.*

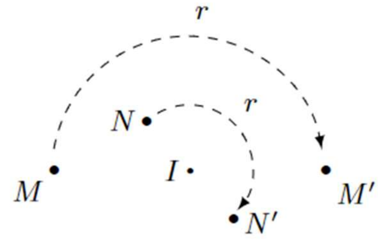
Le symétrique M' de M est donc aligné avec M et I, et il est situé de l'autre côté de M par rapport à I. On peut le tracer avec une règle et un compas, ou avec une règle graduée.



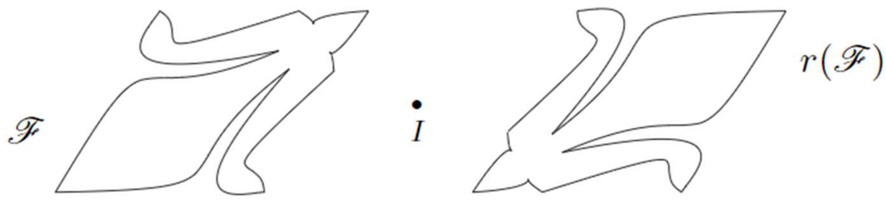
Définition 2. *Soit I un point. La* ***symétrie centrale*** *de centre I est l'opération qui associe, à tout point M du plan, son symétrique M' par rapport à I.*

Une symétrie de centre I est en fait une **rotation d'un demi-tour** de centre I. Notant r la symétrie de centre I, si M' est le symétrique de M par rapport à I, on écrit :

$$M' = r(M)$$



Définition 3. *Soient I un point, r la symétrie de centre I. La* ***figure symétrique*** *d'une figure $\mathscr{F}$ par rapport à I est notée $r(\mathscr{F})$. C'est l'ensemble de tous les symétriques des points de $\mathscr{F}$ par rapport à I.*



Proposition 4. *La figure symétrique d'une droite est une* ***droite parallèle****. Plus précisément, si r est une symétrie centrale, et si A et B sont deux points distincts, alors $r(AB)$ est la droite $(A'B')$ où $A' = r(A)$ et $B' = r(B)$.*

Questions (correction p. 105)

(unité au choix) On repère les points par abscisse et ordonnée. Placer les points suivants :

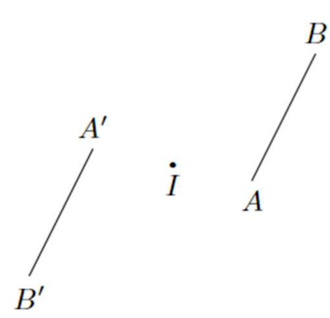
$$A(0;3) \qquad B(5;-1) \qquad I(1;-1)$$

Soit d la droite passant par A et B. Soit r la symétrie de centre I.

1/ Placer A, B, I. Tracer d. Construire $A' = r(A)$ et $B' = r(B)$. Tracer $d' = r(d)$.
2/ Vérifier que $d \mathbin{/\!/} d'$

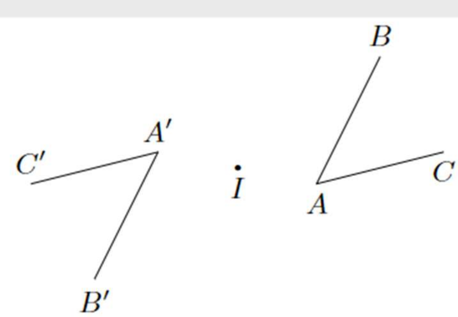
Proposition 5. *Une symétrie centrale* ***conserve les distances****, ce qui signifie que si deux points quelconques A et B ont pour symétriques A' et B', alors $AB = A'B'$.*

On symétrise $[AB]$ par rapport à I, et on obtient $[A'B']$ qui va dans l'autre sens puisqu'on a tourné d'un demi-tour. Les deux segments ont la **même longueur**.



Proposition 6. *Une symétrie centrale* ***conserve les angles****, ce qui signifie que si trois points quelconques non alignés A, B, C ont pour symétriques A', B', C', alors $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.*

On symétrise $\widehat{BAC}$ par rapport à I, et on obtient $\widehat{B'A'C'}$. Les deux angles ont la **même mesure**.



Proposition 7. *La figure symétrique d'un cercle est un cercle. Plus précisément, si r est une symétrie centrale, et si $\mathscr{C}$ est le cercle de centre A et de rayon R, alors $r(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $A' = r(A)$ et de* ***même rayon*** *R.*

Questions **(correction p. 106)**

(unité au choix) On repère les points par abscisse et ordonnée. Placer les points suivants :

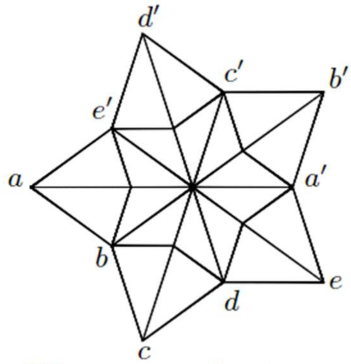
$$A(-2;2) \qquad I(1;-1)$$

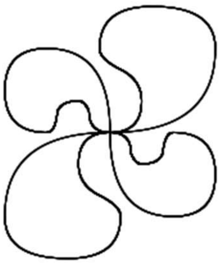
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 2. Soit r la symétrie de centre I.

1/ Placer A, I. Tracer $\mathscr{C}$. Construire $A' = r(A)$. Tracer $\mathscr{C}' = r(\mathscr{C})$.
2/ Mesurer les coordonnées du point A'.

Définition 8. *On dit qu'une figure $\mathscr{F}$ admet un* ***centre de symétrie*** $\boxed{I}$ *si la figure symétrique de $\mathscr{F}$ par rapport à I est $\mathscr{F}$ elle-même.*

• La figure ci-dessous, à gauche n'a **aucun centre de symétrie**. Mais elle admet cinq **axes de symétrie**, qui sont les droites (aa'), (bb'), (cc'), (dd'), (ee'). Au contraire, la figure de droite admet un **centre de symétrie** mais n'a aucun axe de symétrie.





• Un parallélogramme admet un centre de symétrie qui est son centre, c'est-à-dire l'intersection de ses diagonales. Le centre d'un cercle est aussi son centre de symétrie. Mais un triangle n'a pas de centre de symétrie.

Proposition 9. *Une symétrie centrale* ***conserve les aires****, ce qui signifie qu'une figure quelconque et sa figure symétrique ont la même aire. Une symétrie centrale* ***conserve les périmètres****.*

9 Exercices

Exercice 1 (*cercle tangent à deux droites (1)*).

(unité le **grand carreau**) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points suivants :

$$I(0;0) \qquad A(0;-4) \qquad B(2;-2) \qquad C(2;2) \qquad D(0;4)$$

2. Tracer les segments $[AB]$ et $[CD]$.
3. On souhaite raccorder ces deux segments par un arc de cercle, et obtenir une **courbe lisse**. Pour cela, piquer le compas en I, et tracer le petit arc de cercle d'extrémités B et C.
4. Vérifier avec l'équerre que :

$$(BA) \perp (BI) \qquad \text{et} \qquad (CD) \perp (CI)$$

Exercice 2 (*cercle tangent à deux droites (2)*).

(unité le **grand carreau**) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points suivants :

$$A(1;-7) \qquad B(4;-3) \qquad C(3;4) \qquad D(-1;7)$$

2. Tracer les segments $[AB]$ et $[CD]$.
3. On souhaite raccorder ces deux segments par un arc de cercle, et obtenir une courbe lisse. Pour cela,
   a/ Tracer la droite issue de B et perpendiculaire à (BA).
   b/ Tracer la droite issue de C et perpendiculaire à (CD).
   c/ Ces deux droites se coupent en un point qu'on note I. Marquer le point I.
   d/ Piquer le compas en I, et tracer le petit arc de cercle d'extrémités B et C.
4. Vérifier qu'on obtient une courbe **lisse** qui passe par A, B, C, D.

Exercice 3 (*la table arrondie*).

(unité le **grand carreau**) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points suivants :

$$A(-4;-4) \quad B(4;-4) \quad C(6;-2) \quad D(6;2)$$

$$E(4;4) \quad F(-4;4) \quad G(-6;2) \quad H(-6;-2)$$

2. Tracer les segments $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$, $[GH]$.
3. Soit le point $I(4;-2)$. Placer ce point. Piquer le compas en I, et tracer le petit arc de cercle d'extrémités B et C.
4. On a ainsi raccordé les segments $[AB]$ et $[CD]$, et on obtient une **courbe lisse** qui passe par A, B, C, D.
   a/ Raccorder de même les segments $[CD]$ et $[EF]$ en traçant un petit arc de cercle de centre bien choisi.
   b/ Raccorder de même $[EF]$ et $[GH]$, puis $[GH]$ et $[AB]$.

Exercice 4 *(le Parthénon)*.

Le Parthénon fut construit sur l'Acropole d'Athènes, à la demande de Périclès, par les architectes Ictinos et Callicratès, sous la conduite du maître d'œuvre Phidias, entre 447 et 438 avant Jésus-Christ. Sa façade s'inscrit dans un rectangle $HADE$.

1. Tracer un grand rectangle $HADE$, tel que (HA) soit horizontale, (AD) soit verticale, H à gauche de A, D au-dessus de A, $HA = 14{,}4$ cm, $AD = 8{,}9$ cm.
2. Placer les points $C \in [DA]$ et $B \in [CA]$, tels que $DC = CB = 1{,}7$ cm.
3. Tracer la parallèle à (HA) issue de B. Elle coupe $[EH]$ en G.
4. Tracer la parallèle à (HA) issue de C. Elle coupe $[EH]$ en F.
5. Tracer les quarts de cercles $\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}_H$, $\mathscr{C}_C$, dont les centres sont A, H, C, qui sont intérieurs au rectangle $HADE$, et qui vérifient :
   - $\mathscr{C}_A$ passe par B, et coupe le segment $[HA]$ en K
   - $\mathscr{C}_H$ passe par E, et est tangent à $\mathscr{C}_A$ en K
   - $\mathscr{C}_C$ passe par A, est tangent à $\mathscr{C}_H$ en I, et coupe $[FC]$ en un point noté J.

Les rectangles superposés $HABG$, $GBCF$ et $FCDE$ contiennent respectivement colonnade, entablement et fronton du Parthénon. On **montrera**, en classe de 3^e, que sur la facade $HADE$, le rapport de la longueur sur la hauteur est égal au **nombre d'or** :

$$\boxed{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6}$$

Exercice 5.

(unité au choix) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points : $A(-4;1)$, $B(6;4)$, $C(3;-2)$.
2. Tracer le triangle ABC.
3. Construire la médiatrice de $[AB]$ et celle de $[BC]$.
4. On note Ω le point d'intersection de ces deux médiatrices. Marquer Ω. Vérifier qu'on a :
$$\Omega A = \Omega C$$
5. Tracer le cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 6.

(unité au choix) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points : $A(-5;-2)$, $B(6;4)$, $C(4;-3)$.
2. Tracer le triangle ABC.
3. Construire la médiatrice de $[AB]$ et celle de $[BC]$.
4. On note Ω le point d'intersection de ces deux médiatrices. Marquer Ω. Vérifier que Ω est à **l'extérieur** du triangle ABC.
5. Tracer le cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 7.

1. Une droite d et un point $I \notin d$ étant donnés, construisez la **projection orthogonale** de I sur d. Tracez le cercle de centre I et tangent à d.
2. Deux droites parallèles d et d' étant données, construisez un point I situé à égale distance de ces deux droites.
3. Une droite d étant donnée, construisez les deux droites situées à 2 cm de d.

Exercice 8.

1. Tracer un segment $[AB]$ horizontal.
2. Construire le point C tel qu'on ait :

$$\widehat{BAC} = 37° \qquad \text{et} \qquad \widehat{ABC} = 75°$$

3. Calculer l'angle $\widehat{C}$.
4. Comparer la valeur calculée avec celle mesurée au rapporteur sur la figure.

Exercice 9.

1. Tracer un segment $[AB]$ horizontal.
2. Construire le point C tel qu'on ait :

$$\widehat{BAC} = 100° \qquad \text{et} \qquad \widehat{ABC} = 25°$$

3. Calculer l'angle $\widehat{C}$.
4. Comparer la valeur calculée avec celle mesurée au rapporteur sur la figure.

Exercice 10.

1. Au milieu de la page, tracez un segment horizontal $[AB]$ de longueur 5 cm (marquez A à gauche et B à droite).
2. Construisez ensuite le point C, au dessus de (AB) tel que :

$$AC = 4 \text{ cm} \qquad \text{et} \qquad \widehat{BAC} = 75°$$

3. Tracez le triangle ABC. Mesurez au rapporteur les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle.
4. Vérifiez que la somme des angles a bien la valeur attendue.

Exercice 11.

1. Au milieu de la page, tracez un segment horizontal $[AB]$ (marquez A à gauche et B à droite).
2. Construisez ensuite le point C, au dessus de (AB) tel que :

$$AC = AB \qquad \text{et} \qquad \widehat{BAC} = 40°$$

3. Utilisez le théorème sur la somme des angles pour calculer les angles à la base du triangle ABC. Vérifiez au rapporteur.

Exercice 12.

1. Au milieu de la page, tracez un segment horizontal $[AB]$ (marquez A à gauche et B à droite).
2. Construisez ensuite le point C, au-dessus de (AB) tel que :

$$AC = AB \qquad \text{et} \qquad \widehat{BAC} = 36°$$

3. Construisez ensuite le point D, à gauche de C, tel que :

$$AD = AC \qquad \text{et} \qquad \widehat{CAD} = 72°$$

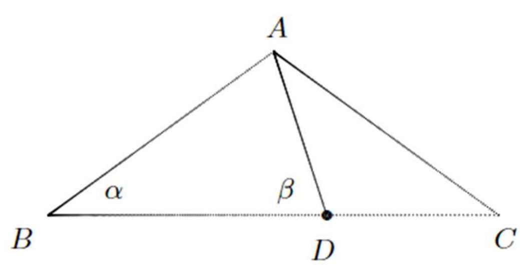
4. Construisez ensuite le point E, au-dessous de (AD), tel que :

$$AE = AD \qquad \text{et} \qquad \widehat{DAE} = 72°$$

5. Calculez l'angle $\widehat{EAB}$ en ajoutant des angles. En déduire que les points E, A, B sont alignés.

Exercice 13 *(triangles de Penrose)*.

Soit ABC un triangle isocèle en A. On suppose qu'il existe un point $D \in [BC]$, tel que $BD = BA$ et $DC = DA$. Calculez les trois angles de ABC.



Indication 1/ Dessinez une figure approximative. 2/ Notez les angles :

$$\alpha = \widehat{ABC}\beta \qquad = \widehat{ADB}$$

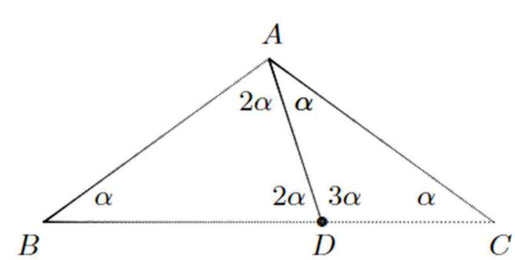
3/ Appliquez les théorèmes sur les angles pour obtenir des équations.

Exercice 14 *(pavage avec des triangles de Penrose)*.

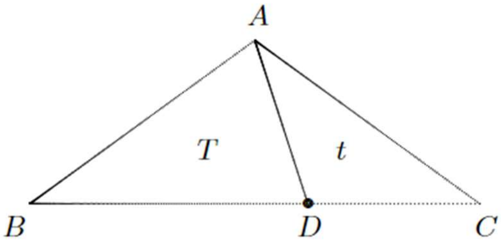
(unité le cm) On reprend les triangles de Penrose de l'ex. 13, p. 91.

1. Tracer le côté $[BC]$ horizontal, tel que $BC = 8{,}1$.
2. Placer $D \in [BC]$ tel que $BD = 5$.
3. Placer le sommet A, au-dessus de (BC), tel que $BA = CA = 5$.

Si on note : $\alpha = \widehat{ABC}$, on sait par l'ex. 13, p. 91 que $\alpha = 36°$. On a donc $5\alpha = 180$, et les marques suivantes d'angles sur la figure :



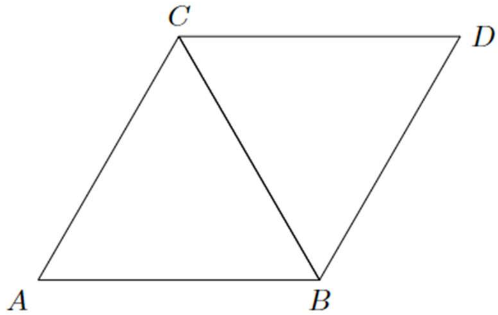
On suppose qu'on dispose de trois copies du grand triangle ABD (type T), et de trois copies du petit triangle ADC (type t), soit en tout **six triangles**.
Utilisez certains de ces six triangles, pour réaliser un pavage formant un **grand triangle isocèle**. Il y a un pavage avec trois triangles, un autre avec cinq triangles.
Pour vérifier qu'un triangle est isocèle, on pourra utiliser la propriété suivante :



Si un triangle a deux angles égaux il est isocèle.

Exercice 15.

1. Tracez deux triangles équilatéraux ABC et CBD accolés comme sur la figure ci-contre.
2. Construire ensuite, avec le **compas**, le point E, à droite de (DB), tel que le triangle DBE soit équilatéral.
3. **Démontrer**, par les angles, que les points A, B, E sont alignés.



Exercice 16.

1. Tracer un segment $[AB]$ horizontal.
2. Construire un point C tel qu'on ait :

$$(AC) \perp (AB) \qquad \text{et} \qquad AC = AB$$

3. Le triangle ABC est donc isocèle en A. Calculer ses angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

Exercice 17.

1. Tracer un triangle équilatéral ABC.
2. Mesurer les trois angles de ABC.

Exercice 18.

1. Tracer un triangle IAB, rectangle et isocèle en I.
2. Tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre I, et qui passe par A.
3. Placer le point M sur $\mathscr{C}$, situé sur le petit arc $\overset{\frown}{AB}$, et tel que :

$$\widehat{AIM} = 50°$$

4. Tracer la droite d, tangente à $\mathscr{C}$ en M.
5. La droite d coupe (IA) en C et (IB) en D. Marquer ces points.
6. Calculer les angles du triangle IMC puis les angles du triangle IMD.

Exercice 19.

(unité le cm)

1. Dans un repère on considère les points de coordonnées $(-2;0)$ et $(2;3)$. Marquez ces points et tracez la droite d qui passe par ces deux points.
2. Soit I le point de coordonnées $(-2;3)$. Placez ce point sur la figure.
3. Construisez la projection orthogonale de I sur d.
4. Mesurez la distance de I à d.

Exercice 20.

1. Un angle $\widehat{xAy}$ étant donné, utilisez **deux droites** auxiliaires pour construire un point $B \in \widehat{xAy}$, et qui soit équidistant des droites (Ax) et (Ay). Grâce à ce point B, tracez la bissectrice de $\widehat{xAy}$.
2. Construisez la bissectrice de l'angle $\widehat{xAy}$ à la règle et au compas en utilisant **trois arcs de cercle**.

Exercice 21.

(unité au choix) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points : $A(-4;-2)$, $B(9;-2)$, $C(0;5)$.
2. Tracer le triangle ABC.
3. Construisez les bissectrices des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Marquez leur point d'intersection ω.
4. Construisez la projection orthogonale I de ω sur $[AB]$.
5. Tracez le cercle inscrit dans le triangle ABC.

Exercice 22 *(dents pointues)*.

1. Tracer un rectangle $ABCD$ de dimensions arbitraires.

Sur le segment $[AB]$, on considère des points M et N, tels que A, M, N, B se suivent dans cet ordre. Sur le segment $[DC]$, on considère un point P.

2. Placer les points M, N P. Tracer les segments $[DM]$, $[MP]$, $[PN]$, $[NC]$.

On pose $a = AB$, $b = BC$, $c = DP$.

3. Calculer l'aire S_1 du triangle DMP.
4. Calculer l'aire S_2 du triangle PNC.
5. Montrer que

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}ab$$

Exercice 23.

1. Tracer un carré $ABCD$ de diagonale $[AC]$.
2. Montrer que le triangle ABC est isocèle.
3. En déduire qu'on a :

$$\widehat{BAC} = 45°$$

4. Par un raisonnement analogue, on montrerait que

$$\widehat{DAC} = 45^\circ$$

En déduire que la demi-droite $[AC)$ est **bissectrice** de l'angle $\widehat{BAD}$.

On démontrerait de façon analogue que $[CA)$ est bissectrice de $\widehat{BCD}$, que $[BD)$ est bissectrice de $\widehat{ABC}$, que $[DB)$ est bissectrice de $\widehat{ADC}$. Ce qui prouve la propriété suivante :

Dans un carré, les diagonales sont bissectrices des quatre angles droits.

Exercice 24.

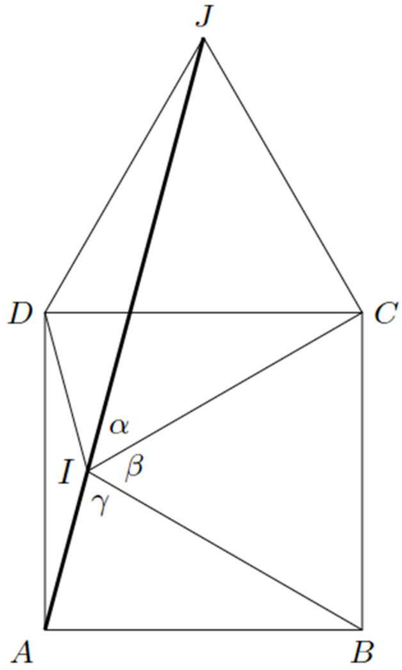
Soit $ABCD$ un carré de diagonale $[AC]$. La perpendiculaire à (AC) issue de C coupe (AB) en I et (AD) en J.

1. Faire la figure.
2. Calculez les angles du triangle ACI.
3. Montrer par les angles que le triangle AIJ est isocèle.

Exercice 25 (résolu partiellement)**.**

À l'intérieur d'un carré $ABCD$, on considère le point I tel que le triangle BCI soit équilatéral. À l'extérieur du carré, on considère le point J tel que DCJ soit équilatéral. Montrer que A, I et J sont alignés.

Solution partielle :
1/ Les angles sont mesurés en degrés. Pour simplifier les écritures, on pose $\alpha = \widehat{CIJ}$, $\beta = \widehat{BIC}$, $\gamma = \widehat{AIB}$.
On va montrer comment on peut calculer α.



Puisque CI et CJ sont égaux à des côtés du carré, ils sont égaux entre eux. Le triangle CIJ est donc isocèle en C.

On a de plus $\widehat{ICJ} = \widehat{ICD} + \widehat{DCJ}$. Or $\widehat{DCJ} = 60$ et $\widehat{ICD} = 90 - 60 = 30$. On en déduit :

$$\widehat{ICJ} = 30 + 60 = 90$$

Le triangle CIJ est donc non seulement isocèle en C mais il est aussi rectangle en C. Ses angles à la base valent donc 45. D'où $\alpha = 45$.
2/ Calculer β.
3/ Calculer γ.
4/ Calculer $\alpha + \beta + \gamma$. Conclure.

Exercice 26 (*la formule d'Eratosthène*).

1. Tracer un segment $[IS]$ horizontal, I à gauche, S à droite. Prendre $IS = 5$ cm, mais cette valeur **ne doit pas être utilisée dans les calculs**, elle ne sert qu'à obtenir une figure grande et lisible.
2. Tracer un arc de cercle de centre I, d'ouverture $45°$, dont une extrémité est S, et situé au-dessus de la droite (IS).
3. Sur cet arc, placer le point A, tel que :

$$\widehat{SIA} = 30°$$

   Cette valeur de $30°$ **ne sera pas utilisée dans les calculs**.
4. Prolonger de quelques cm le segment $[IS]$ vers la droite.
5. Tracer le segment $[IA]$. Le prolonger ensuite de quelques cm au-delà de A. Marquer un point B à l'extrémité du prolongement.
6. Sur la droite issue de A, et parallèle à (IS), placer un point C, à droite de A.
7. Montrer qu'on a :

$$\widehat{BAC} = \widehat{AIS}$$

8. On note $\alpha = \widehat{BAC} = \widehat{AIS}$. On note ℓ la longueur du petit arc $\overset{\frown}{SA}$. On note $r = IS = IA$. Démontrer la **formule d'Eratosthène** :

$$r = \frac{180 \times \ell}{\pi \times \alpha}$$

   On pourra utiliser le tableau de proportionnalité des angles et des arcs :

angles en degrés	α	180
longueur des arcs	ℓ	πr

Exercice 27 (*méthode d'Eratosthène pour calculer le rayon de la Terre*).

Le Grec **Eratosthène**, était astronome, géographe, mathématicien, au III° siècle avant Jésus-Christ. Il vivait à Alexandrie d'Égypte, et fut directeur de la célèbre **bibliothèque d'Alexandrie**. Il avait entendu des voyageurs raconter qu'à Syène, le 21 juin à midi, on pouvait voir l'image du Soleil se refléter au fond d'un puits. Cela signifiait que le Soleil était alors exactement à la verticale du puits.

Dans l'énoncé de l'exercice précédent (ex. 26, p. 95), le point I représente le centre de la Terre. L'arc de cercle représente une partie du sol de la Terre. Le nombre r est le rayon de la Terre. Le point S représente la ville de Syène, en Haute-Égypte, située à peu près sur le tropique du Cancer. Le point A représente la ville d'Alexandrie.

Lors du solstice d'été, le 21 juin, on sait que le soleil est au zénit à Syène, et un rayon de soleil tombant à la verticale est représenté par la demi-droite $[IS)$. Au même instant, un rayon de soleil tombant sur Alexandrie est représenté par la demi-droite $[AC)$.

1. Expliquer pourquoi, dans l'énoncé de l'exercice précédent, on a pu supposer que les demi-droites $[IS)$ et $[AC)$ sont parallèles.

2. Expliquer ce que représente concrètement l'angle α pour un observateur situé à Alexandrie.
3. Eratosthène a mesuré α et il a trouvé $\alpha \approx 7^\circ$. Il a fait mesurer la distance ℓ par des voyageurs qui ont trouvé $\ell \approx 800$ km. Avec votre calculatrice, et les valeurs fournies de ℓ et α, calculer r en utilisant la formule d'Eratosthène :

$$r = \frac{180 \times \ell}{\pi \times \alpha}$$

4. On sait aujourd'hui que $r \approx 6360$ km. Comparez avec la valeur que vous avez calculée. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 28.

Soient A et B deux points d'un cercle de centre O. Soit le point C de la droite (AB), tel que $BC = BO$ et que B soit entre A et C. La droite (CO) coupe le cercle en deux points. On note D celui qui n'est pas entre O et C. On note $\alpha = \widehat{AOD}$ et $\beta = \widehat{ABO}$.

1. Calculer en fonction de β les angles du triangle OAB.
2. Calculer en fonction de β les angles du triangle OBC. Vérifier qu'on a

$$\widehat{BOC} = \frac{1}{2}\beta$$

3. En déduire qu'on a :

$$\alpha = \frac{3}{2}\beta$$

Théorème du demi-cercle

Exercice 29.

(unité au choix) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points : $A(0;4)$, $B(-2;-2)$, $C(4;0)$.
2. Tracer les segments $[CB]$ et $[CA]$.
3. Tracer le cercle de diamètre $[CB]$ et le cercle de diamètre $[CA]$.
4. Ces deux cercles se recoupent en un point qu'on note I. Placer le point I. Montrer, par les angles, que les points A, I, B sont alignés.

Exercice 30.

(unité au choix) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points : $A(0;4)$, $B(-2;-2)$, $C(4;0)$.
2. Tracer le triangle ABC.
3. Tracer le cercle de diamètre $[AB]$.
4. Ce cercle recoupe la droite (BC) en H. Montrer que la droite (AH) est une des hauteurs du triangle ABC.

Exercice 31.

1. Tracer un segment $[AB]$ horizontal, assez long.
2. Tracer le demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$, situé au-dessus de (AB).
3. Placer le point $M \in \mathscr{C}$, tel que :

$$\widehat{BAM} = 52^\circ$$

4. Tracer les segments $[MA]$ et $[MB]$. Montrer que AMB est un triangle rectangle.
5. **Calculer** l'angle $\widehat{ABM}$. Vérifier la valeur trouvée en mesurant avec le rapporteur.

Exercice 32.

Sur un cercle de centre I, on considère deux points A et B, tels que

$$(IA) \perp (IB)$$

Le cercles de diamètre $[IA]$ et $[IB]$ se recoupent en un point qu'on note J.

1. Dessiner la figure.
2. Montrer par les angles que les points B, J, A sont alignés.
3. Montrer que J est le milieu de $[AB]$.

Exercice 33.

(unité au choix)

1. Tracer un segment $[AB]$ horizontal, de longueur 8.
2. Tracer le demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$, situé au-dessus de (AB).
3. Placer le point $M \in \mathscr{C}$, tel que :

$$AM = 7$$

4. Tracer les segments $[MA]$ et $[MB]$. Montrer que AMB est un triangle rectangle.
5. Mesurer les angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{BAM}$.
6. Vérifier qu'ils sont complémentaires.

Réciproque du théorème du demi-cercle

Exercice 34.

1. Tracer un triangle ABC, assez grand.
2. Tracer la droite issue de C, et perpendiculaire à (CA).
3. Tracer la droite issue de B, et perpendiculaire à (BA).
4. Ces deux droites se coupent en I. Marquer le point I.
5. Montrer que le cercle de diamètre $[AI]$ passe par B et C.

Parallélogrammes

L'énoncé suivant (*voir* prop. 5, p. 84) permet de construire les sommets d'un parallélogramme avec un compas :

Proposition 35. *Si un quadrilatère a ses deux couples de côtés opposés égaux alors c'est un parallélogramme.*

Exercice 36.

(unité le cm)

1. Tracer un segment $[AB]$ horizontal de longueur 8.
2. Tracer, avec le compas et le rapporteur, le triangle ABD tel que :

$$AD = 5 \qquad \widehat{BAD} = 50^\circ$$

3. Utiliser la prop. 35, p. 98 pour construire le point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme de diagonale $[AC]$.
4. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en I. Marquer ce point.
5. Mesurer IA et IC. Vérifier que I est milieu de $[AC]$.
6. Vérifier de même que I est milieu de $[BD]$.

Exercice 37.

(unité le cm) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points suivants :

$$A(2;3) \qquad B(6;2) \qquad C(3;-1)$$

2. Utiliser la prop. 35, p. 98 pour construire le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme de diagonale $[BD]$
3. Mesurer les coordonnées de D.
4. Placer le point I milieu de $[BD]$. Vérifier que I est le milieu de $[AC]$.

Exercice 38.

(unité au choix)

1. Tracer un segment $[AB]$ horizontal de longueur 7.
2. Placer le point C tel que :

$$\widehat{BAC} = 30^\circ \qquad \widehat{ABC} = 70^\circ$$

3. Calculer l'angle $\widehat{ACB}$.
4. Utiliser la prop. 35, p. 98 pour construire le point D tel que $ADBC$ soit un parallélogramme de diagonale $[CD]$.
5. Mesurer l'angle $\widehat{ABD}$. Comment pouvait-on trouver cette valeur sans mesurer ?

Exercice 39.

(unité le cm) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points suivants :

$$A(-2;1) \qquad B(3;-3) \qquad I(2;2)$$

2. Construire les points C et D tels que $ABCD$ soit un parallélogramme de centre I.

Exercice 40.

1. Tracer un segment $[AB]$ oblique. Placer un point C, tel que le triangle ABC soit rectangle en B.
2. Placer le point D, tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Montrer que tous les angles du parallélogramme $ABCD$ sont droits.

Exercice 41.

(unité le cm) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points suivants :

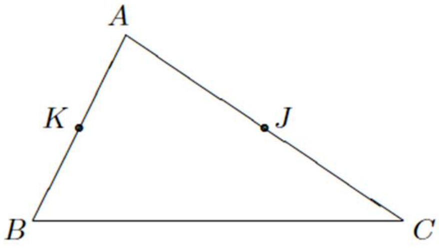
$$A(0;3) \qquad B(6;2) \qquad C(5;-3)$$

2. Tracer deux arcs de cercles pour construire le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme de diagonale $[BD]$
3. Mesurer les coordonnées de D.
4. Tracer les diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Marquer leur point d'intersection I. Mesurer les coordonnées x_I et y_I
5. Vérifier les formules :

$$x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_C) \qquad\qquad y_I = \frac{1}{2}(y_A + y_C)$$

Exercice 42.

On reprend la figure du th. 11, p. 84 et du cor. 12, p. 85. Les points J et K sont les milieux de $[AC]$ et $[AB]$. Soit d une droite. On considère les trois **énoncés** suivants :



$$E = \{J \in d\} \quad F = \{K \in d\} \quad G = \{d \parallel (BC)\}$$

Ces énoncés permettent de formuler symboliquement le th. 11 de la façon suivante :

$$E \text{ et } F \Rightarrow G$$

On demande de formuler symboliquement le cor. 12 avec E, F, G.

Symétrie centrale

Exercice 43.

(unité au choix)

1. Tracer en bleu un **triangle** ABC, pas trop grand, au milieu de la page.
2. Marquer un point I à l'intérieur de ce triangle.
3. On note r la symétrie de centre I (rotation d'un demi-tour). Construire les points :

$$A' = r(A) \qquad B' = r(B) \qquad C' = r(C)$$

4. Tracer en rouge le **triangle** $A'B'C'$.
5. Démontrer que le quadrilatère $ABA'B'$ est un **parallélogramme**. Colorier en jaune son **intérieur**.
6. Vérifier avec la règle qu'on a :

$$(AB) \mathbin{/\!\!/} (A'B')$$

7. En comparant avec le compas, vérifier qu'on a :

$$AB = A'B'$$

Exercice 44.

1. Écrire sur deux lignes les vingt-six lettres de l'alphabet, bien formées, en majuscules d'imprimerie.
2. Rayer celles qui n'ont pas de **centre de symétrie**.
3. Vérifier qu'il y a **six lettres** exactement ayant un centre de symétrie. Les reproduire et marquer leur centre de symétrie.

Exercice 45 (*frise*)**.**

(unité au choix) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points suivants :

$$A(0;0) \qquad B(2,0) \qquad C(2;2) \qquad D(0,2)$$

2. Les droites (AC) et (BD) se coupent en I. Placer le point I.
3. Soit $\mathscr{C}$ le **grand** arc de cercle de centre I et d'extrémités A et B. Tracer $\mathscr{C}$.
4. On note r la symétrie de centre B.
   a/ Construire les points :

$$A' = r(A) \qquad C' = r(C) \qquad D' = r(D) \qquad I' = r(I)$$

   b/ Tracer l'arc de cercle $r(\mathscr{C})$.
5. Sur une autre page, dessiner une frise en utilisant des arcs de cercles qui se raccordent comme $\mathscr{C}$ et $r(\mathscr{C})$.

Exercice 46 *(trèfle à quatre feuilles)*.

(unité au choix) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points suivants :
$$A(0;0) \qquad B(0;2) \qquad C(2;0) \qquad I(-1;1)$$
2. Soit $\mathscr{C}$ le **grand** arc de cercle de centre I et d'extrémités A et B. Tracer $\mathscr{C}$.
3. On note s la symétrie d'axe (BC).
   a/ Construire les points :
$$A' = s(A) \qquad I' = s(I)$$
   b/ Tracer l'arc de cercle $s(\mathscr{C})$
4. Compléter la figure pour obtenir un grand **trêfle à quatre feuilles**.

Exercice 47.

(unité au choix) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points suivants :
$$A(4;0) \qquad I(1;-2)$$
2. On note r la symétrie de centre I. Construire le point :
$$A' = r(A)$$
3. Mesurer sur la figure les coordonnées de A', et compléter les égalités suivantes :
$$x_{A'} = \qquad y_{A'} =$$
4. Calculer les demi-sommes suivantes :
$$\frac{x_{A'} + x_A}{2} \qquad \frac{y_{A'} + y_A}{2}$$
5. Comparer les deux nombres trouvés et les coordonnées de I.

Exercice 48.

(unité au choix) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points suivants :
$$A(3;3) \qquad B(-4;2) \qquad C(-1;-3) \qquad I(1;2)$$
2. On note r la symétrie de centre I. Construire les points :
$$A' = r(A) \qquad B' = r(B) \qquad C' = r(C)$$
3. Mesurer sur la figure les coordonnées des points A', B', C'.
4. Calculer les demi-sommes suivantes :
$$\frac{x_{A'} + x_A}{2} \qquad \frac{y_{A'} + y_A}{2}$$
5. Vérifier qu'on a :
$$x_I = \frac{x_{A'} + x_A}{2} \qquad y_I = \frac{y_{A'} + y_A}{2}$$
6. Écrire les formules analogues obtenues à partir des points B et C.

Exercice 49.

(unité au choix) On repère les points par abscisse et ordonnée. Considérons les points $I(0;0)$ et $J(0;-3)$ et notons :

- r_1 la **symétrie de centre** I.
- r_2 la **symétrie de centre** J.

1. Placer les points I et J.
2. On considère le point $A(3;1)$. Placer ce point.
   a/ Construire le point $A' = r_1(A)$.
   b/ Construire le point $A'' = r_2(A')$.
   c/ Vérifier qu'on a :

$$(AA'') \mathbin{/\!/} (IJ) \qquad \text{et} \qquad AA'' = 2 \times IJ$$

3. On considère le point $B(-5;4)$. Placer ce point.
   a/ Construire le point $B' = r_1(B)$.
   b/ Construire le point $B'' = r_2(B')$.
   c/ Vérifier qu'on a :

$$(BB'') \mathbin{/\!/} (IJ) \qquad \text{et} \qquad BB'' = 2 \times IJ$$

Exercice 50.

(unité de longueur arbitraire) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placez le point $C(0;0)$ à peu près au centre de la page.
2. Placez les points suivants :

$$A(-7;1) \quad B(-1;3) \quad D(-3;1)$$

3. Tracez les segments $[BA]$ et $[BC]$.
4. Construisez le point E, projection orthogonale de D sur (AB). Tracez $[ED]$.
5. On voit que les segments $[BA]$, $[BC]$, $[ED]$ forment une lettre F majuscule d'imprimerie. Construisez la figure symétrique de cette lettre par rapport au point C.

Exercice 51.

(unité le cm)

1. Tracer un triangle ABC tel qu'on ait :

$$BC = 6 \qquad CA = 5 \qquad AB = 7$$

2. Tracer deux **médiatrices** du triangle ABC. On note Ω leur point d'intersection.
3. Tracer le **cercle circonscrit** à ABC.
4. Mesurer sur la figure le rayon R de $\mathscr{C}$. Calculer ensuite R^2.
5. On démontre, en classe de 1$^{\text{re}}$, la **formule classique** qui donne le carré du rayon R du cercle circonscrit à un **triangle quelconque**, en fonction des longueurs a, b, c des côtés :

$$R^2 = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

a/ Pour notre triangle ABC, on pose $a = 6,\ b = 5,\ c = 7$. Calculer R^2 avec la formule précédente. Simplifier le plus possible la fraction obtenue et vérifier qu'on trouve :

$$R^2 = \frac{1225}{96} \approx 12{,}76$$

b/ Comparer ce résultat avec celui trouvé à la question 4.

Exercice 52.

(unité le cm)

1. Tracer un triangle ABC tel qu'on ait :

$$BC = 3 \qquad CA = 4 \qquad AB = 5$$

2. Énoncer la **réciproque du théorème du demi-cercle**.
3. On admet que notre triangle ABC est **rectangle** en C. Par la réciproque du théorème du demi-cercle, déterminer et tracer son **cercle circonscrit**.
4. Calculer le rayon R de ce cercle. Vérifier qu'on trouve :

$$R = \frac{5}{2}$$

5. On reprend la formule terrible de l'ex. 51, p. 102 qui donne le carré du rayon R du cercle circonscrit d'un triangle, en fonction des longueurs a, b, c de ses côtés :

$$R^2 = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \tag{1}$$

Calculer R^2 avec cette formule en prenant $a = 3,\ b = 4,\ c = 5$. Simplifier le plus possible la fraction obtenue et vérifier qu'on trouve :

$$R^2 = \frac{25}{4} \qquad \text{donc} \qquad R = \frac{5}{2}$$

6. Pourquoi à la question 4. a-t-on pu calculer R sans utiliser la formule (1) ?

10 Correction des questions

p. 80

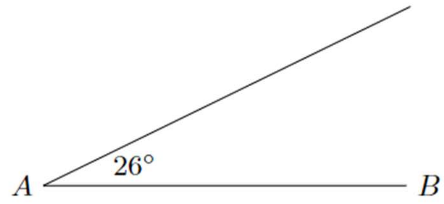
• Les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux. Notons α leur valeur commune. Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180°, on en déduit :

$$\begin{aligned}\alpha+\alpha+\alpha &= 180\\ 3\alpha &= 180\\ \alpha &= \frac{180}{3} = 60\end{aligned}$$

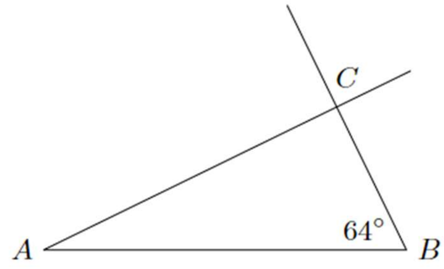
Donc, chacun des angles d'un triangle équilatéral vaut 60°.

p. 81

1/ On trace d'abord $[AB]$ horizontal, de longueur arbitraire. Avec le rapporteur, on trace ensuite une demi-droite issue de A qui fait un angle de 26° avec la demi-droite $[AB)$:



On trace alors une demi-droite issue de B qui fait un angle de 64° avec la demi-droite $[BA)$. Le point C se trouve à l'intersection des deux demi-droites tracées :



2/ Notons $x = \widehat{C}$ le troisième angle du triangle ABC. D'après le théorème sur la somme des angles, on a :

$$x + 26 + 64 = 180$$

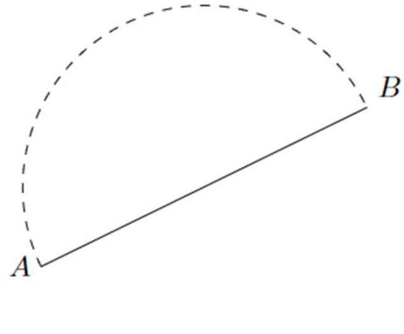
Ce que l'on résout :

$$\begin{aligned}x+90 &= 180\\ x &= 180-90\\ x &= 90\end{aligned}$$

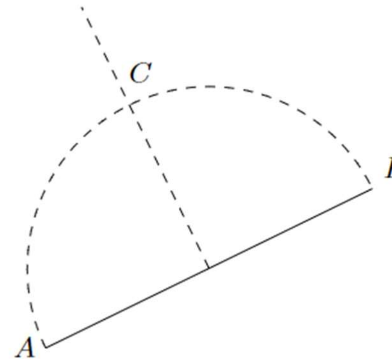
Donc $\widehat{C}$ est un angle droit

cqfd

3/ a/ On trace $[AB]$. Pour que le triangle ABC soit rectangle en C, il suffit que C soit situé sur un demi-cercle de diamètre $[AB]$ (*voir* le théorème du demi-cercle, th.1, p. 82). On trace donc un tel demi-cercle :



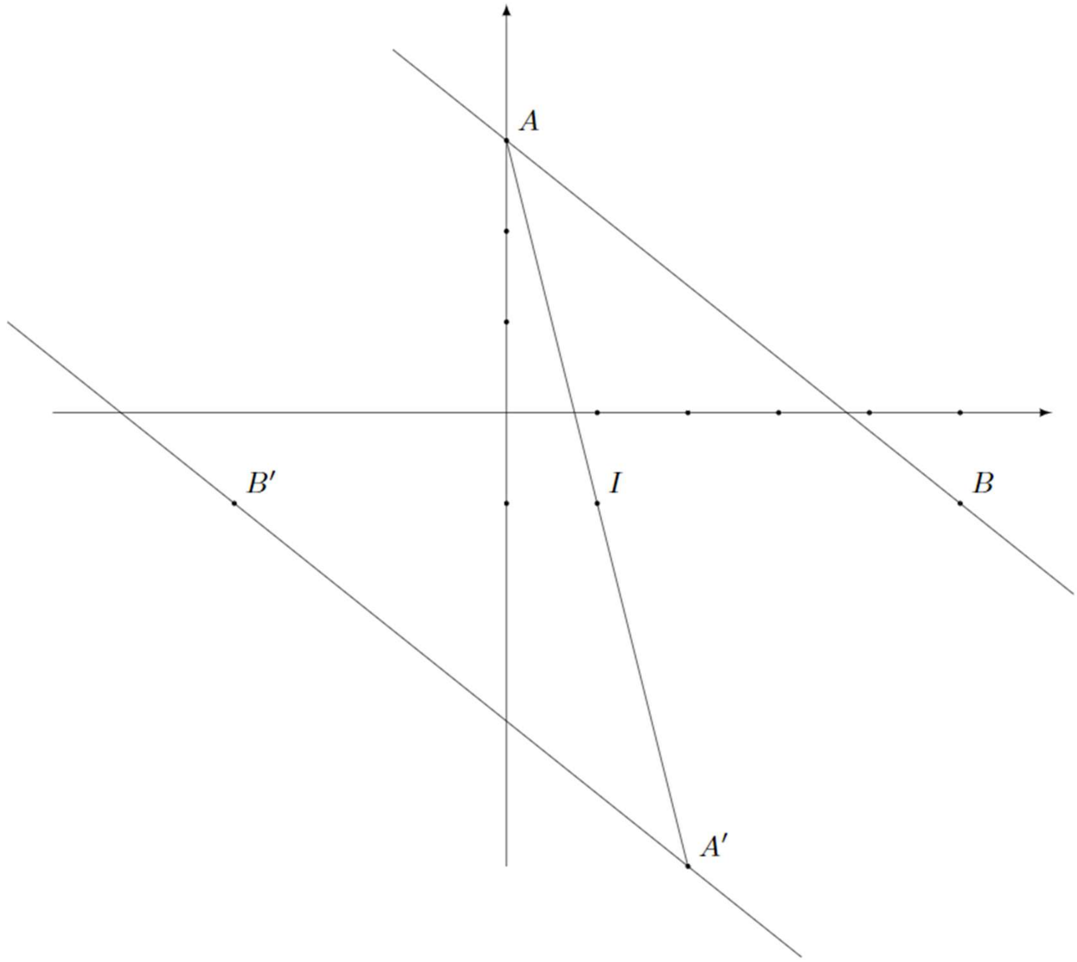
Puisque l'on veut que le triangle ABC soit isocèle en C, il suffit que C soit situé sur la médiatrice de $[AB]$. On trace donc cette médiatrice, soit à l'équerre, soit au compas. Le point C se trouve à l'intersection de la demi-médiatrice et du demi-cercle :



b/ On sait que dans un triangle **rectangle** et **isocèle**, les angles à la base valent 45°. On a donc :

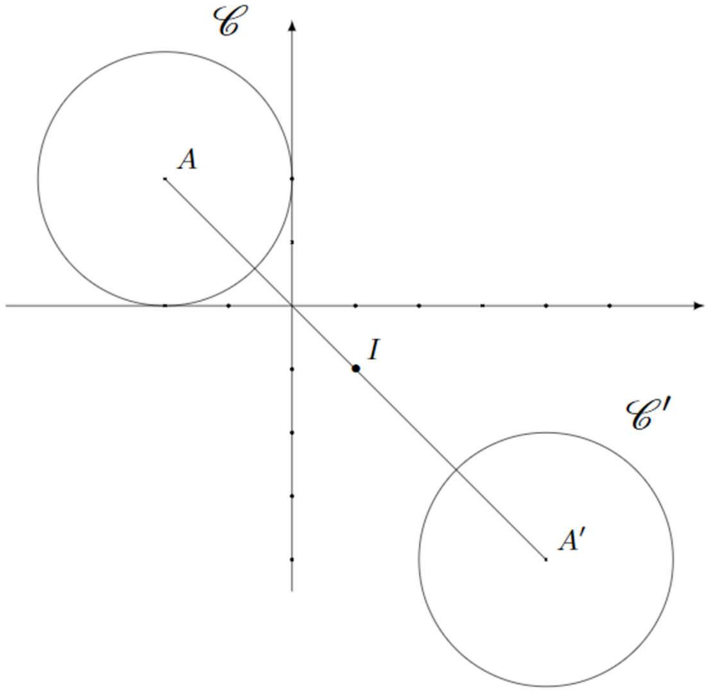
$$\widehat{ACB} = 90 \qquad \widehat{CAB} = \widehat{CBA} = 45$$

p. 86



Pour obtenir le symétrique A' de A, on reporte au compas la longueur IA, sur la droite (IA), de l'autre côté de A.
On procède de même pour obtenir le symétrique B' de B

p. 87

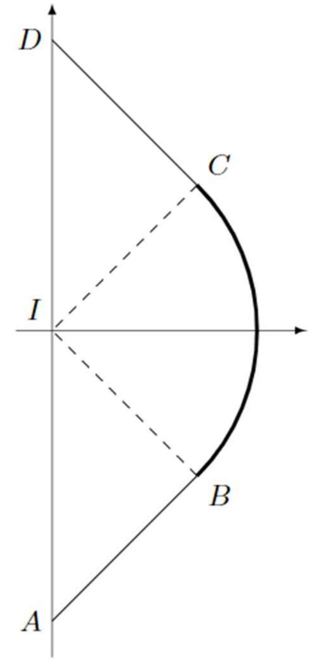


1/ Pour obtenir le symétrique A' de A, on reporte au compas la longueur IA, sur la droite (IA), de l'autre côté de A. Le cercle $\mathscr{C}'$ a pour centre A' et pour rayon 2.
2/ On mesure sur la figure les coordonnées $A'(4; -4)$.

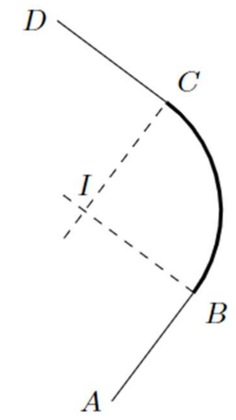
11 Correction des exercices

Ex. 1, p. 88.

On trace l'arc de cercle comme indiqué. On vérifie que les angles $\widehat{IBA}$ et $\widehat{ICD}$ sont droits.



Ex. 2, p. 88.

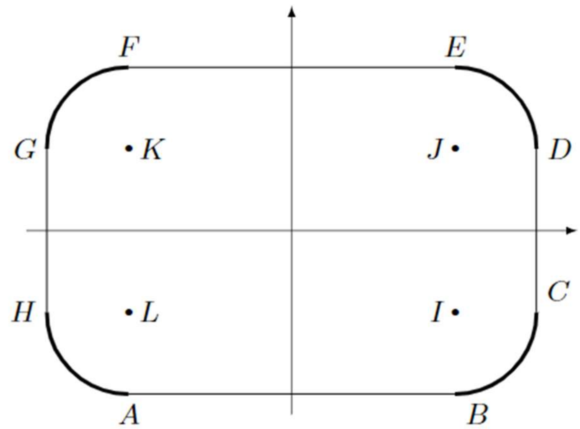


On trace l'arc de cercle $\widehat{BC}$ comme indiqué. On vérifie que la courbe $ABCD$ est bien **lisse**, car l'arc

$$\widehat{BC}$$

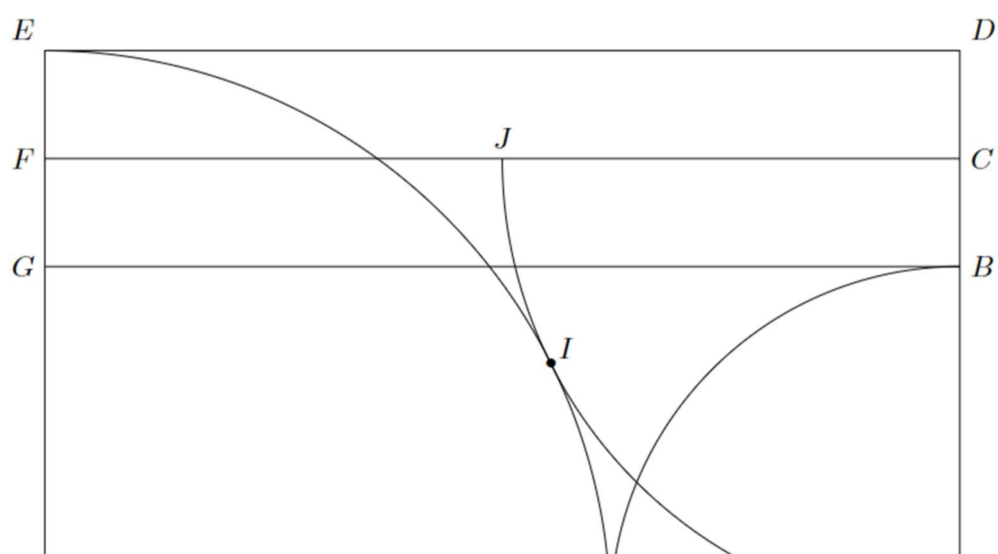
est exactement dans le prolongement de $[AB]$ en bas, et de $[CD]$ en haut.

Ex. 3, p. 88.



Le tracé de l'arc $\widehat{BC}$ est expliqué dans l'énoncé. On a tracé les arcs de cercle en traits forts.
Le centre J de l'arc $\widehat{DE}$ est le symétrique de I par rapport à l'axe des abscisses.
Les centre K et L des deux autres arcs sont les symétriques de J et I par rapport à l'axe des ordonnées

Ex. 4, p. 89. Voici la figure :

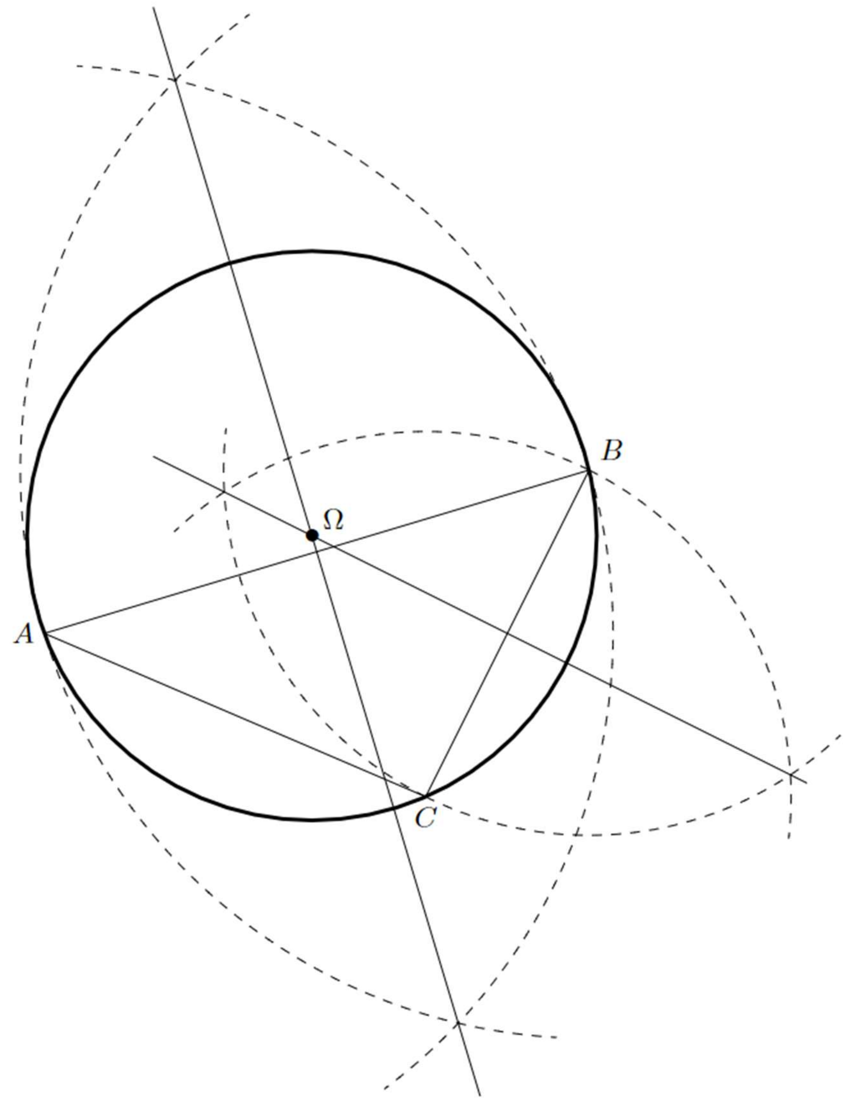


Ex. 5, p. 89. Pour des raisons de mise en page, nous avons tracé la figure à échelle réduite, et pour l'alléger, nous n'avons pas indiqué les axes du repère.

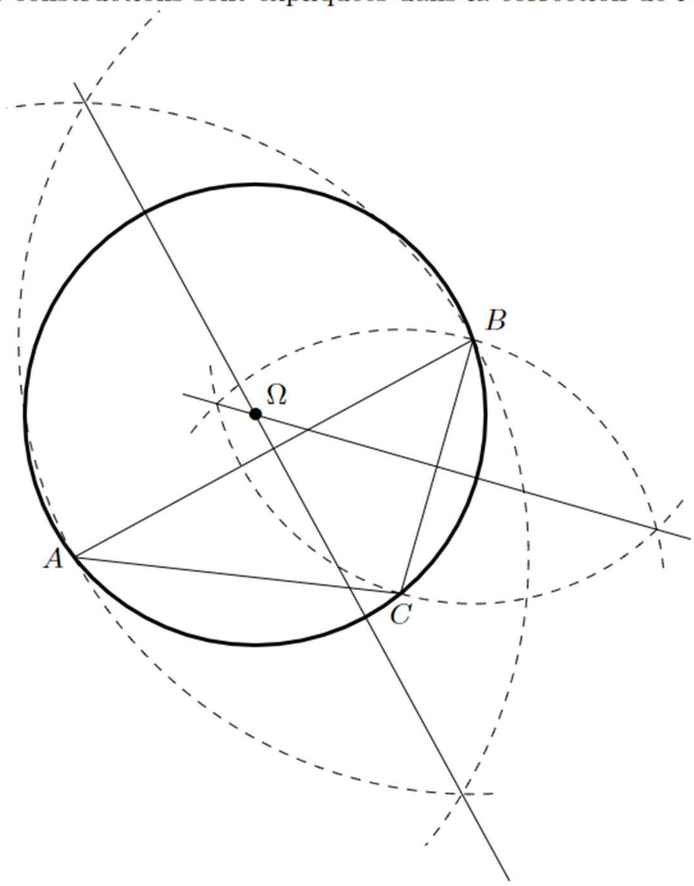
Comme on l'a vu en classe de 6[e], la construction à la règle et au compas d'une médiatrice demande beaucoup de soin. Pour la médiatrice de $[AB]$, nous avons piqué en A, ouvert le compas jusqu'en B, et tracé un premier arc de cercle. Puis nous avons piqué en B, ouvert le compas jusqu'en A, et tracé un second arc de cercle. Les deux arcs ayant **même rayon**, leurs points d'intersection sont à égale distance de A et B, ils sont donc sur la médiatrice, ce qui permet de la tracer.

Nous conseillons au lecteur de dessiner avec soin sa propre figure à l'échelle indiquée de 1 cm sur les deux axes. À la fin, il trouvera :

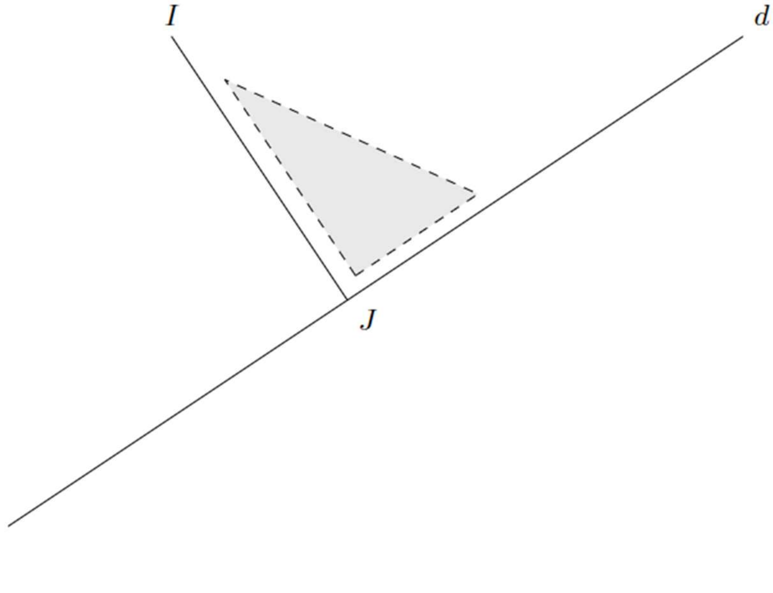
$$\Omega A = \Omega C \approx 5{,}2$$



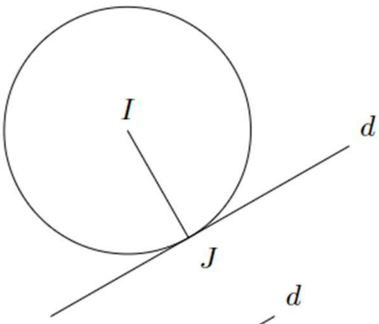
Ex. 6, p. 89. Les constructions sont expliquées dans la correction de l'ex. 5, p. 89.



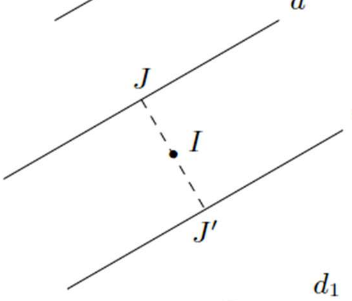
Ex. 7, p. 90. 1. On note J la projection orthogonale de I sur d. Pour construire J, on peut utiliser l'équerre :



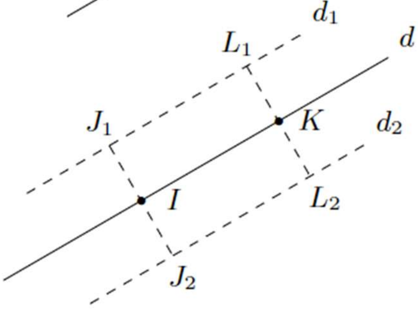
D'après le cours (déf. 3, p. 78), le cercle de centre I et **tangent** à d passe par J. Pour le tracer, on pique donc le compas en I, on ouvre jusqu'à J, et on tourne :



2. Issue d'un point J de d, on trace la perpendiculaire à d. Elle est aussi perpendiculaire à d' puisque d et d' sont parallèles. Elle coupe d' en J'. Le milieu I de $[JJ']$ répond à la question.



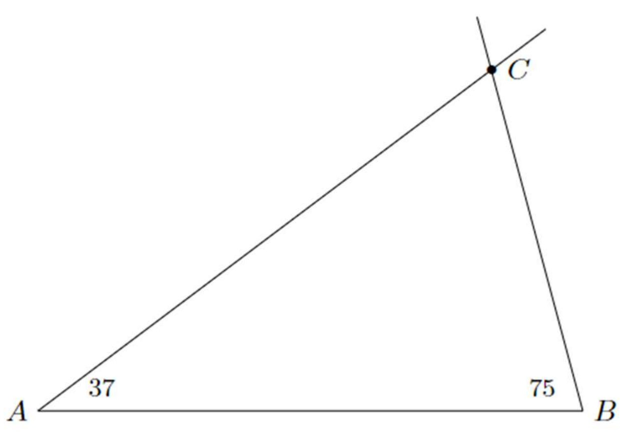
3. On suppose $d = (IK)$. Sur la perpendiculaire issue de I à d, on considère les deux points J_1 et J_2 situés à 2 cm de I. Sur la perpendiculaire issue de K à d, on considère les deux points L_1 et L_2 situés à 2 cm de K.
Les droites (J_1L_1) et (J_2L_2) répondent à la question.



Ex. 8, p. 90. 1. et 2. Avec le rapporteur et la règle, on trace la demi-droite issue de A et faisant avec $[AB)$ un angle de 37°. Puis la demi-droite issue de B et faisant avec $[BA)$ un angle de 75°. Le point C se trouve à l'intersection des deux demi-droites.

3. Notons $x = \widehat{C}$. On sait que la somme des angles d'un triangle vaut 180° (*voir* th. 1, p. 80). On a donc :

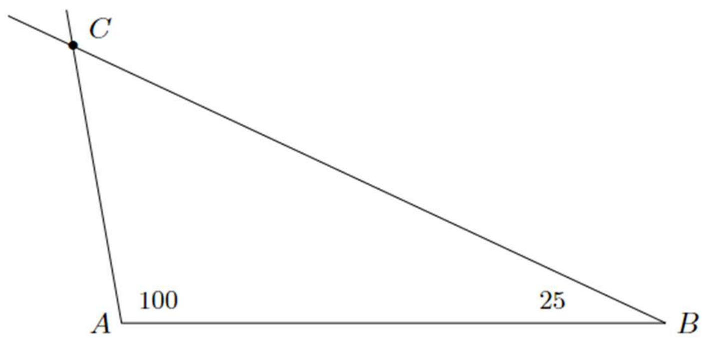
$$\begin{aligned} 37 + 75 + x &= 180 \\ 112 + x &= 180 \\ x &= 180 - 112 = 68 \end{aligned}$$



Ex. 9, p. 90. 1. et 2. Pour les constructions, *voir* les explications données dans la correction de l'ex. 8, p. 90.

3. Notons $x = \widehat{C}$. Puisque que la somme des angles d'un triangle vaut 180°, on a :

$$\begin{aligned} 100 + 25 + x &= 180 \\ 125 + x &= 180 \\ x &= 180 - 125 = 55 \end{aligned}$$



4. On vérifie cette valeur de $\widehat{C}$ en mesurant sur la figure.

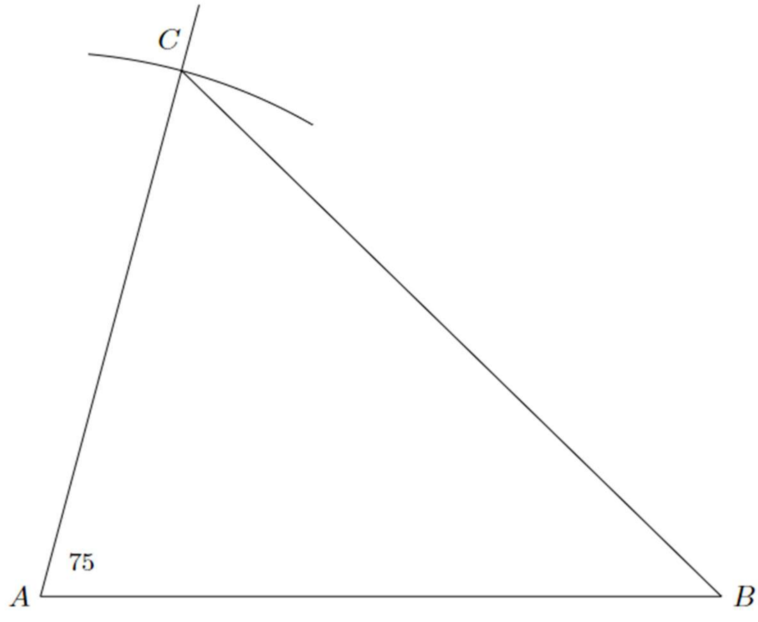
Ex. 10, p. 90. 1. et 2. Avec le rapporteur et la règle, on trace la demi-droite issue de A et faisant avec $[AB)$ un angle de 75°. On pique en A, on ouvre de 4 cm, et on trace un petit arc de cercle qui coupe la demi-droite. L'intersection est le point C.
3. On mesure et on trouve :

$$\widehat{B} \approx 44^\circ \qquad\qquad \widehat{C} \approx 61^\circ$$

4. On a donc :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 75 + 44 + 61 = 180$$

C'est bien la valeur attendue.



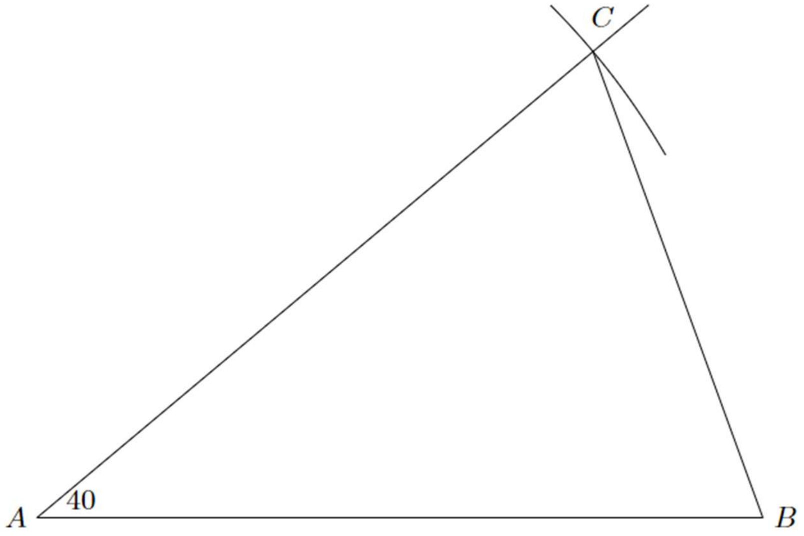
Ex. 11, p. 90. 1. et 2. On a expliqué dans la correction de l'ex. 10, p. 90 le tracé du point C avec le rapporteur, la règle et le compas.
3. Notons :

$$x = \widehat{B} = \widehat{C}$$

On applique la formule donnant la somme des angles d'un triangle :

$$x + x + 40 = 180$$

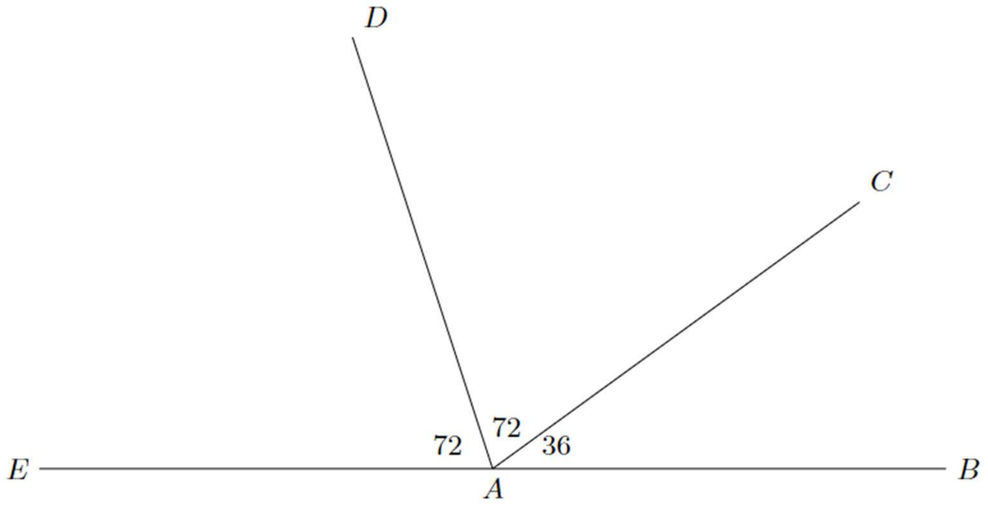
On en déduit $x = 70°$.



Ex. 12, p. 91. 5. On a :

$$\widehat{BAE} \;=\; \widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DAE} = 36 + 72 + 72 = 36 + 144 = 180$$

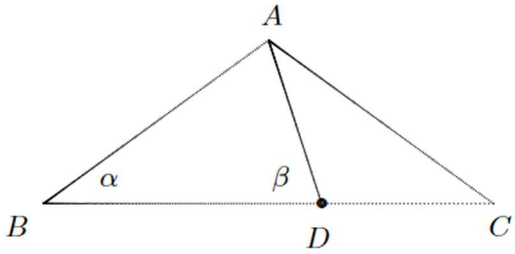
On en déduit, par la prop. 5 p. 79, que les points E, A, B sont alignés.



Ex. 13, p. 91.

Puisque ABC est isocèle en A, on a

$$\alpha = \widehat{ACB}$$



Puisque ABD est isocèle en B, on a

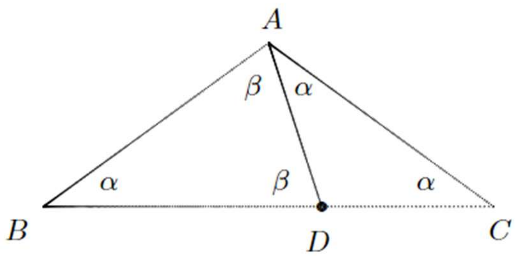
$$\beta = \widehat{BAD}$$

Puisque ADC est isocèle en D, on a

$$\alpha = \widehat{DAC}$$

On peut donc compléter les marques d'angles sur la figure. On applique ensuite le théorème sur la somme des angles dans le triangle ABC et on obtient :

$$3\alpha + \beta = 180 \qquad (1)$$



puis dans le triangle ABD et on obtient :

$$\alpha + 2\beta = 180 \qquad (2)$$

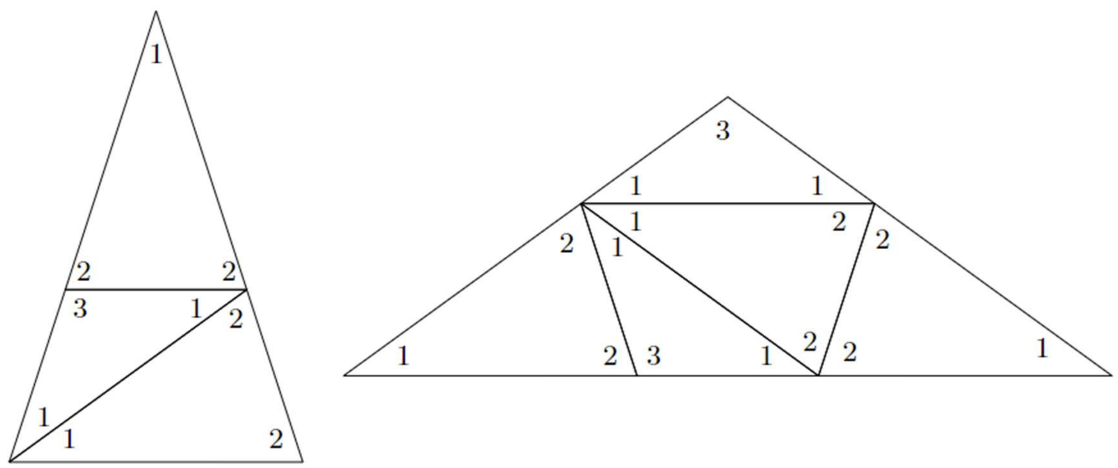
De l'équation (1) on déduit : $\beta = 180 - 3\alpha$. On reporte cette expression de β dans (2) et on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha + 2(180 - 3\alpha) &= 180 \\ \alpha + 2 \times 180 - 6\alpha &= 180 \\ -5\alpha + 180 &= 0 \\ 5\alpha &= 180 \\ \alpha &= \frac{180}{5} = \frac{360}{10} = 36 \end{aligned}$$

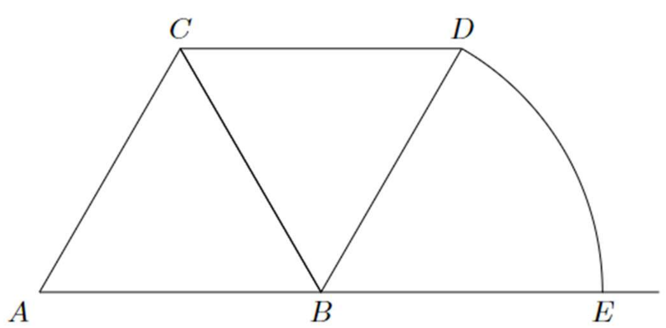
On reporte cette valeur de α dans (1) et on obtient :

$$\begin{aligned} 3 \times 36 + \beta &= 180 \\ 108 + \beta &= 180 \\ \beta &= 180 - 108 = 72 \end{aligned}$$

Ex. 14, p. 91. Voici deux pavages possibles d'un grand triangle isocèle, dans lesquels les chiffres 1, 2, 3 désignent les angles α, 2α, 3α.



Ex. 15, p. 92. On prolonge le segment $[AB]$ vers la droite, et on reporte la longueur BD au compas pour avoir le point E :



Puisque les angles d'un triangle équilatéral valent 60°, on a :

$$\widehat{ABE} = \widehat{ABC} + \widehat{CBD} + \widehat{DBE} = 60 + 60 + 60 = 180^\circ$$

L'angle $\widehat{ABE}$ est donc plat. On en déduit que A, B, E sont alignés.

Ex. 16, p. 92.

Puisque ABC est isocèle en A, on a

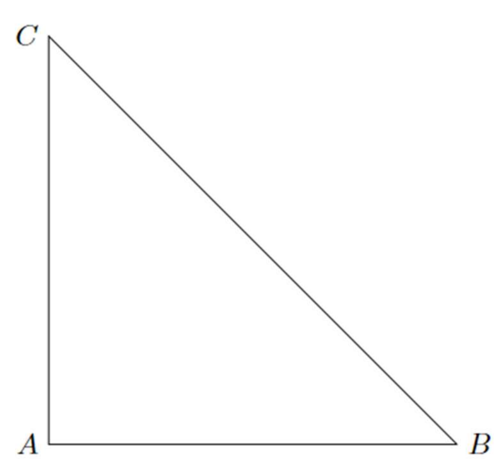
$$\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$$

Puisque $(AC) \perp (AB)$, on a

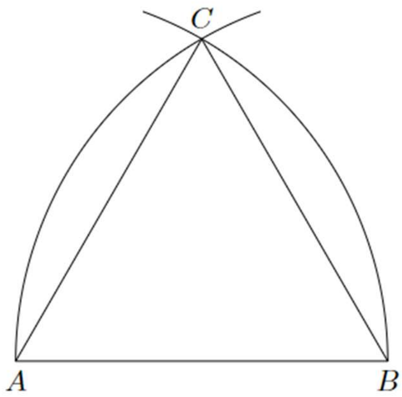
$$\widehat{CAB} = 90$$

Notons $x = \widehat{ABC}$. On applique le théorème sur la somme des angles et on obtient :

$$\begin{aligned} x + x + 90 &= 180 \\ 2x &= 90 \\ x &= 45^\circ \end{aligned}$$

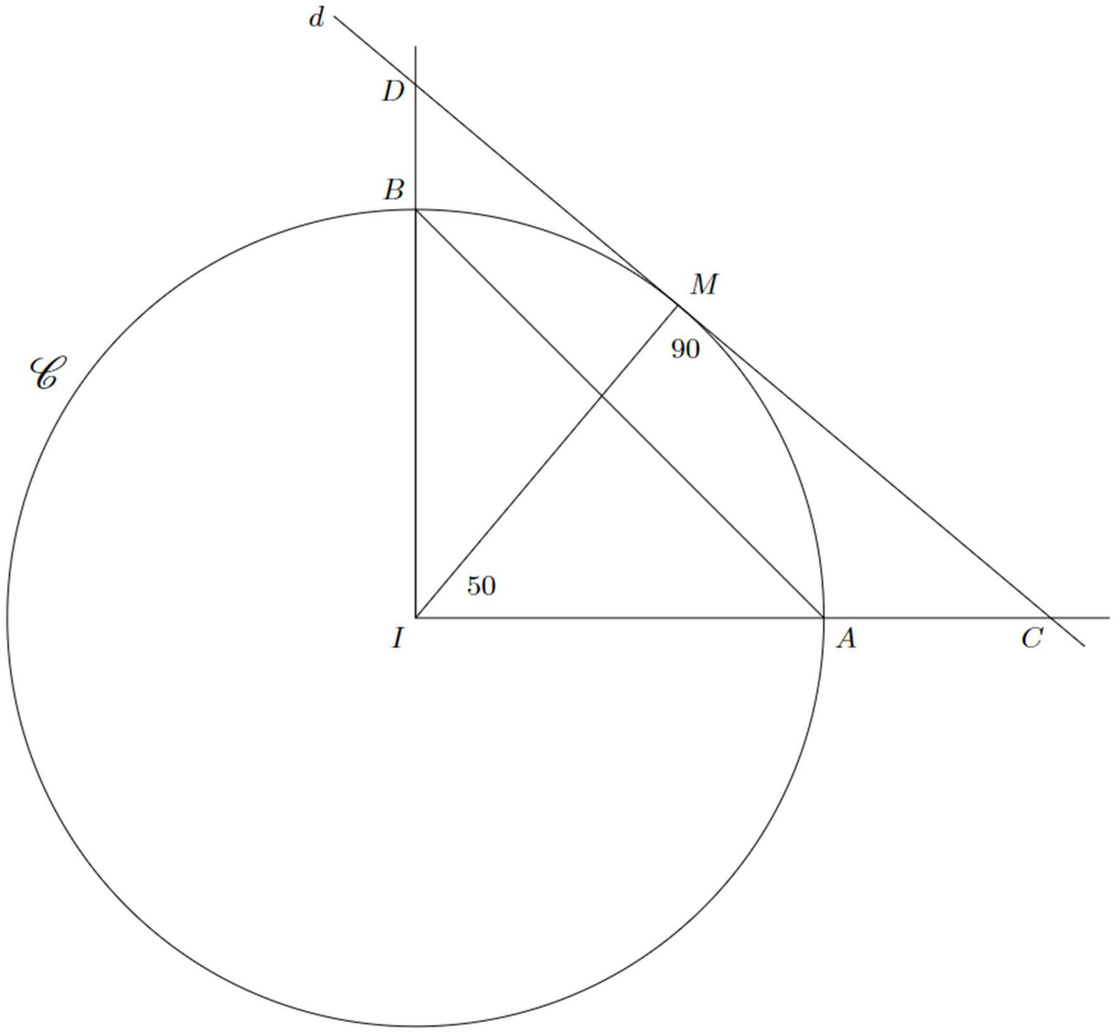


Ex. 17, p. 92.



On trace un triangle équilatéral ABC de base $[AB]$ en intersectant deux arcs de rayon AB, centrés l'un en A, l'autre en B.
On mesure les trois angles du triangle ABC, et on trouve qu'ils valent $60°$ chacun, conformément au cor. 4, p. 80 vu en cours.

Ex. 18, p. 92.



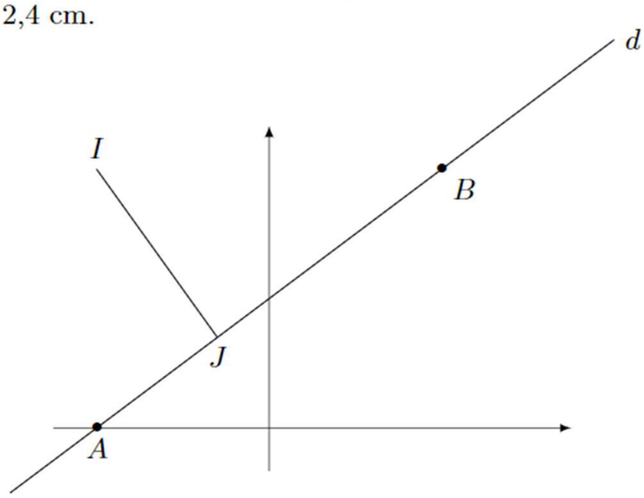
La somme des angles du triangle IMC vaut :

$$50 + 90 + \widehat{C} = 180$$

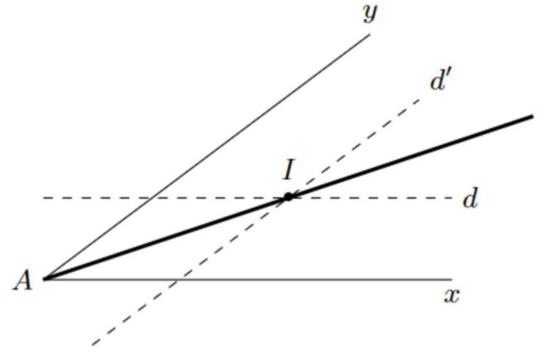
On en déduit $\widehat{C} = 40$. Par ailleurs, le triangle ICD étant rectangle en I, ses angles aigus $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ sont complémentaires, d'après le cor. 6, p. 81 du cours. On en déduit :

$$\widehat{D} = 90 - \widehat{C} = 90 - 40 = 50$$

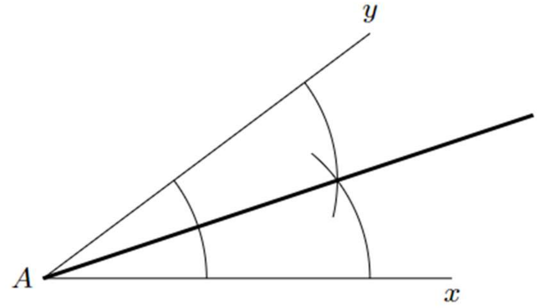
Ex. 19, p. 93. On note J la projection orthogonale de I sur d. On peut construire J avec l'équerre (*voir* p. 109, la correction de l'ex. 7). La distance de I à d. est IJ. On mesure sur la figure $IJ = 2{,}4$ cm.



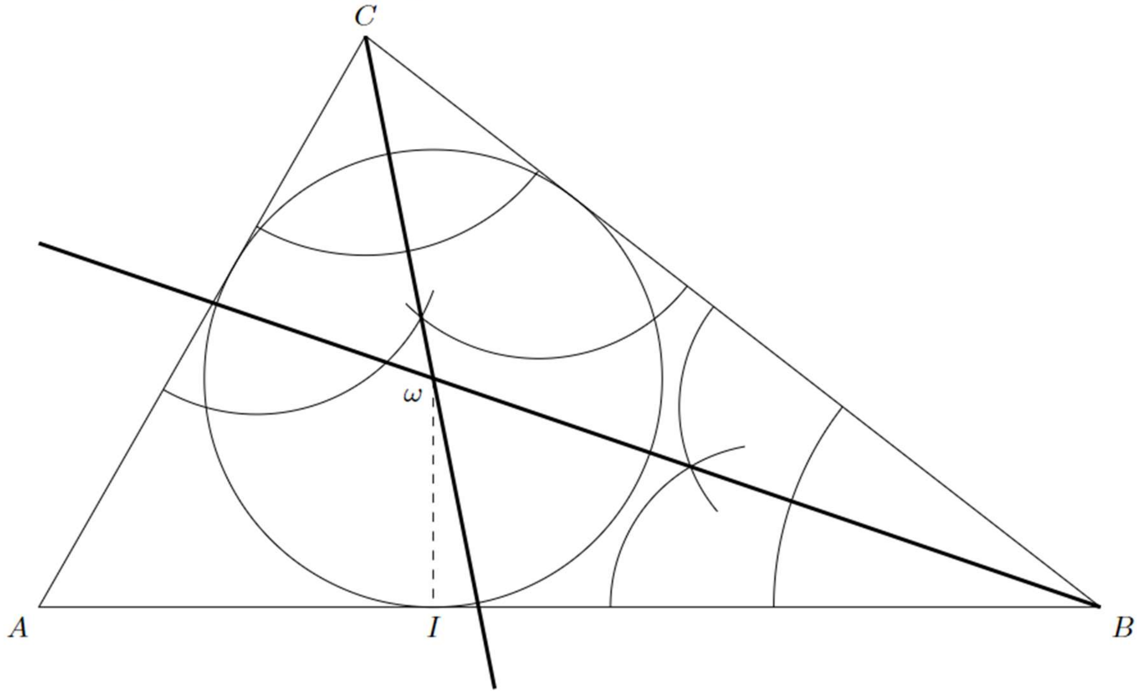
Ex. 20, p. 93. 1.On choisit une longueur, par exemple 1 cm. On trace la droite d, parallèle à $[Ax)$, située au-dessus, à 1 cm de distance, et la droite d', parallèle à $[Ay)$, située en-dessous, à 1 cm de distance. Ces droites auxiliaires d et d' se coupent en un point I situé à 1 cm des droites (Ax) et (Ay), et donc équidistant de ces deux droites. Par la prop. 4, p. 81, on en déduit que I est sur la bissectrice de $\widehat{xAy}$. Finalement, cette bissectrice est la demi-droite $[AI)$.



2. La construction **classique** d'une bissectrice se fait à la règle et au compas. Elle est expliquée dans notre cours de 6^{e}. Rappelons-la : on pique en A, on trace un arc de cercle qui coupe $[Ax)$ et $[Ay)$, chacune en un point. On pique sur l'un des deux points, et on trace un arc de cercle. On pique sur l'autre point, et avec la **même ouverture** de compas, on trace un second arc de cercle. L'intersection de ces deux arcs est sur la bissectrice.



Ex. 21, p. 93. On trace les bissectrices à la règle et au compas. Leur intersection ω est le centre du cercle inscrit. Notons I la projection orthogonale de ω sur $[AB]$. Le cercle inscrit a pour centre ω et passe par I.



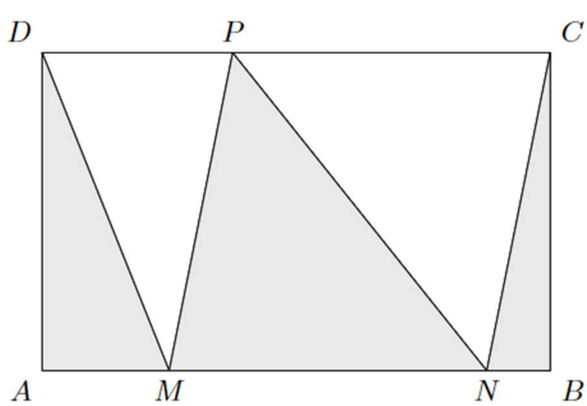
Ex. 22, p. 93. Choisissons pour les triangles DMP et PNC les bases $DP = c$, $PC = a - c$, et pour hauteur commune $BC = b$. On a :

$$S_1 = \frac{1}{2} \times c \times b \qquad S_2 = \frac{1}{2} \times (a-c) \times b$$

et donc :

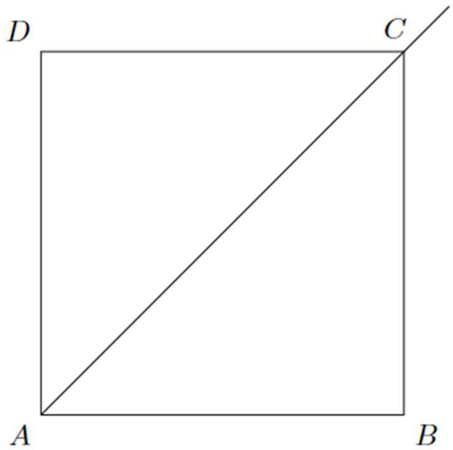
$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \frac{1}{2} \times c \times b + \frac{1}{2} \times (a-c) \times b \\ &= \frac{1}{2} \times (cb + ab - cb) = \frac{1}{2} ab \end{aligned}$$

L'aire totale des deux **dents blanches** vaut donc la moitié de l'aire du rectangle. Ce qui implique que l'aire totale des deux **dents grises** vaut aussi la moitié de l'aire du rectangle. On en déduit que les **deux** dents blanches ensemble, et les **trois** dents grises ensemble ont la même aire.



CORRIGÉS

Ex. 23, p. 93.



2. et 3. On a $BA = BC$, donc ABC est isocèle en B. Ses angles à la base sont donc égaux. Posons :

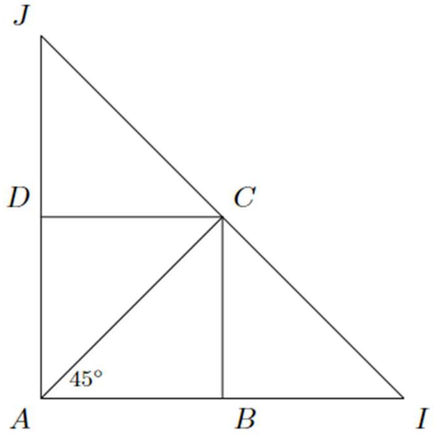
$$x = \widehat{BAC} = \widehat{BCA}$$

On a : $x + x + 90 = 180$ d'où $x = 45°$.
4. Ayant admis qu'on a aussi $\widehat{DAC} = 45°$, on a donc :

$$\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$$

Donc la demi-droite $[AC)$ est bissectrice de $\widehat{BAD}$.

Ex. 24, p. 94



2. Puisque $(IJ) \perp (AC)$, le triangle ACI est rectangle en C. De plus, d'après la propriété des diagonales d'un carré (*voir* ex. 23, p. 93) on a $\widehat{CAI} = 45°$. Comme dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux, on a :

$$\widehat{CIA} = \widehat{CAI} = 45°$$

3. Le triangle rectangle AIJ est rectangle en A. On vient de démontrer que son angle $\widehat{I}$ à la base vaut 45°. Par la somme des angles, on en déduit que :

$$\widehat{J} = 45°$$

Donc $\widehat{J} = \widehat{I}$, ce qui prouve que AIJ est isocèle en A.

Ex. 25, p. 94. 2. L'angle β est un angle du triangle équilatéral BCI. Il vaut donc 60.
3. L'angle γ est un des angles à la base du triangle isocèle ABI, calculons d'abord l'angle principal $\widehat{ABI}$. On a :

$$\widehat{ABI} = \widehat{ABC} - \widehat{IBC} = 90 - 60 = 30$$

La somme des angles du triangle ABI est donc :

$$\gamma + \gamma + 30 = 180$$

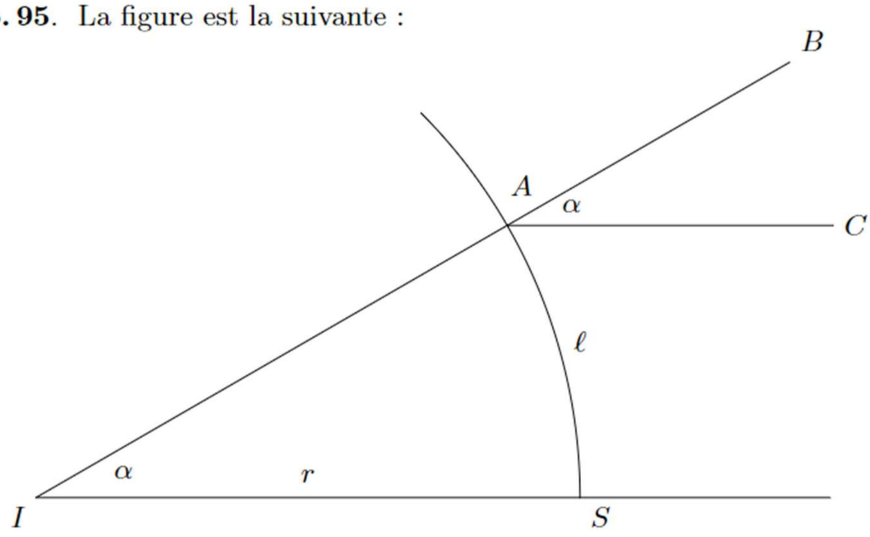
On résout et on trouve $\gamma = 75$.
4. On est maintenant en mesure de calculer :

$$\widehat{JIA} = \alpha + \beta + \gamma = 45 + 60 + 75 = 180$$

Donc $\widehat{JIA}$ est plat. On en déduit que A, I et J sont alignés.

cqfd

Ex. 26, p. 95. La figure est la suivante :



7. Comme les droites (IS) et (AC) sont parallèles, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{AIS}$ sont correspondants. Ils sont donc égaux.
8. On égale les produits en croix du tableau :

$$\alpha \times \pi \times r = 180 \times \ell$$

On divise par $\alpha \times \pi$ des deux côtés, et on obtient la formule attendue $\boxed{r = \dfrac{180 \times \ell}{\pi \times \alpha}}$

Ex. 27, p. 95 1. Les demi-droites $[IS)$ et $[AC)$ représentent des rayons du Soleil, aboutissant aux points A et S de la surface de la Terre. Ces rayons partent du Soleil, mais comme le Soleil est très loin, ils sont presque parallèles à la vue.

2. La demi-droite $[IA)$ (ou $[IB)$) passe par le centre I de la Terre pour aboutir à la surface de la Terre en A. Elle est donc **verticale**, relativement à ce point. On a vu que la demi-droite $[AC)$ est un rayon du Soleil aboutissant en A. L'angle α est donc l'angle entre la verticale du point A et la direction du Soleil.

3. et 4. La calculette donne $r = 6548$. Cette valeur est proche de la valeur $r = 6360$ donnée par l'astronomie actuelle. La **précision** des calculs d'Eratosthène est remarquable. Sa **méthode**, très ingénieuse, est encore plus remarquable.

CORRIGÉS

Ex. 28, p. 96 1. Puisque le triangle OBC est isocèle en B, on a :

$$\widehat{BOC} = \widehat{BCO}$$

Notons z la valeur commune de ces deux angles. Notons x et y les deux angles inconnus du triangle OAB. Comme ce triangle est isocèle en O, on a $x = \beta$, et donc, par la somme des angles $\boxed{y = 180 - 2\beta}$.
2. Puisque A, B, O sont alignés, on a :

$$\widehat{OBC} = 180 - \beta$$

et par la somme des angles dans le triangle OBC, il vient :

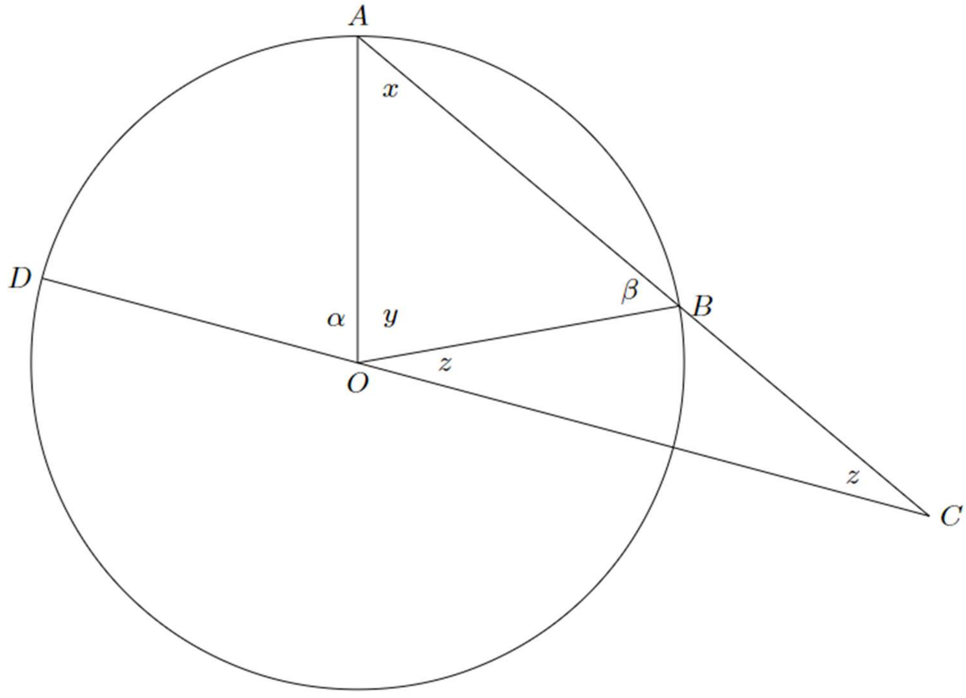
$$(\cancel{180} - \beta) + 2z = \cancel{180}$$

d'où $\boxed{z = \frac{1}{2}\beta}$.

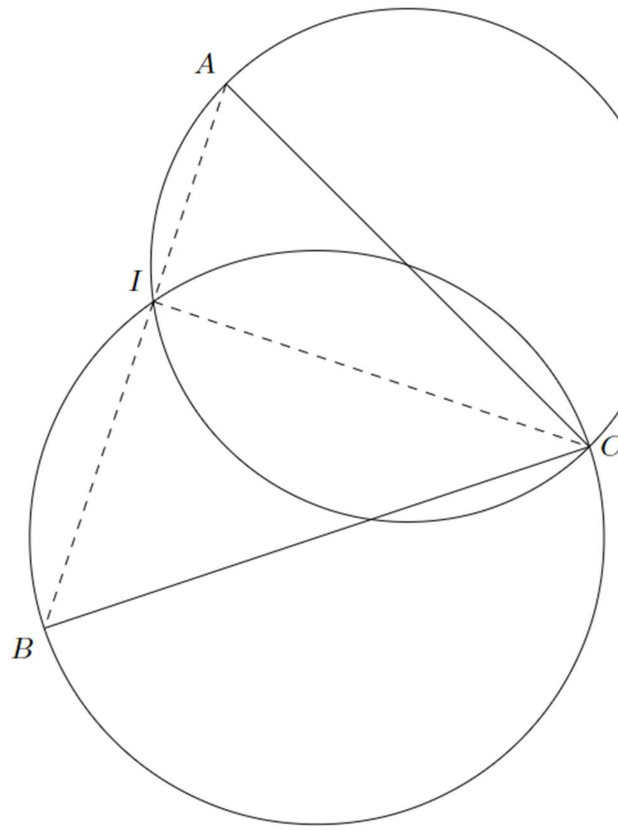
3. Par alignement des points D, O, C, on a ensuite :

$$\begin{aligned} \alpha + y + z &= 180 \\ \alpha + (\cancel{180} - 2\beta) + (\frac{1}{2}\beta) &= \cancel{180} \\ \alpha &= 2\beta - \frac{1}{2}\beta = \frac{3}{2}\beta \end{aligned}$$

On trouve donc $\boxed{\alpha = \frac{3}{2}\beta}$ qui est bien la valeur attendue.



Ex. 29, p. 96



On applique le théorème du demi-cercle (*voir* th. 1, p. 82) au cercle de diamètre $[BC]$. On obtient :

$$(IB) \perp (IC)$$

Si on applique ce théorème au cercle de diamètre $[AC]$, il vient :

$$(IA) \perp (IC)$$

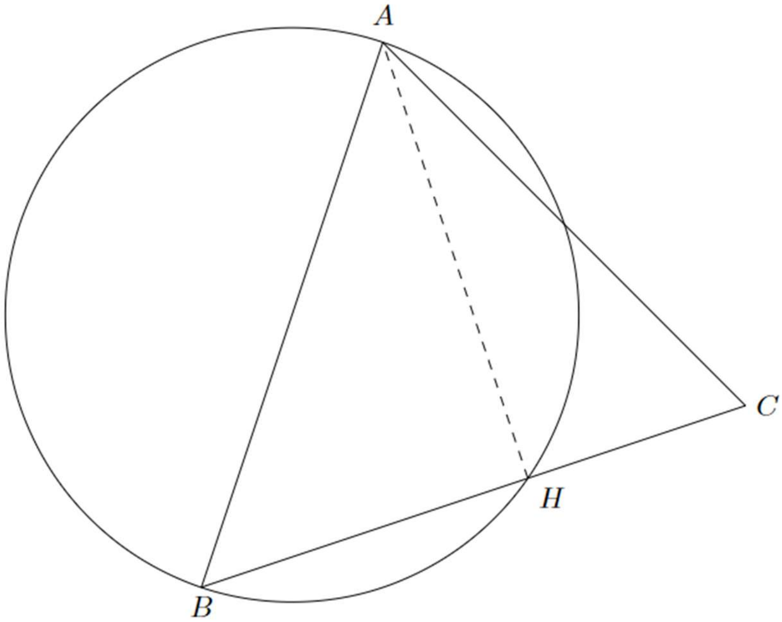
Donc :

$$\widehat{AIB} = \widehat{AIC} = \widehat{CIB} = 90 + 90 = 180^\circ$$

On en déduit que l'angle $\widehat{AIB}$ est plat, donc les points A, I, B sont alignés.

CORRIGÉS

Ex. 30, p. 96



On applique le théorème du demi-cercle (*voir* th. 1, p. 82). On obtient :

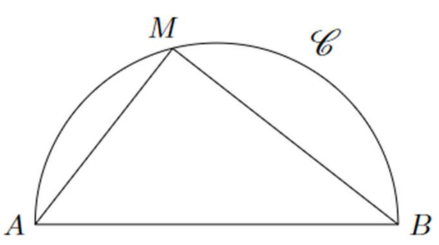
$$(HA) \perp (HB)$$

Ce qui prouve que la droite (AH) est hauteur relative à A du triangle ABC.

Ex. 31, p. 97

4. On applique le théorème du demi-cercle (*voir* th. 1, p. 82) et on trouve :

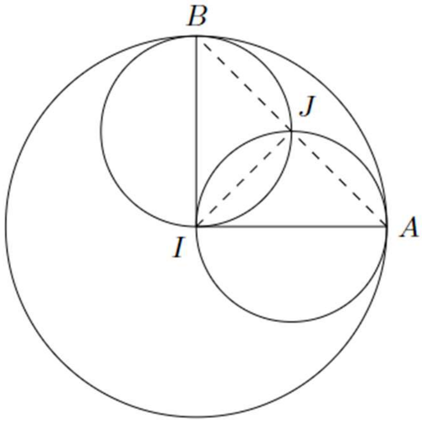
$$(MA) \perp (MB)$$



Donc le triangle AMB est rectangle en M.
5. Par le théorème de la somme des angles, on a :

$$\begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{M} + \widehat{B} &= 180 \\ 52 + 90 + \widehat{B} &= 180 \\ \widehat{B} &= 180 - 90 - 52 = 38^\circ \end{aligned}$$

Ex. 32, p. 97



2. Par le théorème du demi-cercle (*voir* th. 1, p. 82) on a :

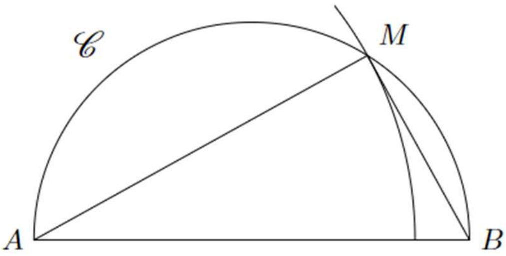
$$(JI) \perp (JB) \qquad (JI) \perp (JA)$$

On en déduit que :

$$\widehat{BJA} = \widehat{BJI} + \widehat{IJA} = 90 + 90 = 180$$

Donc les points B, J, A sont alignés.
3. On a $IA = IB$ donc I appartient à la médiatrice de $[AB]$. On a montré aussi que $(IJ) \perp (AB)$. Donc (IJ) est la médiatrice de $[AB]$, et comme J appartient à la droite (AB), c'est le milieu de $[AB]$
cqfd

Ex. 33, p. 97



3. Le tracé de M se fait en construisant un arc de cercle de centre A et de rayon 7.
4. Par le théorème du demi-cercle on a :

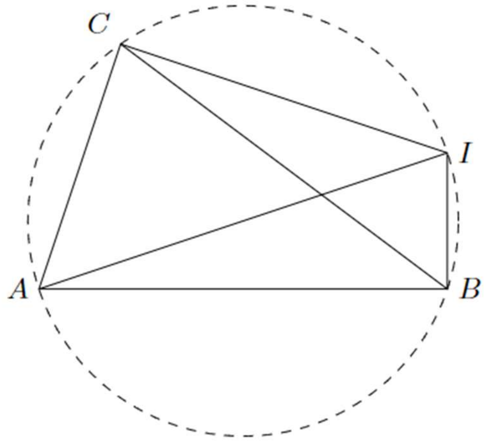
$$(MA) \perp (MB)$$

Donc AMB est un triangle rectangle en M
5. On mesure et on trouve :

$$\widehat{ABM} = 29 \qquad \widehat{BAM} = 61$$

On ajoute : $\widehat{ABM} + \widehat{BAM} = 29 + 61 = 90$. Donc $\widehat{ABM}$ et $\widehat{BAM}$ sont complémentaires., ce qui était attendu puisque ce sont les angles aigus d'un triangle rectangle (*voir* cor. 6, p. 81).

Ex. 34, p. 97



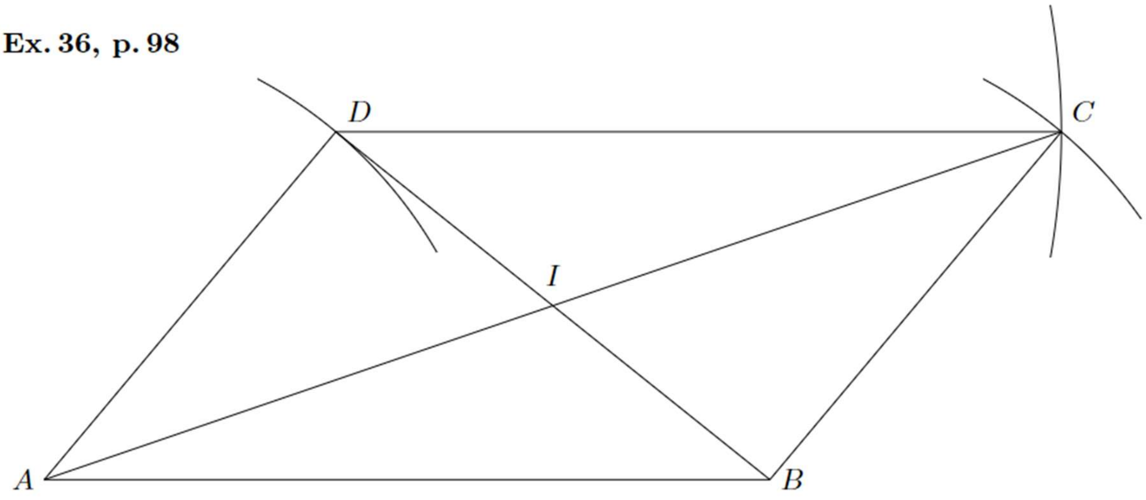
5. D'après les hypothèses, on a :

$$(CA) \perp (CI) \qquad (BA) \perp (BI)$$

Donc, d'après la réciproque du théorème du demi-cercle (*voir* th. 2, p. 82), les points B et C appartiennent au cercle de diamètre $[AI]$.

CORRIGÉS

Ex. 36, p. 98

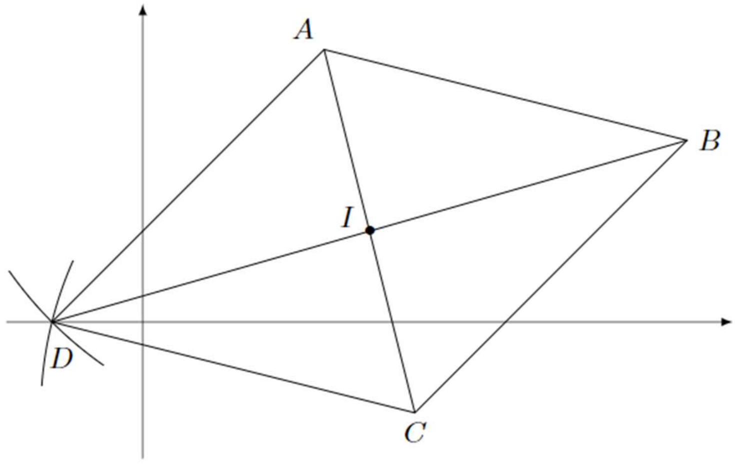


3. Pour construire C, on pique en B, et on trace un arc de cercle de rayon 5. Puis on pique en D, et on trace un arc de cercle de rayon 8. Si on prend C à l'intersection des deux arcs, le quadrilatère $ABCD$ est bien un parallélogramme puisque ses côtés opposés ont même longueur.
5. et 6. On mesure, et on trouve :

$$IA = IC = 4,4 \text{ cm} \qquad\qquad ID = IB = 3 \text{ cm}$$

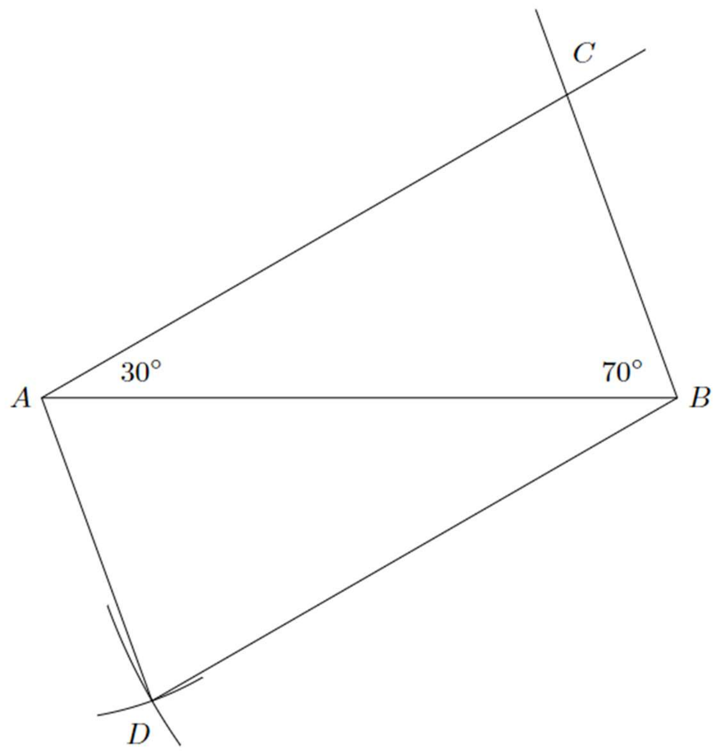
donc I est bien milieu de $[AC]$ et de $[BD]$.

Ex. 37, p. 98



2. Pour construire D, on pique en A, et on reporte la longueur BC vers le bas à gauche. Puis on pique en C, et on reporte la longueur BA vers la gauche. D est l'intersection des deux arcs.
3. On mesure, et on trouve $D(-1;0)$
4. On constate que I est aligné avec A et C. On mesure et on trouve $IA = IC = 2$ cm. Donc I est le milieu de $[AC]$.

Ex. 38, p. 98



2. On trace une demi-droite issue de A, inclinée à 30° par rapport à la demi-droite $[AB)$, et une demi-droite issue de B, inclinée à 70° par rapport à la demi-droite $[BA)$. Le point C est à l'intersection.
3. La somme des angles du triangle ABC vaut :

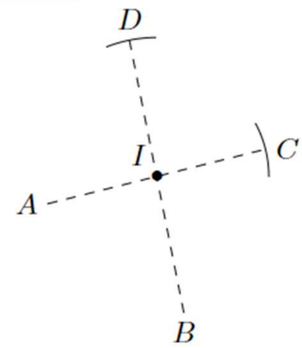
$$30 + 70 + \widehat{C} = 180$$

On en déduit $\widehat{C} = 80^\circ$
4. Pour construire D, on pique en A, et on reporte la longueur CB vers le bas. Puis on pique en B, et on reporte la longueur CA vers le bas. D est l'intersection des deux arcs.
5. On mesure, et on trouve $\widehat{ABD} = 30^\circ$. C'était prévisible puisque cet angle est alterne-interne avec $\widehat{BAC}$.

Ex. 39, p. 99 On connaît le critère[2] (*voir* p. 84) :

$$\boxed{\text{parallélogramme} \Leftrightarrow \text{diagonales de même milieu}}$$

Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme de centre I, il suffit donc que C et D soient les symétriques de A et B par rapport à I.
Pour construire C, on procède ainsi (*voir* déf. 1, p. 85) : on pique en I, on ouvre le compas jusqu'au point A, on trace un arc de cercle qui coupe la droite (AI) de l'autre côté de I. Le point d'intersection est C.
On procède de façon analogue pour construire le symétrique de B.

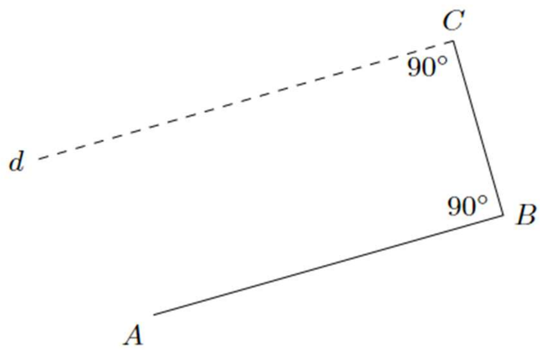


2. Un critère est une équivalence.

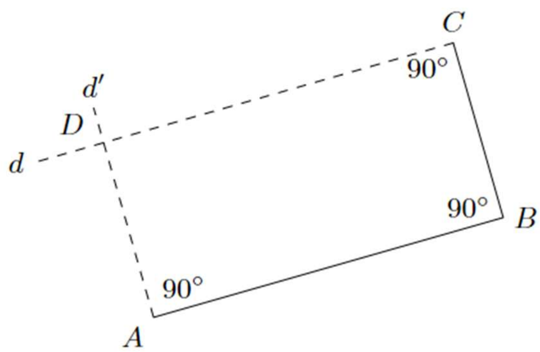
CORRIGÉS

Ex. 40, p. 99

2. On sait depuis la classe de 6^{e}, que si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre, c'est le fameux **théorème des parallèles** (*voir* th. 10, p. 18). Le point D est sur la droite d issue de C et parallèle à (BA). Or $(BC) \perp (BA)$. Donc $(BC) \perp d$. La droite d peut donc se construire avec une **équerre** placée en C.



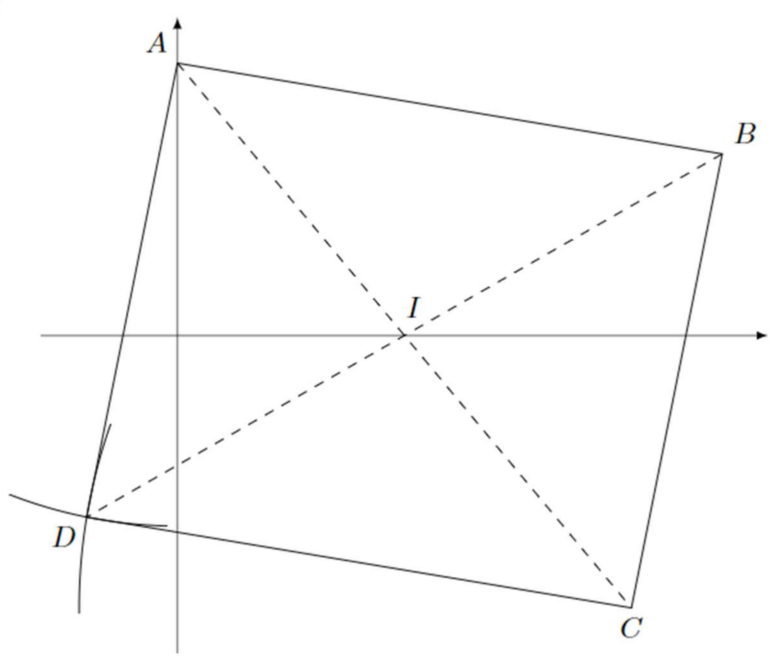
Le point D est aussi sur la droite d' issue de A et parallèle à (BC). Or $(BA) \perp (BC)$, donc $(BA) \perp d'$. Donc, d' peut se construire avec une **équerre** placée en A. Finalement, D est l'intersection de d et d'.



3. Pour montrer que l'angle en D est droit, on utilise encore le théorème des parallèles :

$$d' \parallel (BC) \text{ et } d \perp (BC) \Rightarrow d \perp d'$$

Ex. 41, p. 99



2. Le point D se trouve à l'intersection d'un arc de cercle de centre A et de rayon BC, et d'un arc de cercle de centre C et de rayon BA.
3. et 4. On mesure et on trouve les coordonnées $D(-1;-2)$ et $I(2{,}5;0)$.
5. On a :

$$\frac{1}{2}(x_A + x_C) = \frac{1}{2} \times (5) = 2{,}5 \qquad \frac{1}{2}(y_A + y_C) = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

Ce sont bien les coordonnées x_I et y_I que l'on avait mesurées.

Ex. 42, p. 99 Redonnons la formulation en français du cor. 12, p. 85 :

> ***Si*** *une droite passe par le milieu d'un premier côté d'un triangle* **et** *est parallèle à un deuxième côté* ***alors*** *elle passe par le milieu du troisième côté.*

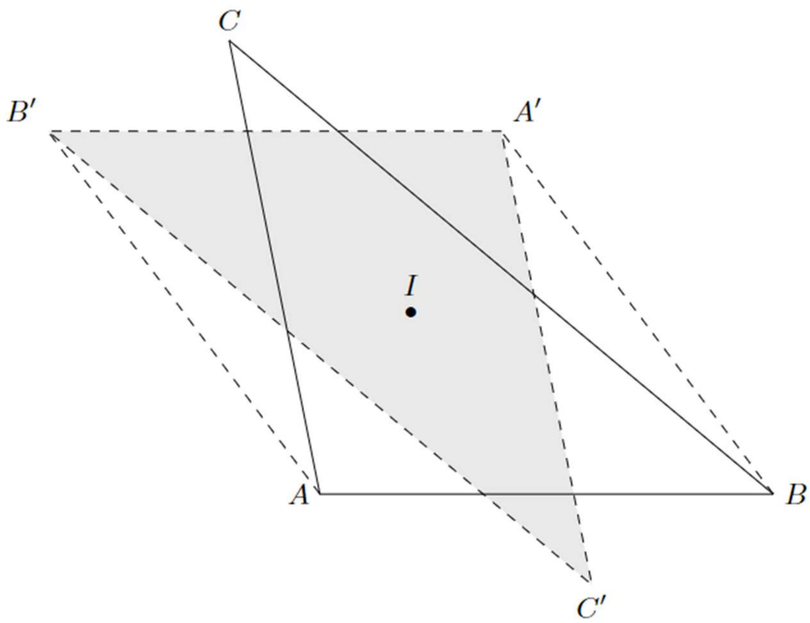
Voici sa formulation symbolique :

$$E \text{ et } G \Rightarrow F$$

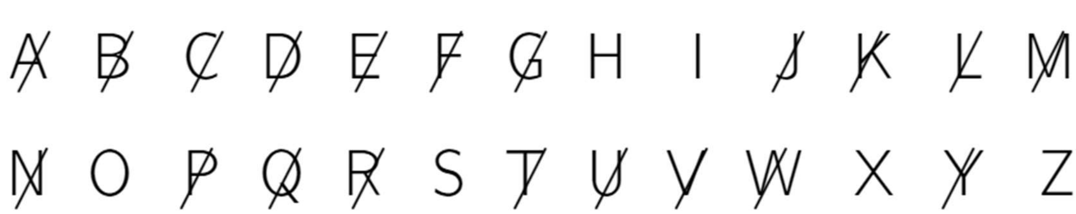
Ex. 43, p. 100 4. Puisque $A' = r(A)$, les points A et A' ont pour milieu I. De même I est milieu de B et B'. On applique alors le critère (*voir* p. 84) :

$$\boxed{\text{parallélogramme} \Leftrightarrow \text{diagonales de même milieu}}$$

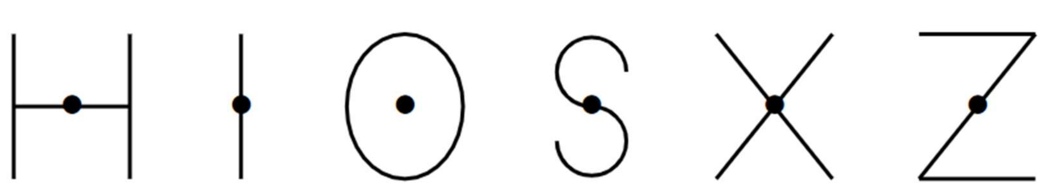
Le quadrilatère $ABA'B'$ a ses diagonales $[AA']$ et $[BB']$ qui ont même milieu I, c'est donc un parallélogramme.
7. Sur la figure on trouve $AB = A'B' = 5$ cm.



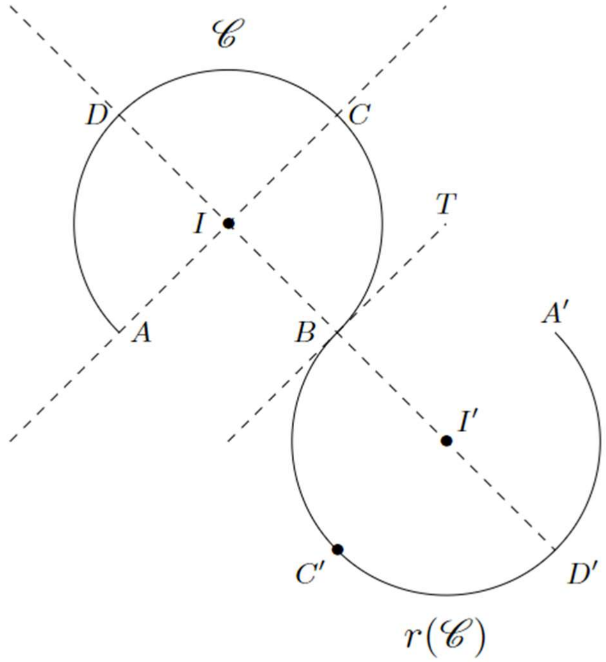
Ex. 44, p. 100 1. et 2. On a édité les 26 lettres majuscules d'imprimerie de l'alphabet français, et on a rayé celles qui n'ont pas de centre de symétrie :



3. Il reste bien 6 lettres qui ont un centre de symétrie :



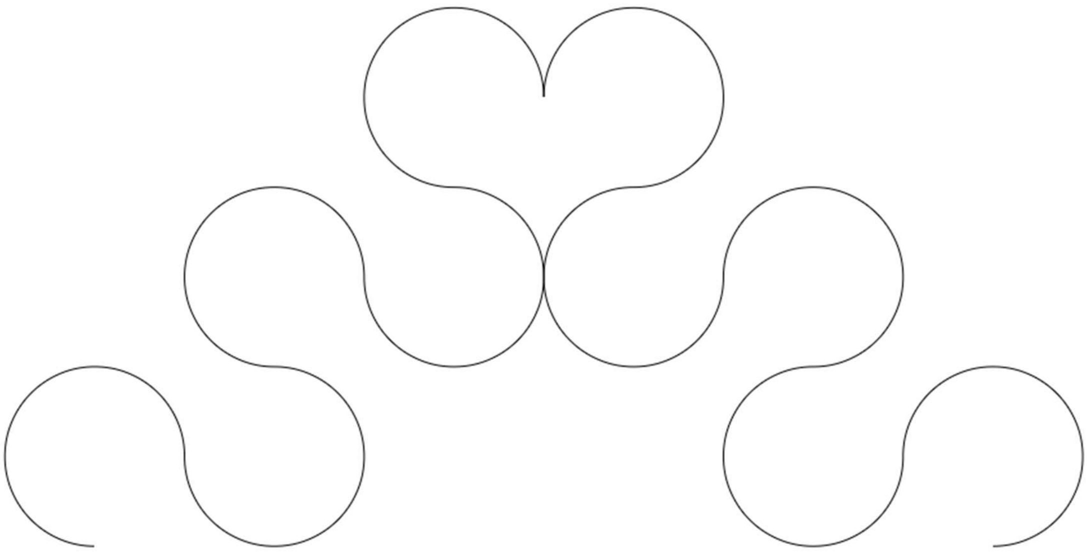
Ex. 45, p. 100



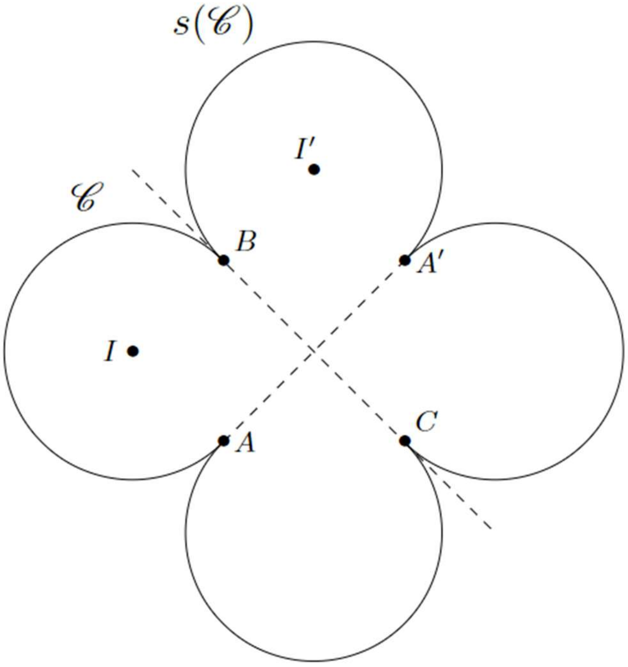
On voit que non seulement les arcs $\mathscr{C}$ et $r(\mathscr{C})$ se raccordent en B, mais en plus, ils ont la même tangente en B (elle est notée T sur la figure).

Les arcs $\mathscr{C}$ et $r(\mathscr{C})$ se raccordent de façon **lisse**.

Ci-dessous, une frise ayant un **axe de symétrie** verticale, et composée d'arcs de cercles comme $\mathscr{C}$.



Ex. 46, p. 101 Voici la figure :



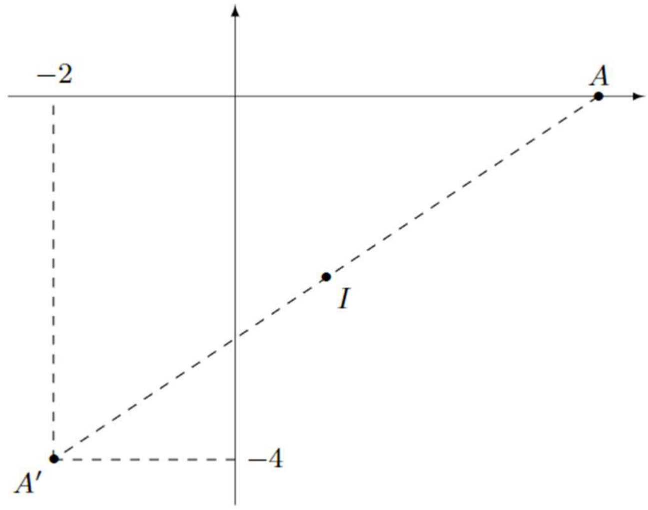
Ex. 47, p. 101 3. On trouve :

$$x_{A'} = -2 \qquad\qquad y_{A'} = -4$$

4. On calcule :

$$\frac{x_{A'} + x_A}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1 \qquad\qquad \frac{y_{A'} + y_A}{2} = \frac{-4+0}{2} = -2$$

5. Ce sont bien les coordonnées de I.



Ex. 48, p. 101 3. On trouve :

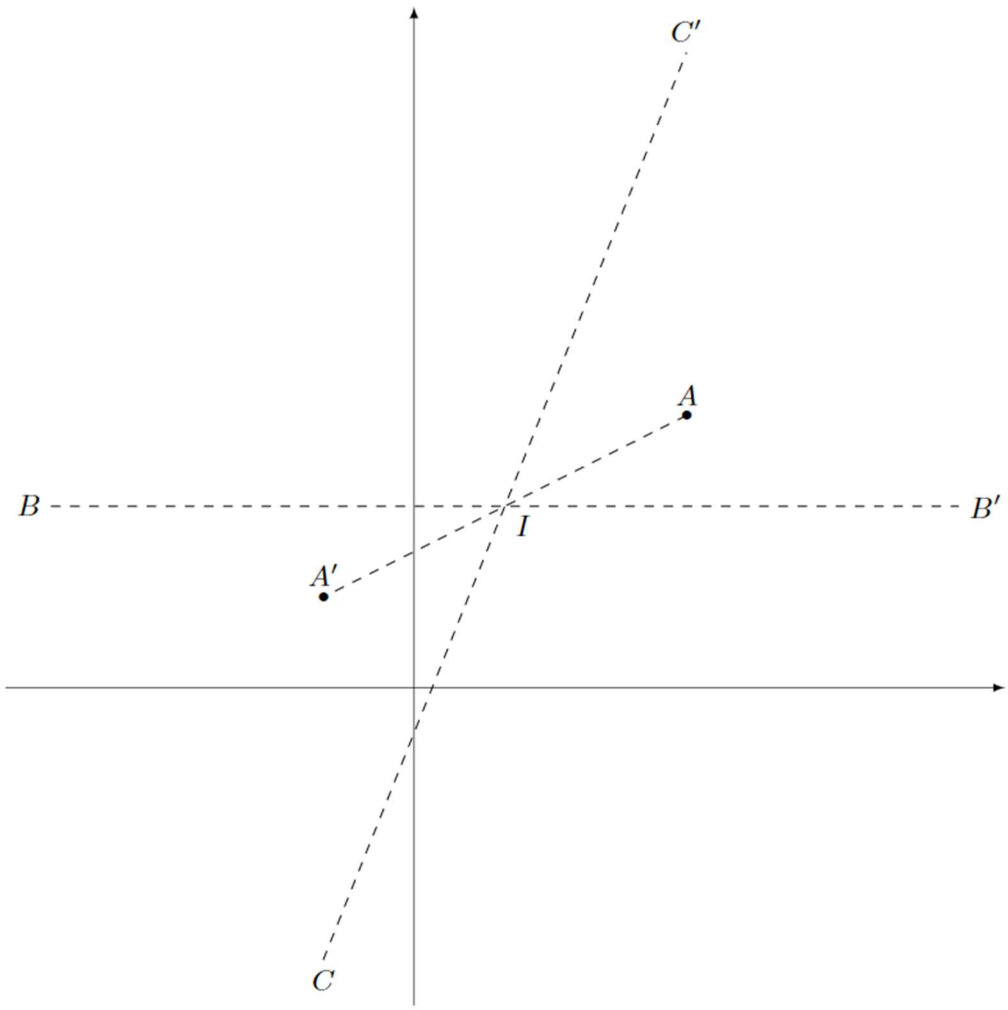
$$A'(-1;1) \qquad B'(6,2) \qquad C'(3,7)$$

4. et 5. On calcule :

$$\frac{x_{A'}+x_A}{2}=\frac{-1+3}{2}=1 \qquad \frac{y_{A'}+y_A}{2}=\frac{1+3}{2}=2$$

Ce sont bien les coordonnées de I.
6. Les autres formules sont :

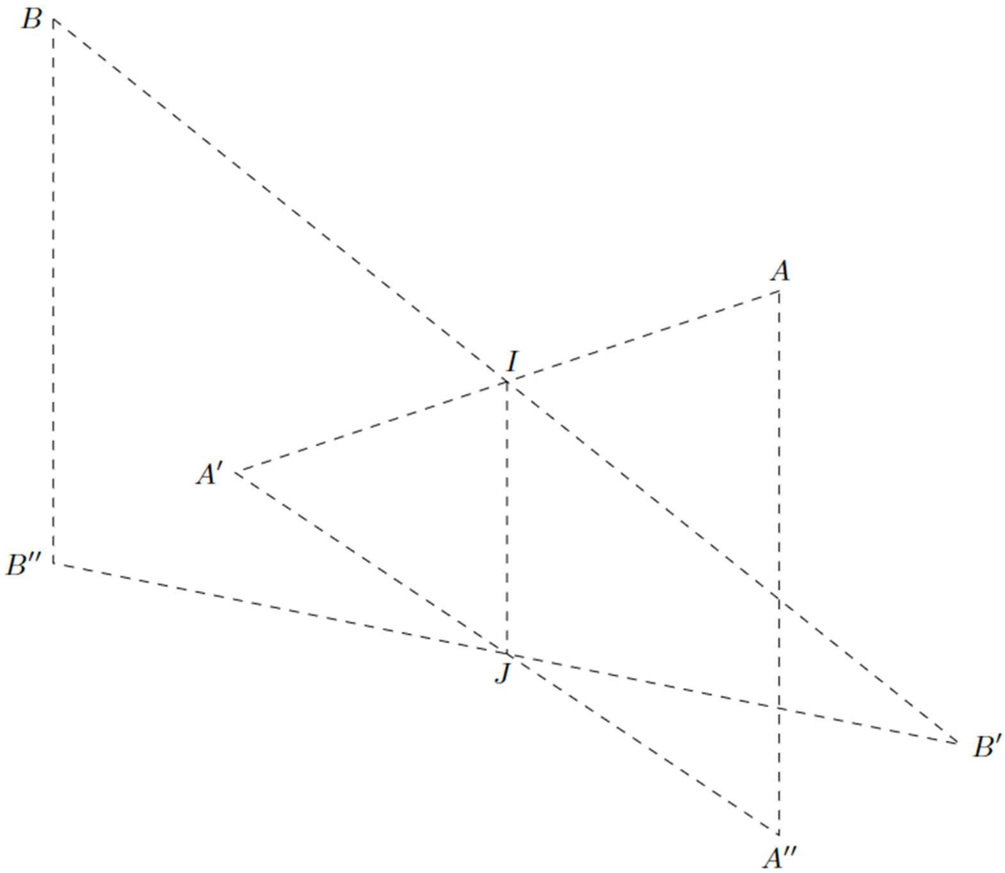
$$x_I=\frac{x_{B'}+x_B}{2} \qquad y_I=\frac{y_{B'}+y_B}{2} \qquad x_I=\frac{x_{C'}+x_C}{2} \qquad y_I=\frac{y_{C'}+y_C}{2}$$



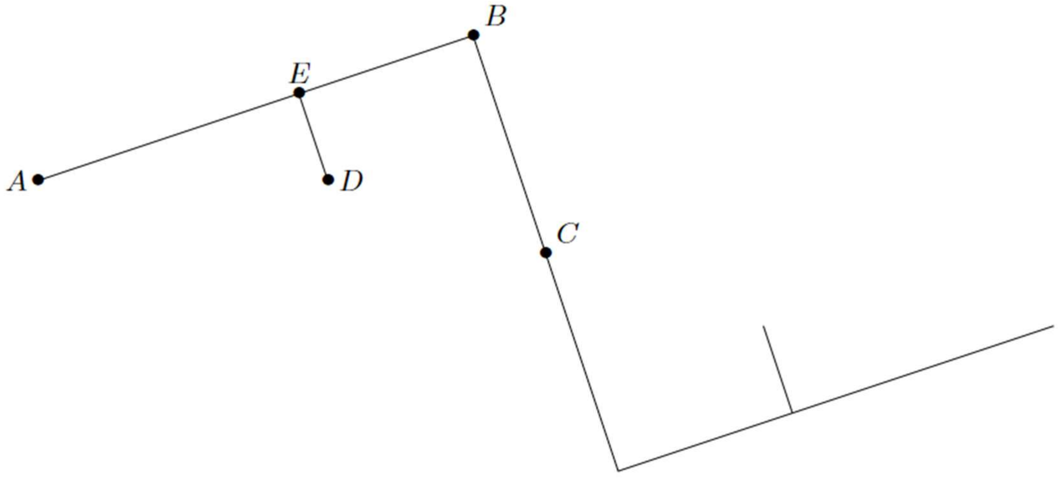
Ex. 49, p. 102 2. c/ et 3. c/ Sur la figure on voit qu'on a bien :

$$(AA'') \mathbin{/\!\!/} (IJ) \qquad \text{et} \qquad AA'' = 2 \times IJ$$

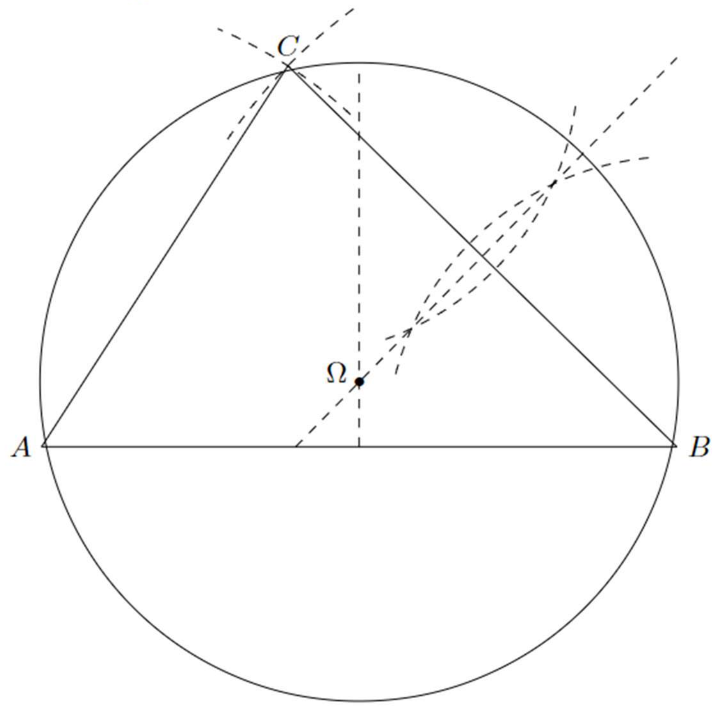
$$(BB'') \mathbin{/\!\!/} (IJ) \qquad \text{et} \qquad BB'' = 2 \times IJ$$



Ex. 50, p. 102 5. On construit les symétriques A', B', D', E' des points A, B, D, E. On trace la ligne brisée $CB'A'$ et le segment $E'D'$. Voici la figure :



Ex. 51, p. 102 Voici la figure :

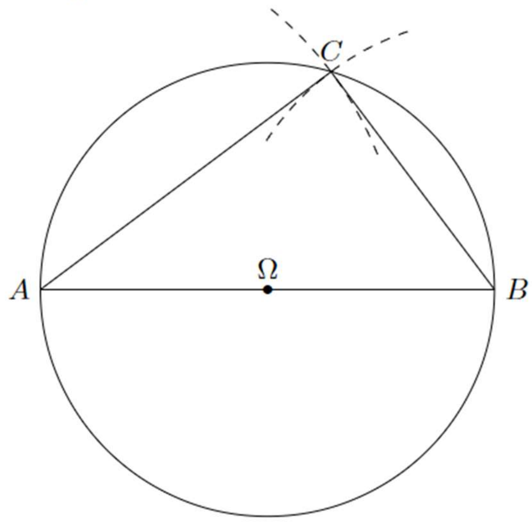


4. On mesure sur la figure et on trouve $R \approx 3,5$, donc $R^2 \approx 12,25$.
5. a/ et b/ On applique la formule :

$$\begin{aligned}
R^2 &= \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \\
&= \frac{6^25^27^2}{(6+5+7)(-6+5+7)(6-5+7)(6+5-7)} \\
&= \frac{6^25^27^2}{18\times 6\times 8\times 4} \\
&= \frac{\cancel{6^2}5^27^2}{3\times\cancel{6}\times\cancel{6}\times 8\times 4} = \frac{25\times 49}{24\times 4} = \frac{1225}{96} \approx 12{,}76
\end{aligned}$$

On trouve une **valeur voisine** de celle obtenue graphiquement à la question 4.

Ex. 52, p. 103 1. Voici la figure :



2. La réciproque du théorème du demi-cercle dit que le cercle circonscrit d'un **triangle rectangle** a pour diamètre son hypoténuse.
3. et 4. Ce cercle a donc pour diamètre $[AB]$ et pour rayon $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{5}{2}$. Sur la figure, on a noté Ω son centre.
5. On applique la formule générale :

$$\begin{aligned}
R^2 &= \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \\
&= \frac{3^2 4^2 5^2}{(3+4+5)(-3+4+5)(3-4+5)(3+4-5)} \\
&= \frac{3^2 4^2 5^2}{12 \times 6 \times 4 \times 2} \\
&= \frac{\cancel{3^2}\cancel{4^2}5^2}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{4} \times 2} = \frac{25}{4}
\end{aligned}$$

On en déduit que $R = \dfrac{5}{2}$, comme déjà trouvé à la question 4.

6. On a pu calculer R simplement à la question 4. sans utiliser la formule (1) car ABC étant un triangle rectangle, on lui a appliqué la réciproque du théorème du demi-cercle.

Chapitre 5

Géométrie dans l'espace

1 Droites et plans

Dans l'espace, les définitions des droites parallèles et des droites perpendiculaires sont les mêmes que celles données dans le plan (*voir* p. 17, déf. 5 et 6). Noter cependant la différence concernant la définition d'un rectangle dans l'espace (*voir* la remarque, p. 137).

Voici la définition intuitive d'un plan :

Définition 1. *Un plan est une **surface plate**, illlimitée de tous les côtés.*

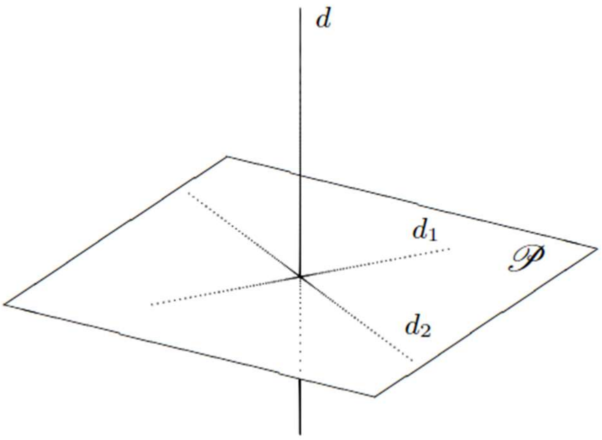
Axiome 2. *Par trois points non alignés, il passe un plan et un seul.*

Le plan qui contient trois points A, B, C non alignés est souvent désigné par (ABC) ou ABC (comme un triangle).

Définition 3. *On dit qu'une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à **deux droites sécantes** de ce plan.*

Le plan $\mathscr{P}$ est représenté en **perspective** par un parallélogramme. Les droites d_1 et d_2 sont incluses dans $\mathscr{P}$. La définition se symbolise ainsi :

$$(d \perp d_1 \quad \text{et} \quad d \perp d_2\ ) \Rightarrow d \perp \mathscr{P}$$



Dans le cube ci-contre, la face avant étant un carré, on a :

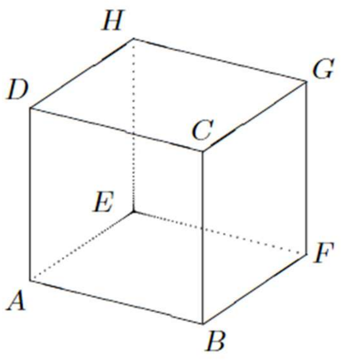
$$(BC) \perp (BA)$$

La face droite étant aussi un carré, on a :

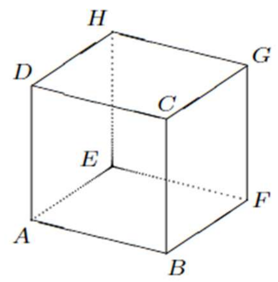
$$(BC) \perp (BF)$$

La droite (BC) est donc perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (ABF). On en déduit qu'elle est perpendiculaire à ce plan :

$$(BC) \perp (ABF)$$



Questions (correction p. 145)



- Dans le **cube** ci-dessus, la face droite étant un carré, compléter les relations :

$(BC) \perp$ (?) $\qquad$ $(BC) \perp$ (?)

- La face avant étant un carré, compléter les relations :

$(BC) \perp$ (?) $\qquad$ $(BC) \perp$ (?)

On va voir maintenant une sorte de réciproque à la déf. 3 :

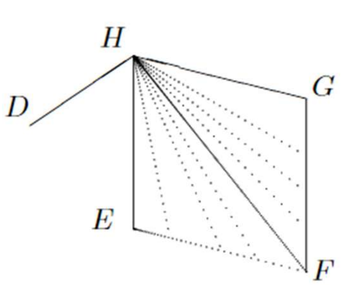
Proposition 4. *Si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan.*

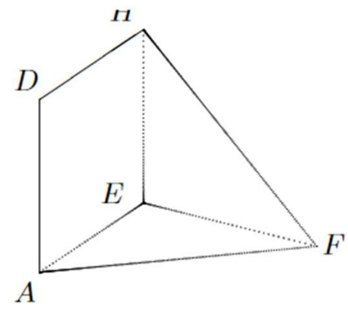
Pour illustrer cette proposition, on considère le plan (EHG) et la droite (HD). On peut montrer qu'on a :

$$(HD) \perp (EHG)$$

Donc la droite (HD) est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan, en particulier à toutes celles qui sont issues de H et qu'on a marquées en pointillés ou en gras sur la figure ci-contre. En particulier, on a :

$$(HD) \perp (HF)$$





Remarque : pour qu'un quadrilatère de l'espace soit un **rectangle**, il ne suffit pas qu'il ait trois angles droits comme dans le plan (*voir* prop. 4, p. 17) : il faut qu'il en ait **quatre**. Ainsi, dans notre cube précedent, le quadrilatère $HDAF$ n'est pas un rectangle. Il a bien trois angles droits (en H, D et A), mais son quatrième angle n'est pas droit car on montre facilement (*voir* ex. 6, p. 143) :

$$\widehat{AFH} = 60°$$

Définition 5. *Deux plans sont dits parallèles si l'un contient* ***deux*** *droites qui sont* ***sécantes****, et qui sont parallèles à deux droites de l'autre.*

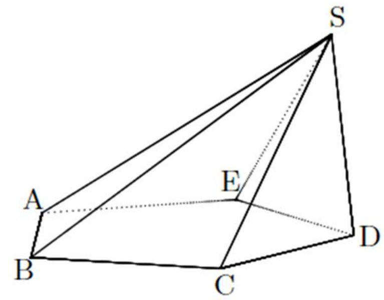
Par exemple, dans notre cube, les faces droite $(BCGF)$ et supérieure $(CDHG)$ sont des carrés. Comme les côtés opposés d'un carré sont parallèles, on en déduit que :

$$(BC) /\!\!/ (FG) \quad \text{et} \quad (CD) /\!\!/ (GH)$$

Donc le plan avant (BCD) et le plan arrière (FGH) sont parallèles entre eux.

2 Pyramide

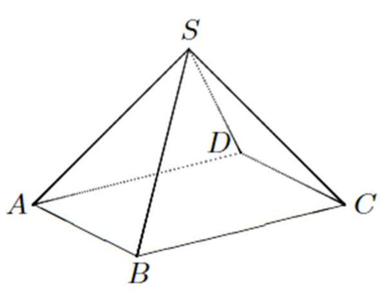
Définition 6. *Une* ***pyramide*** *est constituée : 1/ d'une face polygonale appelée base, 2/ d'un point S non situé dans le plan de la base, 3/ de tous les segments reliant S aux sommets de la base.*



La distance entre le point S, et le plan de la base polygonale est appelée **hauteur** de la pyramide. La pyramide a autant de **faces latérales** que sa base comporte de côtés.

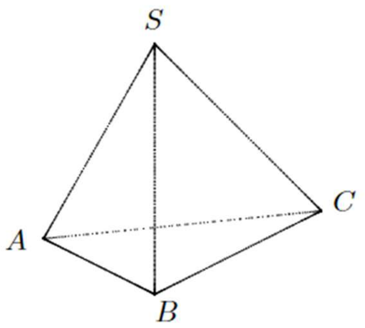
La pyramide représentée ci-dessus comporte cinq **faces** triangulaires, et une **face** pentagonale, soit en tout 6 faces. Les côtés de ces faces, sont les **arêtes** : il y a 10 arêtes. Les extrémités de ces arêtes sont appelés **sommets** : notre pyramide a 6 sommets.

Les pyramides d'Égypte, qui servaient de tombeau à certains pharaons, et dont il reste des vestiges encore bien conservés, sont des pyramides à **base carrée**. Ainsi, la grande pyramide de Gizeh, tombeau de Khéops, a une base carrée de 230 m de côté. Sa hauteur vaut 147 m.



Définition 7. *Un* ***tétraèdre*** *est une pyramide dont la base est triangulaire.*

Toutes les **faces** d'un tétraèdre sont des triangles. Un tétraèdre a 4 **sommets**, 6 **arêtes** et 4 **faces**. D'ailleurs, "tétra-èdre" signifie en grec "quatre-faces".



Définition 8. *Un tétraèdre est dit* ***régulier*** *si ses arêtes sont toutes de même longueur.*

Les quatre faces d'un tétraèdre régulier sont donc des **triangles équilatéraux**.

3 Polyèdre

Les pyramides, que l'on vient de définir, et les prisme droits (comme le cube), dont on a rappelé la définition p. 23, sont des solides de l'espace, délimités par des faces qui sont des polygones. Ces solides sont appelés **polyèdres**, ce qui signifie "plusieurs faces".

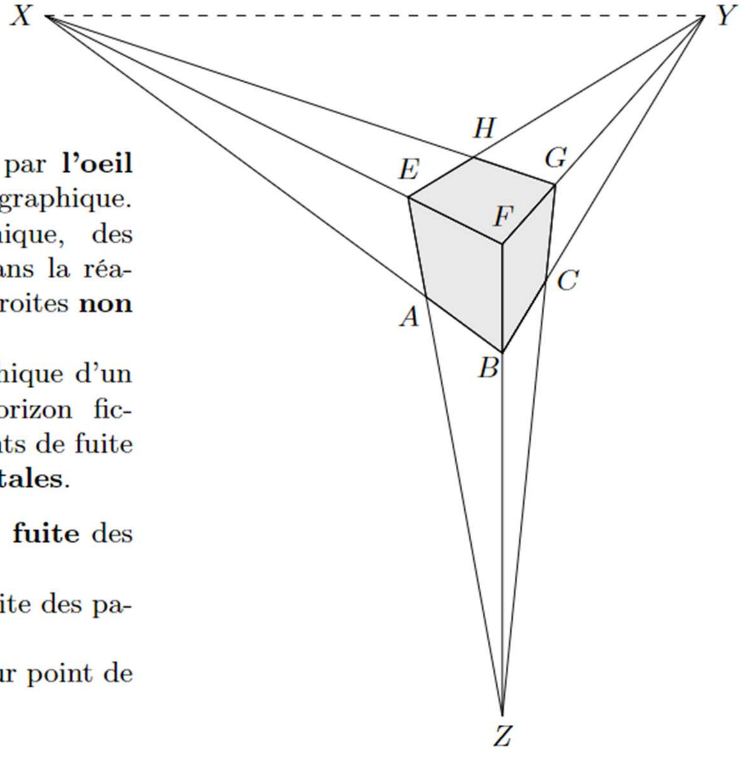
La définition précise d'un polyèdre est compliquée, et nous ne la donnerons pas. Disons seulement qu'un polyèdre comporte des **faces** qui sont des polygones, des **arêtes** qui sont les côtés des faces, et des **sommets**, qui sont les extrémités des arêtes.

Dans les exercices, nous classerons les hexaèdres (polyèdres à six faces).

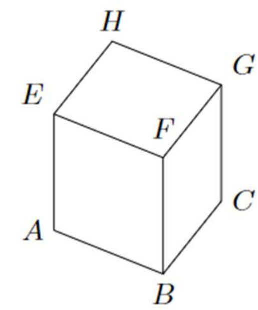
4 La perspective conique

C'est la perspective produite par **l'oeil humain** et l'appareil photographique. Sur une plaque photographique, des droites qui sont **parallèles** dans la réalité sont représentées par des droites **non parallèles**.
Ainsi, dans l'image photographique d'un **cube**, il y a une ligne d'horizon fictive (XY) qui contient les points de fuite de toutes les **droites horizontales**.

• Le point X est le **point de fuite** des parallèles à (BA),
• Le point Y est le point de fuite des parallèles à (BC),
Les **droites verticales** ont leur point de fuite en Z.



5 La perspective cavalière

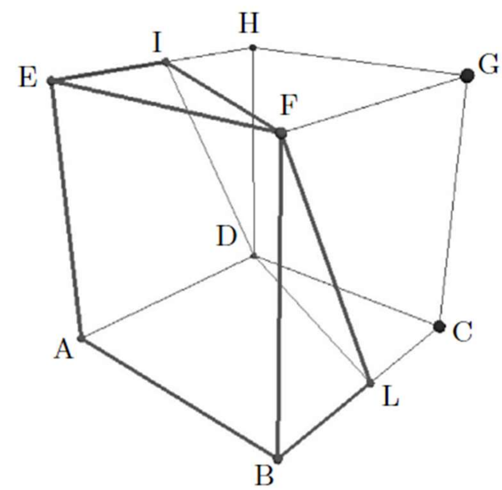


C'est une fausse perspective, mais elle est rassurante et facile à utiliser car les droites parallèles sont représentées par des droites parallèles.

6 Exercices

Exercice 1.

Soit $ABCDEFGH$ un cube, et soient les points I, milieu de $[EH]$ et L, milieu de $[BC]$. Les points A, B, L, D et F, I, E sont les sommets d'un **hexaèdre**.



1. a/ Montrer que la droite (FB) est perpendiculaire au plan (FEI).
   b/ En déduire que :

$$(FB) \perp (FI)$$

2. Montrer de même en deux étapes que :

$$(FE) \perp (FL)$$

Exemple 2 (*raisonnement par l'absurde*)**.**

On reprend les données du précédent exercice. On va montrer que :

(FI) et (FL) **ne sont pas perpendiculaires**

Pour cela, on raisonne **par l'absurde**. Le principe d'un tel raisonnement est de supposer, au **contraire**, qu'on a :

$$(FI) \perp (FL)$$

et d'en déduire une **absurdité**.

Comme on a montré, dans l'exercice précédent, que $(FI) \perp (FB)$, la droite (FI) est donc perpendiculaire à deux droites du plan (FBL). Elle est donc perpendiculaire à ce plan, et comme (FG) est incluse dans (FBL), on a : $\boxed{(FI) \perp (FG)}$

La face supérieure du cube est carrée, donc $\boxed{(FE) \perp (FG)}$ Mais, dans le plan (EFG), il n'y a qu'une seule droite issue de F, et qui soit perpendiculaire à (FG) (*voir* th. 8, p. 18). Les droites (FE) et (FI) sont donc confondues, ce qui est **absurde** puisque $I \notin (FE)$.

Exercice 3.

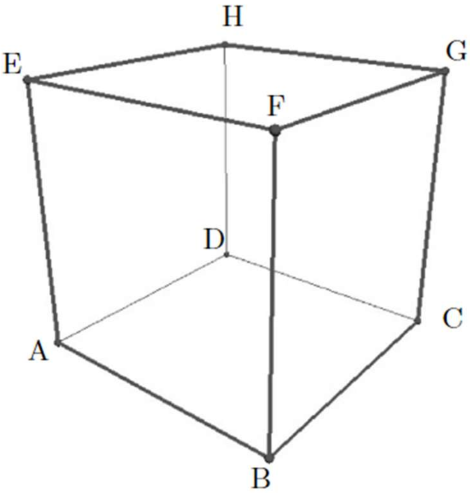
1. Reproduire sur **papier millimétré** le cube ci-dessous en prenant les coordonnées **fictives** suivantes en cm sur la feuille de papier :

	A	B	C	D	E	F	G	H
x	$-4{,}3$	$-0{,}2$	3	-1	-5	0	$3{,}6$	-1
y	$2{,}4$	0	3	$4{,}2$	8	$6{,}8$	8	$8{,}8$

On considère les trois pyramides $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$ de sommet F et de base $(DAEH)$, $(DCGH)$, $(DABC)$.

2. Tracer $[FH]$, $[FA]$, $[FD]$, $[FC]$, et colorier les trois pyramides avec des couleurs différentes.
3. On admet que les trois pyramides ont le même volume V. Notant a l'arête du cube, montrer qu'on a :

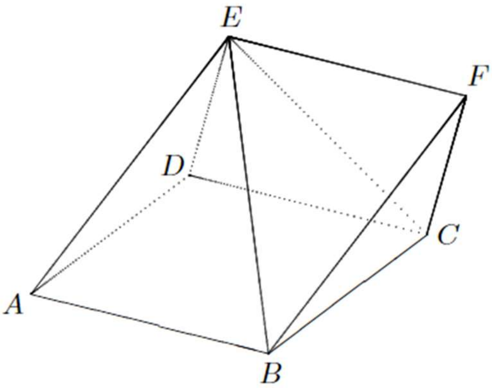
$$V = \frac{a^3}{3}$$

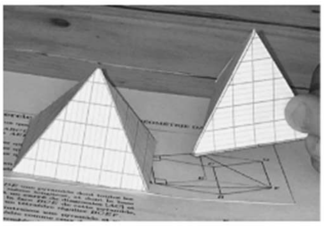


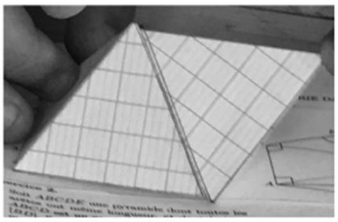
Exercice 4.

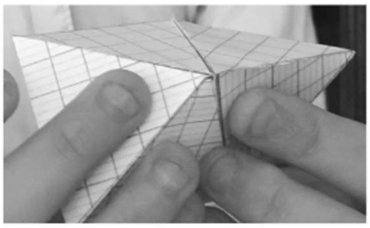
Soit $ABCDE$ une pyramide dont toutes les arêtes ont même longueur, et dont la base $ABCD$ est un **carré** de diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Sur la face BCE de cette pyramide, on empile un tétraèdre régulier $BCEF$.

1. Construisez une pyramide et un tétraèdre comme ceux de l'énoncé.
2. Assemblez-les comme indiqué.
3. Vérifiez que les points A, B, F, E sont coplanaires.
4. Montrez que le quadrilatère $ABFE$ est un losange.







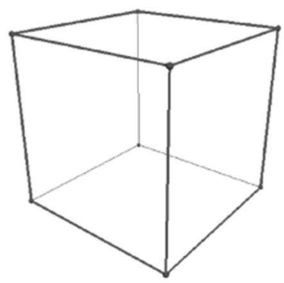


Exemple 5 (*les sept hexaèdres*)**.**

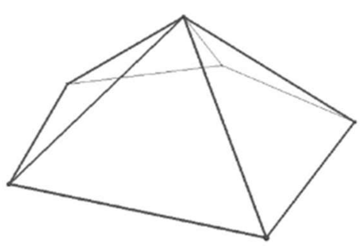
Il existe **sept hexaèdres** (polyèdres convexes ayant six faces)). Le type des faces est repéré par **t**, **q**, **p** pour triangle, quadrilatère, pentagone. On note, traditionnellement **s** = nombre de sommets, **f** = nombre de faces, **a** = nombre d'arêtes. Ici **f** = 6.

• Le plus simple des hexaèdres est bien connu, c'est le prisme à base quadrilatère dont un exemple est le **cube** :

6q
s = 8 a = 12
$s + f = 8 + 6 = a + 2$



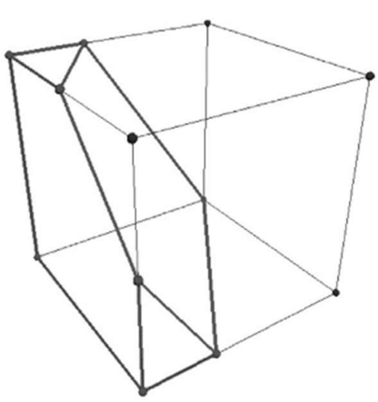
• Les deux suivants sont : la **pyramide** à base pentagonale, et un **empilement** de deux tétraèdres :

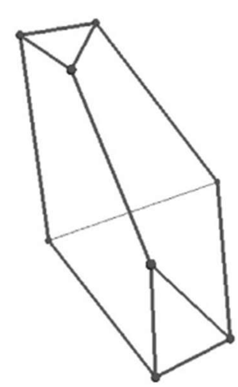


5t1p
s = 6 a = 10
$s + f = 6 + 6 = a + 2$

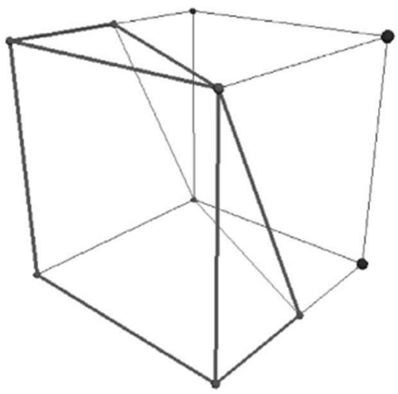
6t
s = 5 a = 9
$s + f = 5 + 6 = a + 2$

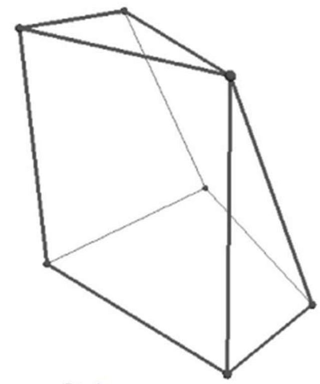
• Les quatre derniers hexaèdres peuvent être obtenus en tronquant une ou deux fois un cube. Pour chacun d'eux, on donne sa position dans le cube puis, sorti de sa **gangue** :



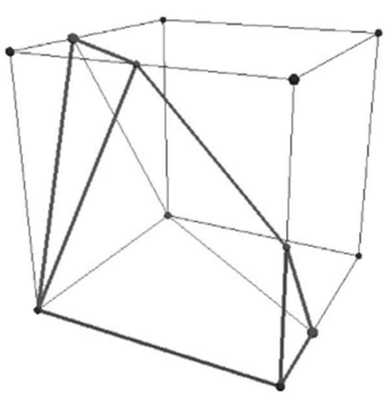


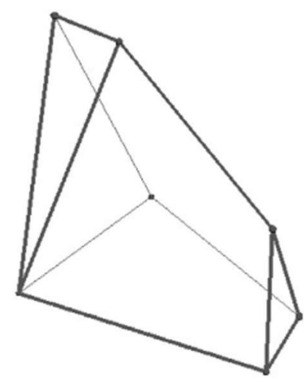
2t2q2p
s = 8 a = 12
$s + f = 8 + 6 = a + 2$



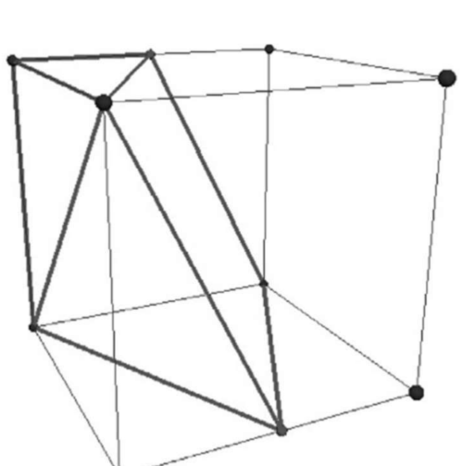


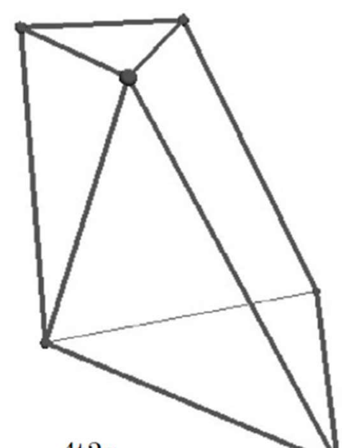
2t4q
s = 7 a = 11
$s + f = 7 + 6 = a + 2$





3t2q1p
s = 7 a = 11
$s + f = 7 + 6 = a + 2$



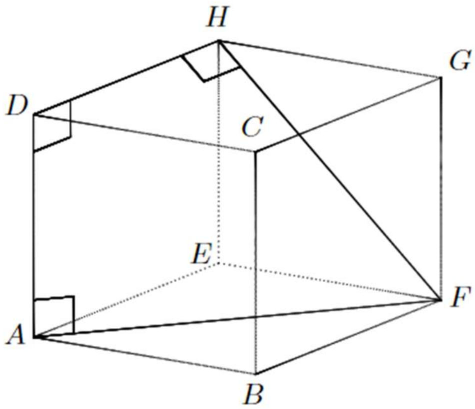


4t2q
s = 6 a = 10
$s + f = 6 + 6 = a + 2$

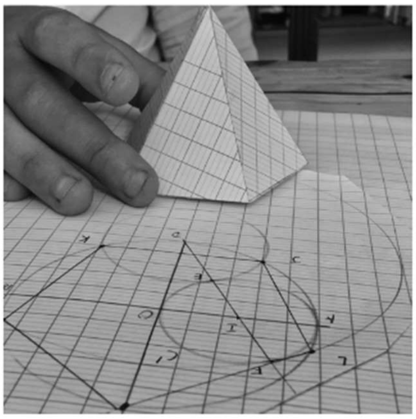
Exercice 6 (*un quadrilatère étrange*).

Dans le cube $ABCDEFGH$ on considère la face arrière gauche $DAEH$, et le sommet F opposé au sommet D.

1. Montrer que l'angle $\widehat{DAF}$ est droit.
2. Montrer que l'angle $\widehat{DHF}$ est droit.
3. Montrer que le triangle AFH est équilatéral.
4. Combien vaut l'angle $\widehat{AFH}$?
5. Le quadrilatère $HDAF$ est-il plat ?



Exercice 7 (*pyramide à base pentagonale*).



1. Au centre de la feuille, marquer un point O, puis tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 3 cm.
2. Tracer deux diamètres perpendiculaires $[AB]$ et $[CD]$, le segment $[AB]$ étant horizontal, avec A à gauche, le point C étant en haut.
3. Soit I le milieu de $[AO]$. Tracer le cercle $\mathscr{C}'$ de centre I et passant par O.
4. La droite (DI) coupe $\mathscr{C}'$ en E et F, le point E étant situé entre I et D. Marquer les points E et F.

5 Le cercle de centre D et passant par E coupe $\mathscr{C}$ en J et K, le point J étant à gauche. Marquer J et K.

6 Le cercle de centre D et passant par F coupe $\mathscr{C}$ en L et M, le point L étant à gauche. Marquer L et M.

7 Tracer le pentagone $CLJKM$. Vérifier qu'il est régulier, c'est-à-dire que ses côtés et ses angles sont égaux.

8 Utiliser ce pentagone pour fabriquer une pyramide à base pentagonale.

Récréation 8.

Pavage

1. En prenant une unité de votre choix, placer les points suivants :

$$A(0;0) \qquad B(10;0) \qquad X(-4;10) \qquad Y(8;10)$$

2. Tracer les segments $[XA]$, $[AB]$, $[BX]$, $[XY]$, $[YA]$.
3. La droite (AY) coupe (BX) en C. La droite horizontale issue de C coupe (AX) en D. Construire C et D, et repasser en traits épais le trapèze $ABCD$.

On souhaite réaliser un **pavage en perspective** de ce trapèze.

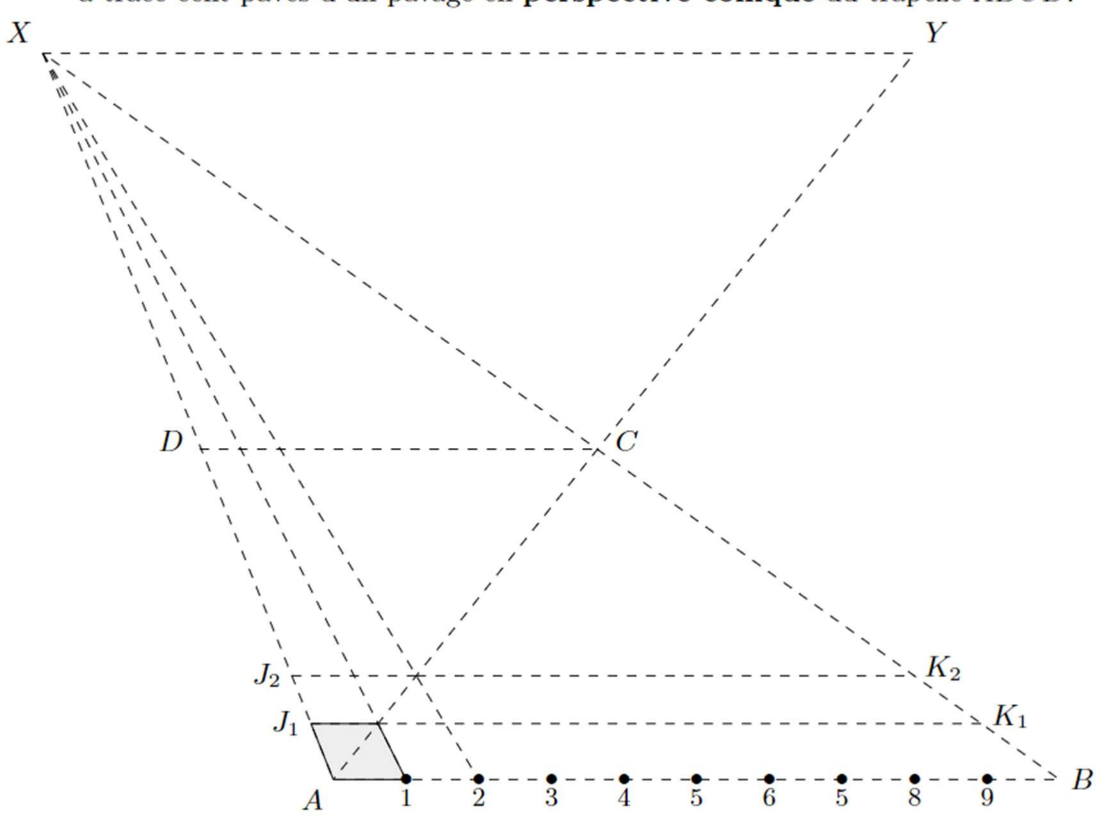
4. Pour cela, on partage $[AB]$ en 10 segments égaux. Noter 1, 2, 3, …, 9 les points obtenus, intermédiaires entre A et B.
5. La droite joignant 1 à X coupe (AY) en un point. L'horizontale issue de ce point coupe (AX) en J_1 et (AY) en K_1. Tracer le segment $[J_1K_1]$.

On a obtenu un **premier pavé**. Il apparaît en grisé.

6. La droite joignant 2 à X coupe (AY) en un point. L'horizontale issue de ce point coupe (AX) en J_2 et (AY) en K_2. Tracer le segment $[J_2K_2]$.

On a obtenu **trois nouveaux pavés.**

7. Continuer ainsi avec les droites joignant 3 à X, 4 à X, etc. Vérifier qu'à la fin, on a tracé cent pavés d'un pavage en **perspective conique** du trapèze $ABCD$.



7 Correction des questions

p. 136

• Puisque la face $(BCGF)$ est un carré, tous ses angles sont droits. En particulier :

$$(BC) \perp (BF) \qquad (BC) \perp (CG)$$

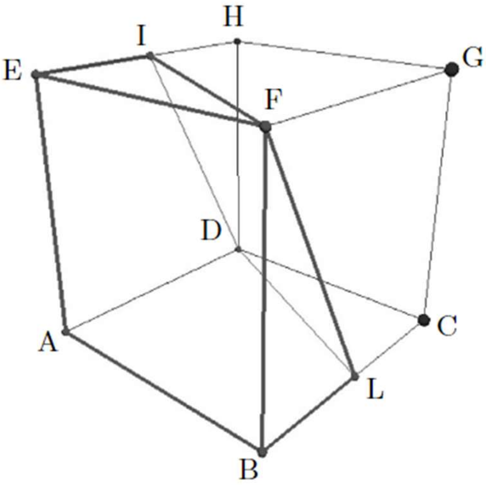
• En raisonnant de même avec la face $(BCDA)$ on obtient :

$$(BC) \perp (BA) \qquad (BC) \perp (CD)$$

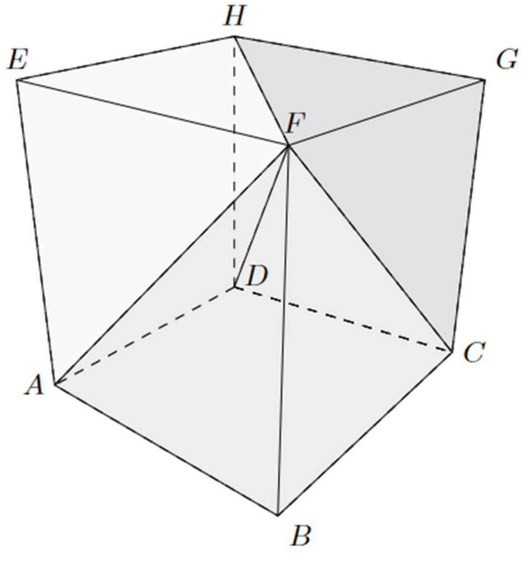
8 Correction des exercices

Ex. 1, p. 139

1. a/ Toutes les faces du cube étant carrées, la droite (FB) est perpendiculaire aux droites (FE) et (FG). Elle est donc perpendiculaire au plan EFG, qui est aussi **désigné** (FEI).
b/ Puisque (FB) est perpendiculaire au plan (FEI), elle est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan, en particulier à (FI).
2. a/ La droite (FE) est perpendiculaire aux droites (FB) et (FG). Elle est donc perpendiculaire au plan BFG, qui est aussi **désigné** (FBL).
b/ Puisque (FB) est perpendiculaire au plan (FBL), elle est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan, en particulier à (FL).



Ex. 3, p. 140 1. Voici la figure :

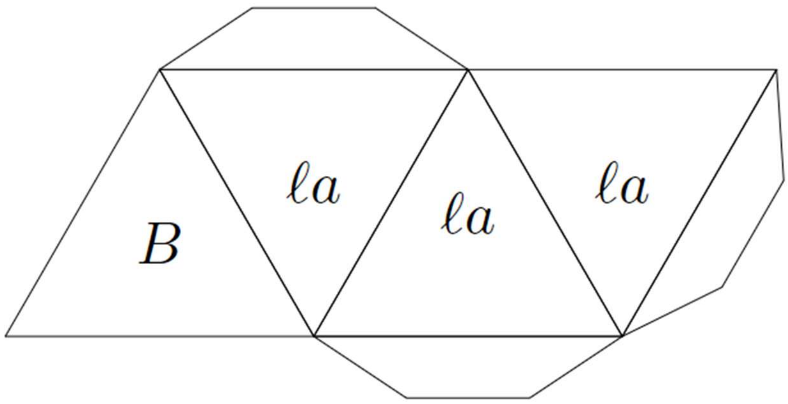


3. Les trois pyramides remplissent ensemble le cube. Puisqu'elles ont toutes le même volume V, le volume du cube vaut $3V$. Mais on sait que le volume du cube vaut aussi a^3. On en déduit :

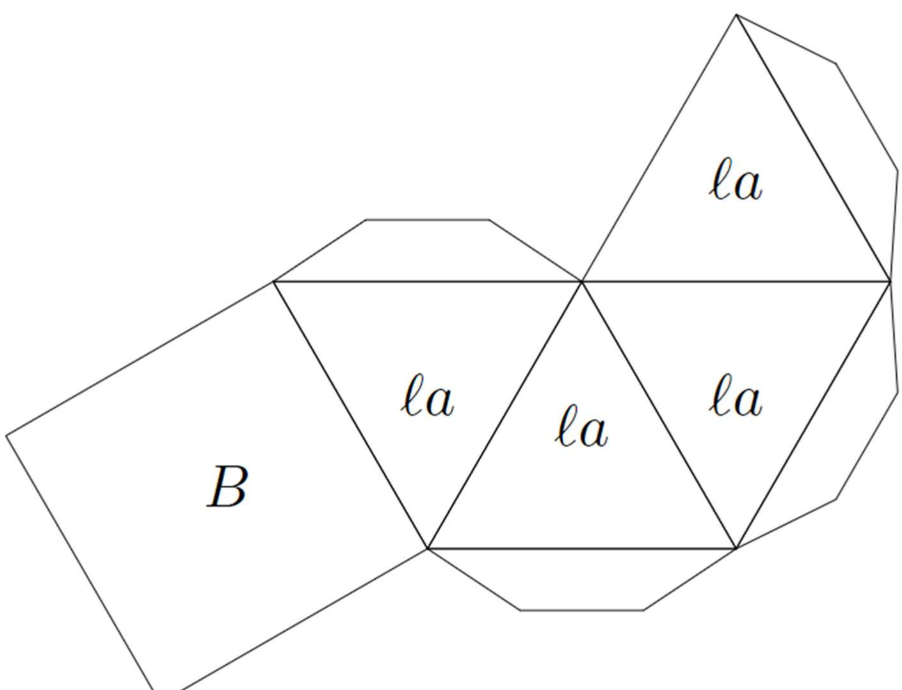
$$3V = a^3 \Rightarrow V = \frac{a^3}{3}$$

Ex. 4, p. 140 1. et 2. Dans le **patron** du tétraèdre, les trois faces latérales sont marquées $\boxed{\ell a}$. On les plie suivant leurs deux arêtes communes. On les assemble avec la languette supérieure.

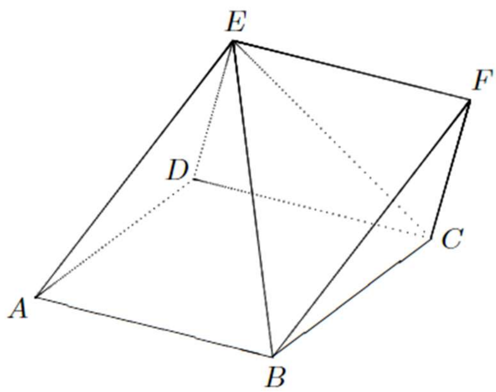
La base $\boxed{B}$ est ensuite repliée suivant son arête commune avec la face $\boxed{\ell a}$ qui est à sa droite. Puis on l'assemble avec les deux languettes de droite.



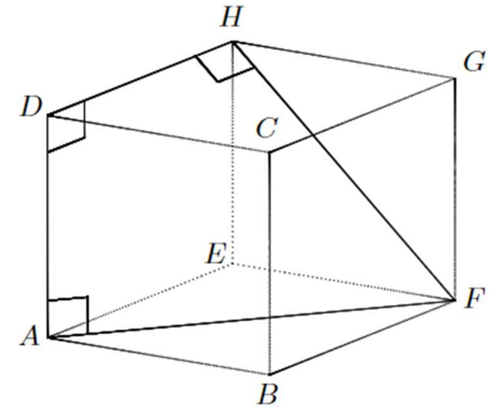
Le **patron** de la pyramide comporte quatre faces latérales $\boxed{\ell a}$ et une base carrée $\boxed{B}$:



3. On peut voir que A, B, F, E sont **coplanaires**, en retournant l'assemblage. On le pose sur une table, la face ABE à plat : le point F touche aussi la table.
4. Les hypothèses impliquent que pyramide et tétraèdre ont des arêtes de même longueur, donc le quadrilatère $ABFE$ a ses quatre côtés égaux. Et puisque les points A, B, F, E sont coplanaires, c'est un losange.



Ex. 6, p. 143



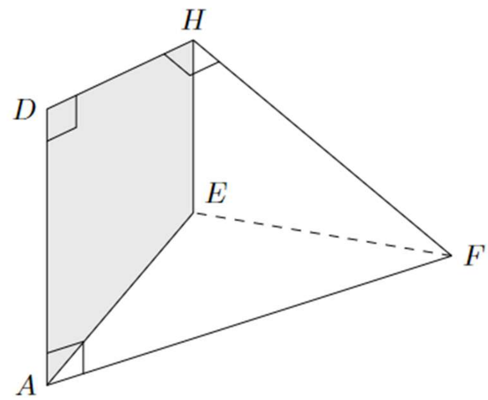
1. Puisque les faces $DAEH$ et $DABC$ sont des carrés, on a :

$$(DA) \perp (AE) \qquad (DA) \perp (AB)$$

On en déduit que (DA) est perpendiculaire au plan (AEB), et donc à la droite (AF) de ce plan. Donc l'angle $\widehat{DAF}$ est droit.
2. Par un raisonnement analogue, on montrerait que l'angle $\widehat{DHF}$ est droit aussi.

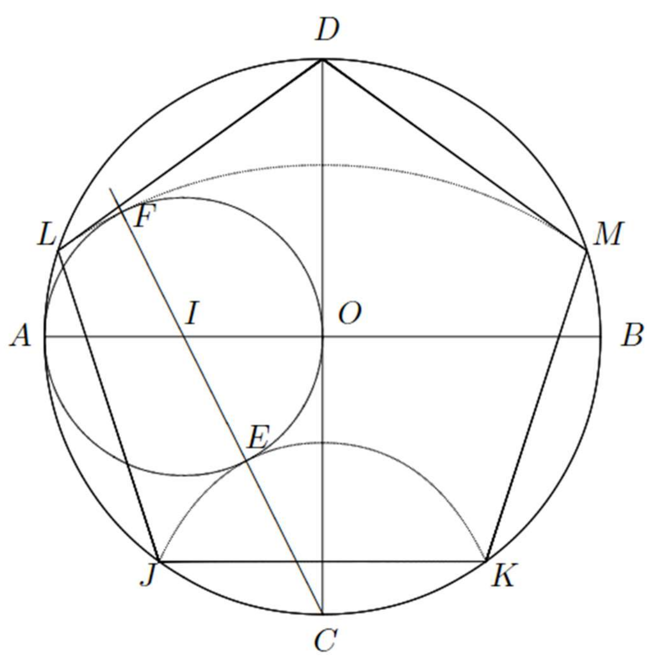
3. et 4. Les segments $[AF]$, $[FH]$, $[HA]$ sont trois diagonales de trois faces du cube qui sont des carrés égaux. Il s'ensuit que ces trois diagonales sont égales. Le triangle AFH est donc équilatéral, et on a :

$$\widehat{AFH} = 60°$$



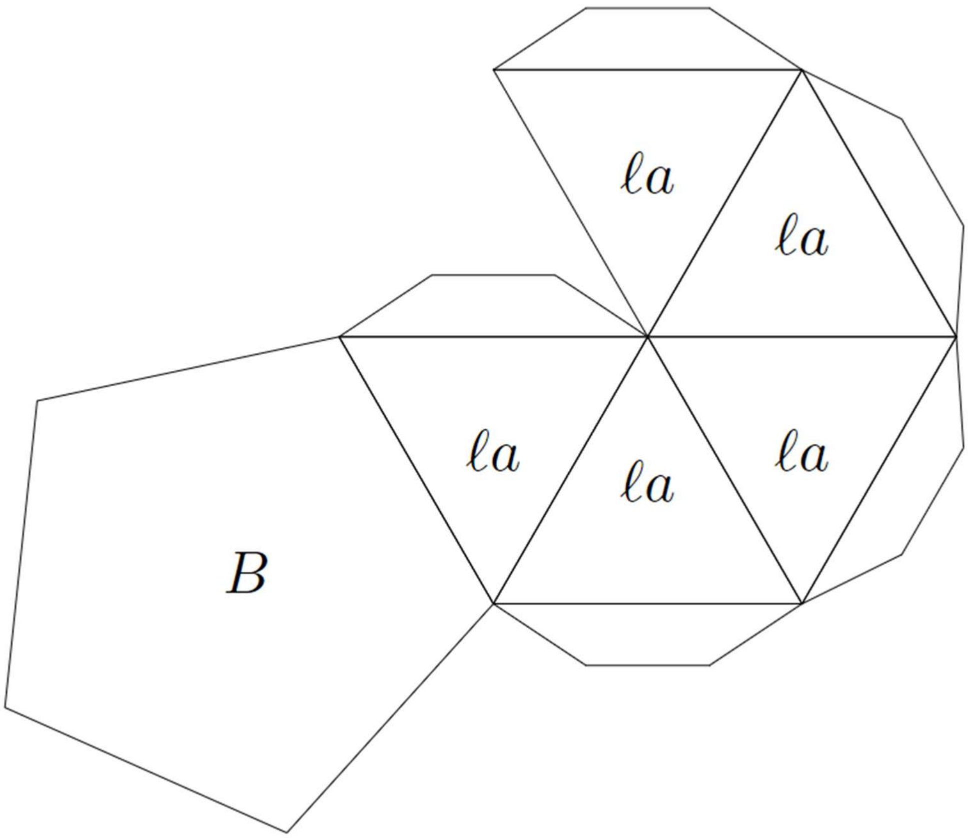
5. Le quadrilatère $HDAF$ a trois angles droits mais ce n'est pas un rectangle, sinon son quatrième angle $\widehat{AFH}$ serait droit d'après la prop. 4, p. 17. On en conclut que **ce quadrilatère n'est pas plat**.
En perspective conique, on voit assez bien que le point F **n'est pas** dans le plan $DAEH$.

Ex. 7, p. 143



7. On trouve que les cinq côtés font 3,5 cm et les angles 108°.

8. Le **patron** de la pyramide est composé de cinq faces latérales $\boxed{\ell a}$ et d'une base pentagonale $\boxed{B}$. Pour l'assemblage, se reporter aux explications p. 146.



Chapitre 6

Les implications logiques

1 Le symbole $\Rightarrow$

On a eu l'occasion, dans plusieurs des chapitres précédents, par exemple p. 77 et p. 81, d'utiliser le symbole logique $\boxed{\Rightarrow}$ qui se lit "**implique**" et qu'on doit comprendre comme voulant dire "**alors**". On se propose de compléter ce qui en a déjà été dit.

• On va d'abord donner un exemple issu de l'arithmétique (*voir* ex. 1, p. 150) : soit n un entier quelconque ayant au moins **deux chiffres**. Notons b l'entier formé par les deux derniers chiffres de n. L'implication suivante :

$$(b \text{ est multiple de } 4) \Rightarrow (n \text{ est multiple de } 4)$$

est vraie. L'implication réciproque :

$$(n \text{ est multiple de } 4) \Rightarrow (b \text{ est multiple de } 4)$$

est vraie aussi. Ces deux implications donnent un **critère**[1] **de divisibilité par 4**. En effet, pour savoir si un entier n est divisible ou non par 4, on considère l'entier b constitué des deux derniers chiffres de n. Si b est divisible par 4 alors n est divisible par 4. Si b n'est pas divisible par 4 alors n n'est pas divisible par 4.

• Pour schématiser la situation précédente, donnons des noms aux énoncés logiques et posons : $E = (b \text{ est multiple de } 4)$ et $F = (n \text{ est multiple de } 4)$. Alors l'**implication directe** :

$$\boxed{E \Rightarrow F}$$

et l'**implication réciproque** :

$$\boxed{F \Rightarrow E}$$

sont toutes deux vraies. On dit que E et F sont **équivalents**, et on écrit :

$$\boxed{E \Leftrightarrow F}$$

où le symbole $\boxed{\Leftrightarrow}$ doit se lire "**équivaut à**".

1. Un critère est une équivalence.

2 Implication directe et implication réciproque

Il existe en mathématiques des implications qui sont vraies et dont **la réciproque est fausse**. Donnons deux exemples :

• En arithmétique, l'implication suivante :

$$(n \text{ est multiple de } 4) \Rightarrow (n \text{ est multiple de } 2)$$

est **vraie** pour tout entier n. Car si n est multiple de 4 alors il existe un entier b tel que :

$$n = 4b$$

soit encore :

$$n = (2 \times 2)b = 2 \times (2b)$$

donc n est multiple de 2.

Mais l'implication réciproque :

$$(n \text{ est multiple de } 2) \Rightarrow (n \text{ est multiple de } 4)$$

n'est **pas vraie** pour tous les entiers. Par exemple, 6 est multiple de 2 mais pas de 4.

• En géométrie, on peut montrer que si une figure $\mathscr{F}$ admet deux axes de symétrie qui soient **perpendiculaires**, alors elle admet un centre de symétrie qui est le point d'intersection de ces deux axes. On le voit par exemple sur la lettre :

H

On peut résumer cette propriété par l'implication suivante :

$$(\mathscr{F} \text{ a deux axes de symétrie } \textbf{perpendiculaires}) \Rightarrow (\mathscr{F} \text{ a un centre de symétrie})$$

Mais l'implication réciproque :

$$(\mathscr{F} \text{ a un centre de symétrie}) \Rightarrow (\mathscr{F} \text{ a deux axes de symétrie perpendiculaires})$$

n'est **pas vraie** pour toutes les figures. Par exemple, la lettre :

N

admet un centre de symétrie, mais n'a **aucun axe de symétrie**.

3 Exercices

Exercice 1 (*divisibilité par* 4)**.**

Tout entier positif n possède soit 1 ou 2 chiffres seulement, soit 3 chiffres ou plus. S'il possède seulement 1 ou 2 chiffres, on pose $b = n$ et $a = 0$. S'il possède 3 chiffres ou plus, on note b l'entier formé par les deux derniers chiffres de n, et a l'entier formé par tous les chiffres de n sauf les deux derniers. Dans les deux cas, on a la **décomposition** suivante :

$$n = 100a + b$$

Exemples :

$$\begin{aligned} n = 5 &\quad \Rightarrow \quad n = 0 + 5 = 100 \times 0 + 5 \\ n = 48 &\quad \Rightarrow \quad n = 0 + 48 = 100 \times 0 + 48 \\ n = 758 &\quad \Rightarrow \quad n = 700 + 58 = 100 \times 7 + 58 \\ n = 20368 &\quad \Rightarrow \quad n = 20300 + 68 = 100 \times 203 + 68 \end{aligned}$$

1. Démontrer que l'implication suivante :

$$(b \text{ est multiple de } 4) \Rightarrow (n \text{ est multiple de } 4)$$

est vraie pour tous les entiers n positifs.

2. Démontrer que l'implication réciproque :

$$(n \text{ est multiple de } 4) \Rightarrow (b \text{ est multiple de } 4)$$

est vraie pour tous les entiers n positifs.

Exercice 2 (*implication directe / réciproque* (1)).

Voici trois **énoncés vrais** :

1. Si l'orage s'annonce, les poules rentrent au poulailler.

$$\boxed{\text{orage} \Rightarrow \text{poulailler}}$$

2. Si un nombre se termine par 5 alors il est divisible par 5.

$$\boxed{\text{se termine par 5} \Rightarrow \text{divisible par 5}}$$

3. Si I est milieu de $[AB]$ alors $IA = IB$.

$$\boxed{I \text{ milieu de } [AB] \Rightarrow IA = IB}$$

4. Pour chacun d'eux, expliquez pourquoi l'**énoncé réciproque** est faux.

Exercice 3 (*implication directe / réciproque* (2)).

Voici trois **énoncés vrais** :

1. Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$

$$\boxed{ABC \text{ rectangle en } A \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 90°}$$

2. Si ABC est un triangle équilatéral alors $\widehat{B} = \widehat{C} = 60°$

$$\boxed{ABC \text{ équilatéral} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 60°}$$

3. Si $x + 3 = -4$ alors $x = -7$

$$\boxed{x + 3 = -4 \Rightarrow x = -7}$$

4. Pour chacun d'eux, expliquez pourquoi l'**énoncé réciproque** est vrai.

4 Correction des exercices

Ex. 1, p. 150. 1. Partons de la décomposition générale de n :

$$n = 100a + b \tag{1}$$

Supposons que b soit multiple de 4. Il existe alors un entier q, tel que $b = 4q$. Portons ceci dans la relation (1) et il vient :

$$n = 100a + 4q$$

Or on peut écrire $100 = 4 \times 25$, donc :

$$n = 4 \times 25 \times a + 4q = 4(25a + q)$$

Comme $25a + q$ est entier, ceci prouve que n est multiple de 4.
2. Supposons que n soit multiple de 4. Il existe alors un entier q, tel que $n = 4q$. Portons ceci dans la relation (1) et il vient :

$$4q = 100a + b \Leftrightarrow b = 4q - 100a = 4 \times (q - 25a)$$

Donc $b = 4 \times (q - 25a)$. Comme $q - 25a$ est entier, ceci prouve que b est multiple de 4. Si on met bout à bout les deux démonstrations, on a prouvé l'équivalence :

$$(n \text{ est multiple de } 4) \Leftrightarrow (b \text{ est multiple de } 4)$$

qui est un critère de divisibilité par 4. Par exemple :
- $758 = 700 + 58$. Or 58 n'est pas divisible par 4, donc 758 non plus.
- 20368=20300+68. Or 68 est divisible par 4, donc 20368 l'est aussi.

Ex. 2, p. 151. 1. L'implication réciproque :

$$\boxed{\text{poulailler} \Rightarrow \text{orage}}$$

est fausse car les poules peuvent se réfugier au poulailler même si l'orage ne s'annonce pas. Il suffit que le jour baisse ou qu'un prédateur les menace, etc.

2. L'implication réciproque :

$$\boxed{\text{divisible par 5} \Rightarrow \text{se termine par 5}}$$

est fausse car il existe des entiers comme 10, qui sont divisible par 5 mais ne se termine pas par 5.

3. L'implication réciproque :

$$\boxed{IA = IB \Rightarrow I \text{ milieu de } [AB]}$$

est fausse car $IA = IB$ implique que I est sur la médiatrice de $[AB]$ (*voir* th. 3, p. 77) mais pas forcément au milieu de $[AB]$.

Ex. 3, p. 151. 1. L'implication réciproque :

$$\boxed{\widehat{B}+\widehat{C}=90^\circ \;\Rightarrow\; ABC \text{ rectangle en } A}$$

est vraie. En effet, on sait que la somme des trois angles d'un triangle vaut 180. Si la somme de deux des angles vaut 90, il reste $180-90=90$ pour le troisième angle. Donc il est droit.

2. L'implication réciproque :

$$\boxed{\widehat{B}=\widehat{C}=60^\circ \;\Rightarrow\; ABC \text{ équilatéral}}$$

est vraie. En effet, puisque la somme des trois angles d'un triangle vaut 180, on a :

$$\widehat{A}=180-(\widehat{B}+\widehat{C})=180-120=60$$

Donc ABC a ses trois angles égaux, donc ses trois côtés sont égaux. ABC est donc équilatéral.

3. L'implication réciproque :

$$\boxed{x=-7 \;\Rightarrow\; x+3=-4}$$

est vraie, on le voit en ajoutant 3 des deux côtés :

$$\begin{array}{rcl} x & = & -7 \\ x+3 & = & -7+3 \\ x+3 & = & -4 \end{array}$$

Index

Mathématiques

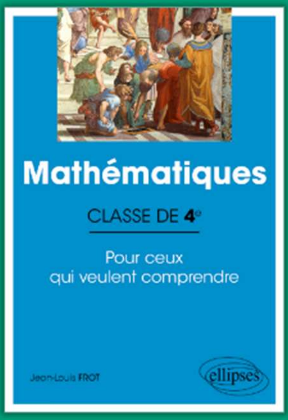
CLASSE DE 5^{e}

Pour bien faire comprendre les notions nouvelles du cours de mathématiques de cinquième, ce livre comporte des explications concrètes avec en première partie des révisions des années précédentes pour consolider les connaissances. Ces notions sont entrecoupées de petites questions posées à l'élève, qui sont résolues un peu plus loin.

Une série d'exercices clôt chaque chapitre, la plupart originaux. Ils sont corrigés entièrement pour montrer aux élèves les méthodes de raisonnement. Presque tous de niveau facile ou moyen, ils ont pour ambition première de faciliter l'assimilation du cours et d'entraîner l'élève à la pratique aisée des techniques de base.

Mais l'auteur n'a pas pu s'empêcher de glisser quand même quelques exercices plus relevés, intéressants et instructifs, destinés à faire aimer les mathématiques, et à donner aux enfants suffisamment de satisfaction pour justifier les efforts qu'ils auront consentis pour les comprendre et les résoudre.

***Jean-Louis Frot** a enseigné les mathématiques dans toutes les classes de la Sixième à la Terminale dans différents lycées, et en particulier seize ans au lycée Henri-IV à Paris. Il est auteur de plusieurs livres de mathématiques.*



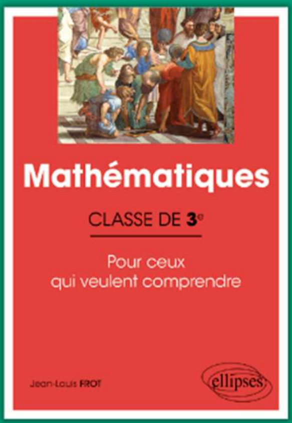


Illustration de couverture : Euclide représenté dans *La fresque de l'École d'Athènes* peinte par Raphaël, 1509-1511.

www.editions-ellipses.fr

9 782340 047303