2003-2007

La compil du brevet

5 années d'annales corrigées

Mathématiques

Série collège

- Tous les sujets du brevet depuis 5 ans
- Des corrigés méthodiques et détaillés
- Une indexation par années et par thèmes du programme

Vuibert

rue des écoles

La compil du brevet

Mathématiques

Série collège

Vuibert

rue des écoles

Composition : Linéale Production
© rue des écoles, Paris, 2006
ISBN : 2-84431-387-6

AVANT-PROPOS

La Compil du brevet a été conçue pour vous aider à préparer efficacement l'épreuve de mathématiques.

Elle rassemble :

- **5 années d'annales** pour couvrir la totalité du programme de mathématiques et vous laisser le choix de préparer les tout derniers sujets du brevet et/ou les sujets plus anciens ;
- **30 sujets complets**, suivis de leur **corrigé**, pour vous permettre de vous entraîner dans les conditions réelles de l'épreuve.

Les sujets

Dans cet ouvrage vous trouverez la plupart des sujets posés en France métropolitaine, dans les DOM-TOM et les centres étrangers, en 2002, 2003, 2004, 2005 et 2006, classés par année.

Grâce au **sommaire détaillé** et au **tableau des groupements**, vous trouverez facilement le sujet qui vous intéresse.

Un **tableau thématique** a également été ajouté. Il vous permet de choisir avec précision la question correspondant aux points du programme que vous souhaitez travailler.

Les corrigés

Chaque question est suivie d'un **corrigé méthodique et détaillé** qui vous aidera à cerner ce qu'on attend de vous le jour de l'examen.

Outil de révisions indispensable, *La compil du brevet* vous accompagnera tout au long de l'année !

SOMMAIRE

TABLEAU DES GROUPEMENTS 5
TABLEAU THÉMATIQUE DES SUJETS 6

SESSION 2002

SUJET 1 ◈ *Groupement 1, juin 2002* 10
SUJET 2 ◈ *Groupement 2, juin 2002* 20
SUJET 3 ◈ *Groupement 3, juin 2002* 29
SUJET 4 ◈ *Groupement 4, juin 2002* 39
SUJET 5 ◈ *Groupement 1, septembre 2002* 50
SUJET 6 ◈ *Groupement 3, septembre 2002* 61

SESSION 2003

SUJET 7 ◈ *Groupement 1, juin 2003* 72
SUJET 8 ◈ *Groupement 2, juin 2003* 84
SUJET 9 ◈ *Groupement 3, juin 2003* 94
SUJET 10 ◈ *Groupement 4, juin 2003* 104
SUJET 11 ◈ *Groupement 2, septembre 2003* 112
SUJET 12 ◈ *Polynésie française, juin 2003* 123

SESSION 2004

SUJET 13 ◈ *Groupement 1, juin 2004* 132
SUJET 14 ◈ *Groupement 2, juin 2004* 142
SUJET 15 ◈ *Groupement 3, juin 2004* 153
SUJET 16 ◈ *Groupement 4, juin 2004* 164
SUJET 17 ◈ *Centres étrangers groupe 1, juin 2004* 173
SUJET 18 ◈ *Niger, juin 2004* 182
SUJET 19 ◈ *Groupement 1, septembre 2004* 190
SUJET 20 ◈ *Groupement 2, septembre 2004* 201

SESSION 2005

SUJET 21 ◈ *Groupement 1, juin 2005* 212
SUJET 22 ◈ *Groupement 2, juin 2005* 222
SUJET 23 ◈ *Groupement 4, juin 2005* 231
SUJET 24 ◈ *Groupement 1, septembre 2005* 244
SUJET 25 ◈ *Groupement 2, septembre 2005* 254
SUJET 26 ◈ *Groupement 3, septembre 2005* 263

SESSION 2006

SUJET 27 ◈ *Groupement 1, juin 2006* 274
SUJET 28 ◈ *Groupement 2, juin 2006* 286
SUJET 29 ◈ *Groupement 3, juin 2006* 296
SUJET 30 ◈ *Groupement 4, juin 2006* 308

GROUPEMENTS ACADÉMIQUES

Groupement 1	Groupement 2	Groupement 3	Groupement 4
Amiens	Bordeaux	Besançon	Montpellier
Lille	Caen	Dijon	Nice
Rouen	Clermont-Ferrand	Grenoble	Toulouse
Paris-Créteil-Versailles	Limoges	Lyon	Corse
	Rennes	Nancy-Metz	Aix-Marseille
	Orléans-Tours	Reims	
	Nantes	Strasbourg	
	Poitiers		

TABLEAU THÉMATIQUE DES SUJETS

Les numéros renvoient aux sujets.

Thèmes	Activités numériques	Activités géométriques	Problèmes
Calcul numérique	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30		3, 5, 7, 10
Statistiques – Proportionnalité – Pourcentages	3, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 23, 26, 28	2, 17, 30	4, 7, 9, 20, 21, 22, 23, 24, 27
Arithmétique	1, 3, 4, 5, 7, 11, 15, 21, 22, 23, 24, 26, 27		9, 29
Calcul algébrique – Factorisation	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30		5, 7
Étude graphique – Coordonnées	6, 11, 13	2, 7, 8, 17, 20, 21, 22, 25, 27, 28, 29	3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30
Espace		2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 30	6, 11, 24, 27, 29
Équation et inéquation du 1er degré à une inconnue	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30		1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 26, 28, 29
Système de 2 équations à 2 inconnues	1, 2, 4, 7, 9, 13, 14, 17, 19, 20, 21, 25, 26, 27, 29, 30		

Thèmes	Activités numériques	Activités géométriques	Problèmes
Équation de droite – Fonction affine	6, 11		1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 21, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30
Théorème de Pythagore – Calcul de distances	2, 17	1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 29, 30	1, 2, 6, 8, 11, 18, 19, 23, 26, 27
Théorème de Thalès		1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30	2, 8, 11, 15, 17, 27
Vecteurs – Translation – Rotation – Symétries centrale et axiale		1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 15, 16, 17, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29	13, 18, 19, 20
Géométrie plane – Triangles – Quadrilatères – Cercle – Calcul d'aires		1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29	1, 2, 6, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 26
Trigonométrie		1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, 30	2, 8, 11, 23, 26

BREVET
MATHÉMATIQUES
SESSION 2002

SUJET 1 SUJET

GROUPEMENT 1 ◆ JUIN 2002

Activités numériques *(12 points)*

Exercice 1

$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{4}{7}$ $\qquad$ $B = \frac{6}{5} : \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{5}\right)$.

a. Calculer A et écrire la réponse sous forme de fraction irréductible.

b. Calculer B et écrire la réponse sous forme d'un entier.

Exercice 2

On considère l'expression $C = (3x - 1)^2 - (3x - 1)(2x + 3)$.

a. Développer et réduire C.

b. Factoriser C.

c. Résoudre l'équation $(3x - 1)(x - 4) = 0$.

d. Calculer C pour $x = \sqrt{2}$.

Exercice 3

Une fermière vend 3 canards et 4 poulets pour 70,30 €.
Un canard et un poulet valent ensemble 20,70 €.
Déterminer le prix d'un poulet et celui d'un canard.

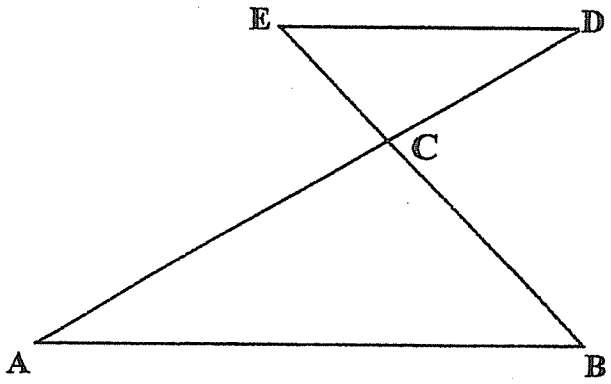
Exercice 4

Pour le 1er mai, Julie dispose de 182 brins de muguet et 78 roses.
Elle veut faire le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes ses fleurs.
Combien de bouquets identiques pourra-t-elle faire ?
Quelle sera la composition de chaque bouquet ?

Activités géométriques *(12 points)*

Exercice 1

La figure suivante est donnée à titre indicatif pour préciser la position des points A, B, C, D et E.
Les longueurs représentées ne sont pas exactes.
On donne :
CE = 5
CD = 12
CA = 18
CB = 7,5
AB = 19,5



a. Montrer que les droites (ED) et (AB) sont parallèles.

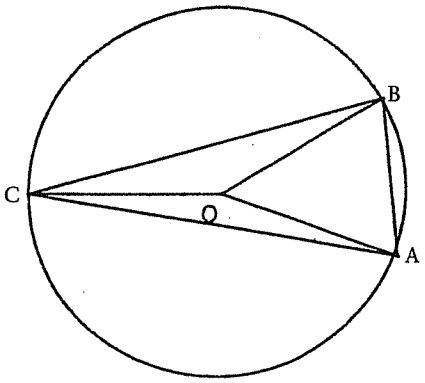
b. Montrer que ED = 13.

c. Montrer que le triangle CED est un triangle rectangle.

d. Calculer tan $\widehat{DEC}$ puis en déduire la valeur arrondie au degré de la mesure de l'angle $\widehat{DEC}$.

Exercice 2

Déterminer la mesure des angles du triangle ABC sachant que $\widehat{AOB}$ = 50° et $\widehat{BOC}$ = 150 °, en justifiant chacune de vos réponses.



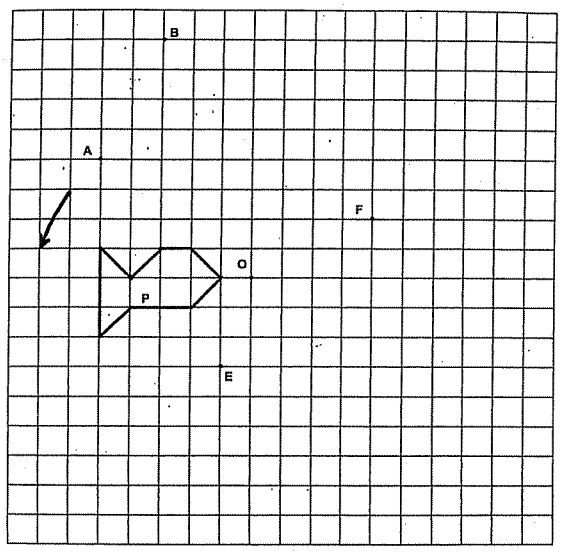
Exercice 3

a. Tracer le symétrique P_1 de la figure P par rapport au point O.

b. Tracer le symétrique P_2 de la figure P par rapport à la droite (EF).

c. Tracer l'image P_3 de la figure P par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

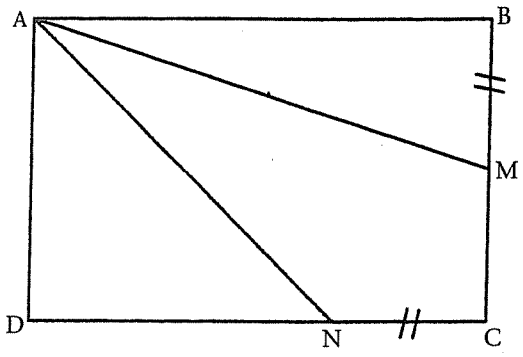
d. Tracer l'image P_4 de la figure P dans la rotation de centre E, d'angle 90° et dans le sens de la flèche.



Problème *(12 points)*

ABCD est un rectangle tel que AB = 6 cm et AD = 4 cm.

Partie A



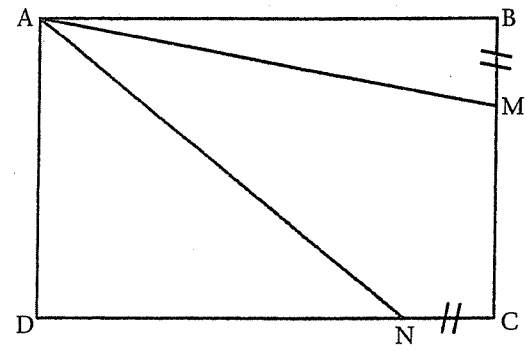
M est le point du segment [BC] tel que BM = 2 cm.

N est le point du segment [CD] tel que CN = 2 cm.

1. Calculer AM sous la forme $a\sqrt{b}$ (b nombre entier le plus petit possible).

2. Démontrer que l'aire du quadrilatère AMCN est 10 cm².

Partie B



Les points M et N peuvent se déplacer respectivement sur les segments [BC] et [CD] de façon que BM = CN = x ($0 < x \leqslant 4$).

1. Exprimer l'aire du triangle ABM en fonction de x.

2. a. Calculer DN en fonction de x.

b. Démontrer que l'aire du triangle ADN en fonction de x est $-2x + 12$.

3. a. Dans un repère orthonormé (O, I, J) avec OI = OJ = 1 cm, représenter graphiquement les fonctions affines :

$f : x \to f(x) = 3x$ et $g : x \to g(x) = -2x + 12$.

b. Calculer les coordonnées du point R intersection de ces deux représentations.

4. a. Pour quelle valeur de x les aires des triangles ABM et ADN sont-elles égales ? Justifier la réponse.

b. Pour cette valeur de x, calculer l'aire du quadrilatère AMCN.

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

a. $A = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{4}{7}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{7} - \frac{4}{7}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{7}$ donc $\mathbf{A = \frac{1}{7}}$.

b. $B = \frac{6}{5} : \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{5}\right) = \frac{6}{5} : \left(\frac{1}{15} - \frac{3}{15}\right) = \frac{6}{5} : \left(\frac{-2}{15}\right) = \frac{6}{5} \times \left(\frac{-15}{2}\right)$

$B = -\frac{6 \times 15}{5 \times 2} = -\frac{2 \times 3 \times 3 \times 5}{5 \times 2} = -3 \times 3$ donc $\mathbf{B = -9}$.

Exercice 2

a. Forme réduite de C

Utilisons l'identité $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 1$.

$C = (3x - 1)^2 - (3x - 1)(2x + 3) = ((3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2) - (3x \times 2x + 3 \times 3x - 2x - 3)$

$C = 9x^2 - 6x + 1 - 6x^2 - 9x + 2x + 3$

$\mathbf{C = 3x^2 - 13x + 4}$

b. Forme factorisée de C

$C = (3x - 1)^2 - (3x - 1)(2x + 3) = (3x - 1)[(3x - 1) - (2x + 3)]$

$C = (3x - 1)(3x - 1 - 2x - 3)$ donc $\mathbf{C = (3x - 1)(x - 4)}$

On contrôle qu'en développant ce produit de facteurs on retrouve la forme réduite de C.

c. Résolution de l'équation C = 0

$C = 0$ est vérifiée lorsque $3x - 1 = 0$ ou $x - 4 = 0$

$C = 0$ est vérifiée lorsque $3x = 1$ ou $x = 4$

$C = 0$ est vérifiée lorsque $x = \frac{1}{3}$ ou $x = 4$

Les solutions de l'équation C = 0 sont les nombres $\frac{1}{3}$ et 4.

d. Utilisons la forme réduite de C.

Si $x = \sqrt{2}$, alors $C = 3 \times (\sqrt{2})^2 - 13\sqrt{2} + 4 = 3 \times 2 - 13\sqrt{2} + 4$

donc $\mathbf{C = 10 - 13\sqrt{2}}$ **pour** $\boldsymbol{x = \sqrt{2}}$.

Exercice 3

Notons x le prix d'un canard et y celui d'un poulet.

L'énoncé se traduit par le système S : $\begin{cases} 3x + 4y = 70,3 \\ x + y = 20,7 \end{cases}$

Résolvons le système S par la méthode de substitution.

S est vérifié lorsque $\begin{cases} 3x + 4\,(20,7 - x) = 70,3 \\ y = 20,7 - x \end{cases}$

S est vérifié lorsque $\begin{cases} 3x + 82,8 - 4x = 70,3 \\ y = 20,7 - x \end{cases}$

S est vérifié lorsque $\begin{cases} -x = -12,5 \\ y = 20,7 - x \end{cases}$

S est vérifié lorsque $\begin{cases} x = 12,5 \\ y = 20,7 - 12,5 = 8,2 \end{cases}$

Le système S a pour solutions $x = 12,5$ et $y = 8,2$.

On est déduit qu'**un canard coûte 12,5 € et qu'un poulet coûte 8,2 €**.

Exercice 4

Le nombre de bouquets identiques que Julie pourra faire est un diviseur commun à 182 et 78 puisqu'elle veut utiliser toutes ses fleurs et que les bouquets auront le même nombre de brins de muguet et le même nombre de roses.

Le plus grand nombre de ces bouquets qu'elle pourra faire est donc égal au pgcd de 182 et 78.

Calculons-le en mettant en œuvre l'algorithme d'Euclide :

182	78
26	2

78	26
0	3

On obtient : pgcd (182, 78) = 26 (dernier reste non nul obtenu dans l'algorithme).

On en déduit que **le plus grand nombre de bouquets identiques que pourra faire Julie est de 26**.

$\frac{182}{26} = 7$ et $\frac{78}{26} = 3$, donc **chaque bouquet sera alors composé de 7 brins de muguet et de 3 roses**.

Activités géométriques

Exercice 1

a. Les points E, C, B d'une part et D, C, A d'autre part sont alignés dans le même ordre.

De plus, on a : $\frac{CE}{CB} = \frac{5}{7,5} = \frac{2 \times 2,5}{3 \times 2,5} = \frac{2}{3}$ et $\frac{CD}{CA} = \frac{12}{18} = \frac{2 \times 6}{3 \times 6} = \frac{2}{3}$

donc $\frac{CE}{CB} = \frac{CD}{CA}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, ont peut en déduire que **les droites (ED) et (AB) sont parallèles**.

b. Calcul de ED

Les droites (ED) et (AB) étant parallèles, appliquons le théorème de Thalès.

On obtient : $\frac{CE}{CB} = \frac{ED}{AB}$ d'où $\frac{5}{7,5} = \frac{ED}{19,5}$

$ED = 19,5 \times \frac{5}{7,5}$ donc on a bien **ED = 13**.

c. On a : $ED^2 = 13^2 = 169$ et $CE^2 + CD^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$

donc $ED^2 = CE^2 + CD^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut alors affirmer que **le triangle CED est rectangle en C.**

d. Calcul de $\widehat{DEC}$

Dans le triangle CED rectangle en C, on a :

$\tan \widehat{DEC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{CD}{CE}$ d'où $\tan \widehat{DEC} = \frac{12}{5}$

soit **$\tan \widehat{DEC} = 2,4$**.

À l'aide d'une calculatrice, on obtient : **$\widehat{DEC} \approx 67°$**.

Exercice 2

Notons $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Son centre est le point O. Dans le cercle $\mathscr{C}$, $\widehat{ACB}$ est un angle aigu inscrit et $\widehat{AOB}$ est un angle au centre qui s'appuient sur la même corde [AB].

On a donc : $\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$ d'où $\widehat{ACB} = \frac{50}{2}$ soit **$\widehat{ACB} = 25°$**.

De même, dans le cercle $\mathscr{C}$, $\widehat{BAC}$ est un angle aigu inscrit et $\widehat{BOC}$ est un angle au centre qui s'appuient sur la même corde [BC].

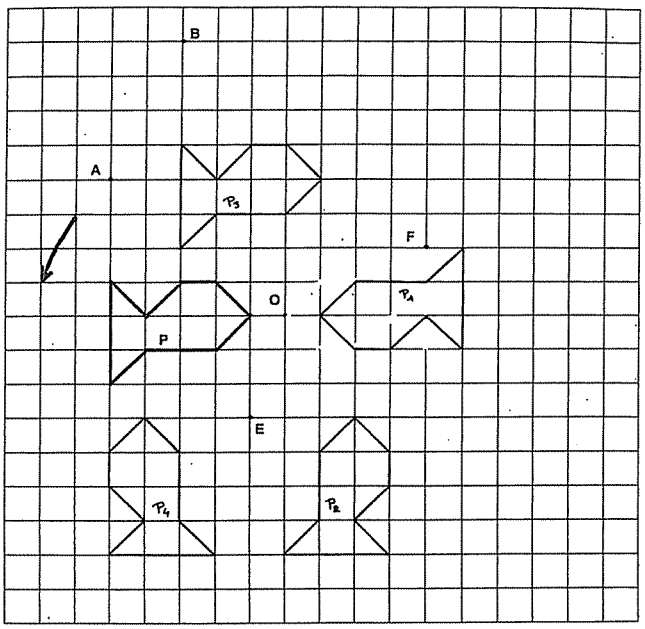
On a donc : $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BOC}}{2}$ d'où $\widehat{BAC} = \frac{150}{2}$ soit **$\widehat{BAC} = 75°$**.

La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

On a donc : $\widehat{ABC} = 180 - \widehat{ACB} - \widehat{BAC} = 180 - 25 - 75$ d'où $\widehat{\mathbf{ABC}} = \mathbf{80°}$.

Exercice 3

a. b. c. et d.



Problème

Partie A

1. Calcul de AM

Le triangle ABM est rectangle en B puisque ABCD est un rectangle et que M ∈ [BC].
Appliquons alors le théorème de Pythagore dans le triangle ABM.
On obtient : $AM^2 = AB^2 + BM^2$ d'où $AM^2 = 6^2 + 2^2$
$AM^2 = 36 + 4 = 40 = 4 \times 10$ donc $AM = \sqrt{4} \times \sqrt{10}$ soit $\mathbf{AM = 2\sqrt{10}\ cm}$.

2. Calcul de l'aire $\mathcal{A}$ du quadrilatère AMCN (en cm²)

Notons $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ les aires respectives du rectangle ABCD, du triangle ABM et du triangle ADN. On a alors : $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3$.

$\mathcal{A}_1 = AB \times AD$ donc $\mathcal{A}_1 = 6 \times 4$, $\mathcal{A}_1 = 24$ cm².

ABM est rectangle en B, donc $\mathcal{A}_2 = \dfrac{AB \times BM}{2}$

d'où $\mathcal{A}_2 = \frac{6 \times 2}{2}$, $\mathcal{A}_2 = 6$ cm².

ADN est rectangle en D puisque ABCD est un rectangle et que N ∈ [DC].

De plus, puisque N ∈ [DC], on a : DN = DC – CN = 6 – 2
soit DN = 4 cm.

On a donc : $\mathcal{A}_3 = \frac{AD \times DN}{2}$ d'où $\mathcal{A}_3 = \frac{4 \times 4}{2}$, $\mathcal{A}_3 = 8$ cm².

Ainsi, on a : $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3 = 24 - 6 - 8$ d'où $\mathcal{A}$ = **10 cm²**.

Partie B

1. Calcul de l'aire $\mathcal{A}$ (ABM) du triangle ABM (en cm²)

Le triangle ABM est toujours rectangle en B.

On a donc : $\mathcal{A}$ (ABM) = $\frac{AB \times BM}{2}$, $\mathcal{A}$ (ABM) = $\frac{6x}{2}$ d'où $\mathcal{A}$ **(ABM) = 3*x***.

2. a. Calcul de DN (en cm)

N ∈ [CD] donc DN = DC – NC d'où **DN = 6 – *x***.

b. Calcul de l'aire $\mathcal{A}$ (ADN) du triangle ADN (en cm²)

Le triangle ADN est toujours rectangle en D.

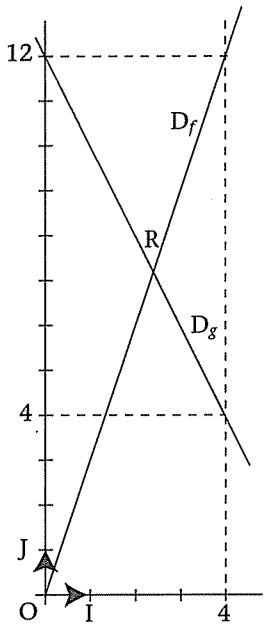
On a donc :

$\mathcal{A}$ (ADN) = $\frac{AD \times DN}{2}$, $\mathcal{A}$ (ADN) = $\frac{4(6-x)}{2} = 2(6-x) = 12 - 2x$

d'où $\mathcal{A}$ **(ADN) = – 2*x* + 12**.

3. a. La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 3x$ est la droite D_f d'équation $y = 3x$. Elle passe par les points de coordonnées (0 ; 0) et (4 ; 12).
La représentation graphique de la fonction $y : x \mapsto -2x + 12$ est la droite D_g d'équation $y = -2x + 12$. Elle passe par les points de coordonnées (0 ; 12) et (4 ; 4).

CORRIGÉ



b. L'abscisse du point R intersection des deux représentations graphiques précédentes est solution de l'équation $f(x) = g(x)$. Résolvons cette équation.
$f(x) = g(x)$ est vérifié lorsque $3x = -2x + 12$
$f(x) = g(x)$ est vérifié lorsque $5x = 12$
$f(x) = g(x)$ est vérifié lorsque $x = \frac{12}{5} = 2{,}4$
L'équation $f(x) = g(x)$ a donc pour solution 2,4.
On a : $f(2{,}4) = g(2{,}4) = 7{,}2$.
On a déduit que R, intersection de D_f et D_g, a pour abscisse 2,4 et pour ordonnée 7,2.
On a donc : **R (2,4 ; 7,2)**.
On vérifie ce résultat sur le graphique.

4. a. Avec les notations précédentes, on a, pour $0 < x \leqslant 4$,
$\mathcal{A}$ (ABM) = $f(x)$ et $\mathcal{A}$ (ADN) = $g(x)$.
L'équation $\mathcal{A}$ (ABM) = $\mathcal{A}$ (ADN) s'écrit donc $f(x) = g(x)$, qui a pour solution $x = 2{,}4$.
Donc les aires des triangles ABM et ADN sont égales pour $x = 2{,}4$.

b. Calcul de l'aire $\mathcal{A}'$ (en cm²) du quadrilatère AMCN pour $x = 2{,}4$.

Pour $x = 2{,}4$, les triangles ABM et ADN ont chacun pour aire 7,2 cm² (puisque $f(2{,}4) = g(2{,}4) = 7{,}2$).

L'aire du rectangle ABCD est de 24 cm².

En raisonnant comme dans la question A-2, on a alors :

$\mathcal{A}' = 24 - 7{,}2 - 7{,}2$ d'où $\mathcal{A}'$ = **9,6 cm²**.

SUJET 2 SUJET

GROUPEMENT 2 ◆ JUIN 2002

Activités numériques *(12 points)*

Exercice 1

1. Développer et réduire l'expression : $P = (x + 12)(x + 2)$.

2. Factoriser l'expression : $Q = (x + 7)^2 - 25$.

3. ABC est un triangle rectangle en A ; x désigne un nombre positif ;
$BC = x + 7$; $AB = 5$.
Faire un schéma et montrer que : $AC^2 = x^2 + 14x + 24$.

Exercice 2

Résoudre chacune des deux équations :
$3(5 + 3x) - (x - 3) = 0$; $3(5 + 3x)(x - 3) = 0$.

Exercice 3

Sur la couverture d'un livre de géométrie sont dessinées des figures ; celles-ci sont des triangles ou des rectangles qui n'ont aucun sommet commun.

1. Combien de sommets compterait-on s'il y avait 4 triangles et 6 rectangles, soit 10 figures en tout ?

2. En fait, 18 figures sont dessinées et on peut compter 65 sommets en tout. Combien y a-t-il de triangles et de rectangles sur cette couverture de livre ?

Exercice 4

En indiquant les calculs intermédiaires, écrire A sous la forme d'une nombre entier et B sous la forme $a\sqrt{3}$ (avec a entier).
$A = (3\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) - 2\sqrt{2}$ $B = 5\sqrt{27} + \sqrt{75}$

Activités géométriques *(12 points)*

Exercice 1

Pour traiter cet exercice, utiliser du papier millimétré.
Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J). L'unité de longueur est le centimètre.

1. a. Placer les points : A (3 ; – 5) et B (– 2 ; 5).

b. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. (Aucune justification n'est demandée.)

c. Calculer la valeur exacte de la longueur AB.

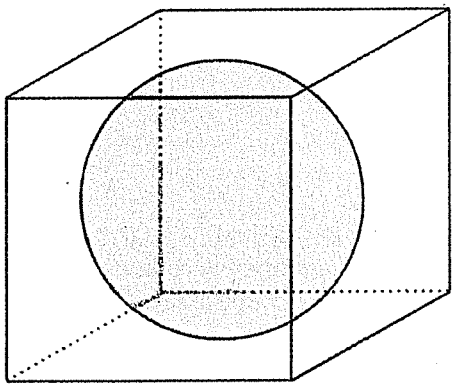
2. a. Placer le point C (– 2 ; – 4) et le point D, image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b. Quelles sont les coordonnées du point D ? (Aucune justification n'est demandée.)

c. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC et quelles sont les coordonnées du point M, intersection des droites (AD) et (BC) ? (Justifier ces deux réponses).

Exercice 2

Dans une boîte cubique dont l'arête mesure 7 cm, on place une boule de 7 cm de diamètre (voir le schéma).



Le volume de la boule correspond à un certain pourcentage du volume de la boîte. On appelle ce pourcentage «taux de remplissage de la boîte. »
Calculer le taux de remplissage de la boîte.
Arrondir ce pourcentage à l'entier le plus proche.

Exercice 3

[AC] et [EF] sont deux segments sécants en B.
On connaît : AB = 6 cm et BC = 10 cm ;
EB = 4,8 cm et BF = 8 cm.

1. Faire un dessin en vraie grandeur.

2. Les droites (AE) et (FC) sont-elles parallèles ? Justifier.

3. Les droites (AF) et (EC) sont-elles parallèles ? Justifier.

Problème *(12 points)*

Construire un triangle MNP tel que :
PN = 13 cm ; PM = 5 cm ; MN = 12 cm.

Partie A

1. Prouver que ce triangle MNP est rectangle en M.

2. Calculer son périmètre et son aire.

3. Tracer le cercle circonscrit au triangle MNP ; préciser la position de son centre O et la mesure de son rayon.

4. Calculer la tangente de l'angle PNM ; en déduire une mesure approchée de cet angle à 1° près.

Partie B

A est un point quelconque du côté [PM].
On pose : AM = x (x est donc un nombre compris entre 0 et 5).
La parallèle à (PN) passant par A coupe le segment [MN] en B.

1. En précisant la propriété utilisée, exprimer MB et AB en fonction de x.

2. Exprimer, en fonction de x, le périmètre du triangle AMB.

3. Résoudre l'équation : $x + \frac{12x}{5} + \frac{13x}{5} = 18$.

4. a. Faire une nouvelle figure en plaçant le point A de façon que le périmètre du triangle AMB soit 18 cm.

b. Quelle est alors l'aire du triangle AMB ?

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. Forme réduite de P

P = $(x + 12)(x + 2) = x^2 + 2x + 12x + 24$ donc $\mathbf{P = x^2 + 14x + 24}$.

2. Forme factorisée de Q

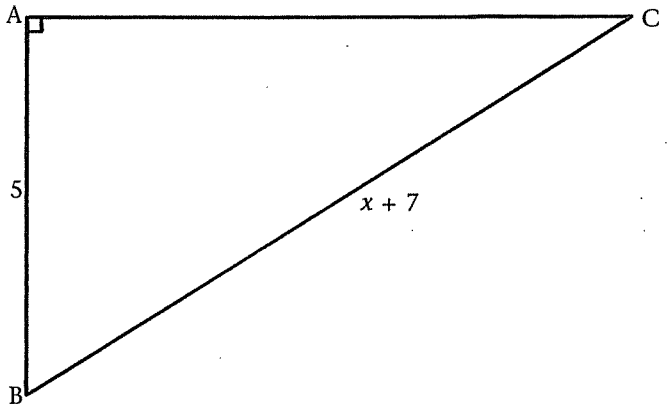
Utilisons l'identité $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = x + 7$ et $b = 5$.

$Q = (x + 7)^2 - 25 = (x + 7)^2 - 5^2 = (x + 7 + 5)(x + 7 - 5)$

donc $\mathbf{Q = (x + 12)(x + 2)}$.

Ces deux résultats montrent que les expressions P et Q sont égales.

3.



Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A.

On obtient : $AC^2 + AB^2 = BC^2$ d'où $AC^2 = BC^2 - AB^2$.

On a donc : $AC^2 = (x + 7)^2 - 5^2 = (x + 7)^2 - 25 = Q = P$,

donc d'après la première question, on a bien :

$\mathbf{AC^2 = x^2 + 14x + 24}$.

Exercice 2

Résolution de l'équation (e_1) : $3(5 + 3x) - (x - 3) = 0$

(e_1) est vérifiée lorsque $15 + 9x - x + 3 = 0$

(e_1) est vérifiée lorsque $8x = -18$

(e_1) est vérifiée lorsque $x = -\frac{18}{8} = -\frac{9}{4}$.

La solution de l'équation (e_1) est le nombre $-\frac{9}{4}$.

Résolution de l'équation (e_2) : $3(5 + 3x)(x - 3) = 0$

(e_2) est vérifiée lorsque $5 + 3x = 0$ ou $x - 3 = 0$
(e_2) est vérifiée lorsque $3x = -5$ ou $x = 3$
(e_2) est vérifiée lorsque $x = -\frac{5}{3}$ ou $x = 3$.
Les solutions de l'équation (e_2) sont les nombres $-\frac{5}{3}$ et 3.

Exercice 3

1. Calcul du nombre s de sommets comptés s'il y a 4 triangles et 6 rectangles sur la couverture du livre de géométrie
Un triangle possède 3 sommets et un rectangle en possède 4.
Les triangles et les rectangles dessinés sur la couverture du livre n'ont aucun sommet en commun.
On a donc : $s = 4 \times 3 + 6 \times 4$ d'où $\boldsymbol{s = 36}$.

2. Notons x le nombre de triangles et y le nombre de rectangles dessinés sur la couverture du livre.
L'énoncé se traduit par le système S : $\begin{cases} x + y = 18 \text{ (nombre de figures)} \\ 3x + 4y = 65 \text{ (nombre de sommets).} \end{cases}$
Résolvons le système S par la méhode de substitution.
S est vérifié lorsque $\begin{cases} x = 18 - y \\ 3(18 - y) + 4y = 65 \end{cases}$
S est vérifié lorsque $\begin{cases} x = 18 - y \\ 54 - 3y + 4y = 65 \end{cases}$
S est vérifié lorsque $\begin{cases} x = 18 - y \\ y = 11 \end{cases}$
S est vérifié lorsque $\begin{cases} x = 18 - 11 = 7 \\ y = 11 \end{cases}$
Le système S a pour solutions $x = 7$ et $y = 11$.
On en déduit que **7 triangles et 11 rectangles sont dessinés sur la couverture du livre de géométrie**.

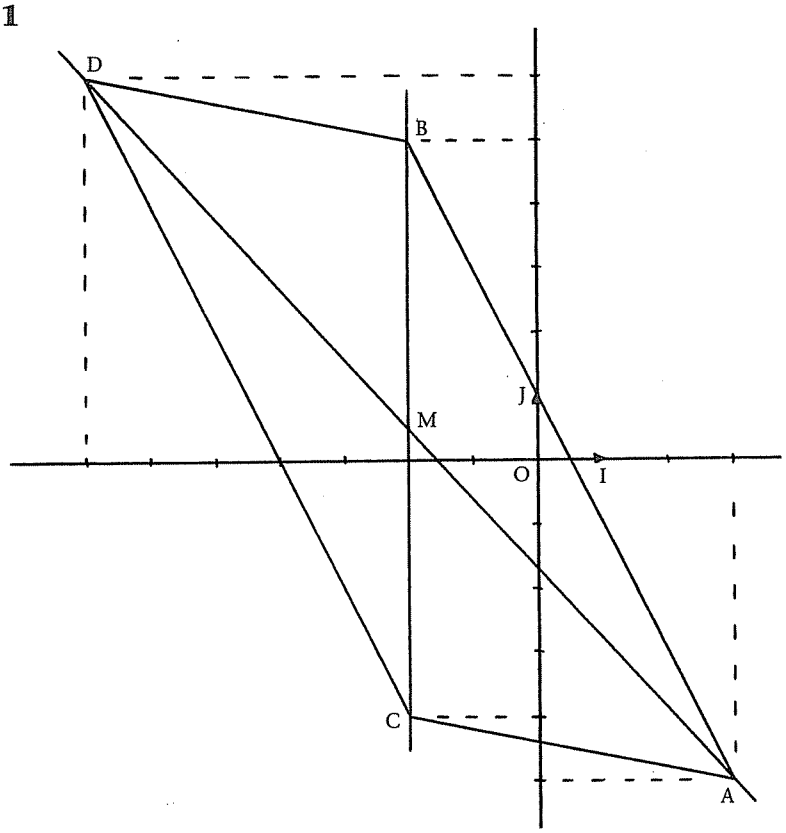
Exercice 4

$A = (3\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) - 2\sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2}$
$A = 3 \times 2 - 1 + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2}$
donc $\mathbf{A = 5}$.
$B = 5\sqrt{27} + \sqrt{75} = 5\sqrt{9 \times 3} + \sqrt{25 \times 3} = 5 \times \sqrt{9} \times \sqrt{3} + \sqrt{25} \times \sqrt{3}$
$B = 5 \times 3 \times \sqrt{3} + 5 \times \sqrt{3} = 15\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$
donc $\mathbf{B = 20\sqrt{3}}$.
On a utilisé la formule : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Activités géométriques

Exercice 1

1. a.
2. a.



1. b. D'après le graphique, on a : $\overrightarrow{AB}$ **(– 5 ; 10)**.

c. Calcul de AB

Dans le repère orthonormal (O, I, J), on a, en utilisant le résultat ci-dessus :

$AB^2 = (-5)^2 + 10^2 = 25 + 100 = 125 = 25 \times 5$

donc $AB = \sqrt{25} \times \sqrt{5}$ soit $\mathbf{AB = 5\sqrt{5}}$.

2. b. D'après le graphique, on a : **D (–7 ; 6)**.

c. D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Cette égalité montre que **le quadrilatère ABDC est un parallélogramme**.

Les diagonales [AD] et [BC] du parallélogramme ABCD ont même milieu.

Donc M, intersection de (AD) et (BC), est le milieu de [AD] et [BC].

On a alors, par exemple : $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-2-2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

et $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}$.

On a donc : $\mathbf{M\left(-2\,;\,\frac{1}{2}\right)}$.

On vérifie ce résultat sur le graphique.

Exercice 2

Notons V et V′ les volumes respectifs (en cm³) de la boîte cubique et de la boule.
La boîte cubique a une arête de 7 cm, donc $V = 7^3$ cm³.

La boule a un diamètre de 7 cm, donc un rayon de $\left(\frac{7}{2}\right)$ cm.

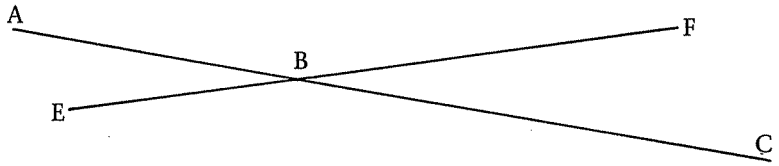
On a donc : $V' = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{4 \times \pi \times 7^3}{3 \times 2^3} = \frac{\pi \times 7^3}{3 \times 2}$ d'où $V' = \frac{\pi \times 7^3}{6}$ cm³.

Ainsi, on a : $\frac{V' \times 100}{V} = \frac{\pi \times 7^3 \times 100}{6 \times 7^3} = \frac{100\pi}{6} = \frac{50\pi}{3} \approx 52$ à l'unité près.

Donc le taux de remplissage de la boîte est de $\frac{50\pi}{3}$ %, c'est-à-dire d'environ 52 %.

Exercice 3

1.



2. Les points A, B, C d'une part et E, B, F d'autre part sont alignés dans le même ordre.

De plus, on a : $\frac{BA}{BC} = \frac{6}{10} = 0{,}6$ et $\frac{BE}{BF} = \frac{4{,}8}{8} = 0{,}6$

donc $\frac{BA}{BC} = \frac{BE}{BF}$.

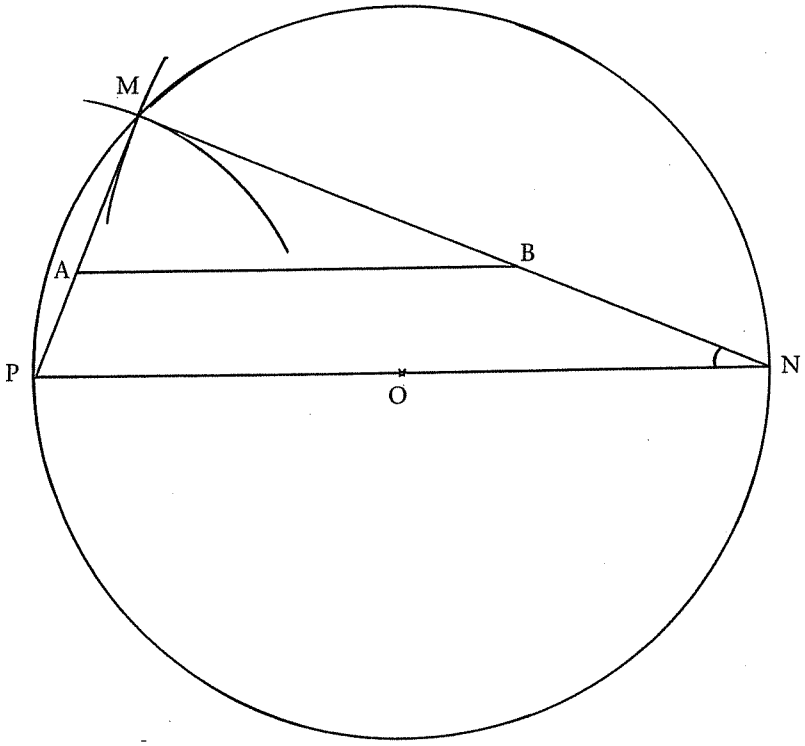
D'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut alors conclure que **les droites (AE) et (FC) sont parallèles**.

3. On a : $\frac{BA}{BC} = \frac{6}{10}$ (< 1) et $\frac{BF}{BE} = \frac{8}{4{,}8}$ (> 1)

donc $\frac{BA}{BC} \neq \frac{BF}{BE}$.

D'après le théorème de Thalès, on peut alors en déduire que l**es droites (AF) et (EC) ne sont pas parallèles**.

Problème



La figure ci-dessus est donnée à titre indicatif, les mesures ne sont pas respectées.

Partie A

1. On a $PN^2 = 13^2 = 169$ et $PM^2 + MN^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$
donc $PN^2 = PM^2 + MN^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que **le triangle MNP est rectangle en M.**

2. PN + PM + MN = 13 + 5 + 12 = 30, donc **le périmètre du triangle MNP est égal à 30 cm.**

Notons $\mathcal{A}$ l'aire (en cm²) du triangle MNP.
MNP étant rectangle en M, on a : $\mathcal{A} = \dfrac{PM \times MN}{2}$
donc $\mathcal{A} = \dfrac{5 \times 12}{2}$ soit $\mathcal{A}$ **= 30 cm²**.

3. MNP étant rectangle en M, il est inscrit dans le cercle de diamètre [PN].
Le cercle circonscrit au triangle MNP est donc le cercle de diamètre [PN].
Son centre O est donc le milieu du segment [PN] et son rayon est égal à 6,5 cm (puisque PN = 13 cm).

4. Calcul de $\widehat{PNM}$

Dans le triangle MNP rectangle en M, on a :

$\tan \widehat{PNM} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{PM}{MN}$ d'où $\mathbf{\tan \widehat{PNM} = \dfrac{5}{12}}$.

À l'aide d'une calculatrice, on obtient alors : $\mathbf{\widehat{PNM} \approx 23°}$.

Partie B

1. Les droites (AB) et (PN) étant parallèles, appliquons le théorème de Thalès.
On obtient : $\dfrac{MA}{MP} = \dfrac{MB}{MN} = \dfrac{AB}{PN}$ d'où $\dfrac{x}{5} = \dfrac{MB}{12} = \dfrac{AB}{13}$.

On a donc : $\mathbf{MB = \dfrac{12x}{5}}$ et $\mathbf{AB = \dfrac{13x}{5}}$.

2. Notons $p(x)$ le périmètre du triangle AMB (en cm).

On a : $p(x) = AM + MB + AB$ d'où $p(x) = x + \dfrac{12x}{5} + \dfrac{13x}{5}$.

$p(x) = \left(1 + \dfrac{12}{5} + \dfrac{13}{5}\right)x = \left(\dfrac{5 + 12 + 13}{5}\right)x = \dfrac{30}{5}x$ donc $\boldsymbol{p(x) = 6x}$.

3. Résolution de l'équation (e) : $\boldsymbol{x + \dfrac{12x}{5} + \dfrac{13x}{5} = 18}$

On remarque que l'équation (e) s'écrit $p(x) = 18$. Ainsi :
(e) est vérifiée lorsque $6x = 18$.
(e) est vérifiée lorsque $x = \dfrac{18}{6} = 3$.

L'équation (e), qui s'écrit $p(x) = 18$, a donc pour solution le nombre 3.

4. a. D'après la question précédente, le périmètre du triangle AMB est égal à 18 cm lorsque $x = 3$, c'est-à-dire lorsque AM = 3 cm.
On a placé ce point sur la figure en début de corrigé.

b. Calcul de l'aire $\mathcal{A}'$ (en cm²) du triangle AMB lorsque AM = 3 cm

On sait que MNP est rectangle en M, que A ∈ [PM] et que B ∈ [MN].
On en déduit que le triangle AMB est rectangle en M, et donc que

$\mathcal{A}' = \dfrac{AM \times MB}{2}$.

Si AM = 3 cm, alors $x = 3$, donc $MB = \dfrac{12 \times 3}{5}$ soit MB = 7,2 cm.

On a donc : $\mathcal{A}' = \dfrac{3 \times 7{,}2}{2}$ d'où $\mathcal{A}' = \mathbf{10{,}8\ cm^2}$.

CORRIGÉ

SUJET 3 SUJET

◇ GROUPEMENT 3 ◇ JUIN 2002

Activités numériques *(12 points)*

Exercice 1

On considère les trois nombres A, B, C :

$A = \frac{7}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{11}{6}$; $B = 2\sqrt{5} - \sqrt{20} - 3\sqrt{45}$; $C = \frac{4 \times 10^{14} \times 12}{3 \times 10^{11}}$.

1. Calculer et donner A sous forme d'une fraction irréductible.

2. Écrire B sous la forme $a\sqrt{5}$, a étant un nombre entier relatif.

3. Donner l'écriture scientifique de C.

Exercice 2

On considère l'expression $D = (4x - 1)^2 + (x + 3)(4x - 1)$.

1. Développer puis réduire D.

2. Factoriser D.

3. Résoudre l'équation : $(4x - 1)(5x + 2) = 0$.

Exercice 3

1. Calculer le plus grand diviseur commun de 540 et 300.

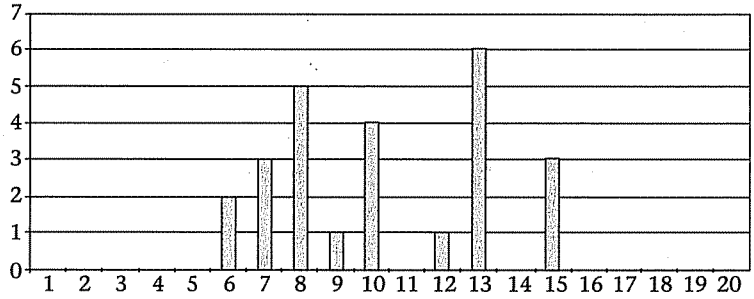
2. Une pièce rectangulaire de 5,40 m de long et de 3 m de large est recouverte, sans découpe, par des dalles de moquette carrées, toutes identiques.

a. Quelle est la mesure du côté de chacune de ces dalles, sachant que l'on veut le moins de dalles possibles ?

b. Calculer alors le nombre de dalles utilisées.

Exercice 4

Voici le diagramme représentant la répartition des notes obtenues par les élèves d'une classe de troisième lors d'un contrôle de français : les notes sur 20 sont reportées en abscisses, le nombre d'élèves est reporté en ordonnées :

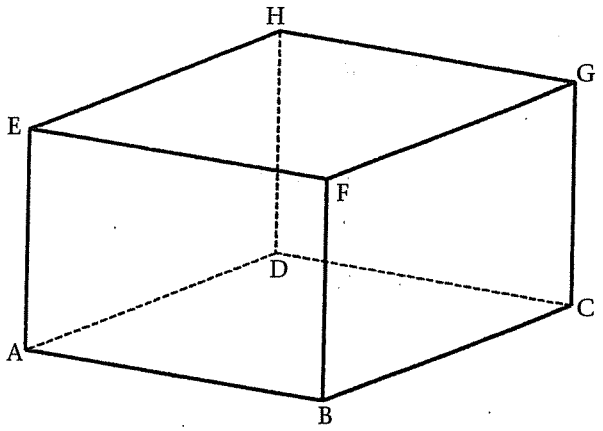


1. Quel est l'effectif de cette classe de troisième ?

2. Calculer la moyenne des notes obtenues en donnant le résultat sous sa forme décimale exacte.

Activités géométriques *(12 points)*

Exercice I



ABCDEFGH est un parallélépipède à base carrée.
On donne AB = BC = 6 cm et BF = 4,5 cm.

1. Montrer que DG = 7,5 cm.

2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{CDG}$ arrondie au degré.

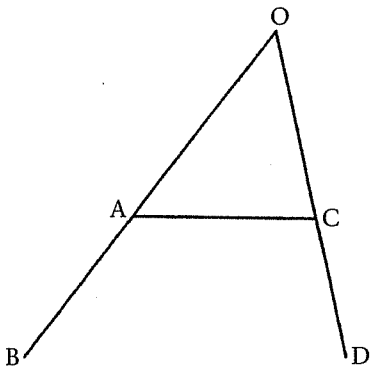
3. Calculer, en cm³, le volume de la pyramide ABCDG.

Exercice 2

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, le point A est sur le segment [OB] et le point C est sur le segment [OD].
On donne :
OA = 8,5 cm
AB = 11,5 cm
OC = 5 cm
CD = 7 cm.

1. Calculer les longueurs OB et OD.

2. Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.



Exercice 3

Sur la figure ci-après, on a représenté un parallélogramme ABCD de centre O.

Les droites (BC) et (AC) sont perpendiculaires.

1. Tracer le cercle qui contient les trois points O, B et C. Justifier la position de son centre I.

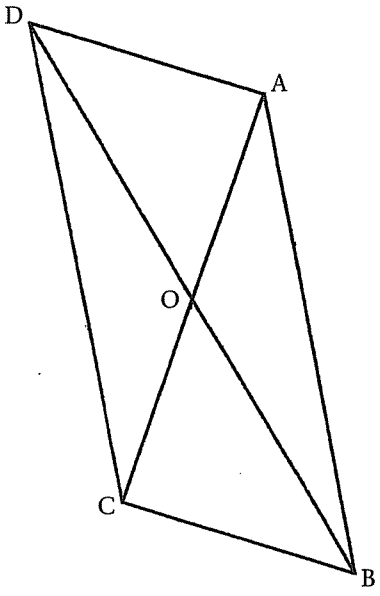
2. Placer les points M et P tels que
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OD}$.

3. Utilisation d'une transformation.

a. Par quelle transformation a-t-on à la fois : O a pour image C et B a pour image M ?

b. Montrer que, par cette transformation, le point D a pour image le point P.

c. Montrer que les points P, C, M sont alignés.



SUJET

Problème *(12 points)*

Un viticulteur propose un de ses vins aux deux tarifs suivants :

– **Tarif 1 :** 7,5 euros la bouteille, transport compris.

– **Tarif 2 :** 6 euros la bouteille, mais avec un forfait de transport de 18 euros.

1. Remplir le tableau ci-dessous.

Nombre de bouteilles	**1**	**5**			**15**
Prix au tarif 1 en €	**7,5**			**97,5**	
Prix au tarif 2 en €		**48**	**78**		

2. Exprimer le prix payé par le consommateur en fonction du nombre x de bouteilles achetées.

Pour le tarif 1, le prix sera noté P_1.

Pour le tarif 2, le prix sera noté P_2.

3. Tracer, sur une feuille de papier millimétré, les représentations graphiques des fonctions f et g définies par :

$f(x) = 7{,}5x$ et $g(x) = 6x + 18$,

pour des valeurs de x comprises entre 0 et 15.

On placera l'origine dans le coin inférieur gauche de la feuille et on prendra les unités suivantes :

– Sur l'axe des abscisses : 1 cm représente 1 bouteille.

– Sur l'axe des ordonnées : 1 cm représente 10 euros.

Pour les questions 4 et 5, on laissera sur le graphique les traits de rappel utilisés pour faciliter la lecture.

4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphique :

a. On veut acheter 6 bouteilles. Quel est le tarif le plus avantageux ?

b. On dispose de 70 euros. Lequel des deux tarifs permet d'acheter le plus grand nombre de bouteilles ?

Préciser ce nombre de bouteilles.

5. Utilisation du graphique, vérification par le calcul.

a. Déterminer graphiquement pour combien de bouteilles le prix de revient est identique, quel que soit le tarif choisi. Donner ce nombre de bouteilles.

Quel est le prix correspondant ?

b. Vérifier ces deux derniers résultats par des calculs.

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = \frac{7}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{11}{6} = \frac{7}{5} + \frac{3 \times 11}{5 \times 6} = \frac{7}{5} + \frac{3 \times 11}{5 \times 2 \times 3} = \frac{7}{5} + \frac{11}{5 \times 2}$

$A = \frac{7 \times 2 + 11}{5 \times 2} = \frac{25}{5 \times 2} = \frac{5 \times 5}{5 \times 2}$ donc $\mathbf{A = \frac{5}{2}}$.

Il est préférable de simplifier les fractions avant de les ajouter.

2. $B = 2\sqrt{5} - \sqrt{20} - 3\sqrt{45} = 2\sqrt{5} - \sqrt{4 \times 5} - 3\sqrt{9 \times 5} = 2\sqrt{5} - \sqrt{4} \times \sqrt{5} - 3 \times \sqrt{9} \times \sqrt{5}$

$B = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 3 \times 3 \times \sqrt{5}$ donc $\mathbf{B = -9\sqrt{5}}$.

On a utilisé la relation : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

3. $C = \frac{4 \times 10^{14} \times 12}{3 \times 10^{11}} = \frac{4 \times 12}{3} \times \frac{10^{14}}{10^{11}} = \frac{4 \times 4 \times 3}{3} \times 10^{14-11} = 4 \times 4 \times 10^3 = 16 \times 10^3$

donc $\mathbf{C = 1{,}6 \times 10^4}$.

On rappelle la formule : $\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$.

Exercice 2

1. Forme réduite de D

Utilisons l'identité $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 4x$ et $b = 1$.

$D = (4x - 1)^2 + (x + 3)(4x - 1) = ((4x)^2 - 2 \times 4x \times 1 + 1^2) + (4x^2 - x + 12x - 3)$

$D = 16x^2 - 8x + 1 + 4x^2 - x + 12x - 3$

$\mathbf{D = 20x^2 + 3x - 2}$.

2. Forme factorisée de D

$D = (4x - 1)^2 + (x + 3)(4x - 1) = (4x - 1)(4x - 1 + x + 3)$

Donc $\mathbf{D = (4x - 1)(5x + 2)}$.

On contrôle qu'en développant ce produit de facteurs on retrouve la forme réduite de D.

3. Résolution de l'équation D = 0

D = 0 est vérifiée lorsque $4x - 1 = 0$ ou $5x + 2 = 0$

D = 0 est vérifiée lorsque $4x = 1$ ou $5x = -2$

D = 0 est vérifiée lorsque $x = \frac{1}{4}$ ou $x = -\frac{2}{5}$.

Les solutions de l'équation D = 0 sont les nombres $\frac{1}{4}$ et $-\frac{2}{5}$.

Exercice 3

1. Calculons le pgcd de 540 et 300 à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

540	300
240	1

300	240
60	1

240	60
0	4

On a donc : **pgcd (540 ; 300) = 60** (dernier reste non nul obtenu par l'algorithme).

2. a. La mesure l du côté des dalles carrées, que l'on suppose être un nombre entier de cm, est un diviseur commun à 540 et 300 puisque la pièce rectangulaire est recouverte sans découpe par ces dalles.
Si on veut utiliser le moins de dalles possibles, la mesure l de leur côté doit être la plus grande possible (car plus les dalles sont grandes et moins il y en a...).
On doit donc avoir : l = pgcd (540 ; 300).
Donc, si l'on veut le moins de dalles possibles pour recouvrir sans découpe la pièce rectangulaire, **la mesure du côté de ces dalles doit être de 60 cm, ou encore de 0,6 m.**

b. $\frac{5,4}{0,6} = 9$ donc il y a 9 dalles sur la longueur de la pièce.

$\frac{3}{0,6} = 5$ donc il y a 5 dalles sur la largeur de la pièce.

$9 \times 5 = 45$ donc **45 dalles ont été utilisées pour recouvrir la pièce.**

Exercice 4

1. Calcul de l'effectif N de la classe de troisième

D'après les données du diagramme, on a :
N = 2 + 3 + 5 + 1 + 4 + 1 + 6 + 3 donc **N = 25.**

2. Calcul de la moyenne *m* des notes obtenues par cette classe

En utilisant le diagramme, on obtient :

$$m = \frac{2\times6 + 3\times7 + 5\times8 + 1\times9 + 4\times10 + 1\times12 + 6\times13 + 3\times15}{25} = \frac{257}{25}.$$

donc $\boldsymbol{m = 10,28}$.

CORRIGÉ

Activités géométriques

Exercice 1

1. Calcul de DG

Dans le parallélépipède ABCDEFGH à base carrée, on a DC = AB = 6 cm, CG = BF = 4,5 cm et, de plus, le triangle DCG est rectangle en C.

Appliquons alors le théorème de Pythagore dans ce triangle.

On obtient : $DG^2 = DC^2 + CG^2$

d'où $DG^2 = 6^2 + 4{,}5^2 = 36 + 20{,}25 = 56{,}25 = 7{,}5^2$.

donc on a bien : **DG = 7,5 cm**.

2. Calcul de $\widehat{CDG}$

Dans le triangle DCG rectangle en C, on a :

$\tan \widehat{CDG} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{CG}{DC}$ d'où $\tan \widehat{CDG} = \dfrac{4{,}5}{6} = 0{,}75$.

À l'aide d'une calculatrice, on obtient : $\widehat{CDG} \approx 37°$.

3. Calcul du volume V de la pyramide ABCDG (en cm³)

$V = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$ où $\mathcal{A}$ est l'aire de la base carrée ABCD de la pyramide et h est sa hauteur.

$\mathcal{A} = AB^2 = 6^2$ donc $\mathcal{A} = 36$ cm².

$h = CG$ donc $h = 4{,}5$ cm.

On a donc = $V = \dfrac{1}{3} \times 36 \times 4{,}5$ d'où **V = 54 cm³**.

Exercice 2

1. Calcul de OB et OD

A ∈ [OB] donc OB = OA + AB = 8,5 + 11,5 d'où **OB = 20 cm**.

C ∈ [OD] donc OD = OC + CD = 5 + 7 d'où **OD = 12 cm**.

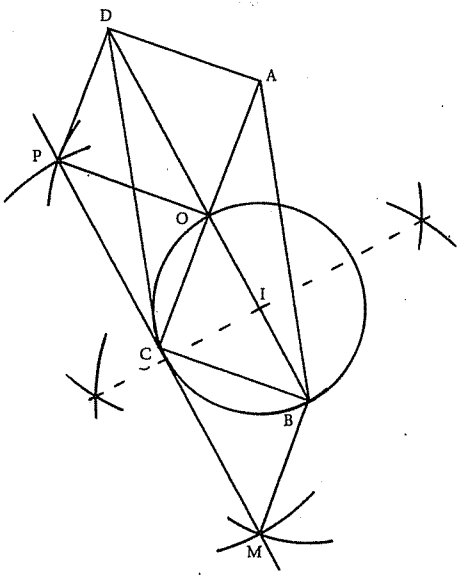
2. On a : $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{8{,}5}{20} = \dfrac{8{,}5 \times 12}{20 \times 12} = \dfrac{102}{240}$

et $\dfrac{OC}{OD} = \dfrac{5}{12} = \dfrac{5 \times 20}{12 \times 20} = \dfrac{100}{240}$

donc $\dfrac{OA}{OB} \neq \dfrac{OC}{OD}$.

D'après le théorème de Thalès, on peut alors conclure que **les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles**.

Exercice 3



1. On sait que (BC) ⊥ (AC) et que O ∈ [AC].
Le triangle OBC est donc rectangle en C, donc il est inscrit dans le cercle de diamètre [OB].
Le cercle contenant les points O, B et C est donc le cercle de diamètre [OB]. **Son centre I est donc le milieu du segment [OB].**

2. Voir la figure ci-dessus.

3. a. On a : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}$ (relation de Chasles pour les vecteurs).
Or, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
Donc : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC}$ (en utilisant encore la relation de Chasles).
L'égalité $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OC}$ montre que **O a pour image C et B a pour image M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.**

b. On a : $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BP}$. Or, $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OD}$.
Donc : $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}$ soit $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{OC}$.
Cette dernière égalité montre bien que **D a pour image P par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.**

c. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$, les points D, O et B ont donc pour images respectives les points P, C et M.
Or, par hypothèse, les points D, O, B sont alignés et on sait qu'une translation conserve l'alignement entre les points.
Donc on peut conclure que **les points P, C, M sont alignés.**

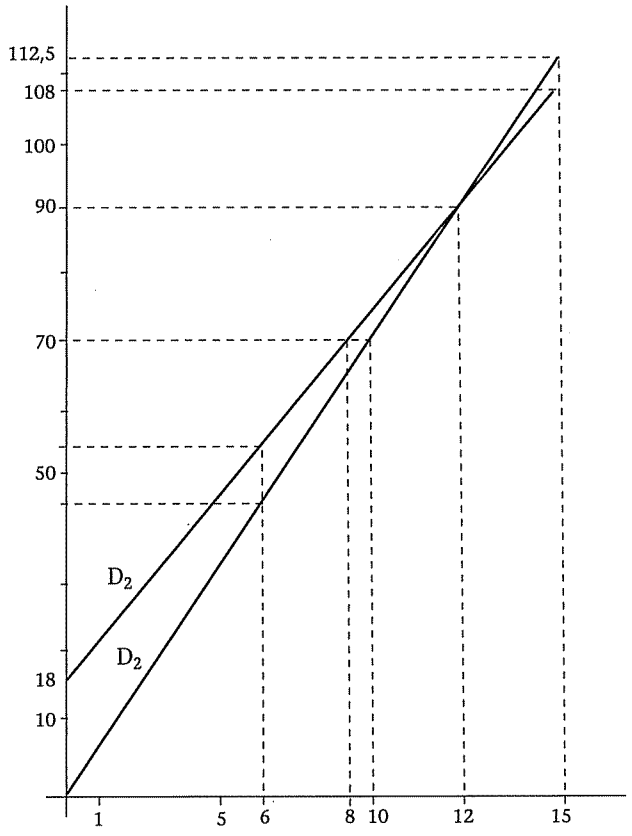
Problème

1.

Nombre de bouteilles	**1**	**5**	10	13	**15**
Prix au tarif 1 en €	**7,5**	37,5	75	**97,5**	112,5
Prix au tarif 2 en €	24	**48**	**78**	96	108

2. Pour x bouteilles achetées, le prix payé par le consommateur pour le tarif 1 sera : $\mathbf{P_1 = 7{,}5x}$.
Pour le tarif 2, le prix payé sera : $\mathbf{P_2 = 6x + 18}$.

3. La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 7{,}5x$ est la droite D_1 d'équation $y = 7{,}5x$.
Elle passe par les points de coordonnées (0 ; 0) et (15 ; 112,5).
La représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto 6x + 18$ est la droite D_2 d'équation $y = 6x + 18$.
Elle passe par les points de coordonnées (0 ; 18) et (15 ; 108).



4. D'après la question 2, les droites D_1 et D_2 représentent respectivement les prix P_1 et P_2 payés par le consommateur en fonction du nombre de bouteilles achetées.

a. On voit sur le graphique que l'ordonnée du point de D_1 d'abscisse 6 est inférieure à l'ordonnée du point de D_2 d'abscisse 6.

Si on veut acheter 6 bouteilles, le tarif 1 est donc le plus avantageux.

b. D'après le graphique, on voit qu'avec 70 euros, on pourra acheter au maximum 9 bouteilles avec le tarif 1 et 8 bouteilles avec le tarif 2.

Donc avec 70 euros, c'est le tarif 1 qui permet d'acheter le plus grand nombre de bouteilles, à savoir 9 bouteilles.

5. a. Les droites D_1 et D_2 se coupent au point de coordonnées (12 ; 90).

On en déduit que le prix de revient est identique, quel que soit le tarif choisi, pour **12 bouteilles achetées.**

Le prix correspondant pour les deux tarifs est alors de **90 euros.**

b. Résolvons l'équation $P_1 = P_2$ pour déterminer le nombre x de bouteilles pour lequel le prix de revient est le même pour les 2 tarifs.

$P_1 = P_2$ est vérifiée lorsque $7{,}5x = 6x + 18$

$P_1 = P_2$ est vérifiée lorsque $1{,}5x = 18$

$P_1 = P_2$ est vérifiée lorsque $x = \dfrac{18}{1{,}5} = 12.$

L'équation $P_1 = P_2$ a donc pour solution le nombre 12.

Pour $x = 12$, on a : $P_1 = 7{,}5 \times 12 = 90 = P_2$.

On retrouve donc bien par le calcul que le prix de revient sera le même pour les deux tarifs pour **12 bouteilles achetées** et que le prix correspondant s'élèvera à **90 euros.**

CORRIGÉ

SUJET 4 SUJET

◇ GROUPEMENT 4 ◇ JUIN 2002

Activités numériques *(12 points)*

Exercice 1

On considère la fraction $\frac{170}{578}$.

1. Montrer que cette fraction n'est pas irréductible.

2. Déterminer le PGCD des nombres 170 et 578 (faire apparaître les différentes étapes).

3. Écrire la fraction $\frac{170}{578}$ sous forme irréductible.

Exercice 2

Soit $C = (x - 1)(2x + 3) + (x - 1)^2$.

1. Développer l'expression C et montrer qu'elle est égale à $3x^2 - x - 2$.

2. Calculer la valeur de C pour $x = \sqrt{2}$ et la mettre sous la forme $a - \sqrt{2}$ où a est un nombre entier.

3. Factoriser l'expression C.

4. Résoudre l'équation : $(x - 1)(3x + 2) = 0$.

Exercice 3

1. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ x - y = 5 \end{cases}$

2. Le CDI d'un collège a acheté 2 exemplaires d'une même bande dessinée et 3 exemplaires d'un même livre de poche pour la somme de 30 euros.
Une bande dessinée coûte 5 euros de plus qu'un livre de poche.
Quel est le prix en euros d'une bande dessinée ?
Quel est le prix en euros d'un livre de poche ?

SUJET

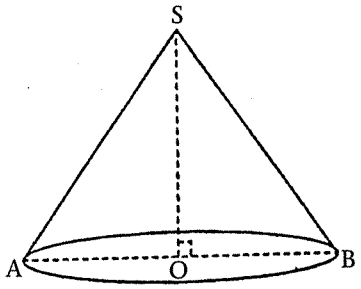
Activités géométriques *(12 points)*

Exercice 1

Un cône de révolution a pour sommet le point S. Sa base est un disque de centre O et de rayon 4 cm.
Sa hauteur [SO] est telle que SO = 2,8 cm.

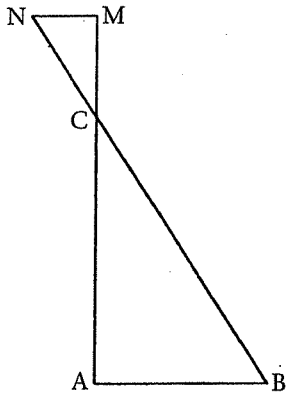
a. Déterminer l'arrondi au degré de l'angle $\widehat{OSB}$.

b. Déterminer le volume de ce cône et donner son arrondi au cm^3.



Exercice 2

On considère la figure ci-contre.
Cette figure n'est pas en vraie grandeur et n'est pas à reproduire.
Elle est fournie pour préciser la position des points. L'unité est le centimètre.



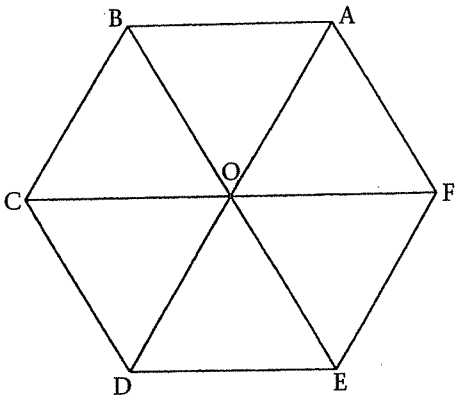
1. Le triangle ABC est rectangle en A.
AB = 5 BC = 13
Démontrer que AC = 12.

2. Les points A, C, M sont alignés.
Les points B, C, N sont alignés.
CM = 2,4 CN = 2,6
Démontrer que les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

3. Calculer la longueur MN.

4. Préciser la nature du triangle CMN ; justifier la réponse sans effectuer de calcul.

Exercice 3



On considère l'hexagone régulier ABCDEF ci-contre de centre O *(l'hexagone n'est pas à reproduire)*.
On demande de déterminer l'image du triangle BCO par :

a. La translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$.

b. La symétrie d'axe (BE).

c. La rotation de centre O et d'angle 60° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Pour répondre, on complètera les trois phrases suivantes.

1. L'image du triangle BCO par la translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$ est.....

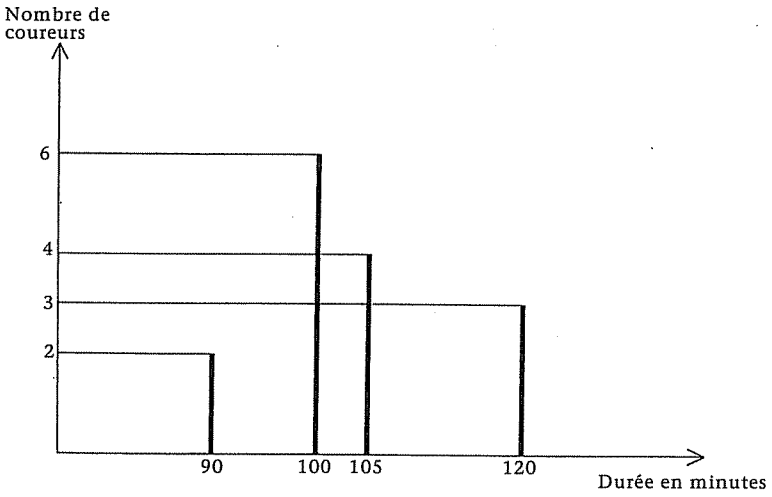
2. L'image du triangle BCO par la symétrie d'axe (BE) est .....

3. L'image du triangle BCO par la rotation du centre O et d'angle 60° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre est.....

Problème *(12 points)*

Les parties A, B et C sont indépendantes.

En octobre 2001, un groupe de 15 amis a participé à un semi-marathon *(course à pied de 21 km)*.
Le diagramme en bâtons ci-dessous précise les résultats du groupe.
Il indique, par exemple, que 4 de ces amis ont couru ce semi-marathon en 105 min.



Partie A

1. Compléter le tableau ci-dessous.

Durée en minutes	90	100	105	120
Effectifs (nombre de coureurs)			4	

2. On a défini ci-dessus la série statistique donnant la durée de la course des coureurs. À l'aide du diagramme en bâtons ou du tableau complété :

a. Calculer son étendue.

b. Déterminer sa médiane.

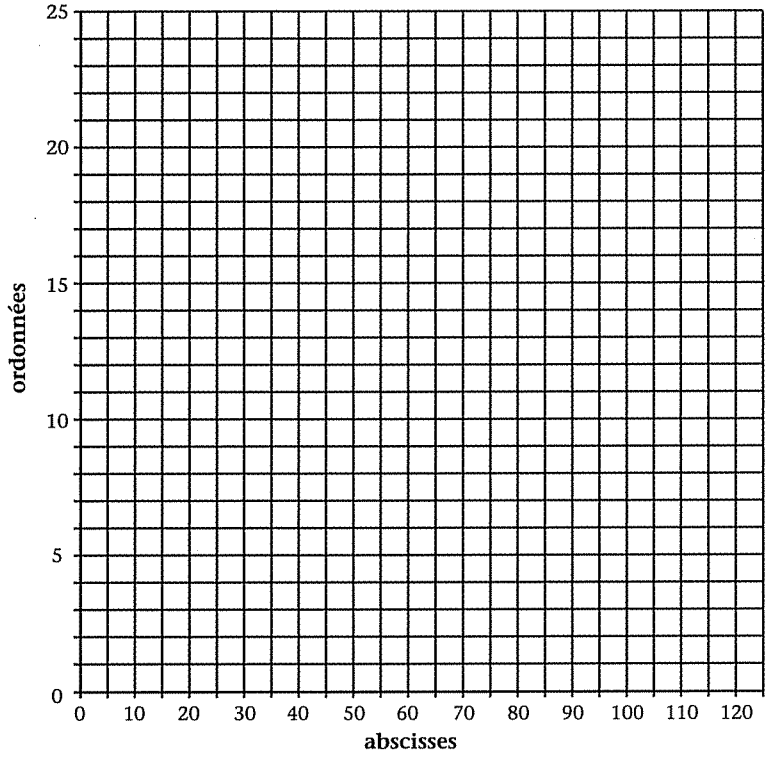
c. Calculer sa moyenne.

Partie B

Fabien, l'un des participants, a parcouru les 21 km à la vitesse **constante** de 12 km par heure.

1. Déterminer en minutes la durée de la course de Fabien.

2. On s'intéresse à la distance en km séparant Fabien de la ligne d'arrivée après x minutes de course ($0 \leqslant x \leqslant 105$).
On note $f(x)$ cette distance et on admet que $f(x) = 21 - 0{,}2x$.
Ainsi $f(10) = 19$ indique qu'après 10 minutes de course Fabien est à 19 km de la ligne d'arrivée.
Dans le repère orthogonal page 107, tracer la représentation graphique de la fonction affine f définie par $f(x) = 21 - 0{,}2x$.



3. Par **lecture graphique** (laisser visibles les tracés utiles), déterminer :

a. La distance en kilomètres séparant Fabien de l'arrivée après30 minutes de course.

b. La durée en minutes écoulée depuis le départ lorsque Fabien est à 7 km de l'arrivée.

4. a. Résoudre l'équation : $21 - 0{,}2x = 17$.

b. Que représente pour le problème la solution de cette équation ?

Partie C

On suppose dans cette partie que :
les 9 premiers kilomètres sont en montée, les 12 autres sont en descente.
Laurent a parcouru : les 9 premiers kilomètres en 40 minutes,
les 12 derniers kilomètres en 50 minutes.

1. Calculer en km par heure la vitesse moyenne de Laurent en montée.

2. Calculer en km par heure la vitesse moyenne de Laurent en descente.

3. Calculer en km par heure la vitesse moyenne de Laurent sur le parcours total.

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. Les entiers 170 et 578 sont tous les deux pairs, donc sont tous deux divisibles par 2.

La fraction $\frac{170}{578}$ n'est donc pas irréductible.

2. Déterminons le pgcd de 170 et 578 à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

578	170
68	3

170	68
34	2

68	34
0	2

On a donc : **pgcd (170 ; 578) = 34** (dernier reste non nul obtenu par l'algorithme).

3. on a : $170 = 34 \times 5$ et $578 = 34 \times 17$

donc $\frac{170}{578} = \frac{34 \times 5}{34 \times 17} = \frac{5}{17}$, cette dernière fraction étant irréductible.

$\frac{5}{17}$ est donc une fraction irréductible égale à $\frac{170}{578}$.

Exercice 2

1. Forme réduite de C

$C = (x - 1)(2x + 3) + (x - 1)^2 = 2x^2 + 3x - 2x - 3 + x^2 - 2x + 1$

donc on a bien : $\mathbf{C = 3x^2 - x - 2}$.

On a utilisé l'identité $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 1$.

2. Utilisons la forme réduite de C.

Pour $x = \sqrt{2}$, on a : $C = 3 \times (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} - 2 = 3 \times 2 - \sqrt{2} - 2 = 6 - \sqrt{2} - 2$

donc $\mathbf{C = 4 - \sqrt{2}}$ **pour** $\boldsymbol{x = \sqrt{2}}$.

3. Forme factorisée de C

$C = (x - 1)(2x + 3) + (x - 1)^2 = (x - 1)(2x + 3 + x - 1)$

$\mathbf{C = (x - 1)(3x + 2)}$.

4. Résolution de l'équation C = 0

C = 0 est vérifiée lorsque $x - 1 = 0$ ou $3x + 2 = 0$

C = 0 est vérifiée lorsque $x = 1$ ou $3x = -2$

C = 0 est vérifiée lorsque $x = 1$ ou $x = -\frac{2}{3}$.

Les solutions de l'équation C = 0 sont les nombres 1 et $\frac{-2}{3}$.

Exercice 3

1. Résolution du système S : $\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ x - y = 5. \end{cases}$

Résolvons le système S par la méthode de substitution.

S est vérifié lorsque $\begin{cases} 2(y + 5) + 3y = 30 \\ x = y + 5 \end{cases}$

S est vérifié lorsque $\begin{cases} 2y + 10 + 3y = 30 \\ x = y + 5 \end{cases}$

S est vérifié lorsque $\begin{cases} 5y = 20 \\ x = y + 5 \end{cases}$

S est vérifié lorsque $\begin{cases} y = 4 \\ x = 4 + 5 = 9 \end{cases}$

Les solutions du système S sont les nombres $x = 9$ et $y = 4$.

2. Notons x le prix d'une bande dessinée et y le prix d'un livre de poche.

L'énoncé se traduit par le système suivant :

$\begin{cases} 2x + 3y = 30 \text{ (prix de 2 bandes dessinées et 3 livres de poche)} \\ x - y = 5 \text{ (différence de prix entre une bande dessinée et un livre de poche).} \end{cases}$

D'après la question précédente, ce système a pour solutions $x = 9$ et $y = 4$.

On en déduit qu'**une bande dessinée coûte 9 euros et qu'un livre de poche coûte 4 euros**.

Activités géométriques

Exercice 1

a. Calcul de $\widehat{OSB}$

Dans le triangle SOB rectangle en O, on a :

$\tan \widehat{OSB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{OB}{SO}$, d'où $\tan \widehat{OSB} = \frac{4}{2{,}8}$.

À l'aide d'une calculatrice, on obtient : **$\widehat{OSB} \approx 55°$.**

b. Calcul du volume V du cône (en cm³)

$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$ où $\mathcal{A}$ est l'aire du disque de base du cône et h est sa hauteur.

Le disque de base a un rayon de 4 cm.

On a donc : $\mathcal{A} = \pi \times 4^2$, d'où $\mathcal{A} = 16\pi$ cm².

$h = 0S$ donc $h = 2{,}8$ cm.

On a donc : $V = \frac{1}{3} \times 16\pi \times 2{,}8$ soit $\mathbf{V = \frac{44{,}8\ \pi}{3}\ cm^3 \approx 47\ cm^3}$.

On a utilisé la valeur de π fournie par une calculatrice.

Exercice 2

1. Calcul de AC

Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A.

On a : $AC^2 + AB^2 = BC^2$ d'où $AC^2 = BC^2 - AB^2$.

$AC^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 = 12^2$ donc on a bien **AC = 12 cm**.

2. Les points A, C, M d'une part et B, C, N d'autre part sont alignés dans le même ordre.

De plus, on a : $\frac{CA}{CM} = \frac{12}{2{,}4} = 5$ et $\frac{CB}{CN} = \frac{13}{2{,}6} = 5$

donc $\frac{CA}{CM} = \frac{CB}{CN}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut alors en déduire que **les droites (AB) et (MN) sont parallèles**.

3. Calcul de MN

Les droites (AB) et (MN) étant parallèles, appliquons le théorème de Thalès.

On obtient : $\frac{CM}{CA} = \frac{MM}{AB}$ d'où $\frac{2{,}4}{12} = \frac{MN}{5}$.

$MN = 5 \times \frac{2{,}4}{12}$ donc **MN = 1 cm**.

4. Les droites (AB) et (MN) sont parallèles et les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires (puisque le triangle ABC est rectangle en A), donc les droites (MN) et (AC) sont perpendiculaires.

Mais les droites (AC) et (MC) sont confondues puisque A, C, M sont alignés.

Donc les droites (MN) et (MC) sont perpendiculaires.

On peut donc en déduire que **le triangle CMN est rectangle en M**.

Exercice 3

1. L'image du triangle BCO par la translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$ est **le triangle ODE**.

2. L'image du triangle BCO par la symétrie d'axe (BE) est **le triangle BAO**.

3. L'image du triangle BCO par la rotation de centre O et d'angle 60° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre est **le triangle CDO**.

Problème

Partie A

1.

Durée en minutes	90	100	105	120
Effectifs (nombre de coureurs)	2	6	4	3

2. a. 120 – 90 = 30 donc **l'étendue de la série statistique étudiée ici est de 30 min.**

b. En classant les 15 coureurs dans l'ordre croissant de leurs temps de parcours, on constate que le temps de parcours du 8e coureur est de 100 minutes.

La médiane de la série statistique est donc égale à 100 min.

c. $\frac{2 \times 90 + 6 \times 100 + 4 \times 105 + 3 \times 120}{15} = \frac{1\,560}{15} = 104$

Donc la moyenne de la série statistique est de 104 min.

Partie B

1. Fabien a parcouru les 21 km à la vitesse constante de 12 km/h.

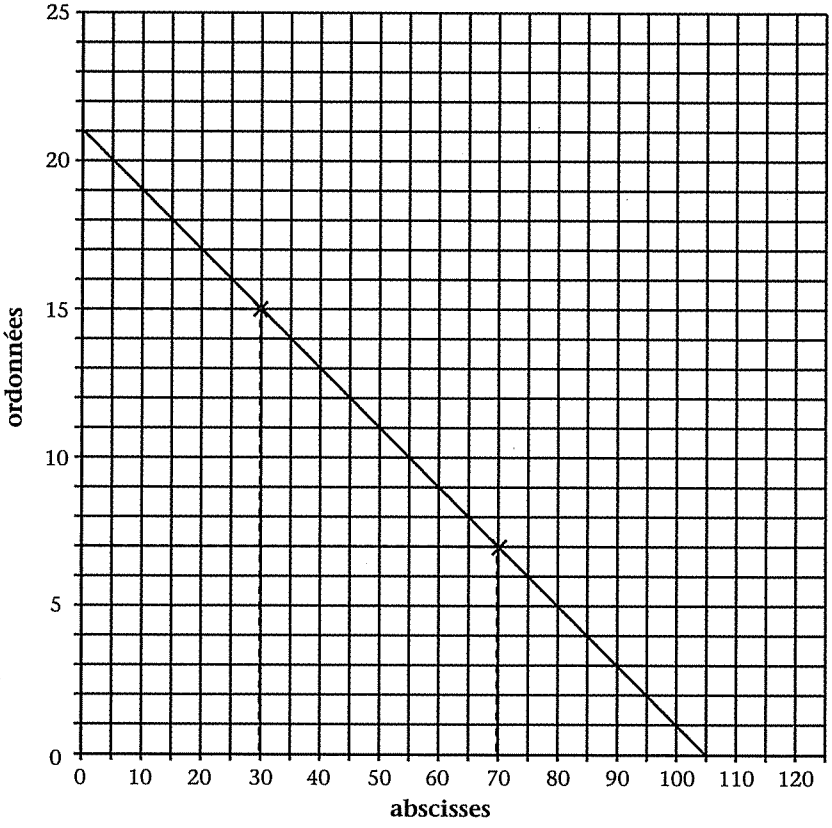
$\frac{21}{12} = 1{,}75$ donc Fabien a parcouru les 21 km en 1,75 h.

Or, 1,75 h = (1,75 × 60) min = 105 min.

Donc la durée de la course de Fabien a été de 105 minutes.

2. La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 21 - 0{,}2x$ est la droite d'équation $y = 21 - 0{,}2x$.

Cette droite passe par les points de coordonnées (0 ; 21) et (105 ; 0).



3. a. On lit sur le graphique **qu'après 30 minutes de course Fabien est à 15 km de l'arrivée**.

b. Lorsque Fabien est à 7 km de l'arrivée, on voit de même qu'**il s'est écoulé 70 minutes depuis le départ**.

4. a. Résolution de l'équation $f(x) = 17$

$f(x) = 17$ est vérifiée lorsque $21 - 0{,}2x = 17$

$f(x) = 17$ est vérifiée lorsque $-0{,}2x = -4$

$f(x) = 17$ est vérifiée lorsque $x = \dfrac{-4}{-0{,}2} = 20$.

L'équation $f(x) = 17$ a donc pour solution le nombre 20.

b. La solution de l'équation $f(x) = 17$ représente la durée en minutes écoulée depuis le départ lorsque Fabien est à 17 km de l'arrivée.

CORRIGÉ

Partie C

1. 40 min = $\frac{40}{60}$ h = $\frac{2}{3}$ h donc Laurent a parcouru les 9 premiers kilomètres en $\frac{2}{3}$ d'heure.

$9 : \frac{2}{3} = 9 \times \frac{3}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5$.

Donc la vitesse moyenne de Laurent en montée a été de 13,5 km par heure.

2. 50 min = $\frac{50}{60}$ h = $\frac{5}{6}$ h donc Laurent a parcouru les 12 derniers kilomètres en $\frac{5}{6}$ d'heure.

$12 : \frac{5}{6} = 12 \times \frac{6}{5} = \frac{72}{5} = 14{,}4$.

Donc la vitesse moyenne de Laurent en descente a été de 14,4 km par heure.

3. Laurent a parcouru les 21 km de la course en 90 minutes, c'est-à-dire en 1,5 heure.

$\frac{21}{1{,}5} = 14$ donc **la vitesse moyenne de Laurent sur le parcours total a été de 14 km par heure.**

Attention, cette vitesse n'est pas égale à la moyenne de deux vitesses calculées précédemment !

SUJET 5

GROUPEMENT 1 ◆ SEPTEMBRE 2002

Activités numériques *(12 points)*

Exercice 1

Soit $A = \frac{1}{5} - \frac{3}{5} : \frac{12}{7}$; $B = \frac{7 \times (10^5)^2 \times 10^{-3}}{35 \times 10^3}$ et $C = 4\sqrt{45} + 2\sqrt{5} - \sqrt{500}$.

1. Calculer A et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

2. Calculer B et donner le résultat en écriture scientifique.

3. Calculer C et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{5}$ où a est un entier relatif.

Exercice 2

Soit $D = (2x - 5)(x + 3) - (2x - 5)^2$.

1. Développer et réduire D.

2. Factoriser D.

3. Résoudre l'équation $(2x - 5)(- x + 8) = 0$.

Exercice 3

Pour la fête du village, le pâtissier a préparé des sachets contenant des gâteaux.
Dans certains, il a mis des pains au chocolat et dans les autres des croissants.
Il a mis le même nombre de gâteaux dans chaque sachet.
Il y a en tout 910 pains au chocolat et 693 croissants.

1. Combien a-t-il mis de gâteaux dans chaque sachet ?

2. Combien y a-t-il de sachets contenant des croissants ?

Exercice 4

Le gérant du cinéma a réalisé un sondage auprès de 400 personnes en leur demandant combien de films ils ont regardé dans ses salles pendant le mois qui vient de s'écouler. Il a ensuite dressé le tableau suivant :

Nombre de films regardés	Effectifs	Effectifs cumulés croissants
0	50	
1	60	
2	120	
3	40	
4	50	
5	30	
6		
7	20	
8	10	

1. Compléter ce tableau.

2. a. Quel est le nombre de personnes qui ont regardé un seul film le mois dernier ?
b. Exprimer ce résultat en pourcentage.

3. Combien de personnes ont regardé moins de 4 films le mois dernier ?

4. Combien de films, en moyenne, les personnes interrogées ont-elles regardé le mois dernier ? Justifier par un calcul et arrondir le résultat à l'unité.

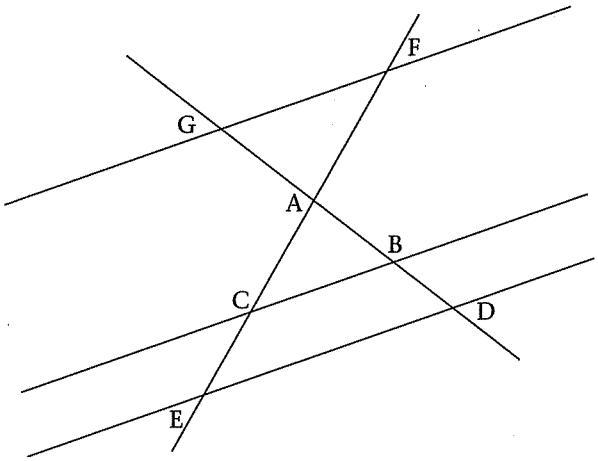
Activités géométriques *(12 points)*

Exercice 1

L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure page 52 qui n'est pas en vraie grandeur, les droites (BC) et (GF) sont parallèles.
On sait que AB = 3 CE = 2,4 AC = 4
BD = 1,8 BC = 4,5 AF = 3,6

a. Calculer la longueur GF.

b. Les droites (BC) et (ED) sont-elles parallèles ? Justifier.



Exercice 2

Construire un triangle ABC tel que AB = 4,2 cm, AC = 5,6 cm et BC = 7 cm.

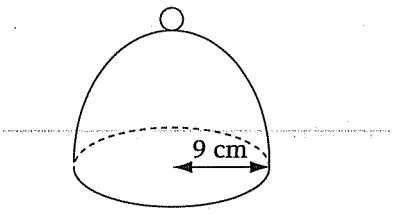
a. Montrer que $\widehat{BAC}$ est un angle droit.

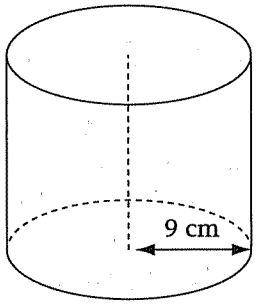
b. À l'aide de sa tangente, calculer au degré près, la mesure de $\widehat{ABC}$.

c. Placer, sur le segment [AC], le point M tel que BM = 5,5 cm.
Calculer, au mm près, la longueur du segment [AM].

Exercice 3

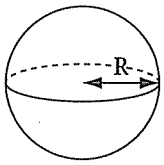
Une cloche à fromage en forme de demi-sphère de rayon 9 cm et une boîte cylindrique de même rayon ont le même volume.

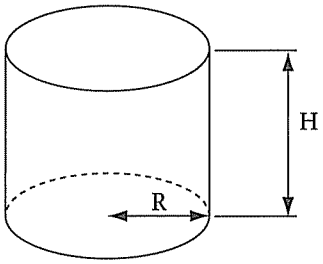




a. Calculer le volume de la cloche.
On donnera la valeur exacte du résultat, puis sa valeur arrondie au cm^3 près.

b. Calculer la hauteur de la boîte cylindrique.
Rappel :





Volume de la sphère : $\frac{4}{3}\ \pi\ R^3$

Volume du cylindre : $\pi\ R^2 h$

Problème *(12 points)*

Une agence de location de cassettes vidéo propose à ses clients le choix entre deux tarifs :
– tarif 1 : un abonnement mensuel de 15 € et 0,70 € par cassette louée ;
– tarif 2 : un abonnement mensuel de 11 € et 1,50 € par cassette louée.

1. Compléter le tableau suivant :

Nombre de cassettes louées	0	1	2	6	10
Prix payé avec le tarif 1					
Prix payé avec le tarif 2					

2. On appelle x le nombre de cassettes louées par un client en un mois.
Exprimer, en fonction de x :

a. Le prix payé avec le tarif 1, noté $P_1(x)$.

b. Le prix payé avec le tarif 2, noté $P_2(x)$.

3. Représenter graphiquement les fonctions affines :
$P_1 : x \to P_1(x) = 0{,}7x + 15$ et $P_2 : x \to P_2(x) = 1{,}5x + 11$.
On prendra sur l'axe des abscisses 1 cm pour une cassette et sur l'axe des ordonnées 1 cm pour 2 €.

4. a. Résoudre l'équation $0,7x + 15 = 1,5x + 11$. Interpréter le résultat.
b. Vérifier graphiquement cette solution en faisant apparaître les pointillés utiles.

5. En utilisant le graphique, combien faut-il louer de cassettes en un mois pour que le tarif 1 soit plus intéressant que le tarif 2 ?

6. Monsieur Avent a choisi le tarif 2 et il a payé 29 € pour le mois. Utiliser le graphique pour déterminer le nombre de cassettes qu'il a louées dans le mois.
Faire apparaître les pointillés utiles.

7. Monsieur Comic a choisi le tarif 1 et il a payé 19,90 € pour le mois.
a. Trouver par un calcul le nombre de cassettes qu'il a louées dans le mois.
b. Dans ce cas, quel est le prix moyen de la location d'une cassette ?
Arrondir le résultat au centième d'euro.

8. L'agence décide de proposer un troisième tarif à ses clients : un prix mensuel de 23 € quel que soit le nombre de cassettes louées dans le mois.
a. Représenter sur le même graphique, le prix P_3 payé avec le tarif 3.
b. Combien faut-il louer de cassettes pour que ce nouveau tarif soit plus avantageux que les autres ?

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = \frac{1}{5} - \frac{3}{5} : \frac{12}{7} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{7}{12}$

$A = \frac{1}{5} - \frac{3 \times 7}{5 \times 12} = \frac{1}{5} - \frac{3 \times 7}{5 \times 3 \times 4}$

$A = \frac{1}{5} - \frac{7}{5 \times 4} = \frac{4}{5 \times 4} - \frac{7}{5 \times 4} = \frac{-3}{5 \times 4}$

donc $A = -\frac{3}{20}$.

2. $B = \frac{7 \times (10^5)^2 \times 10^{-3}}{35 \times 10^3} = \frac{7 \times 10^{10} \times 10^{-3}}{7 \times 5 \times 10^3}$

$= \frac{10^7}{5 \times 10^3} = \frac{1}{5} \times 10^4 = 0{,}2 \times 10^4$

Donc $\mathbf{B = 2 \times 10^3}$.
On a utilisé les formules :
$(10^n)^p = 10^{n \times p}$, $10^n \times 10^p = 10^{n+p}$ et $\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$.

3. $C = 4\sqrt{45} + 2\sqrt{5} - \sqrt{500} = 4\sqrt{9 \times 5} + 2\sqrt{5} - \sqrt{100 \times 5}$
$C = 4 \times \sqrt{9} \times \sqrt{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt{100} \times \sqrt{5} = 4 \times 3 \times \sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 10\sqrt{5}$
$C = 12\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 10\sqrt{5}$.
Donc $\mathbf{C = 4\sqrt{5}}$.
On a utilisé la formule : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Exercice 2

1. Forme réduite de D
Utilisons l'identité $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 5$.
$D = (2x - 5)(x + 3) - (2x - 5)^2$
$D = 2x^2 + 6x - 5x - 15 - (4x^2 - 20x + 25)$
$D = 2x^2 + x - 15 - 4x^2 + 20x - 25$
$\mathbf{D = -2x^2 + 21x - 40}$.

2. Forme factorisée de D

$D = (2x - 5)(x + 3) - (2x - 5)^2 = (2x - 5)\,[(x + 3) - (2x - 5)]$

$D = (2x - 5)\,(x + 3 - 2x + 5)$

$\mathbf{D = (2x - 5)(- x + 8).}$

3. Résolution de l'équation D = 0

D = 0 si et seulement si $2x - 5 = 0$ ou $- x + 8 = 0$.

D = 0 si et seulement si $2x = 5$ ou $- x = - 8$.

D = 0 si et seulement si $x = \frac{5}{2}$ ou $x = 8$.

Les solutions de l'équation D = 0 sont les nombres $\frac{5}{2}$ et 8.

Exercice 3

1. Notons n le nombre de gâteaux dans chaque sachet.

n divise 910 et 693, donc n divise le PGCD de 910 et 693.

Calculons le PGCD de 910 et 693 à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

$910 = 693 \times 1 + 217$ $\qquad$ $693 = 217 \times 3 + 42$

$217 = 42 \times 5 + 7$ $\qquad$ $42 = 7 \times 6 + 0$

Donc PGCD (910 ; 693) = 7 (dernier reste non nul obtenu par l'algorithme).

Ainsi, n divise 7, donc $n = 1$ ou $n = 7$.

D'après l'énoncé, $n > 1$ puisque le pâtissier a mis plusieurs gâteaux dans les sachets, donc $n = 7$.

Le pâtissier a donc mis 7 gâteaux dans chaque sachet.

2. Il y a en tout 693 croissants et chaque sachet contient 7 gâteaux.

$\frac{693}{7} = 99$ donc **99 sachets contiennent des croissants.**

Exercice 4

1.

Nombre de films regardés	Effectifs	Effectifs cumulés croissants
0	50	50
1	60	110
2	120	230
3	40	270
4	50	320
5	30	350
6	20	370
7	20	390
8	10	400

2. a. D'après le tableau, **60 personnes** ont regardé un seul film le mois dernier.

b. $\frac{60 \times 100}{400} = 15$ donc **15 %** des 400 personnes interrogées ont regardé un seul film le mois dernier.

3. On lit dans la colonne des effectifs cumulés croissants du tableau que **270 personnes** ont regardé moins de 4 films le mois dernier.

4. Calculons la moyenne m du nombre de films regardés par les personnes interrogées le mois dernier.

$$m = \frac{50 \times 0 + 60 \times 1 + 120 \times 2 + 40 \times 3 + 50 \times 4 + 30 \times 5 + 20 \times 6 + 20 \times 7 + 10 \times 8}{400}$$

$$m = \frac{1110}{400} = 2{,}775$$

donc $m \approx 3$ à l'unité près.
Les personnes interrogées ont donc regardé en moyenne **3 films** (à l'unité près) le mois dernier.

Activités géométriques

Exercice 1

a. Calcul de GF
Les droites (BC) et (GF) étant parallèles, appliquons le théorème de Thalès. On obtient :

$\frac{AF}{AC} = \frac{GF}{BC}$ d'où $\frac{3{,}6}{4} = \frac{GF}{4{,}5}$

$GF = 4{,}5 \times \frac{3{,}6}{4}$ donc **GF = 4,05 cm.**

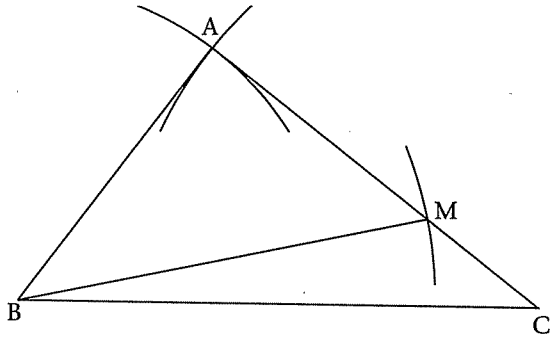
b. Les points A, C, E d'une part et A, B, D d'autre part sont alignés dans le même ordre.
De plus, comme $C \in [AE]$ et $B \in [AD]$, on a :
$AE = AC + CE = 4 + 2{,}4$ donc $AE = 6{,}4$ cm
et $AD = AB + BD = 3 + 1{,}8$ donc $AD = 4{,}8$ cm.
On en déduit que :

$\frac{AC}{AE} = \frac{4}{6{,}4} = 0{,}625$ et $\frac{AB}{AD} = \frac{3}{4{,}8} = 0{,}625$

donc $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut alors conclure que **les droites (BC) et (ED) sont parallèles.**

Exercice 2



a. On a : $AB^2 + AC^2 = 4{,}2^2 + 5{,}6^2 = 17{,}64 + 31{,}36 = 49$
et $BC^2 = 7^2 = 49$, donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut conclure que $\widehat{BAC}$ **est un angle droit.**

b. Calcul de $\widehat{ABC}$
D'après la question précédente, le triangle ABC est rectangle en A.

On a alors : $\tan \widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{AC}{AB}$

d'où $\tan \widehat{ABC} = \dfrac{5{,}6}{4{,}2} \approx 1{,}33$ à 10^{-2} près.

À l'aide d'une calculatrice, on obtient : $\widehat{ABC} \approx 53°$.

c. Calcul de AM
$M \in [AC]$ et le triangle ABC est rectangle en A.
Donc le triangle ABM est rectangle en A également.
Appliquons alors le théorème de Pythagore. On obtient :
$AM^2 + AB^2 = BM^2$ d'où $AM^2 = BM^2 - AB^2$
$AM^2 = 5{,}5^2 - 4{,}2^2 = 30{,}25 - 17{,}64 = 12{,}61$
donc $\mathbf{AM = \sqrt{12{,}61}\ cm \approx 3{,}6\ cm}$ au mm près.
On contrôle ce résultat sur la figure.

Exercice 3

a. Calcul du volume V de la cloche (en cm^3)
La cloche est une demi-sphère de rayon 9 cm.

On a donc : $V = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{3} \pi \times 9^3$

$V = \dfrac{2}{3} \pi \times 729 = 2\pi \times 243$

donc $\mathbf{V = 486\ \pi\ cm^3 \approx 1527\ cm^3}$ au cm^3 près.

b. Calcul de la hauteur H de la boîte cylindrique (en cm)
La boîte cylindrique a pour volume 486 π cm^3 (le même que celui de la cloche) et pour rayon 9 cm.

On a donc : $\pi \times 9^2 \times H = 486\ \pi$

d'où $H = \dfrac{486\ \pi}{81\ \pi}$ soit **H = 6 cm.**

Problème

1.

Nombre de cassettes louées	0	1	2	6	10
Prix payé avec le tarif 1	15 €	15,7 €	16,4 €	19,2 €	22 €
Prix payé avec le tarif 2	11 €	12,5 €	14 €	20 €	26 €

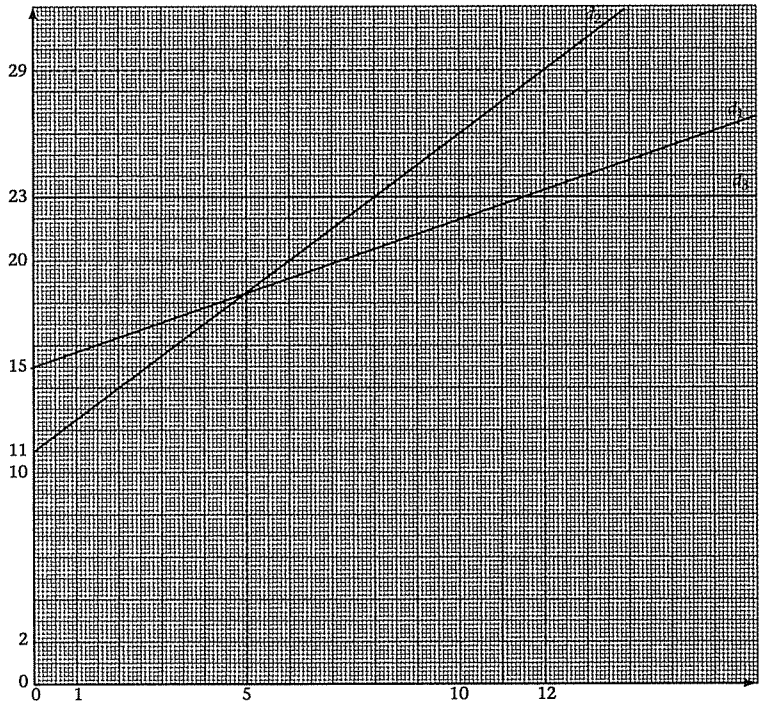
2. a. Avec le tarif 1, un client paye pour un mois un abonnement de 15 € et 0,70 € par cassette louée. Le prix qu'il paye alors pour x cassettes louées est donc :
$P_1(x) = 0{,}7x + 15$.

b. Avec le tarif 2, le prix payé en un mois par un client pour x cassettes louées est :
$P_2(x) = 1{,}5x + 11$.

3. La fonction P_1 est représentée par la droite d_1 d'équation $y = 0{,}7x + 15$.
La fonction P_2 est représentée par la droite d_2 d'équation $y = 1{,}5x + 11$.
d_1 passe par les points de coordonnées (0 ; 15) et (10 ; 22).
d_2 passe par les points de coordonnées (0 ; 11) et (10 ; 26).

4. a. Résolution de l'équation $P_1(x) = P_2(x)$
$P_1(x) = P_2(x)$ si et seulement si $0{,}7x + 15 = 15x + 11$
$P_1(x) = P_2(x)$ si et seulement si $-0{,}8x = -4$
$P_1(x) = P_2(x)$ si et seulement si $x = 5$
L'équation $P_1(x) = P_2(x)$ a donc pour solution $x = 5$.
Un client paiera donc la même somme avec les deux tarifs s'il loue 5 cassettes en un mois.

b. On vérifie sur le graphique page 124 que les droites d_1 et d_2 se coupent au point d'abscisse 5.



5. La droite d_1 est située en dessous de la droite d_2 pour $x > 5$. Il faut donc louer **au moins 6 cassettes** en un mois pour que le tarif 1 soit plus intéressant que le tarif 2.

6. Monsieur Avent a payé 29 € pour le mois avec le tarif 2. À l'aide de la droite d_2, on voit qu'il a loué **12 cassettes** dans le mois.

7. a. Résolvons l'équation $P_1(x) = 19{,}90$.
$P_1(x) = 19{,}90$ si et seulement si $0{,}7x + 15 = 19{,}90$
$P_1(x) = 19{,}90$ si et seulement si $0{,}7x = 4{,}90$
$P_1(x) = 19{,}90$ si et seulement si $x = 7$.
L'équation $P_1(x) = 19{,}90$ a donc pour solution $x = 7$.
On en déduit que Monsieur Comic a loué 7 **cassettes** dans le mois.

b. Monsieur Comic a donc loué 7 cassettes et a payé 19,90 €. $\frac{19{,}90}{7} \approx 2{,}84$ à 10^{-2} près.

Donc le prix moyen de la location d'une cassette dans ce cas est d'environ **2,84 €**.

8. a. Le prix P_3 payé avec le tarif 3 est représenté par la droite d_3 d'équation $y = 23$.

b. La droite d_3 est au-dessous des droites d_1 et d_2 pour des valeurs entières de x supérieures ou égales à 12. On en déduit que le tarif 3 est plus avantageux que les deux autres à partir de **12 cassettes** louées par mois.

SUJET 6 SUJET

◇ GROUPEMENT 3 ◇ SEPTEMBRE 2002

Activités numériques *(12 points)*

Dans toute cette partie, les résultats des calculs demandés doivent être accompagnés d'explications ; le barème en tiendra compte.

Exercice 1

On donne $A = (2x - 3)(x - 4) - (2x - 3)^2$.

1. Développer et réduire A.

2. Calculer A lorsque $x = \frac{3}{2}$; puis lorsque $x = 3\sqrt{2}$.

3. Factoriser A.

4. Résoudre l'équation $(2x - 3)(-x - 1) = 0$.

Exercice 2

Au cours de la diffusion d'un film dans une salle de cinéma de 288 places, dont toutes les places sont occupées, on a noté, dans un tableau, la répartition par tranches d'âges de tous les spectateurs.

Classe d'âge	Effectif	Fréquence en pourcentage
[15 ; 25[	90	
[25 ; 35[	54	
[35 ; 45[	72	
[45 ; 55[		
[55 ; 65[		12,50
Total	288	100

1. Compléter le tableau ci-dessus en prenant soin de détailler le calcul de la fréquence en pourcentage de la classe d'âge [15 ; 25[.

2. Calculer la moyenne de cette série statistique, en remplaçant chaque classe par sa valeur centrale (par exemple, la classe [15 ; 25[sera remplacée par la valeur 20, la classe [25 ; 35[sera remplacée par la valeur 30,...)

Exercice 3

Soit f la fonction affine telle que $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$.

1. Quelle est l'image de 3 par la fonction f ? Quelle est l'image de – 3 ?

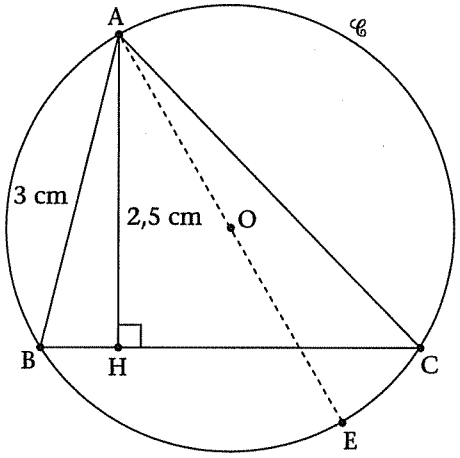
2. Tracer la droite qui représente la fonction f. (Sur les deux axes du repère orthonormal, l'unité de longueur choisie est 1 cm.)

3. Déterminer graphiquement le nombre x tel que $f(x) = 5$ et retrouver le résultat par le calcul.

Activités géométriques *(12 points)*

Exercice 1

La figure ci-après n'est pas à refaire. Elle n'est pas donnée en taille réelle.
A, B et C sont trois points d'un cercle $\mathscr{C}$ (voir figure). On sait que AB = 3 cm.
La hauteur AH mesure 2,5 cm. On trace le diamètre [AE].



1. Quelle est la nature du triangle ACE ? Justifier la réponse.

2. Expliquer pourquoi les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AEC}$ sont égaux.

3. En utilisant le triangle ABH, calculer la valeur exacte de sin $(\widehat{ABH})$ et en déduire la mesure de l'angle $\widehat{AEC}$ arrondie au degré.

Exercice 2

1. Construire un triangle ABD tel que : AB = 6 cm, AD = 8 cm, BD = 10 cm.

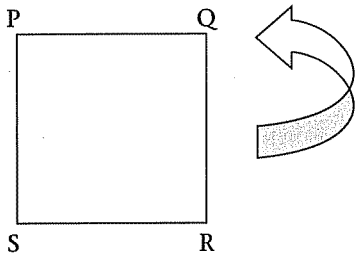
2. Démontrer que ce triangle est rectangle.

3. Placer le point C tel que : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

4. Placer sur le segment [AB] le point K tel que AK = 4,5 cm ; puis tracer la parallèle à (BD) passant par K. Elle coupe la droite (AD) en S. Calculer la longueur du segment [AS].

Exercice 3

PQRS est un carré. La flèche indique le sens direct.



Pour chacune des questions : Q1, Q2, Q3, Q4, une seule réponse est exacte.
Entourer, sans justification, cette bonne réponse.

Q1	$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$	$\overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{QS}$	$\overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$
Q2	$\overrightarrow{SP} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{QS}$	$\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RP}$	$\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RS}$
Q3	L'image de P par la translation de vecteur $\overrightarrow{SR}$ est R.	R a pour image S par la translation de vecteur $\overrightarrow{QP}$.	Les vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{SQ}$ sont égaux.
Q4	L'image de Q par la rotation de centre R et d'angle 90° dans le sens indiqué sur la figure est P.	L'image de Q par la rotation de centre R et d'angle 45° dans le sens indiqué sur la figure est P.	L'image de Q par la rotation de centre R et d'angle 90° dans le sens indiqué sur la figure est S.

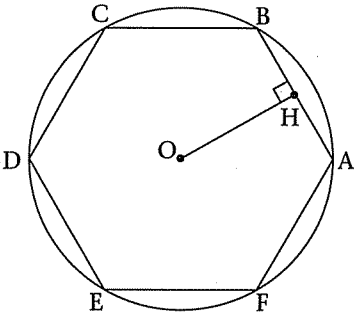
SUJET

Problème *(12 points)*

Partie A

ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R = 26 cm. On rappelle que tous les côtés de cet hexagone mesurent 26 cm (figure 1 ci-contre). L'hexagone ABCDEF est la base d'une pyramide régulière de sommet S de hauteur SO = 83 cm (voir figure 2). Le point H est le milieu de [AB]. (On rappelle que les faces latérales de cette pyramide sont des triangles isocèles en S.)

Figure 1



1. Le triangle SOB est rectangle en O. Calculer SB^2.

2. Que représente la droite (SH) pour le triangle SAB ? Justifier.

3. Montrer que SH = 86 cm.

4. Calculer, en cm^2, l'aire du triangle SAB.

5. En déduire que l'aire latérale de la pyramide (aire de la pyramide sans la base) est 6708 cm^2.

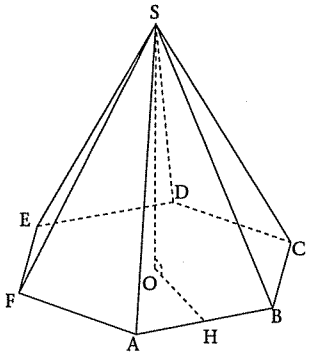


Figure 2

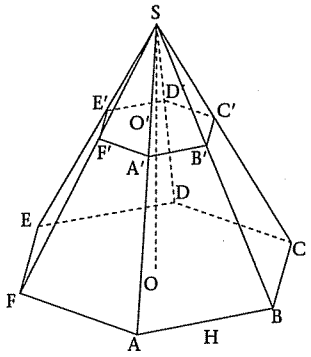


Figure 3

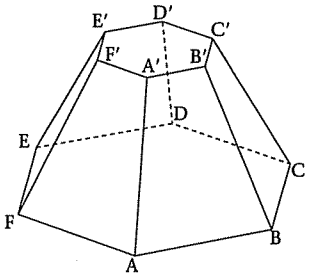


Figure 4

Partie B

Pour fabriquer l'abat-jour d'une lampe, on a coupé cette pyramide par un plan parallèle à la base (figure 3).
On obtient ainsi un tronc de pyramide qui servira d'abat-jour (figure 4).
Ainsi la pyramide SA'B'C'D'E'F' est une réduction de la pyramide SABCDEF.

1. On donne SO' = 33,2 cm. Calculer $\frac{SO'}{SO}$ et expliquer comment obtenir l'aire latérale de A'B'C'D'E'F' à partir de l'aire latérale de SABCDEF. Calculer alors l'aire de l'abat-jour en cm^2.

2. On suppose maintenant que SO' = x, avec $0 < x < 83$.

Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ de l'abat-jour vérifie : $\mathcal{A} = 6708 - \frac{6708}{6889}x^2$.

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. Forme réduite de A

$A = (2x - 3)(x - 4) - (2x - 3)^2$

$A = 2x^2 - 8x - 3x + 12 - (4x^2 - 12x + 9)$

$A = 2x^2 - 11x + 12 - 4x^2 + 12x - 9$

$\mathbf{A = -2x^2 + x + 3}$

On a utilisé l'identité $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 3$.

2. Lorsque $x = \frac{3}{2}$, on a : $2x - 3 = 2 \times \frac{3}{2} - 3 = 3 - 3 = 0$,

donc $A = 0 \times \left(\frac{3}{2} - 4\right) - 0^2 = 0$.

Donc A = 0 lorsque $x = \frac{3}{2}$.

Lorsque $x = 3\sqrt{2}$, on a, en utilisant la forme réduite de A :

$A = -2\,(3\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} + 3 = -2\,(9 \times 2) + 3\sqrt{2} + 3$

$A = -36 + 3\sqrt{2} + 3$ donc $\mathbf{A = -33 + 3\sqrt{2}}$ **lorsque** $\mathbf{x = 3\sqrt{2}}$.

3. Forme factorisée de A

$A = (2x - 3)(x - 4) - (2x - 3)^2 = (2x - 3)\,[(x - 4) - (2x - 3)]$

$A = (2x - 3)(x - 4 - 2x + 3)$

$\mathbf{A = (2x - 3)(-x - 1)}$

On peut vérifier qu'en développant ce produit de facteurs on retrouve la forme réduite de A.

4. Résolution de l'équation A = 0

A = 0 si et seulement si $2x - 3 = 0$ ou $-x - 1 = 0$

A = 0 si et seulement si $2x = 3$ ou $-1 = x$

A = 0 si et seulement si $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -1$

Les solutions de l'équation A = 0 sont les nombres $\frac{3}{2}$ et -1.

Exercice 2

1.

Classe d'âge	Effectif	Fréquence en pourcentage
[15 ; 25[	90	31,25
[25 ; 35[	54	18,75
[35 ; 45[	72	25
[45 ; 55[	36	12,50
[55 ; 65[	36	12,50
Total	288	100

Calcul de la fréquence en pourcentage de la classe d'âge : [15 ; 25[: $\frac{90 \times 100}{288} = 31{,}25$.

2. Calcul de la moyenne m de cette série statistique

$m = \frac{90 \times 20 + 54 \times 30 + 72 \times 40 + 36 \times 50 + 36 \times 60}{288}$. $m = \frac{10260}{288}$. $m = 35{,}625$

La moyenne de cette série statistique est donc de 35,625 ans.

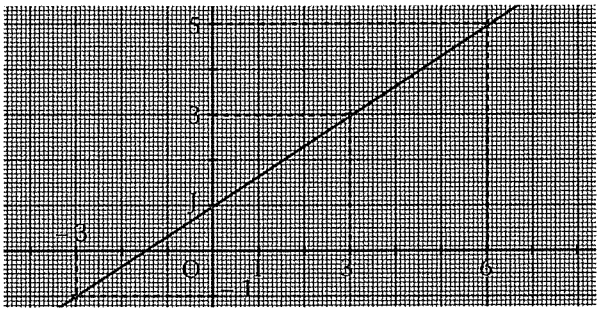
Exercice 3

1. $f(3) = \frac{2}{3} \times 3 + 1 = 2 + 1 = 3$ donc **l'image de 3 par la fonction *f* est 3.**

$f(-3) = \frac{2}{3} \times (-3) + 1 = -2 + 1 = -1$ donc **l'image de – 3 par *f* est – 1.**

2. La fonction *f* est représentée par la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x + 1$.

Cette droite passe par les points de coordonnées (3 ; 3) et (– 3 ; – 1).



3. On lit sur le graphique que le nombre x tel que $f(x) = 5$ est $x = 6$.
On retrouve ce résultat en résolvant l'équation $f(x) = 5$:

$f(x) = 5$ si et seulement si $\frac{2}{3}x + 1 = 5$

$f(x) = 5$ si et seulement si $\frac{2}{3}x = 4$

$f(x) = 5$ si et seulement si $x = \frac{3}{2} \times 4 = 3 \times 2 = 6$.

On retrouve donc bien par le calcul que le nombre x tel que $f(x) = 5$ est $x = 6$.

Activités géométriques

Exercice 1

1. Le triangle ACE est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ et [AE] est un diamètre de ce cercle.
On peut donc en déduire que **le triangle ACE est rectangle en C.**

2. $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AEC}$ sont deux angles inscrits dans le cercle $\mathscr{C}$, s'appuyant tous deux sur la corde [AC] et interceptant le même arc. Ils sont donc égaux.

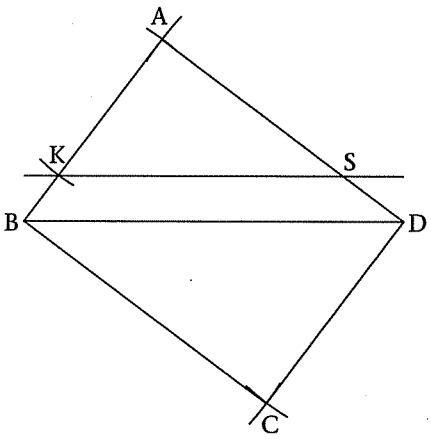
3. Calcul de $\widehat{AEC}$
Dans le triangle ABH rectangle en H (par hypothèse), on

a : $\sin \widehat{ABH} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AH}{AB}$ d'où **$\sin \widehat{ABH} = \dfrac{2,5}{3}$.**

À l'aide d'une calculatrice, on obtient alors : $\widehat{ABH} \approx 56°$.
Or, $\widehat{ABH} = \widehat{ABC}$ puisque H ∈ [BC] et $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}$ d'après la question précédente.
On a donc $\widehat{ABH} = \widehat{AEC}$, d'où **$\widehat{AEC} \approx 56°$** à un degré près.

Exercice 2

1.



2. $AB^2 + AD^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ et $BD^2 = 10^2 = 100$
donc $AB^2 + AD^2 = BD^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut conclure que **le triangle ABD est rectangle en A.**

3. L'égalité $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ montre que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
L'angle $\widehat{BAD}$ étant droit d'après la question précédente, on peut alors conclure que **le quadrilatère ABCD est un rectangle.**

4. Calcul de AS
Les droites (KS) et (BD) étant parallèles, appliquons le théorème de Thalès dans le triangle ABD.

On obtient : $\dfrac{AS}{AD} = \dfrac{AK}{AB}$ d'où $\dfrac{AS}{8} = \dfrac{4,5}{6}$

$AS = 8 \times \dfrac{4,5}{6}$ donc **AS = 6 cm.** On vérifie ce résultat sur la figure.

Exercice 3

Q1 : $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$
Q2 : $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RP}$
Q3 : R a pour image S par la translation de vecteur $\overrightarrow{QP}$
Q4 : L'image de Q par la rotation de centre R et d'angle 90° dans le sens indiqué sur la figure est S.

Problème

Partie A

1. Calcul de SB^2
Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle SOB rectangle en O. On a : $SB^2 = SO^2 + OB^2$ avec OB = 26 cm puisque OB est un rayon du cercle $\mathscr{C}$.
$SB^2 = 83^2 + 26^2 = 6889 + 676$ d'où $\mathbf{SB^2 = 7565}$.

2. H étant le milieu du segment [AB], la droite (SH) est la médiane du triangle SAB issue de S. Le triangle SAB étant isocèle en S, la droite (SH) est donc aussi la hauteur de SAB issue de S, la médiatrice de [AB] et la bissectrice de l'angle $\widehat{ASB}$.

3. D'après la question précédente, le triangle SHB est rectangle en H. Appliquons alors le théorème de Pythagore.

On obtient : $SH^2 + HB^2 = SB^2$ avec $HB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{26}{2} = 13$ cm

puisque H est le milieu de [AB] et que [AB] est un côté de l'hexagone ABCDEF.
On a donc : $SH^2 = SB^2 - HB^2 = 7565 - 13^2 = 7565 - 169$
$SH^2 = 7396$ d'où $\mathbf{SH = 86\ cm}$ puisque $\sqrt{7396} = 86$.

4. Calcul de l'aire $\mathscr{A}_1$ du triangle SAB (en cm^2)
SH est la hauteur du triangle SAB issue de S.

On en déduit que : $\mathscr{A}_1 = \dfrac{AB \times SH}{2}$

d'où $\mathscr{A}_1 = \dfrac{26 \times 86}{2}$, $\mathbf{\mathscr{A}_1 = 1118\ cm^2}$.

5. L'aire latérale de la pyramide est égale à 6 fois l'aire de la face SAB, elle-même égale à 1118 cm^2.
$6 \times 1118 = 6708$ donc **l'aire latérale de la pyramide est bien égale à 6708 cm^2.**

CORRIGÉ

Partie B

1. Si SO′ = 33,2 cm, alors $\frac{SO'}{SO} = \frac{33,2}{83}$ soit $\frac{SO'}{SO} = 0,4$.

SO′ et SO sont les hauteurs respectives des pyramides SA′B′C′D′E′F′ et SABCDEF.

$\frac{SO'}{SO}$, c'est-à-dire 0,4, est donc le coefficient de réduction relatif à ces deux pyramides.

On obtient donc l'aire latérale de SA′B′C′D′E′F′ en multipliant l'aire latérale de SABCDEF par $0,4^2$, c'est-à-dire par 0,16.

L'aire $\mathcal{A}$ de l'abat-jour est égale à la différence des aires latérales des pyramides SABCDEF et SA′B′C′D′E′F′.

En tenant compte de la remarque précédente, on a donc :

$\mathcal{A} = 6708 - 0,16 \times 6708$; d'où $\mathcal{A} = \mathbf{5634,72\ cm^2}$.

2. Si SO′ = x avec $0 < x < 83$, $\frac{SO'}{SO} = \frac{x}{83}$, donc le coefficient de réduction relatif aux pyramides SABCDEF et SA′B′C′D′E′F′ est égal à $\frac{x}{83}$.

En reprenant le même raisonnement que dans la question précédente, en notant toujours $\mathcal{A}$ l'aire de l'abat-jour, on obtient alors :

$\mathcal{A} = 6708 - \left(\frac{x}{83}\right)^2 \times 6708 = 6708 - \frac{x^2}{6889} \times 6708$.

On trouve donc bien que $\mathcal{A} = \mathbf{6708 - \frac{6708}{6889}\,x^2}$ (en cm^2).

BREVET
MATHÉMATIQUES
SESSION 2003

SUJET 7

GROUPEMENT 1 ◈ JUIN 2003

Activités numériques *(12 points)*

Exercice 1

1. Soit $A = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \div \frac{20}{21}$

Calculer A en détaillant les étapes du calcul et écrire le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Soit $B = 3\sqrt{28} - 9\sqrt{7}$

Écrire B sous la forme $a\sqrt{7}$, où a est un nombre entier (on indiquera le détail des calculs).

Exercice 2

1. Calculer le pgcd des nombres 1183 et 455 en précisant la méthode utilisée.

2. Écrire sous la forme irréductible la fraction $\frac{1183}{455}$ (on indiquera le détail des calculs).

Exercice 3

Soit l'expression $E = (5x - 2)^2 - (x - 7)(5x - 2)$

1. Développer et réduire E.

2. Calculer la valeur numérique de E pour $x = -1$

3. Factoriser E.

4. Résoudre l'équation $(5x - 2)(4x + 5) = 0$

Exercice 4

Dans un restaurant, un couple commande 1 pizza et 2 jus de fruit et paye 11 euros.
À la table voisine, des amis commandent 5 pizzas et 9 jus de fruit et payent 53 euros.
Toutes les pizzas sont au même tarif et tous les jus de fruit ont un prix identique.
On appelle x le prix en euros d'une pizza et y le prix en euros d'un jus de fruit.

1. Écrire un système d'équations traduisant les données.

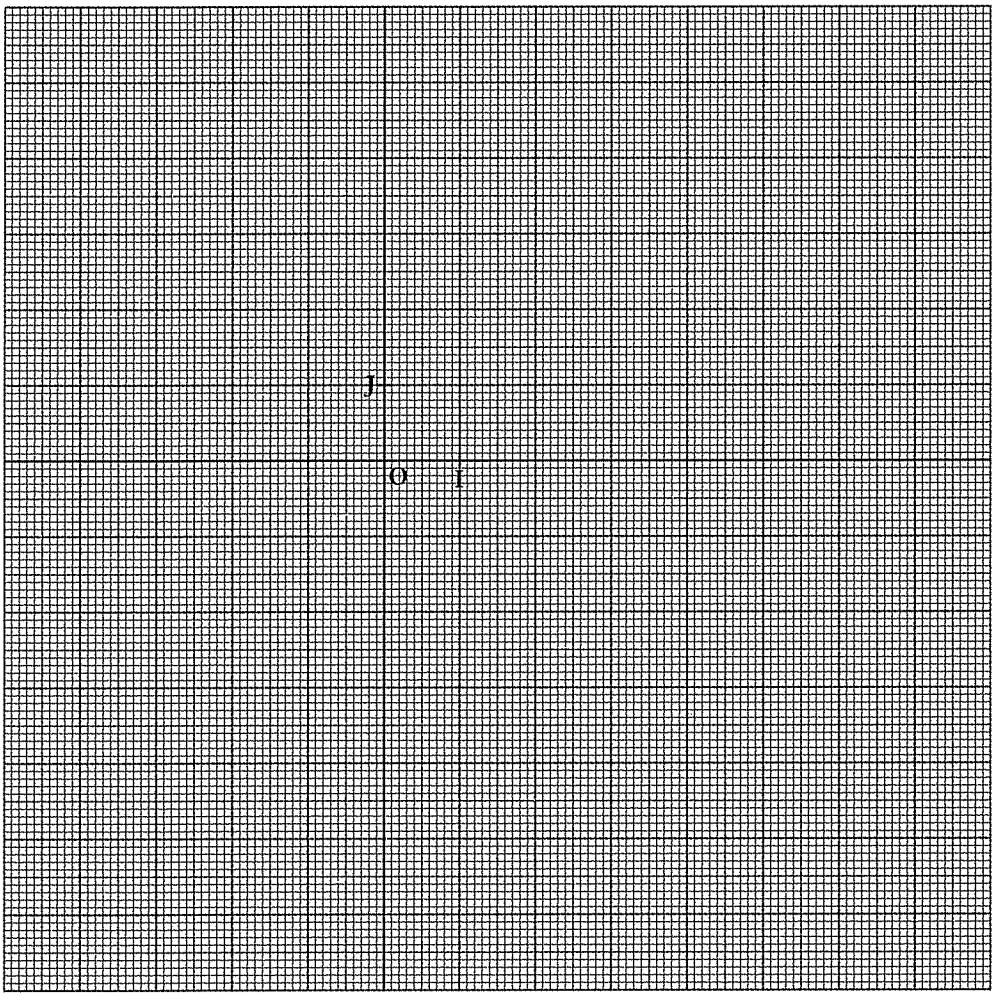
2. Calculer le prix d'une pizza et celui d'un jus de fruit.

Activités géométriques *(12 points)*

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J). L'unité de longueur est le centimètre.

1. Placer les points A (– 3 ; 1), B (0 ; – 2) et C (2 ; 3) dans le repère ci-dessous.

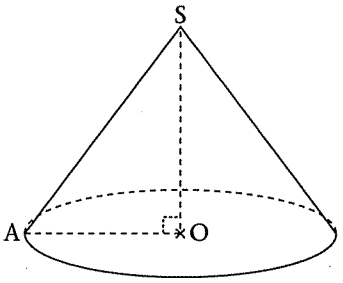


2. a. Calculer les distances AC et BC.
b. Qu'en déduire pour le triangle ABC ? Justifier.

3. Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère ci-avant.

Exercice 2

Un tajine est un plat composé d'une assiette circulaire et d'un couvercle en forme de cône qui s'emboîte parfaitement dans l'assiette. L'assiette de ce tajine a un rayon [OA] qui mesure 15 cm et la génératrice du cône [SA] mesure 25 cm.



Tajine

1. Calculer la hauteur OS du cône.

2. Montrer que la valeur exacte du volume V du cône est égal à $(1500\ \pi)\ cm^3$.

3. Un modèle réduit de ce tajine a une assiette de rayon 6 cm.
a. Déterminer le coefficient de réduction qui transforme le grand tajine en modèle réduit.

b. En déduire la valeur arrondie au cm^3 près du volume V' du tajine en modèle réduit.

Exercice 3

L'unité de longueur est le centimètre.
RST est un triangle tel que : RS = 6,4, ST = 8 et RT = 4,8.

1. Construire la figure en vraie grandeur.

2. Démontrer que le triangle RST est rectangle en R.

3. Calculer la valeur arrondie au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{RST}$.

4. M est le point du segment [SR] tel que SM = 4 et N est le point du segment [ST] tel que SN = 5.
a. Démontrer que les droites (MN) et (RT) sont parallèles.

b. Calculer la distance MN.

Problème *(12 points)*

Partie A

Une étude statistique a été réalisée auprès de jeunes possédant un téléphone portable. L'enquête portait sur la durée d'utilisation de leur téléphone en janvier 2003.
Les durées relevées vont de 34 min à 3 h 27 min.

1. Calculer l'étendue de la série statistique obtenue (donner le résultat en heures et minutes).

2. Les durées ont été regroupées en classe dans le tableau suivant.

Durée d'utilisation d en min	$30 \leqslant d < 60$	$60 \leqslant d < 90$	$90 \leqslant d < 120$	$120 \leqslant d < 150$	$150 \leqslant d < 180$	$180 \leqslant d < 210$
Effectifs	26	43	61	80	30	10
Centre de classe	45	75	105	135	165	195

Calculer l'effectif total de cette série statistique.

3. Quel est le nombre de jeunes interrogés qui ont utilisé leur téléphone portable au moins 2 h ?

4. Quel est le pourcentage de jeunes ayant utilisé leur téléphone moins de 1 h 30 min ?

5. Calculer en minutes la durée moyenne d'utilisation de leur téléphone portable pour l'ensemble des jeunes de l'enquête.
Exprimer ce résultat en heures et minutes.

Partie B

Deux sociétés proposent les formules d'abonnement suivantes :
M : Société Mobile France : 20 € pour un forfait de 2h et 0,50 € par minute de dépassement du forfait.
P : Société Portable Europe : 26 € pour un forfait de 2h et 0,30 € par minute de dépassement du forfait.

1. a. Quel est le prix à payer pour chacune des deux formules pour une durée d'utilisation de 1 h 30 min ?
b. Calculer le prix à payer pour chacune des deux formules pour une durée d'utilisation de 2 h 40 min.

2. Soit x la durée (en minutes) de dépassement au-delà du forfait de 2 h.
Exprimer en fonction de x :

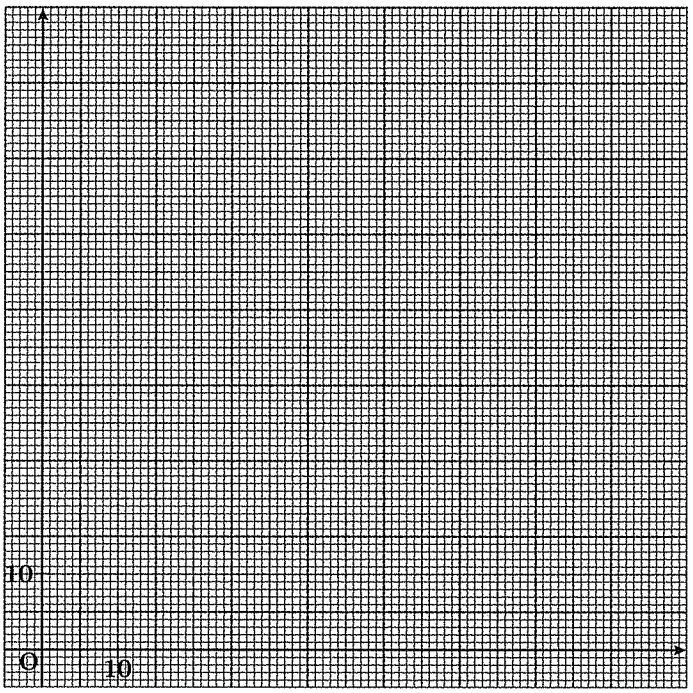
a. Le prix P_1 à payer avec la formule M proposée par la société Mobile France.

b. Le prix P_2 à payer avec la formule P proposée par la société Portable Europe.

3. Construire dans le repère ci-après :

– la droite d_1 représentant la fonction affine $x \mapsto 0{,}5x + 20$

– la droite d_2 représentant la fonction affine $x \mapsto 0{,}3x + 26$



4. a. Résoudre l'équation $0{,}5\ x + 20 = 0{,}3\ x + 26$.

b. Que signifie ce résultat dans le problème posé ci-dessus ?

c. Vérifier graphiquement cette solution en faisant apparaître les pointillés utiles.

5. a. À partir de quelle durée d'utilisation la formule P est-elle plus économique que la formule M ?

b. Lors de l'enquête décrite dans la première partie, quel est le nombre de jeunes interrogés qui ont intérêt à choisir la formule P proposée par Portable Europe ?

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} : \frac{20}{21} = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{21}{20} = \frac{8}{3} - \frac{5 \times 21}{3 \times 20}$

$A = \frac{8}{3} - \frac{5 \times 21}{3 \times 4 \times 5} = \frac{8}{3} - \frac{21}{3 \times 4} = \frac{8 \times 4}{3 \times 4} - \frac{21}{3 \times 4}$

$A = \frac{32}{12} - \frac{21}{12}$ donc $\mathbf{A = \frac{11}{12}}$.

2. $B = 3\sqrt{28} - 9\sqrt{7} = 3\sqrt{4 \times 7} - 9\sqrt{7} = 3 \times \sqrt{4} \times \sqrt{7} - 9\sqrt{7}$

$B = 3 \times 2 \times \sqrt{7} - 9\sqrt{7} = 6\sqrt{7} - 9\sqrt{7}$ donc $\mathbf{B = -3\sqrt{7}}$.

On rappelle la formule : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Exercice 2

1. Appliquons l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd de 1183 et 455 :

$1183 = 455 \times 2 + 273$

$455 = 273 \times 1 + 182$

$273 = 182 \times 1 + 91$

$182 = 91 \times 2 + 0$.

Le dernier reste non nul obtenu est 91.

Donc **pgcd (1183 ; 455) = 91.**

2. On a : $1183 = 91 \times 13$ et $455 = 91 \times 5$,

donc $\frac{1183}{455} = \frac{91 \times 13}{91 \times 5} = \frac{13}{5}$, cette dernière fraction étant irréductible.

La fraction $\frac{1183}{455}$ s'écrit donc sous forme irréductible $\frac{13}{5}$.

Exercice 3

1. Forme réduite de E

Utilisons l'identité $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 5x$ et $b = 2$.

$E = (5x-2)^2 - (x-7)(5x-2)$

$E = 25x^2 - 2 \times 5x \times 2 + 4 - (5x^2 - 2x - 35x + 14)$

$E = 25x^2 - 20x + 4 - 5x^2 + 2x + 35x - 14$

$E = 20x^2 + 17x - 10$.

2. Utilisons la forme réduite de E. Pour $x = -1$, on a :

$E = 20 \times (-1)^2 + 17 \times (-1) - 10 = 20 \times 1 - 17 - 10$ donc **$E = -7$ pour $x = -1$.**

3. Forme factorisée de E

$E = (5x-2)^2 - (x-7)(5x-2) = (5x-2)[(5x-2) - (x-7)]$

$E = (5x-2)(5x-2-x+7)$

$E = (5x-2)(4x+5)$.

On peut contrôler qu'en développant ce produit de facteurs on retrouve la forme réduite de E.

4. Résolution de l'équation E = 0

$E = 0$ si et seulement si $5x - 2 = 0$ ou $4x + 5 = 0$

$E = 0$ si et seulement si $5x = 2$ ou $4x = -5$

$E = 0$ si et seulement si $x = \frac{2}{5}$ ou $x = -\frac{5}{4}$.

Les solutions de l'équation E = 0 sont les nombres $\frac{2}{5}$ et $-\frac{5}{4}$.

Exercice 4

1. Avec les notations du texte, l'énoncé se traduit par le système S suivant :

$$S : \begin{cases} x + 2y = 11 & \text{(prix de la commande du couple)} \\ 5x + 9y = 53 & \text{(prix de la commande des amis).} \end{cases}$$

2. Résolvons le système S par la méthode de substitution :

S est vérifié si et seulement si $\begin{cases} x = 11 - 2y \\ 5(11-2y) + 9y = 53 \end{cases}$

S est vérifié si et seulement si $\begin{cases} x = 11 - 2y \\ 55 - 10y + 9y = 53 \end{cases}$

S est vérifié si et seulement si $\begin{cases} x = 11 - 2y \\ -y = -2 \end{cases}$

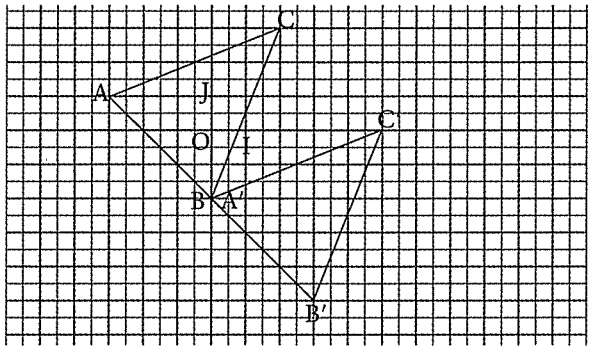
S est vérifié si et seulement si $\begin{cases} x = 11 - 2 \times 2 = 7 \\ y = 2 \end{cases}$

Les solutions du système S sont les nombres $x = 7$ et $y = 2$. On en déduit que, dans ce restaurant, **une pizza coûte 7 euros et un jus de fruit coûte 2 euros.**

Activités géométriques

Exercice 1

1. 3.



2. a. Calcul de AC et BC

Le repère (O, I, J) étant orthonormal, on a :

$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2$
$= (2 - (-3))^2 + (3 - 1)^2$
$AC^2 = 5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29$
donc **AC = $\sqrt{29}$ cm.**

$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2$
$= (2 - 0)^2 + (3 - (-2))^2$
$BC^2 = 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$
donc **BC = $\sqrt{29}$ cm.**

b. On voit donc que AC = BC (= $\sqrt{29}$ cm).
On peut alors en déduire que **le triangle ABC est isocèle en C.**

Exercice 2

1. Calcul de OS

Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle OAS rectangle en O (d'après les données de l'énoncé).
On obtient : $OS^2 + OA^2 = SA^2$ d'où $OS^2 = SA^2 - OA^2$
$OS^2 = 25^2 - 15^2 = 625 - 225 = 400 = 20^2$
donc **OS = 20 cm.**

2. Calcul du volume V du cône (en cm³)

$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$ où $\mathcal{A}$ est l'aire de la base circulaire du cône (de rayon OA = 15 cm) et h sa hauteur.

$\mathcal{A} = \pi \times OA^2 = \pi \times 15^2$ d'où $\mathcal{A} = 225\ \pi$ cm².
h = OS = 20 cm.

On a donc : $V = \frac{1}{3} \times 225\ \pi \times 20 = 75 \times 20 \times \pi$

soit **V = 1500 π cm³.**

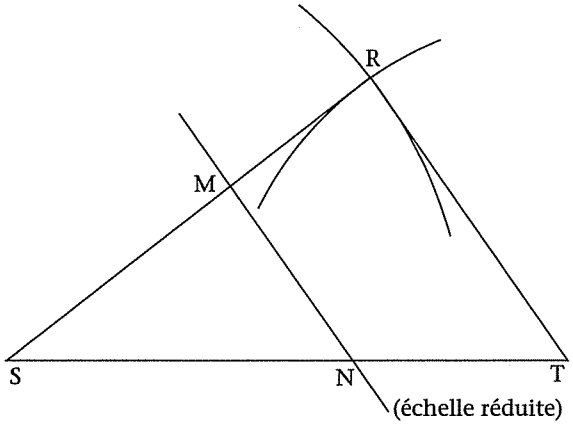
3. a. Le coefficient de réduction qui transforme le grand tajine en modèle réduit est égal au rapport des rayons des assiettes : $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

Le coefficient de réduction est donc égal à $\frac{2}{5}$.

b. Calcul du volume V′ du modèle réduit (en cm³)
D'après la question précédente, on a :
$V' = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times V$ d'où $V' = \frac{8}{125} \times 1500\,\pi$, soit
$V' = 96\,\pi$ cm³ ≈ 302 cm³.

Exercice 3

1.



2. On a : $ST^2 = 8^2 = 64$
et $RS^2 + RT^2 = 6{,}4^2 + 4{,}8^2 = 40{,}96 + 23{,}04 = 64$
donc $ST^2 = RS^2 + RT^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut alors conclure que **le triangle RST est rectangle en R.**

3. Calcul de $\widehat{RST}$
Dans le triangle RST rectangle en R, on a :
$\cos \widehat{RST} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{RS}{ST}$ d'où $\cos \widehat{RST} = \frac{6{,}4}{8} = 0{,}8$.
À l'aide d'une calculatrice, on obtient : **$\widehat{RST} \approx 37°$.**

4. a. M ∈ [SR] et N ∈ [ST], donc les points S, M, R d'une part et S, N, T d'autre part sont alignés dans le même ordre.

De plus, on a : $\frac{SM}{SR} = \frac{4}{6,4} = 0,625$ et $\frac{SN}{ST} = \frac{5}{8} = 0,625$ donc $\frac{SM}{SR} = \frac{SN}{ST}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut alors conclure que **les droites (MN) et (RT) sont parallèles.**

b. Calcul de MN

Les droites (MN) et (RT) étant parallèles, appliquons le théorème de Thalès.

On obtient : $\frac{MN}{RT} = \frac{SM}{SR}$ d'où $\frac{MN}{4,8} = \frac{4}{6,4}$

$MN = 4,8 \times \frac{4}{6,4}$ donc **MN = 3 cm.**

On peut contrôler ce résultat sur la figure.

Problème

Partie A

1. 3 h 27 min correspondent à 207 min (3 × 60 + 27 = 207).
207 – 34 = 173 donc l'étendue de la série est de 173 min.
Or, 173 = 60 × 2 + 53, donc 173 min correspondent à 2 h 53 min.
L'étendue de la série statistique est donc de 2 h 53 min.

2. Additionnons les effectifs des 6 classes du tableau :
26 + 43 + 61 + 80 + 30 + 10 = 250.
L'effectif total de la série statistique est donc de 250 jeunes.

3. 2 h correspondent à 120 min.
Additionnons les effectifs des classes pour lesquelles la durée d'utilisation est supérieure à 120 min :
80 + 30 + 10 = 120.
Donc 120 jeunes interrogés ont utilisé leur téléphone portable au moins 2 h.

4. 1 h 30 min correspondent à 90 min.
D'après le tableau, 69 jeunes sur 250 ont utilisé leur téléphone moins de 90 min (26 + 43 = 69).

$\frac{69}{250} \times 100 = 27,6$ donc **27,6 % des jeunes interrogésont utilisé leur téléphone portable moins de 1 h 30 min.**

5. Calcul de la durée moyenne *m* d'utilisation du téléphone portable
En utilisant les centres des classes et les effectifs du tableau, on a :

$$m = \frac{26 \times 45 + 43 \times 75 + 61 \times 105 + 80 \times 135 + 30 \times 165 + 10 \times 195}{250}$$

$$m = \frac{28500}{250} = 114 = 60 + 54$$

La durée moyenne d'utilisation de leur téléphone portable pour les jeunes interrogés est donc de 114 min, ou encore de 1 h 54 min.

Partie B

1. a. Pour chacune des deux formules, une durée d'utilisation de 1 h 30 min est incluse dans le forfait (qui est de 2 h). Ainsi, pour une durée d'utilisation de 1 h 30 min, **on paiera 20 € avec la formule M et 26 € avec la formule P.**

b. Le forfait étant de 2 h pour les deux formules, une durée d'utilisation de 2 h 40 min engendre donc 40 min de dépassement du forfait.
Avec la formule M, on paiera alors pour 2 h 40 min d'utilisation **40 €** ($20 + 0{,}5 \times 40 = 40$) tandis qu'avec **la formule P**, on paiera **38 €** ($26 + 0{,}3 \times 40 = 38$).

2. a. Avec la formule M, le forfait coûte 20 € et chaque minute de dépassement du forfait coûte 0,5 €.
Pour x minutes de dépassement du forfait, le prix à payer est donc : $\mathbf{P_1 = 0{,}5x + 20.}$

b. Avec la formule P, le forfait coûte 26 € et chaque minute de dépassement du forfait coûte 0,3 €.
Pour x minutes de dépassement du forfait, le prix à payer est donc : $\mathbf{P_2 = 0{,}3x + 26.}$

3. Voir graphique ci-après. La droite d_1, d'équation $y = 0{,}5x + 20$, passe par les points de coordonnées (0 ; 20) et (40 ; 40).
La droite d_2, d'équation $y = 0{,}3x + 26$, passe par les points de coordonnées (0 ; 26) et (40 ; 38).

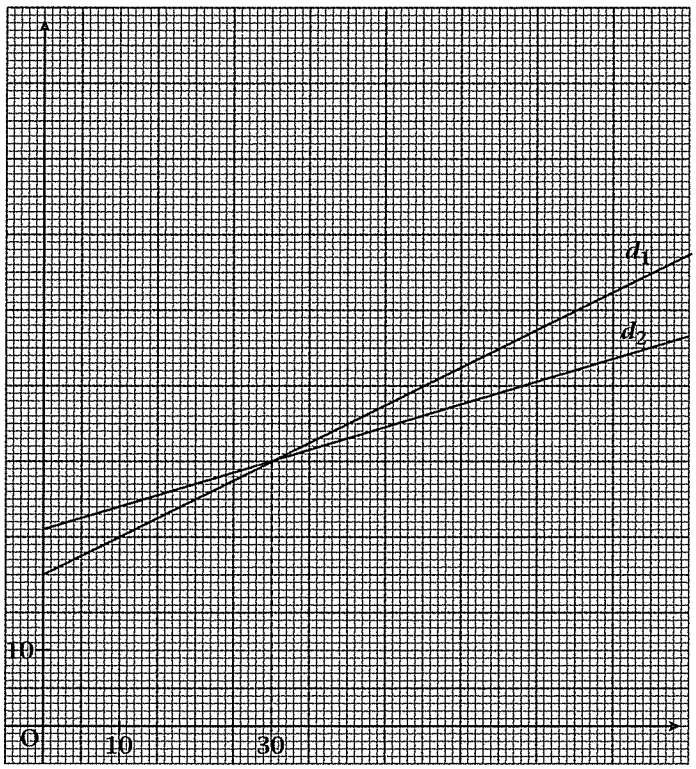
4. a. Résolution de l'équation $P_1 = P_2$
$P_1 = P_2$ si et seulement si $0{,}5x + 20 = 0{,}3x + 26$
$P_1 = P_2$ si et seulement si $0{,}2x = 6$
$P_1 = P_2$ si et seulement si $x = \frac{6}{0{,}2} = 30$.
L'équation $P_1 = P_2$ a pour solution $x = 30$.

b. Cette solution représente la durée (en minutes) de dépassement du forfait de 2 h pour laquelle le prix à payer sera le même pour les deux formules.
Ainsi, on paiera le même prix avec les deux formules pour 2 h 30 min d'utilisation en tout.

c. La lecture graphique confirme le résultat obtenu ci-avant par le calcul.

5. a. Résolvons l'inéquation $P_2 < P_1$.
$P_2 < P_1$ si et seulement si $0{,}3\,x + 26 < 0{,}5\,x + 20$
$P_2 < P_1$ si et seulement si $6 < 0{,}2x$
$P_2 < P_1$ si et seulement si $30 < x$.
Les solutions de l'inéquation $P_2 < P_1$ sont les nombres strictement supérieurs à 30.
On en déduit que la formule P est plus économique que la formule M **à partir d'une durée d'utilisation de 2 h 30 min.**

b. 2 h 30 min correspondent à 150 min.
D'après le tableau de la partie A, 40 jeunes concernés par l'enquête ont une durée d'utilisation supérieure à 150 min (30 + 10 = 40).
Donc 40 jeunes interrogés ont intérêt à choisir la formule P.



SUJET 8

GROUPEMENT 2 ◆ JUIN 2003

Activités numériques *(12 points)*

Exercice 1

1. Écrire sous forme $a\sqrt{5}$ avec a entier : $A = 3\sqrt{20} + \sqrt{45}$ et $B = \sqrt{180} - 3\sqrt{5}$

2. En utilisant les résultats de la question 1, démontrer que $A \times B$ et $\frac{A}{B}$ sont des nombres entiers.

Exercice 2

1. Effectuer le calcul ci-dessous et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :

$1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}\right)$

2. Un propriétaire terrien a vendu le quart de sa propriété en 2001 et les quatre cinquièmes du reste en 2002.

a. Quelle fraction de la propriété a été vendue en 2002 ?

b. Quelle fraction de la propriété reste invendue à l'issue des deux années ?

c. Quelle était la superficie de la propriété sachant que la partie invendue au bout des deux années représente six hectares ?

Exercice 3

On considère l'expression E : $E = (2x + 1)^2 - 4$.

1. Développer et réduire l'expression E.

2. Factoriser l'expression E sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.

3. Résoudre l'équation : $(2x + 3)(2x - 1) = 0$.

4. Calculer E lorsque x vaut $-\frac{3}{2}$, puis lorsque x vaut 0.

Exercice 4

Un commerçant augmente le prix de tous ses articles de 8 %.
Un objet coûte x euros. Après avoir subi cette augmentation, il coûte y euros.

1. Exprimer y en fonction de x.

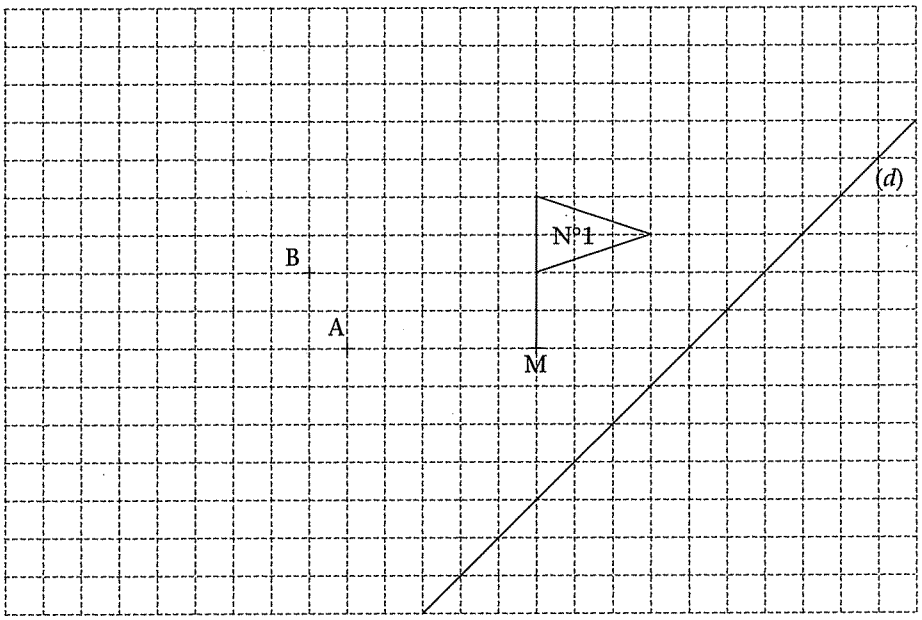
2. Un lecteur de DVD coûte, avant augmentation, 329 euros. Combien coûtera-t-il après ?

3. Un téléviseur coûte, après augmentation, 540 euros. Combien coûtait-il avant ?

Activités géométriques *(12 points)*

Exercice 1

Sur un quadrillage constitué de carrés, on a placé une droite (d), trois points (nommés A,B et M), une figure qui est en forme de fanion et est numérotée 1.



1. a. Construire l'image de la figure 1 par la symétrie d'axe (d) ; numéroter 2 la figure obtenue.

b. Construire l'image de la figure 1 par la rotation de centre M et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre ; numéroter 3 la figure obtenue.

c. Construire l'image de la figure 1 par la symétrie de centre A ; numéroter 4 la figure obtenue.

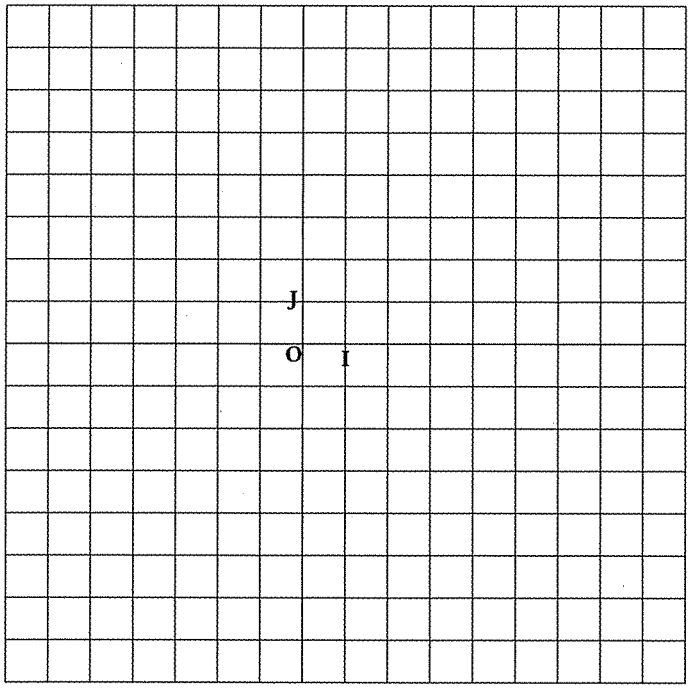
d. Construire l'image de la figure 4 par la symétrie de centre B ; numéroter 5 la figure obtenue.

2. Par quelle transformation géométrique peut-on passer directement de la figure 1 à la figure 5 ?
Préciser l'élément caractéristique de cette transformation.

Exercice 2

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points :
A (– 2 ; 1) ; B (– 1 ; 3) et C (5 ; 0).

1. Placer ces points dans le repère (O, I, J) représenté ci-dessous.



2. Démontrer que la valeur exacte de AB est $\sqrt{5}$.

3. On admet dans la suite de l'exercice que : $AC = 5\sqrt{2}$ et $BC = 3\sqrt{5}$.

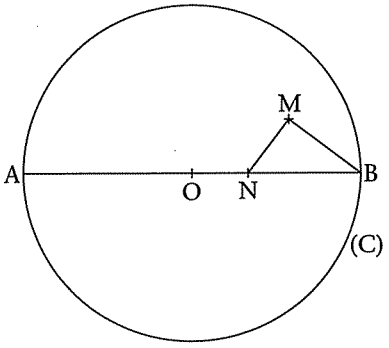
Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

4. On appelle K le milieu de [AC]. Calculer les coordonnées de K.

5. On appelle D le point tel que le quadrilatère ABCD est un rectangle.
Placer D dans le repère, puis calculer ses coordonnées.

Problème *(12 points)*

On donne :
– un cercle (C) de centre O et de rayon 6 cm ;
– un diamètre [AB] de ce cercle (C) ;
– le point N du segment [OB] tel que : BN = 4 cm ;
– le point M situé à 3,2 cm de B et tel que le triangle BMN est rectangle en M.



(Cette figure n'est pas en vraie grandeur.)

1. a. Calculer la longueur du segment [MN].
b. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{MBN}$ (arrondir à un degré près). La droite (BM) recoupe le cercle (C) en P.

2. a. Démontrer que le triangle BPA est rectangle en P.
b. En déduire que les droites (PA) et (MN) sont parallèles.

3. On sait maintenant que le triangle BPA est un agrandissement du triangle BMN.
a. Calculer le coefficient d'agrandissement.
b. Calculer BP.
c. Calculer l'aire du triangle BMN et en déduire l'aire du triangle BPA.

4. Soit E le milieu de [BN]. Démontrer que les droites (PO) et (ME) sont parallèles.

5. La droite (PO) recoupe le cercle (C) en K et la droite (PN) coupe la droite (BK) en I.
On sait que : lorsqu'un point appartient à une médiane d'un triangle et est situé aux deux tiers de cette médiane en partant du sommet, alors ce point est le centre de gravité du triangle.
Écrire le rapport $\frac{BN}{BO}$ sous forme d'une fraction irréductible, puis démontrer que I est le milieu du segment [BK].

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = 3\sqrt{20} + \sqrt{45} = 3\sqrt{4 \times 5} + \sqrt{9 \times 5}$
$A = 3 \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} + \sqrt{9} \times \sqrt{5}$
$A = 3 \times 2 \times \sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$
donc $\mathbf{A = 9\sqrt{5}}$.
$B = \sqrt{180} - 3\sqrt{5} = \sqrt{36 \times 5} - 3\sqrt{5} = \sqrt{36} \times \sqrt{5} - 3\sqrt{5}$
$B = 6\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$ donc $\mathbf{B = 3\sqrt{5}}$.
On rappelle la formule : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

2. D'après les résultats de la question précédente, on a : $A \times B = 9\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 9 \times 3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$ $= 27 \times 5$ donc $\mathbf{A \times B = 135}$.

De même : $\frac{A}{B} = \frac{9\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{3 \times 3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$ donc $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \mathbf{3}$.

Ces résultats montrent que $\mathbf{A \times B}$ **et** $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$ **sont bien des nombres entiers.**

Exercice 2

1. $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}\right) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3 \times 4}{4 \times 5}\right) = 1 - \left(\frac{5}{4 \times 5} + \frac{12}{4 \times 5}\right)$

$1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}\right) = 1 - \frac{17}{4 \times 5} = \frac{4 \times 5 - 17}{4 \times 5}$

$1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}\right) = \frac{20 - 17}{4 \times 5} = \frac{3}{4 \times 5}$

donc $\mathbf{1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}\right) = \frac{3}{20}}$.

2. a. En 2002, le propriétaire a vendu les quatre cinquièmes des trois quarts de sa propriété non vendus en 2001.

$\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{4 \times 3}{5 \times 4} = \frac{3}{5}$ donc, **en 2002, les trois cinquièmes de la propriété ont été vendus.**

b. Après la vente du quart de la propriété en 2001 et celle des quatre cinquièmes des trois quarts de la propriété en 2002, la fraction de la propriété restée invendue à l'issue des deux années est égale à $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}\right)$.

D'après la question 1, cette fraction est égale à $\frac{3}{20}$.

Donc les trois vingtièmes de la propriété restent invendus à l'issue des deux années.

c. Notons x la superficie de la propriété (en hectares).
D'après la question précédente et l'énoncé, on a :

$\frac{3}{20}x = 6$ d'où $x = \frac{20}{3} \times 6 = 40$.

La superficie de la propriété était donc de 40 hectares.

Exercice 3

1. Forme réduite de E

Utilisons l'identité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
avec $a = 2x$ et $b = 1$.
$E = (2x + 1)^2 - 4 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 - 4$
$E = 4x^2 + 4x + 1 - 4$
$E = 4x^2 + 4x - 3$.

2. Forme factorisée de E

Utilisons l'identité $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
avec $a = 2x + 1$ et $b = 2$.
$E = (2x + 1)^2 - 4 = (2x + 1)^2 - 2^2 = (2x + 1 + 2)(2x + 1 - 2)$
$E = (2x + 3)(2x - 1)$.

3. Résolution de l'équation E = 0

$E = 0$ si et seulement si $2x + 3 = 0$ ou $2x - 1 = 0$
$E = 0$ si et seulement si $2x = -3$ ou $2x = 1$
$E = 0$ si et seulement si $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$

Les solutions de l'équation E = 0 sont les nombres $-\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

4. D'après la question précédente, **$E = 0$ lorsque $x = -\frac{3}{2}$.**

Lorsque $x = 0$, en utilisant la forme réduite de E, on a : $E = 4 \times 0^2 + 4 \times 0 - 3 = 0 + 0 - 3$,
donc **$E = -3$ lorsque $x = 0$.**

Exercice 4

1. y est le prix de l'objet après que son ancien prix x ait subi une augmentation de 8 %.

On a donc : $y = x + \frac{8}{100}\,x$

(« nouveau prix = ancien prix + augmentation »)

$y = x + 0{,}08x$ d'où $y = \mathbf{1{,}08\,x}$.

2. Si $x = 329$, alors $y = 1{,}08 \times 329 = 355{,}32$.

Le lecteur de DVD, qui coûtait 329 euros avant augmentation, coûtera donc après **355,32 €.**

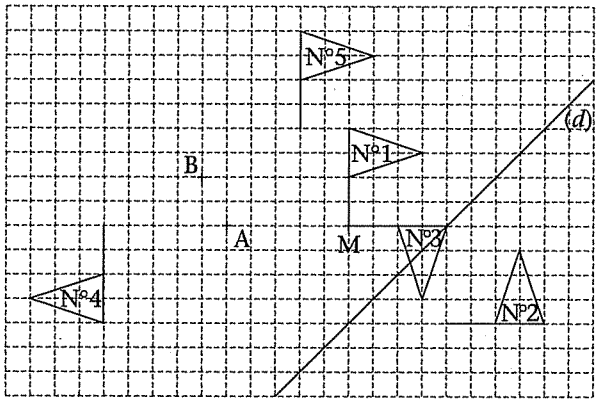
3. Si $y = 540$, alors $1{,}08x = 540$, donc $x = \frac{540}{1{,}08} = 500$.

Le téléviseur, qui coûte 540 euros après augmentation, coûtait donc avant **500 euros.**

Activités géométriques

Exercice 1

1. a. b. c. d.

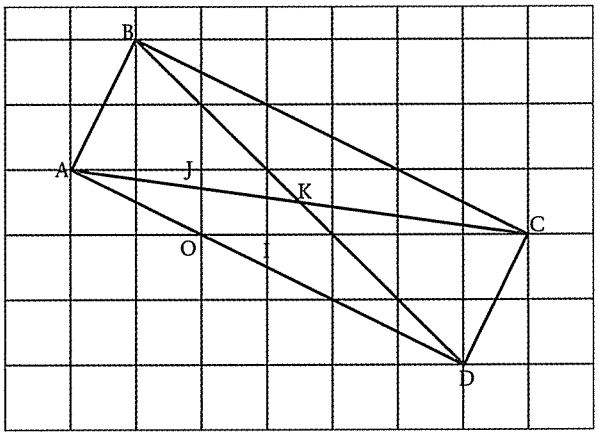


2. On peut passer directement de la figure 1 à la figure 5 en appliquant **la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.**

CORRIGÉ

Exercice 2

1.



2. Calcul de AB

Le repère (O, I, J) étant orthonormé, on a :

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (-1-(-2))^2 + (3-1)^2$

$AB^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

donc on a bien **AB** $= \sqrt{5}$.

3. On a : $AB^2 + BC^2 = \sqrt{5}^2 + (3\sqrt{5})^2 = 5 + 9 \times 5 = 50$ et $AC^2 = (5\sqrt{2})^2 = 25 \times 2 = 50$,

donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut alors conclure que **le triangle ABC est rectangle en B.**

4. K étant le milieu de [AC], on a :

$x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-2+5}{2} = \dfrac{3}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2}$.

On a donc : $K\left(\dfrac{3}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$.

On peut contrôler ce résultat sur la figure.

5. ABCD étant un rectangle, le milieu K de la diagonale [AC] est aussi le milieu de la diagonale [BD].

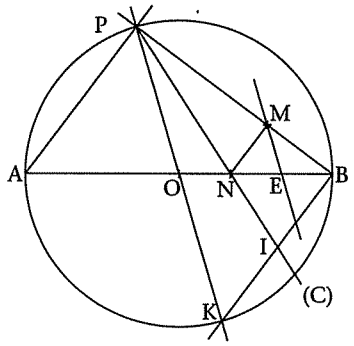
On a donc : $\dfrac{x_B + x_D}{2} = x_K$ et $\dfrac{y_B + y_D}{2} = y_K$.

On en déduit que :

$x_D = 2x_K - x_B = 2 \times \dfrac{3}{2} - (-1) = 3 + 1 = 4$

et $y_D = 2y_K - y_B = 2 \times \dfrac{1}{2} - 3 = 1 - 3 = -2$. Ainsi, on a : **D(4 ; – 2).**

Problème



(Cette figure n'est pas en vraie grandeur)

1. a. Calcul de MN

Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle BMN rectangle en M. On obtient :

$MN^2 + BM^2 = BN^2$ d'où $MN^2 = BN^2 - BM^2$

$MN^2 = 4^2 - 3{,}2^2 = 16 - 10{,}24 = 5{,}76 = 2{,}4^2$

donc **MN = 2,4 cm.**

b. Calcul de $\widehat{MBN}$

Dans le triangle BMN rectangle en M, on a :

$$\cos \widehat{MBN} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BM}{BN} = \frac{3{,}2}{4}$$

donc $\cos \widehat{MBN} = 0{,}8$.

À l'aide d'une calculatrice, on obtient : $\widehat{MBN} \approx 37°$.

2. a. Le triangle BPA est inscrit dans le cercle (C) et son côté [AB] est un diamètre de ce cercle. On peut donc en déduire que **le triangle BPA est rectangle en P.**

b. Les triangles BPA et BMN étant rectangles respectivement en P et M, on en déduit que (PA) ⊥ (BP) et (MN) ⊥ (BM).

Or, les droites (BP) et (BM) sont confondues par hypothèse.

On peut donc en déduire que **les droites (PA) et (MN) sont parallèles** puisqu'elles sont toutes deux perpendiculaires à la droite (BP).

3. a. Le triangle BPA étant un agrandissement du triangle BMN, le coefficient d'agrandissement est égal au rapport $\frac{BA}{BN}$.

Or, [BA] est un diamètre du cercle (C) de rayon 6 cm, donc BA = 12 cm.

Comme BN = 4 cm, on a alors : $\frac{BA}{BN} = \frac{12}{4} = 3$.

Le coefficient d'agrandissement est donc égal à 3.

b. Calcul de BP

BPA étant un agrandissement de BMN de coefficient 3,

on a : $\frac{BP}{BM} = 3$ d'où $BP = 3 \times BM = 3 \times 3{,}2$

soit **BP = 9,6 cm.**

c. Calcul des aires des triangles BMN et BPA

Le triangle BMN étant rectangle en M, son aire est donnée par : $\mathcal{A}(BMN) = \frac{BM \times MN}{2}$.

On a donc : $\mathcal{A}(BMN) = \frac{3{,}2 \times 2{,}4}{2}$

d'où $\mathcal{A}$ **(BMN) = 3,84 cm²**.

BPA étant un agrandissement de BMN de coefficient 3, on en déduit que son aire est donnée par :

$\mathcal{A}(BPA) = 3^2 \times \mathcal{A}(BMN)$ d'où $\mathcal{A}(BPA) = 9 \times 3{,}84$

soit $\mathcal{A}$ **(BPA) = 34,56 cm²**.

4. M ∈ [BP] et E ∈ [BO] (puisque E ∈ [BN]), donc les points B, M, P d'une part et B, E, O d'autre part sont alignés dans le même ordre.

De plus, E est le milieu de [BN], donc $BE = \frac{BN}{2} = \frac{4}{2}$

soit **BE = 2 cm.**

On a donc : $\frac{BE}{BO} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(BO = 6 cm car [BO] est un rayon du cercle (C)) et $\frac{BM}{BP} = \frac{3{,}2}{9{,}6} = \frac{3{,}2}{3 \times 3{,}2} = \frac{1}{3}$, donc $\frac{BE}{BO} = \frac{BM}{BP}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut alors conclure que **les droites (PO) et (ME) sont parallèles.**

5. On a : $\frac{BN}{BO} = \frac{4}{6}$ donc $\frac{\mathbf{BN}}{\mathbf{BO}} = \frac{2}{3}$.

O étant le centre du cercle (C), les points P et K sont diamétralement opposés sur (C), donc O est le milieu de [PK].

On en déduit que [BO] est la médiane du triangle BPK issue du sommet B.

Or, N est un point de cette médiane situé aux deux tiers

en partant du sommet puisque $\frac{BN}{BO} = \frac{2}{3}$.

N est donc le centre de gravité du triangle BPK.

(PN) est donc la médiane de ce triangle issue de P.

Elle coupe donc le côté [BK] du triangle en son milieu.

Or, I est le point d'intersection de (PN) et (BK).

Donc I est bien le milieu du segment [BK].

SUJET 9 SUJET

GROUPEMENT 3 ◆ JUIN 2003

Activités numériques *(12 points)*

Dans toute cette partie, les résultats des calculs demandés doivent être accompagnés d'explications. Le barème en tiendra compte.

Exercice 1

1. Écrire A sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers naturels, b étant le plus petit possible :

$$A = 2\sqrt{45} - 3\sqrt{5} + \sqrt{20}.$$

2. Calculer l'expression suivante B et donner son écriture scientifique :

$$B = \frac{150 \times 10^3 \times 8 \times 10^5}{6 \times 10^7}.$$

Exercice 2

On considère l'expression $C = (2x + 5)^2 - (x + 3)(2x + 5)$.

1. Développer et réduire C.

2. Factoriser C.

3. Résoudre l'équation $(2x + 5)(x + 2) = 0$.

4. Calculer l'expression C pour $x = -\frac{2}{3}$.

(On mettra le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.)

Exercice 3

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4x + 3y = 206 \\ 2x + 2y = 114 \end{cases}$$

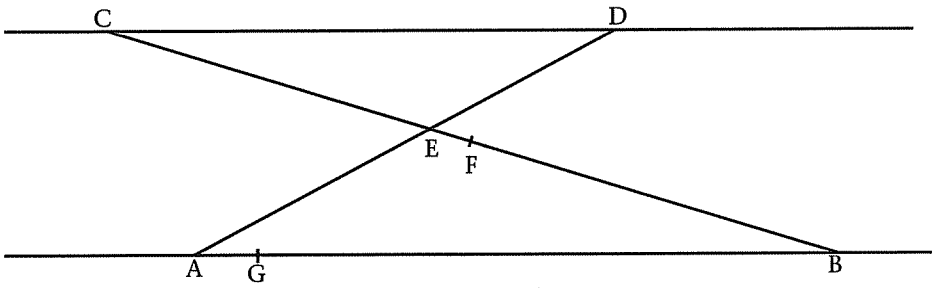
2. Lors d'un spectacle, la famille A, composée de 4 adultes et de 3 enfants, a payé 206 euros. Pour le même spectacle, la famille B, composée de 2 adultes et de 2 enfants, a payé 114 euros. Combien paiera la famille C, sachant qu'elle est composée de 3 adultes et de 2 enfants ?

Activités géométriques *(12 points)*

Exercice 1

L'unité est le centimètre.

Dans la figure ci-après, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Les droites (AD) et (BC) se coupent en E.
On donne DE = 6, AE = 10, AB = 20 et BE = 16.



(Cette figure n'est pas réalisée en vraie grandeur)

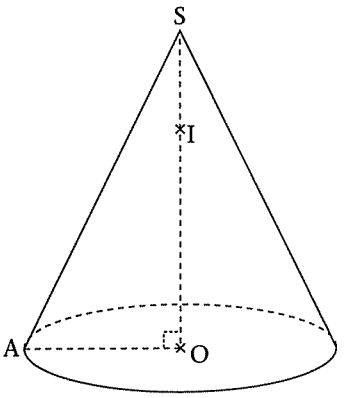
1. Calculer la distance CD.

2. Les points F et G appartiennent respectivement aux segments [BC] et [AB].
Ils vérifient : BF = 12,8 et BG = 16. Montrer que les droites (FG) et (AE) sont parallèles.

Exercice 2

On considère le cône ci-contre de sommet S
et dont la base est le disque de rayon [OA].
Ce cône a pour hauteur SO = 8 cm et pour génératrice SA = 10 cm.
I est un point du segment [SO] tel que SI = 2 cm.

(Cette figure n'est pas réalisée en vraie grandeur).



1. Montrer que OA = 6 cm.

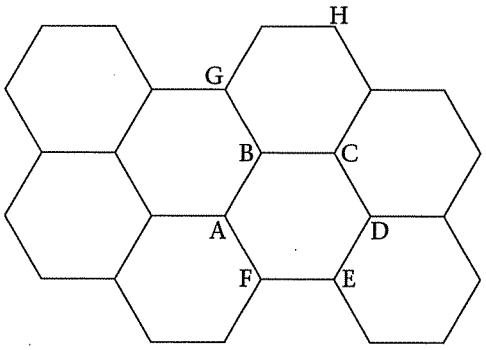
2. Montrer que la valeur exacte du volume V du cône est égale à $96\,\pi$ cm^3. Donner la valeur arrondie au mm^3 près.

3. Déterminer, au degré près, la mesure de l'angle $\widehat{ASO}$.

4. On coupe ce cône par un plan parallèle à sa base et passant par le point I. La section obtenue est un disque de centre I, réduction du disque de base.
a. Déterminer le rapport k de cette réduction.
b. Soit V' le volume du cône de sommet S et de base le disque de centre I. Exprimer V' en fonction de V, puis donner la valeur arrondie de V' au mm^3 près.

Exercice 3

Sur la figure ci-dessous, sont représentés 8 hexagones réguliers.



1. Construire sur la figure le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

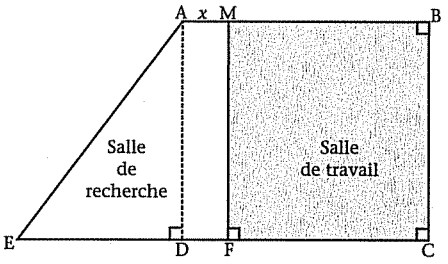
2. Construire sur la figure le point Q, symétrique de H par rapport à la droite (BE).

3. Construire sur la figure le point P, image du point C par la rotation de centre E et d'angle 60° dans le sens des aiguilles d'une montre.

Problème *(12 points)*

Les parties A et B sont indépendantes.

La figure ci-dessous est une vue de la surface au sol du C.D.I. d'un collège. Ce C.D.I. doit être réaménagé en deux parties distinctes : une salle de recherche et une salle de travail.
ABCE est un trapèze rectangle tel que AB = 9 m, BC = 8 m et DE = 6 m. M est un point du segment [AB].
On pose AM = x (x est une distance exprimée en mètre : $0 \leqslant x \leqslant 9$).



Rappel : l'aire d'un trapèze de hauteur h, de bases b et B est donnée par $a = \dfrac{h(b + B)}{2}$.

Partie A

La documentaliste souhaite que l'aire de la salle de travail soit égale à celle de la salle de recherche.

1. Dans cette question, uniquement, on suppose : $x = 1$. Calculer l'aire du trapèze AMFE (salle de recherche), et l'aire du rectangle MBCF (salle de travail).

2. a. Exprimer, en fonction de x, l'aire du trapèze AMFE.
b. Exprimer, en fonction de x, l'aire du rectangle MBCF.

3. On se propose de représenter graphiquement cette situation à l'aide de deux fonctions affines f et g.
f est définie par : $f(x) = -8x + 72$,
g est définie par : $g(x) = 8x + 24$.

Construire ci-après un repère orthogonal :
– l'origine sera placée en bas à gauche,
– en abscisse, on prendra 2 cm pour 1 unité (2 cm pour 1 m),
– en ordonnée, on prendra 1 cm pour 4 unités (1 cm pour 4 m^2).

Représenter les fonctions affines f et g, pour $0 \leqslant x \leqslant 9$.

4. a. En utilisant le graphique, indiquer la valeur de x pour laquelle $f(x) = g(x)$, ainsi que l'aire correspondante. Mettre en évidence ces valeurs sur le graphique (pointillés, couleurs...).
b. Retrouver les résultats précédents par le calcul.

Partie B

Dans cette partie, on pose $x = 3{,}5$.

1. Donner, en cm, les dimensions de la salle de travail MBCF.

2. On souhaite recouvrir le sol de la salle de travail à l'aide d'un nombre entier de dalles carrées identiques, de côté c entier le plus grand possible.
a. Expliquer pourquoi c est le pgcd de 800 et 550.
b. Calculer la valeur de c, en indiquant la méthode utilisée.
c. Combien de dalles sont nécessaires pour recouvrir le sol de la salle de travail ?
3. Les dalles coûtent 13,50 € le mètre carré.
Quelle somme devra-t-on payer pour acheter le nombre de dalles nécessaire ?

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = 2\sqrt{45} - 3\sqrt{5} + \sqrt{20} = 2\sqrt{9 \times 5} - 3\sqrt{5} + \sqrt{4 \times 5}$
$A = 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{5} - 3\sqrt{5} + \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2 \times 3 \times \sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$
$A = 6\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ donc $\mathbf{A = 5\sqrt{5}}$.
On a utilisé la formule : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

2. $B = \dfrac{150 \times 10^3 \times 8 \times 10^5}{6 \times 10^7}$

$B = \dfrac{150 \times 8 \times 10^3 \times 10^5}{6 \times 10^7} = \dfrac{1200 \times 10^8}{6 \times 10^7}$

$B = \dfrac{1200}{6} \times \dfrac{10^8}{10^7} = 200 \times 10 = 2000$ donc $\mathbf{B = 2 \times 10^3}$.

On rappelle les formules :
$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$ et $\dfrac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$.

Exercice 2

1. Forme réduite de C

Utilisons l'identité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
avec $a = 2x$ et $b = 5$.
$C = (2x + 5)^2 - (x + 3)(2x + 5)$
$C = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 5 + 5^2 - (2x^2 + 5x + 6x + 15)$
$C = 4x^2 + 20x + 25 - 2x^2 - 5x - 6x - 15$
$\mathbf{C = 2x^2 + 9x + 10.}$

2. Forme factorisée de C
$C = (2x + 5)^2 - (x + 3)(2x + 5) = (2x + 5)\,[(2x + 5) - (x + 3)]$
$C = (2x + 5)(2x + 5 - x - 3)$ donc $\mathbf{C = (2x + 5)(x + 2).}$

3. Résolution de l'équation C = 0
$C = 0$ si et seulement si $2x + 5 = 0$ ou $x + 2 = 0$
$C = 0$ si et seulement si $2x = -5$ ou $x = -2$

C = 0 si et seulement si $x = -\frac{5}{2}$ ou $x = -2$

Les solutions de l'équation C = 0 sont les nombres $-\frac{5}{2}$ et -2.

4. Pour $x = -\frac{2}{3}$, on a, en utilisant la forme réduite de C :

$C = 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 9 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 10 = 2 \times \frac{4}{9} - 6 + 10 = \frac{8}{9} + 4$

$C = \frac{8}{9} + \frac{36}{9}$ donc $C = \frac{44}{9}$ **pour** $x = -\frac{2}{3}$.

Exercice 3

1. Résolution du système S : $\begin{cases} 4x + 3y = 206 \\ 2x + 2y = 114 \end{cases}$

Résolvons ce système par la méthode de substitution, après avoir simplifié la 2e équation par 2 :

S est vérifié si et seulement si $\begin{cases} 4x + 3y = 206 \\ x + y = 57 \end{cases}$

S est vérifié si et seulement si $\begin{cases} 4x + 3(57 - x) = 206 \\ y = 57 - x \end{cases}$

S est vérifié si et seulement si $\begin{cases} 4x + 171 - 3x = 206 \\ y = 57 - x \end{cases}$

S est vérifié si et seulement si $\begin{cases} x = 35 \\ y = 57 - 35 = 22 \end{cases}$

Le système S a donc pour solutions $x = 35$ et $y = 22$.

2. Notons respectivement x et y les prix payés par un adulte et un enfant pour le spectacle.
L'énoncé se traduit par le système :

$\begin{cases} 4x + 3y = 206 & \text{(prix payé par la famille A)} \\ 2x + 2y = 114 & \text{(prix payé par la famille B).} \end{cases}$

On retrouve le système résolu à la question précédente.
On en déduit donc que $x = 35$ et $y = 22$.
Ainsi, pour ce spectacle, un adulte paye 35 euros et un enfant 22 euros.
La famille C est composée de 3 adultes et 2 enfants.
$3 \times 35 + 2 \times 22 = 149$, donc **la famille C paiera pour ce spectacle 149 euros.**

Activités géométriques

Exercice 1

1. Calcul de CD

Les droites (AD) et (BC) se coupent en E et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a alors : $\frac{DE}{AE} = \frac{CD}{AB}$ d'où $\frac{6}{10} = \frac{CD}{20}$

$CD = 20 \times \frac{6}{10}$ donc **CD = 12 cm.**

2. E et F sont deux points du segment [BC] tels que BF < BE (puisque BF = 12,8 cm et BE = 16 cm), donc F ∈ [BE].

Comme G ∈ [AB], on en déduit que les points B, F, E d'une part et B, G; A d'autre part sont alignés dans le même ordre.

De plus, on a : $\frac{BF}{BE} = \frac{12,8}{16} = 0,8$ et $\frac{BG}{BA} = \frac{16}{20} = 0,8$

donc $\frac{BF}{BE} = \frac{BG}{BA}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut alors conclure que **les droites (FG) et (AE) sont parallèles.**

Exercice 2

1. Calcul de OA

Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle OAS rectangle en O (puisque [SO] et [SA] sont respectivement hauteur et génératrice du cône).

On obtient : $OA^2 + OS^2 = SA^2$ d'où $OA^2 = SA^2 - OS^2$

$OA^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 = 6^2$ donc on a bien : **OA = 6 cm.**

2. Calcul du volume V du cône (en cm³)

$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$ où $\mathcal{A}$ est l'aire du disque de base du cône

(de rayon OA = 6 cm) et h est sa hauteur.

$\mathcal{A} = \pi \times OA^2$ d'où $\mathcal{A} = \pi \times 6^2$ soit $\mathcal{A} = 36\ \pi$ cm².

h = SO donc h = 8 cm.

On a donc : $V = \frac{1}{3} \times 36\pi \times 8 = 12 \times 8 \times \pi$

soit **V = 96 π cm³.**

À l'aide d'une calculatrice, on obtient : **V ≈ 301,593 cm³.**

CORRIGÉ

3. Calcul de $\widehat{ASO}$

Dans le triangle OAS rectangle en O, on a :

$\cos \widehat{ASO} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{OS}{SA} = \dfrac{8}{10}$ d'où $\cos \widehat{ASO} = 0{,}8$.

À l'aide d'une calculatrice, on obtient : $\widehat{ASO} \approx 37°$.

4. a. Le rapport k de la réduction du disque de base est égal au rapport des rayons des deux disques, lui-même égal au rapport $\dfrac{SI}{SO}$ d'après le théorème de Thalès (le plan de section étant parallèle au plan de base).

Or, on a : $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$.

Le rapport de la réduction est donc : $k = \dfrac{1}{4}$.

b. Calcul du volume V′ du cône réduit (en cm³)

Le cône de sommet S et de base le disque de centre I est une réduction du cône initial de rapport $k = \dfrac{1}{4}$.

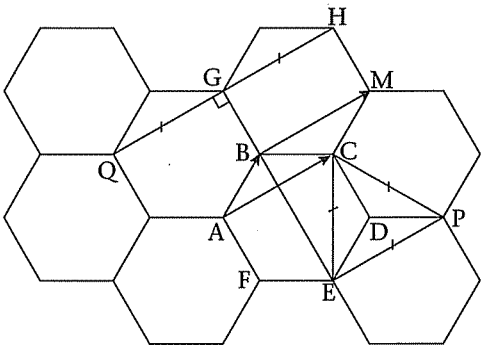
On en déduit que : $V' = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 \times V$, soit $V' = \dfrac{V}{64}$.

On a donc : $V' = \dfrac{96\pi}{64}$ soit $V' = 1{,}5\pi$ cm³.

À l'aide d'une calculatrice, on obtient : $V' \approx 4{,}712$ cm³.

Exercice 2

1. 2. 3.



Problème

Partie A

1. Le trapèze AMFE a pour hauteur AD et pour bases AM et EF.

Son aire est donc : $\mathcal{A}(\text{AMFE}) = \dfrac{\text{AD}(\text{AM} + \text{EF})}{2}$.

On a : AD = BC = 8 m, AM = x, donc AM = 1 m (puisque $x = 1$ dans cette question) et comme D ∈ [EF],

EF = ED + DF = ED + AM = 6 + 1, soit EF = 7 m.

On a donc : $\mathcal{A}(\text{AMFE}) = \dfrac{8 \times (1 + 7)}{2} = \dfrac{8 \times 8}{2}$

soit $\mathcal{A}$**(AMFE) = 32 m²**.

L'aire du rectangle MBCF est donnée par :

$\mathcal{A}$(MBCF) = MB × BC.

Or, M ∈ [AB], donc MB = AB – AM = 9 – 1, soit MB = 8 m.

Comme BC = 8 m, on a alors : $\mathcal{A}(\text{MBCF}) = 8 \times 8$

soit $\mathcal{A}$**(MBCF) = 64 m²**.

2. a. On a toujours : $\mathcal{A}(\text{AMFE}) = \dfrac{\text{AD}(\text{AM} + \text{EF})}{2}$

avec AD = BC = 8 m, AM = x m et EF = ED + AM

soit EF = $(x + 6)$ m.

On a donc : $\mathcal{A}(\text{AMFE}) = \dfrac{8(x + x + 6)}{2} = 4(2x + 6)$

soit $\mathcal{A}$**(AMFE) = 8x + 24 (m²)**.

b. De même, on a toujours : $\mathcal{A}$(MBCF) = MB × BC

avec MB = AB – AM, soit MB = $(9 - x)$ m, et BC = 8 m.

On a donc : $\mathcal{A}(\text{MBCF}) = (9 - x) \times 8$

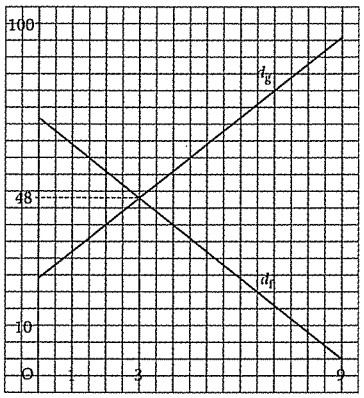
soit $\mathcal{A}$**(MBCF) = – 8x + 72 (m²)**.

On peut vérifier que, pour $x = 1$, on retrouve les valeurs des deux aires trouvées à la question 1.

3. La fonction f est représentée par la droite d_f d'équation $y = -8x + 72$. Cette droite passe par les points de coordonnées (0 ; 72) et (9 ; 0).

La fonction g est représentée par la droite d_g d'équation $y = 8x + 24$. Cette droite passe par les points de coordonnées (0 ; 24) et (9 ; 96).

CORRIGÉ



4. a. Sur le graphique, on lit que $f(x) = g(x)$ pour $x = 3$.

La valeur de l'aire correspondante est alors de **48 (m²)**.

b. Résolvons l'équation $f(x) = g(x)$.
$f(x) = g(x)$ si et seulement si $-8x + 72 = 8x + 24$
$f(x) = g(x)$ si et seulement si $48 = 16x$
$f(x) = g(x)$ si et seulement si $x = \frac{48}{16} = 3$.
Pour $x = 3$, on a : $f(3) = -8 \times 3 + 72 = -24 + 72 = 48$
et $g(3) = 8 \times 3 + 24 = 24 + 24 = 48$.
On retrouve donc bien par le calcul que **l'équation $f(x) = g(x)$ a pour solution $x = 3$**, et que **la valeur commune des deux fonctions pour $x = 3$ est 48**.
On peut conclure de cette étude que les salles de travail et de recherche auront la même aire pour AM = 3 m, et que cette aire commune est égale à 48 m².

Partie B

1. Si $x = 3{,}5$, on a : MB = AB – AM = 9 – 3,5, soit MB = 5,5 m = 550 cm.
De plus, on a : BC = 8 m = 800 cm.
La salle de travail MBCF est donc un rectangle de longueur 800 cm et de largeur 550 cm.

2. a. La salle de travail étant recouverte d'un nombre entier de dalles carrées identiques de côté c (nombre entier de cm), c divise et la longueur et la largeur de cette salle, donc c est un diviseur commun de 800 et 550.
Si on veut que c soit le plus grand possible, alors par définition même du pgcd de deux entiers, **c doit être égal au pgcd de 800 et 550.**

b. Calculons le pgcd de 800 et 550 en appliquant l'algorithme d'Euclide.
$800 = 550 \times 1 + 250$; $550 = 250 \times 2 + 50$; $250 = 50 \times 5 + 0$.
Le dernier reste non nul obtenu ci-dessus est 50, donc le pgcd de 800 et 550 est égal à 50.
Donc **$c = 50$ cm.**

c. L'aire de la salle de travail est égale à 800×550 cm². L'aire d'une salle carrée est donc égale à 50×50 cm².
$\frac{800 \times 550}{50 \times 50} = \frac{800}{50} \times \frac{550}{50} = 16 \times 11 = 176$
donc **176 dalles sont nécessaires pour recouvrir le sol de la salle de travail.**

3. La salle de travail mesure 8 m sur 5,5 m.
$8 \times 5{,}5 = 44$, donc l'aire de la salle de travail est de 44 m².
Cette salle est recouverte de dalles qui coûtent 13,50 € le mètre carré.
$44 \times 13{,}50 = 594$, donc on devra payer **594 €** pour acheter le nombre de dalles nécessaire pour recouvrir le sol de la salle de travail.

SUJET 10

GROUPEMENT 4 ◆ JUIN 2003

Activités numériques *(12 points)*

Exercice 1

On donne : $A = \frac{9}{14} - \frac{2}{7} \times 5$ et $B = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}}$.

Écrire chaque nombre A et B sous forme d'une fraction irréductible.

Exercice 2

On considère $C = (3x - 2)^2 + (3x - 2)(x + 3)$.

1. Développer et réduire C.

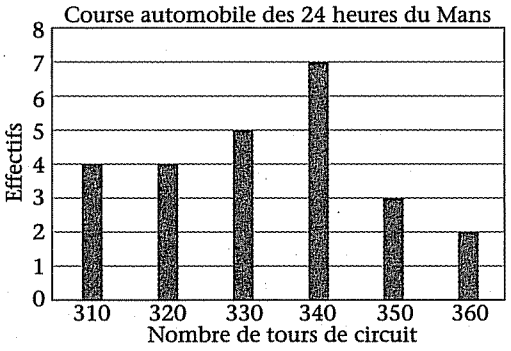
2. Factoriser C.

3. Résoudre l'équation $(3x - 2)(4x + 1) = 0$.

Exercice 3

La course automobile des 24 heures du Mans consiste à effectuer en 24 heures le plus grand nombre de tours d'un circuit.

Le diagramme en bâtons ci-après donne la répartition du nombre de tours effectués par les 25 premiers coureurs automobiles du rallye.



1. Compléter le tableau ci-après des effectifs et des effectifs cumulés croissants de cette série statistique.

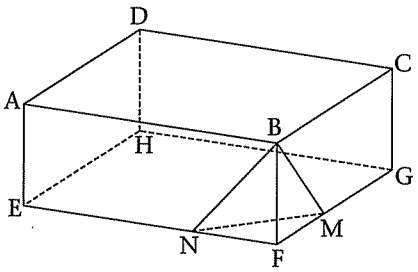
Nombre de tours effectués	310	320	330	340	350	360
Effectifs	4					
Effectifs cumulés croissants						

2. Déterminer la médiane et l'étendue de cette série.

3. Calculer la moyenne de cette série (on donnera la valeur arrondie à l'unité).

Activités géométriques *(12 points)*

Exercice 1



La figure ci-contre n'est pas représentée en vraie grandeur.
ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.
On donne :
FE = 12 cm ; FG = 9 cm ; FB = 3 cm ; FN = 4 cm et FM = 3 cm.

1. Calculer la longueur MN.

2. Montrer que l'aire du triangle FNM est égale à 6 cm^2.

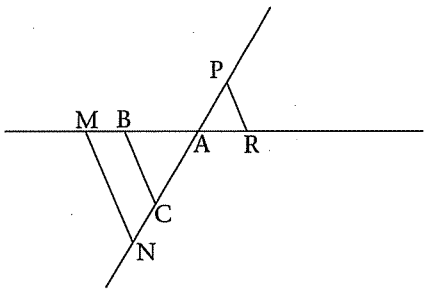
3. Calculer le volume de la pyramide (P) de sommet B et de base le triangle FNM.

4. On considère le solide ABCDENMGH obtenu en enlevant la pyramide (P) au parallélépipède rectangle.
a. Quel est le nombre de faces de ce solide ?
b. Calculer son volume.

SUJET

Exercice 2

On précisera pour chacune des deux questions de cet exercice la propriété de cours utilisée.



La figue ci-contre n'est pas représentée en vraie grandeur.
Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.
On donne : AB = 2,4 cm ; AC = 5,2 cm ; AN = 7,8 cm et MN = 4,5 cm.

1. Calculer les longueurs AM et BC.

2. Sachant que AP = 2,6 cm et AR = 1,2 cm, montrer que les droites (PR) et (BC) sont parallèles.

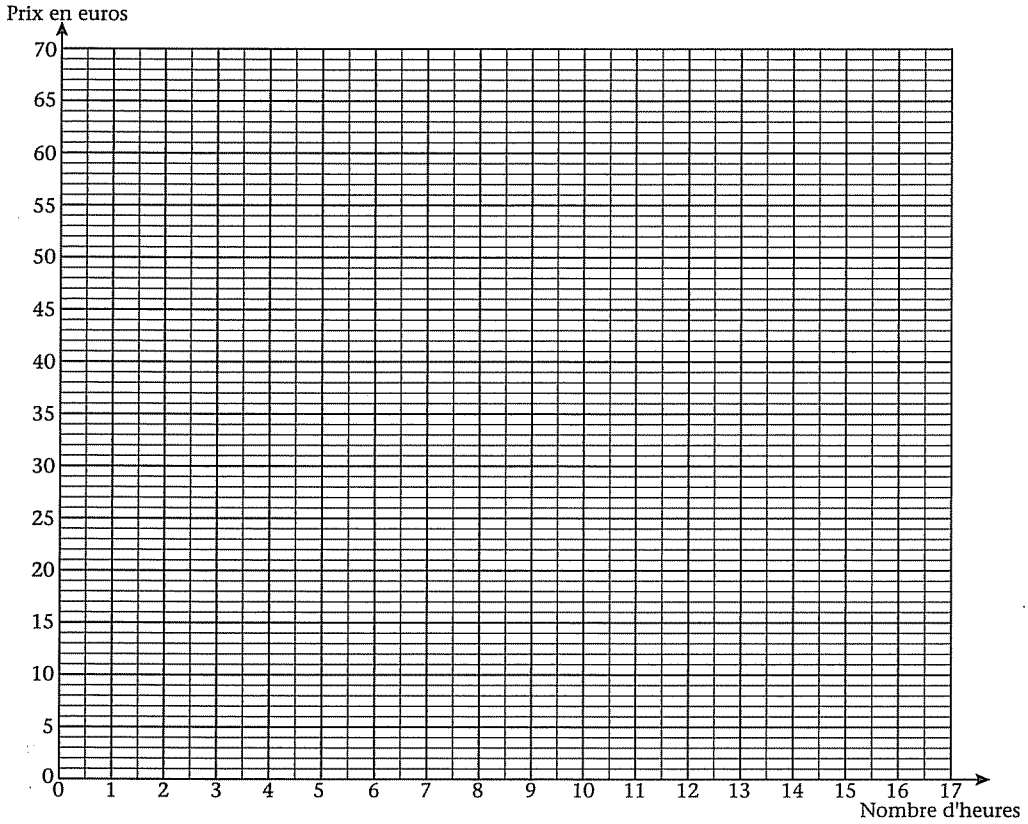
Problème *(12 points)*

Un fournisseur d'accès à Internet propose à ses clients deux formules d'abonnement :
– une formule A comportant un abonnement fixe de 20 € par mois auquel s'ajoute le prix des communications au tarif préférentiel de 2 € de l'heure ;
– une formule B offrant un libre accès à Internet, mais pour laquelle le prix des communications est de 4 € pour une heure de connexion.
Dans les deux cas, les communications sont facturées proportionnellement au temps de connexion.

1. Pierre se connecte 7 h 30 min par mois et Annie 15 h par mois.
Calculer le prix payé par chacune des deux personnes selon qu'elle choisit la formule A ou la formule B. Conseiller à chacune l'option qui est pour elle la plus avantageuse.

2. On note x le temps de connexion d'un client, exprimé en heures.
On appelle P_A le prix à payer en euros avec la formule A et P_B le prix à payer en euros avec la formule B.
Exprimer P_A et P_B en fonction de x.

3. Dans le repère orthogonal ci-après, tracer :
– la droite (d), représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 2x + 20$
– la droite (d'), représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto 4x$



4. En faisant apparaître sur le graphique précédent les traits nécessaires, répondre aux deux questions suivantes :

a. Coralie, qui avait choisi la formule B, a payé 26 €. Combien de temps a-t-elle été connectée ?

b. Jean se connecte 14 h dans le mois. Combien va-t-il payer selon qu'il choisit la formule A ou la formule B ?

5. Résoudre l'inéquation : $4x \leqslant 2x + 20$.

Que permet de déterminer la résolution de cette inéquation dans le contexte du problème ?

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

$A = \frac{9}{14} - \frac{2}{7} \times 5 = \frac{9}{14} - \frac{10}{7} = \frac{9}{14} - \frac{20}{14}$

donc $A = -\frac{11}{14}$.

$B = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{9}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{3}$ donc $\mathbf{B = \frac{2}{3}}$.

Exercice 2

1. Forme réduite de C

Utilisons l'identité $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 2$.

$C = (3x - 2)^2 + (3x - 2)(x + 3)$

$C = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 + 3x^2 + 9x - 2x - 6$

$C = 9x^2 - 12x + 4 + 3x^2 + 7x - 6$

$\mathbf{C = 12x^2 - 5x - 2.}$

2. Forme factorisée de C

$C = (3x - 2)^2 + (3x - 2)(x + 3) = (3x - 2)[(3x - 2) + (x + 3)]$

$\mathbf{C = (3x - 2)(4x + 1).}$

On contrôle qu'en développant ce produit de facteurs on retrouve la forme réduite de C.

3. Résolution de l'équation C = 0

C = 0 si et seulement si $3x - 2 = 0$ ou $4x + 1 = 0$

C = 0 si et seulement si $3x = 2$ ou $4x = -1$

C = 0 si et seulement si $x = \frac{2}{3}$ ou $x = -\frac{1}{4}$.

Les solutions de l'équation C = 0 sont les nombres $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{4}$.

Exercice 3

1.

Nombre de tours effectués	310	320	330	340	350	360
Effectifs	4	4	5	7	3	2
Effectifs cumulés croissants	4	8	13	20	23	25

2. L'effectif total de cette série statistique est de 25 coureurs. Le tableau des effectifs cumulés croissants montre que, si on classait ces coureurs par ordre croissant du nombre de tours effectués, le 13e coureur aurait effectué 330 tours.
La médiane de cette série est donc de 330 tours.
Le nombre de tours effectués par ces coureurs va de 310 à 360.
360 – 310 = 50, donc **l'étendue de cette série est de 50 tours.**

3. Calcul de la moyenne *m* de cette série
D'après les résultats du tableau, on a :

$$m = \frac{4 \times 310 + 4 \times 320 + 5 \times 330 + 7 \times 340 + 3 \times 350 + 2 \times 360}{25}$$

$$m = \frac{8320}{25} = 332{,}8 \approx 333 \text{ à l'unité près.}$$

La moyenne de cette série est donc d'environ 333 tours à l'unité près.

Activités géométriques

Exercice 1

1. Calcul de MN
ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle, M ∈ [FG] et N ∈ [FE].
Le triangle FMN est donc rectangle en F.
En appliquant le théorème de Pythagore, on obtient alors : $MN^2 = FM^2 + FN^2$
d'où $MN^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ soit **MN = 5 cm.**

2. Calcul de l'aire $\mathcal{A}$ du triangle FNM (en cm²)
Le triangle FNM étant rectangle en F, on a :

$\mathcal{A} = \dfrac{FM \times FN}{2}$ donc $\mathcal{A} = \dfrac{3 \times 4}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

donc **l'aire du triangle FNM est bien égale à 6 cm².**

3. Calcul du volume V de la pyramide (P) (en cm³)

$V = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$ où $\mathcal{A}$ est l'aire du triangle de base FNM de la pyramide et h est sa hauteur.

On a vu que $\mathcal{A} = 6$ cm².
De plus, la pyramide (P) a pour hauteur [FB] et FB = 3 cm, donc $h = 3$ cm.
On a donc $V = \dfrac{1}{3} \times 6 \times 3$, donc **V = 6 cm³.**

4. a. Le solide ABCDENMGH possède **7 faces.**

b. Calcul du volume V′ de ce solide (en cm³)
V′ = V″ – V où V″ est le volume du parallélépipède rectangle ABCDEFGH et V est le volume de la pyramide (P).
V″ = « longueur × largeur × hauteur »
donc V″ = FE × FG × FB = 12 × 9 × 3 soit V″ = 324 cm³.
On a vu que V = 6 cm³.
On a donc : V′ = 324 – 6 soit **V′ = 318 cm³.**

Exercice 2

1. Calcul de AM et BC
Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et les droites (BC) et (MN) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a :
$\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$ d'où $\dfrac{2,4}{AM} = \dfrac{5,2}{7,8} = \dfrac{BC}{4,5}$.
On a donc : $5,2 \times AM = 2,4 \times 7,8$ et $7,8 \times BC = 5,2 \times 4,5$
donc $AM = \dfrac{18,72}{5,2}$ et $BC = \dfrac{23,4}{7,8}$
soit **AM = 3,6 cm et BC = 3 cm.**

2. Les points B, A, R d'une part et C, A, P d'autre part sont alignés dans le même ordre.
De plus, on a : $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{2,6}{5,2} = 0,5$ et $\dfrac{AR}{AB} = \dfrac{1,2}{2,4} = 0,5$
donc $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{AR}{AB}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut alors conclure que **les droites (PR) et (BC) sont parallèles.**

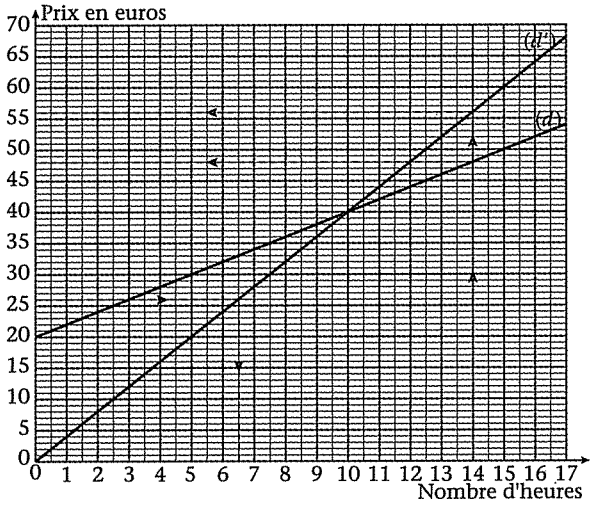
Problème

1. Pierre se connecte 7 h 30 min par mois, c'est-à-dire 7,5 h, et Annie 15 h par mois.
D'après la description des prix payés par les deux formules, on peut dire que :
– **avec la formule A**, Pierre paiera **35 €** ($2 \times 7{,}5 + 20 = 35$) et Annie paiera **50 €** ($2 \times 15 + 20 = 50$) ;
– **avec la formule B**, Pierre paiera **30 €** ($4 \times 7{,}5 = 30$) et Annie paiera **60 €** ($4 \times 15 = 60$).
Ces résultats montrent que, pour Pierre, la formule la plus avantageuse est la formule B (30 € payés avec cette formule contre 35 € avec la formule A), tandis que, pour Annie, c'est la formule A qui est la plus avantageuse (50 € payés avec cette formule contre 60 € avec la formule B).

2. Avec la formule A, l'heure de connexion coûte 2 € et l'abonnement coûte 20 €.
Pour x heures de connexion, le prix payé avec la formule A est donc : $\mathbf{P_A = 2x + 20}$.
Avec la formule B, l'heure de connexion coûte 4 € et il n'y a pas d'abonnement.
Pour x heures de connexion, le prix payé avec la formule B est donc : $\mathbf{P_B = 4x}$.

3. La droite (d) a pour équation $y = 2x + 20$.
Elle passe par les points de coordonnées (0 ; 20) et (15 ; 50). La droite (d') a pour équation $y = 4x$.
Elle passe par les points de coordonnées (0 ; 0) et (15 ; 60).

4. a. On lit sur le graphique, en utilisant la droite (d'), que Coralie, qui a payé 26 € avec la formule B, a été connectée **6,5 h**, c'est-à-dire **6 h 30 min.**



b. En utilisant successivement les droites (d) et (d'), on lit que Jean, qui se connecte 14 h dans le mois, paiera **48 €** s'il choisit la formule A et **56 €** s'il choisit la formule B.

5. Résolution de l'inéquation
$\mathbf{P_B \leqslant P_A}$
$P_B \leqslant P_A$ si et seulement si
$4x \leqslant 2x + 20$
$P_B \leqslant P_A$ si et seulement si $2x \leqslant 20$. $P_B \leqslant P_A$ si et seulement si $x \leqslant 10$.
Les solutions de l'inéquation $\mathbf{P_B \leqslant P_A}$ sont les nombres x inférieurs à 10.
Les solutions de cette inéquation représentent les nombres d'heures de connexion pour lesquels il est plus avantageux pour l'utilisateur de choisir la formule B. L'utilisateur a donc intérêt à choisir la formule B s'il se connecte moins de 10 heures.

SUJET 11 SUJET

◈ GROUPEMENT 2 ◈ SEPTEMBRE 2003

Activités numériques *(12 points)*

Exercice 1

1. Calculer le PGCD des nombres 1 356 et 4 972.

Faire apparaître les calculs intermédiaires.

2. Donner la forme irréductible de la fraction $\frac{1\,356}{4\,972}$.

Exercice 2

On a : $A = \dfrac{1-\frac{5}{6}}{1+\frac{1}{6}}$; $B = \dfrac{4 \times 10^{-12} \times 2{,}5}{7 \times 10^{-11}}$.

Démontrer que A et B sont deux écritures du même nombre $\frac{1}{7}$.

Exercice 3

On donne l'expression $E = (5x + 1)^2 - (x - 3)(5x + 1)$.

1. Développer et réduire l'expression E.

2. Factoriser l'expression E sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.

3. Résoudre l'équation : $(5x + 1)(x + 1) = 0$.

Exercice 4

Lors d'un travail en classe en octobre 2002, des élèves de Troisième ont étudié le nombre d'universités françaises par académie. Ils ont récupéré sur internet le tableau suivant :

Caractère étudié (Nombre d'universités par académie)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectifs (Nombre d'académies)	2	5	9	1	5	6	1	0	1

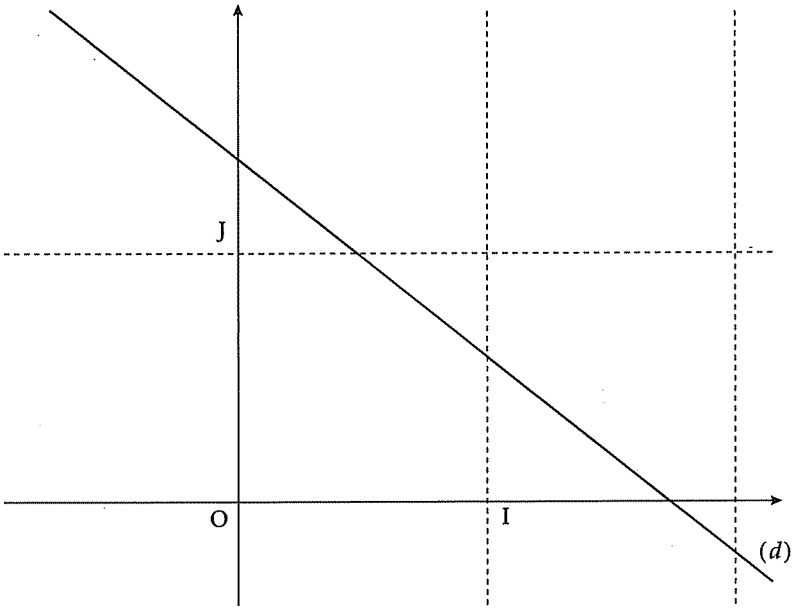
Par exemple, on lit dans la deuxième colonne du tableau (en gras) que 5 académies possèdent une seule université.

1. Quelle est la valeur moyenne du nombre d'universités par académie ?

2. Donner la valeur médiane de la série statistique.

Exercice 5

On donne la représentation graphique (d) d'une fonction affine g dans le repère orthonormé (O ; I ; J) :



En utilisant le graphique, donner une valeur approchée au dixième près :

1. de l'image du nombre 1 par la fonction affigne g,

2. de l'image du nombre (– 0,5) par la fonction affine g,

3. du nombre qui a pour image 0 par la fonction affine g,

4. du nombre qui a pour image $\frac{1}{3}$ par la fonction affine g,

SUJET

Activités géométriques *(12 points)*

Exercice 1

L'unité de longueur utilisée est le centimètre.

1. Construire un triangle DOS tel que DS = DO = 6 et $\widehat{ODS} = 120°$.
Quelle est la nature du triangle DOS ? Justifier.

2. Dans le triangle DOS, tracer la hauteur issue de D. Elle coupe [OS] en H.
On donne le tableau suivant :

x	sin x	cos x	tan x
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

a. Calculer la valeur exacte de OH.
b. En déduire que : $OS = 6\sqrt{3}$.

3. Placer le point M de [DS] tel que SM = 5. Tracer la parallèle à (OS) passant par M ; elle coupe [DO] en N. Calculer la valeur exacte de MN.

Exercice 2

Dans le fond d'un vieux tiroir, on a trouvé la bobine en bois ci-après (figure B).
Elle est constituée de deux troncs de cône identiques et d'une partie cylindrique.
Chaque tronc de cône pourrait être obtenu (figure A) en sectionnant, parallèlement à sa base et à 1 cm de hauteur, un grand cône C_1 de base 9 cm^2 et de hauteur 3 cm et en retirant le petit cône C_2.

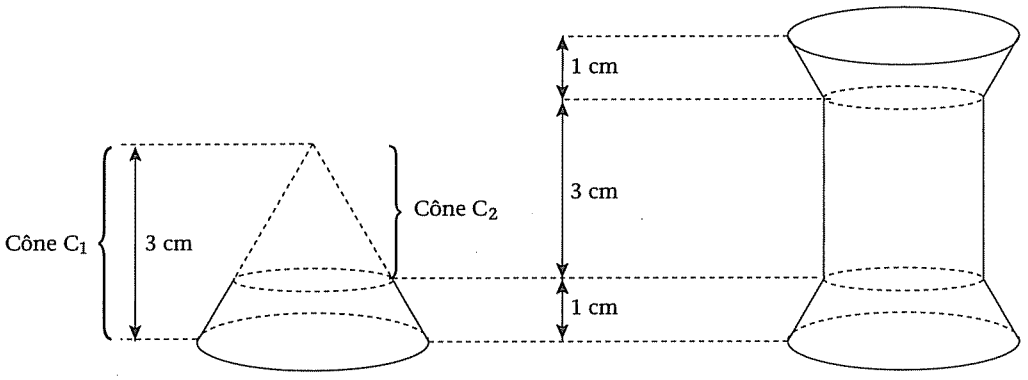


Figure A **Figure B**

1. Quel est le volume du cône C_1 ?

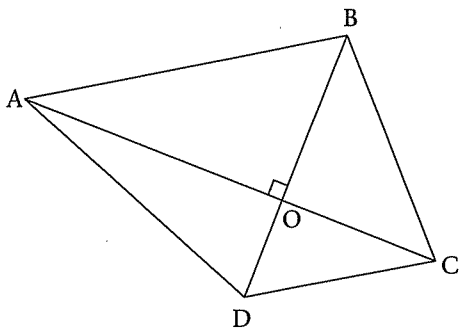
2. a. Quel est le coefficient de réduction qui permet de passer du cône C_1 au cône C_2 ?
b. En déduire l'aire de la base du cône C_2, puis le volume de la partie cylindrique de la bobine.

3. Déduire des questions précédentes le volume de la bobine. (En donner une valeur arrondie au cm^3 près.)

Problème *(12 points)*

Partie A

ABCD est un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en O.



On a :
AC = 20,4 cm
AO = 12 cm
OB = 5 cm
OD = 3,5 cm

1. Faire une figure en vraie grandeur.

2. a. Démontrer que les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

b. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{OAB}$ arrondie au dixième de degré.
En déduire la mesure de l'angle $\widehat{OCD}$.

3. a. Calculer l'aire du triangle AOB.
b. Calculer la longueur AB.
c. Tracer la perpendiculaire à (AB) passant par O.
Elle coupe [AB] en P et [DC] en N.
Des questions 3. a. et 3. b., déduire la valeur exacte de la longueur OP.

4. En utilisant la même démarche que dans la question 3., on trouve :
AD = 12,5 cm ; DC = 9,1 cm ; BC ≈ 9,8 cm (valeur arrondie au mm) ; ON = $\frac{42}{13}$ cm.
a. Calculer la valeur arrondie au millimètre du périmètre du quadrilatère ABCD.
b. Montrer que l'aire du quadrilatère ABCD est 86,7 cm².

Partie B

On fabrique des boîtes cartonnées qui ont la forme d'un prisme droit dont chacune des deux bases est le quadrilatère ABCD étudié dans la partie A.

1. Faire un schéma à main levée qui représente une telle boîte en perspective cavalière et repérer par des couleurs les arêtes parallèles.

2. La hauteur de la boîte est 13 cm. Calculer l'aire totale du carton utilisé pour fabriquer la boîte.

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. Soit $a = 1\,356$ et $b = 4\,972$.
Calcul du PGCD (1 356 ; 4 972) par la méthode des divisions successives (algorithme d'Euclide).

Consignons les résultats des divisions successives dans le tableau suivant :

		3	1	2	Quotients
Dividendes	4 972	1 356	904	**452**	Diviseurs
Restes	904	**452**	0		

Conclusion : Le PGCD correspond au dernier reste non nul. Le PGCD (4 972 ; 1 356) = 452.

2. Le PGCD (4 972 ; 1 356) $\neq 1$, donc les nombres 4 972 et 1 356 ne sont pas premiers entre eux.

La fraction $\frac{1\,356}{4\,972}$ n'est donc pas irréductible.

Pour obtenir la fraction sous sa forme irréductible, il faut et il suffit de simplifier le numérateur et le dénominateur de la fraction par leur PGCD, donc par 452.

On a ainsi : $\frac{1\,356}{4\,972} = \frac{452 \times 3}{452 \times 11} = \frac{3}{11}$.

Exercice 2

Écrivons A et B sous forme de fractions irréductibles.

$A = \dfrac{1 - \frac{5}{6}}{1 + \frac{1}{6}} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{6}}$. Donc $A = \frac{1}{6} \times \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$.

$B = \dfrac{4 \times 10^{-12} \times 2{,}5}{7 \times 10^{-11}} = \dfrac{4 \times 2{,}5}{7} \times \dfrac{10^{-12}}{10^{-11}}$.

Donc $B = \frac{10}{7} \times 10^{-1} = \frac{1}{7}$.

Conclusion : $A = B = \frac{1}{7}$.

Exercice 3

1. Soit l'expression $E = (5x + 1)^2 - (x - 3)(5x + 1)$.
Développons E à l'aide des identités remarquables.
$E = 25x^2 + 10x + 1 - (5x^2 + x - 15x - 3)$
donc $E = 25x^2 + 10x + 1 - 5x^2 + 14x + 3$
donc $E = 20x^2 + 24x + 4$.

2. Factorisons l'expression E en utilisant un facteur commun.
$E = (5x + 1)^2 - (x - 3)(5x + 1)$
donc $E = (5x + 1)[(5x + 1) - (x - 3)]$
donc $E = (5x + 1)(5x + 1 - x + 3)$
donc $E = (5x + 1)(4x + 4)$
donc $E = 4(5x + 1)(x + 1)$.

3. Soit l'équation $(5x + 1)(x + 1) = 0$.
Il s'agit d'une équation-produit. Ce produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul.
Soit $5x + 1 = 0$ ou $x + 1 = 0$.

Soit $x = -\frac{1}{5}$ ou $x = -1$.

L'équation proposée admet deux solutions : $-\frac{1}{5}$ et -1.

Exercice 4

1. La valeur moyenne $\overline{U}$ du nombre d'universités par académie est une moyenne pondérée.
On a :

$$\overline{U} = \frac{5\times1+9\times2+1\times3+5\times4+6\times5+1\times6+1\times8}{30} = \frac{90}{30} = 3.$$

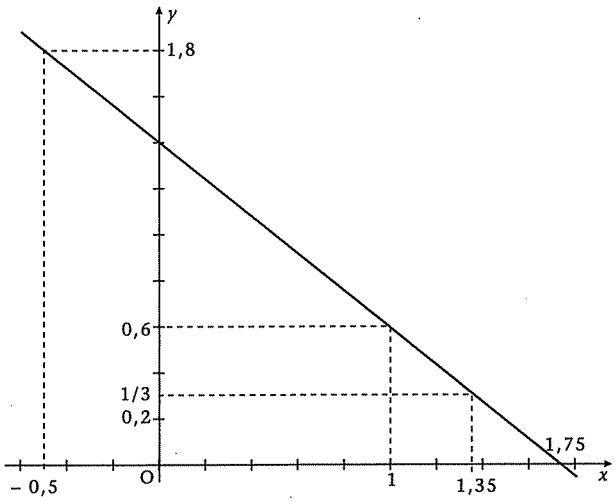
Il y a, en moyenne, 3 universités par académie.

2. Le tableau ci-contre dans lequel figurent les effectifs cumulés croissants va nous permettre de déterminer la médiane de la série.

Nombre d'universités par académie	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectifs	2	5	9	1	5	6	1	0	1
Effectifs cumulés croissants	2	7	16	17	22	28	29	29	30

La médiane de cette série statistique est la valeur qui partage l'effectif total en deux classes de même effectif : il s'agit de deux universités par académie.

Exercice 5



Lecture sur le graphique ci-contre :

1. L'image de 1 par g est 0,6.

2. L'image de (– 0,5) par g est 1,8.

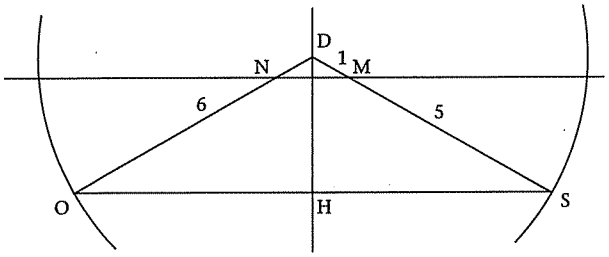
3. 1,75 a pour image 0 par g.

4. 1,35 a pour image 1/3 par g.

Activités géométriques

Exercice 1

1. Construction



Le triangle DOS a deux côtés de même longueur :
il s'agit donc d'un triangle isocèle en D.

2. a. [DH] est la hauteur du triangle DOS issue de D, donc le triangle DOH est rectangle en H. On peut donc y appliquer les formules de trigonométrie.
De plus, le triangle DOS étant isocèle en D, ses angles $\widehat{DOS}$ et $\widehat{DSO}$ ont la même mesure.
On a, par conséquent : $\widehat{DOS} = \widehat{DSO} = 30°$.

Ainsi : $\cos(\widehat{DOS}) = \dfrac{OH}{OD}$ donc $OH = OD \times \cos(\widehat{DOS})$.

Conclusion : $OH = 6 \times \cos(30°) = 3\sqrt{3}$.

b. La hauteur [DH] du triangle isocèle DOS est également la médiane du triangle, donc H est le milieu du segment [OS].
Conclusion : $OS = 2 \times OH = 6\sqrt{3}$.

3. $M \in [DS]$ donc $DS = DM + MS$.
Avec $SM = 5$, on a alors $DM = 1$.
Dans le triangle DOS, on a :
– $M \in [DS]$;
– $N \in [DO]$;
– les droites (MN) et (OS) sont parallèles.
Dans ces conditions, le théorème de Thalès nous permet d'écrire l'égalité des rapports :
$\dfrac{DN}{DO} = \dfrac{DM}{DS} = \dfrac{MN}{OS}$.

En particulier : $\dfrac{DM}{DS} = \dfrac{MN}{OS}$ d'où : $MN = \dfrac{DM \times OS}{DS}$.

Conclusion : $MN = \dfrac{1 \times 6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$.

Exercice 2

1. Le volume V_1 du cône C_1 vaut : $\dfrac{1}{3} \times 9 \times 3 = 9$ cm^3.

2. a. Soit C_1 et C_2 les cônes dont h_1 et h_2, V_1 et V_2, C_1 et C_2 sont respectivement les hauteurs, les volumes et les aires des bases de ces cônes.
Le coefficient de réduction vaut : $\dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{2}{3}$.

b. Ce coefficient nous permet d'écrire l'égalité :
$C_2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \times C_1$.

Conclusion : $C_2 = 4$ cm^2 donc $V_2 = \dfrac{8}{3}$ cm^3.

Volume du cylindre = C_2 × hauteur du cylindre
Volume du cylindre = $4 \times 3 = 12$ cm^3.

3. Soit V le volume de la **figure A** : $V = V_1 - V_2 = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$ cm³.

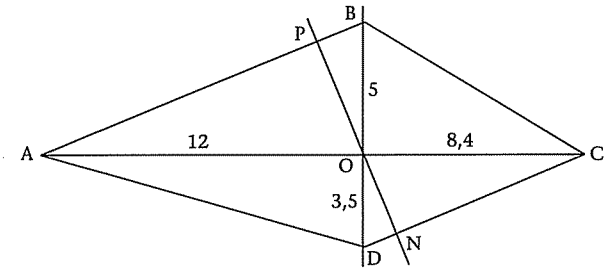
Soit V′ le volume de la **figure B** : V′ = 2V + Volume d'un cylindre.

Conclusion : Le volume de la bobine vaut $\frac{38}{3} + 12 = \frac{74}{3} \approx 25$ cm³.

Problème

Partie A

1. Figure



2. a. Dans le triangle AOB, on a :
– D ∈ (OB) ;
– C ∈ (OA) ;
– les points A, O, C et B, O, D sont alignés dans le même ordre.

De plus, on a : $\frac{OA}{OC} = \frac{12}{8,4} = \frac{10}{7}$ et $\frac{OB}{OD} = \frac{5}{3,5} = \frac{10}{7}$.

Donc : $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{10}{7}$.

Dans ces conditions, la réciproque du théorème de Thalès s'applique et nous permet de conclure que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

b. Dans le triangle AOB rectangle en O, on peut appliquer les formules de trigonométrie.

En particulier, on a : $\tan \widehat{OAB} = \frac{OB}{OA} = \frac{5}{12}$.

Donc : $\widehat{OAB} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) \approx 22,6°$.

De plus, les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OCD}$ sont deux angles alternes internes compris entre deux droites (AB) et (CD) parallèles, donc ils ont la même mesure.

Conclusion : $\widehat{OCD} = \widehat{OAB} \approx 22,6°$.

3. a. AOB est un triangle rectangle en O, donc son aire vaut : $\frac{OA \times OB}{2} = \frac{12 \times 5}{2} = 30$ cm².

b. AOB est un triangle rectangle en O, donc on peut appliquer le théorème de Pythagore : $AB^2 = OA^2 + OB^2$.
Donc $AB^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$.
Conclusion : AB = 13 cm.

c. Voir la construction.
[OP] est la hauteur du triangle AOB issue de O.
On peut donc exprimer l'aire du triangle AOB de deux façons différentes :
– aire du triangle = 30 cm² ;
– aire du triangle = $\frac{AB \times OP}{2} = \frac{13}{2}$ OP.
Conclusion : OP = $\frac{30 \times 2}{13}$ donc OP = $\frac{60}{13}$ cm.

4. a. Le périmètre du quadrilatère ABCD vaut : AB + BC + CD + DA.
AB + BC + CD + DA ≈ 13 + 9,8 + 9,1 + 12,5 ≈ 44,4 cm.

b. L'aire du quadrilatère ABCD est la somme des aires des triangles AOB, BOC, COD et DOA, tous rectangles en O.

Aire du triangle BOC = $\frac{BO \times OC}{2} = \frac{5 \times 8,4}{2} = 21$ cm².

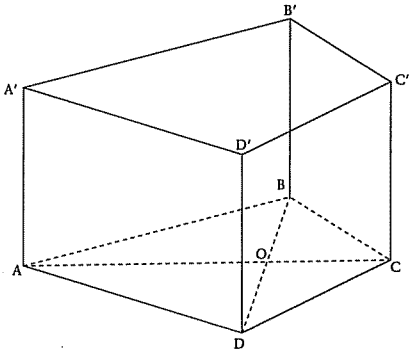
Aire du triangle COD = $\frac{CO \times OD}{2} = \frac{8,4 \times 3,5}{2} = 14,7$ cm².

Aire du triangle DOA = $\frac{DO \times OA}{2} = \frac{3,5 \times 12}{2} = 21$ cm².

Aire du triangle AOB = 30 cm².
Conclusion : Aire du quadrilatère ABCD = 86,7 cm².

Partie B

1.



2. L'aire totale du carton utilisé pour fabriquer la boîte est la somme des aires des 4 faces latérales (qui sont rectangulaires) et des deux bases.

Aire d'une base = 86,7 cm².
Aire des faces latérales = périmètre du quadrilatère ABCD × hauteur du prisme.
Aire des faces latérales ≈ 44,4 × 13 ≈ 577,2 cm².
Conclusion : Aire totale du carton utilisé vaut : 750,6 cm² (résultat arrondi).

SUJET 12 SUJET

◇ POLYNÉSIE FRANÇAISE ◇ JUIN 2003

Activités numériques *(12 points)*

Exercice 1

Toutes les questions sont indépendantes.

1. Calculer A ; donner le résultat de A sous une forme simplifiée :

$A = 3 - \frac{15}{9} \times \frac{12}{5}$.

2. Écrire B sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible :

$B = 2\sqrt{45} - 5\sqrt{20} - \sqrt{80}$.

3. Calculer C et donner son écriture scientifique et son écriture décimale :

$C = \frac{14 \times 10^2 \times 75 \times 10^{-7}}{35 \times 10^{-3}}$

Exercice 2

Soit l'expression $D = (2x - 3)(3x - 1) + (2x - 3)^2$

1. Développer et réduire D.

2. Factoriser D.

3. Calculer D pour $x = \sqrt{2}$, écrire la réponse sous la forme $a - b\sqrt{c}$ (a, b et c entiers).

4. Résoudre l'équation $(2x - 3)(5x - 4) = 0$.

Exercice 3

Soit la fraction $E = \frac{108}{288}$

1. Pourquoi la fraction E n'est-elle pas irréductible ? (Justifier sans faire de calcul.)

2. Calculer le pgcd de 108 et 288.

3. Écrire la fraction E sous forme irréductible.

SUJET

Activités géométriques *(12 points)*

Exercice 1

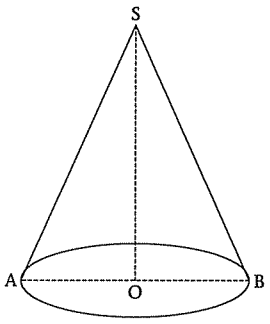
1. Construire le triangle ABC tel que AB = 7,5 cm, BC = 10 cm et AC = 12,5 cm.

2. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

3. a. M est un point du segment [BC] tel que BM = 4 cm. Placer le point M et construire la droite (*d*) parallèle à la droite (AC) passant par M. La droite (*d*) coupe [AB] au point N.
b. Calculer BN et MN.

Exercice 2

Soit SAB un cône de révolution, S est le sommet du cône.



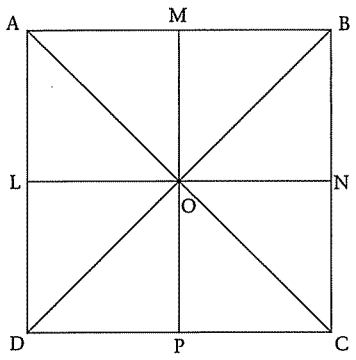
Sa base est un disque de diamètre [AB] et de centre O.
Sa hauteur est [SO].
On donne AB = 4 cm et SO = 4,5 cm.

1. Calculer le volume du cône et donner une valeur arrondie au cm^3 près.

2. Calculer l'angle $\widehat{ASO}$ et donner une valeur arrondie au degré près.

Exercice 3

Le schéma ci-après représente une carré ABCD dont les diagonales se coupent en O. Les points M, N, P et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [AD].
Répondre aux questions suivantes sans justifier.



1. Quel est le symétrique du triangle AOM par rapport à la droite (LN) ?

2. Quel est le symétrique du triangle AOM par rapport au point O ?

3. On considère la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre. Quelle est l'image du triangle AOM par cette rotation ?

4. Compléter les égalités vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC} = \ldots$ $\quad$ $AM + \overrightarrow{OC} = \ldots$

Problème *(12 points)*

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), l'unité choisie est le centimètre.

1. Placer les points M (1 ; 3), N (– 1 ; 5) et P (– 3 ; 1).

2. Montrer que $MN = 2\sqrt{2}$ et $NP = MP = 2\sqrt{5}$.

3. En déduire la nature du triangle MNP.

4. Soit A le milieu de [MN]. Montrer, sans calcul, que le triangle APN est rectangle.

5. Calculer les coordonnées de A.

6. Construire le point R tel que $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{PN}$.

7. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{PN}$.

8. Déduire des questions 6 et 7 les coordonnées du point R.

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = 3 - \frac{15}{9} \times \frac{12}{5} = 3 - \frac{15 \times 12}{9 \times 5} = 3 - \frac{3 \times 5 \times 3 \times 4}{3 \times 3 \times 5}$

$A = 3 - 4$ donc $A = -1$.

2. $B = 2\sqrt{45} - 5\sqrt{20} - \sqrt{80} = 2\sqrt{9 \times 5} - 5\sqrt{4 \times 5} - \sqrt{16 \times 5}$

$B = 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{5} - 5 \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} - \sqrt{16} \times \sqrt{5}$

$B = 2 \times 3 \times \sqrt{5} - 5 \times 2 \times \sqrt{5} - 4\sqrt{5}$

$B = 6\sqrt{5} - 10\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$ donc $B = -8\sqrt{5}$.

On a utilisé la formule : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

3. $C = \frac{14 \times 10^2 \times 75 \times 10^{-7}}{35 \times 10^{-3}} = \frac{14 \times 75 \times 10^2 \times 10^{-7}}{35 \times 10^{-3}}$

$C = \frac{2 \times 7 \times 5 \times 15 \times 10^{-5}}{5 \times 7 \times 10^{-3}} = 2 \times 15 \times 10^{-5+3} = 30 \times 10^{-2}$

On a donc : $C = 3 \times 10^{-1}$ (écriture scientifique)
soit $C = 0{,}3$ (écriture décimale).

On rappelle les formules :
$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$ et $\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$.

Exercice 2

1. Forme réduite de D

$D = (2x - 3)(3x - 1) + (2x - 3)^2$

$D = 6x^2 - 2x - 9x + 3 + (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2$

$D = 6x^2 - 11x + 3 + 4x^2 - 12x + 9$

$D = 10x^2 - 23x + 12$.

On a utilisé l'identité $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
avec $a = 2x$ et $b = 3$.

2. Forme factorisée de D

$D = (2x - 3)(3x - 1) + (2x - 3)^2 = (2x - 3)\,[(3x - 1) + (2x - 3)]$

D = (2x – 3) (5x – 4).
On contrôle qu'en développant ce produit de facteurs on retrouve la forme réduite de D.

3. Lorsque $x = \sqrt{2}$, calculons D en utilisant sa forme réduite (mieux adaptée pour ce calcul) :
$D = 10 \times (\sqrt{2})^2 - 23\sqrt{2} + 12 = 10 \times 2 - 23\sqrt{2} + 12$
donc **$D = 32 - 23\sqrt{2}$ pour $x = \sqrt{2}$.**

4. Résolution de l'équation D = 0
D = 0 si et seulement si $2x - 3 = 0$ ou $5x - 4 = 0$
D = 0 si et seulement si $2x = 3$ ou $5x = 4$
D = 0 si et seulement si $x = \frac{3}{2}$ ou $x = \frac{4}{5}$.

Les solutions de l'équation D = 0 sont les nombres $\frac{3}{2}$ et $\frac{4}{5}$.

Exercice 3

1. Les entiers 108 et 288 sont pairs, donc divisibles par 2. On en déduit que 108 et 208 ne sont pas premiers entre eux.

La fraction $E = \frac{108}{288}$ n'est donc pas irréductible.

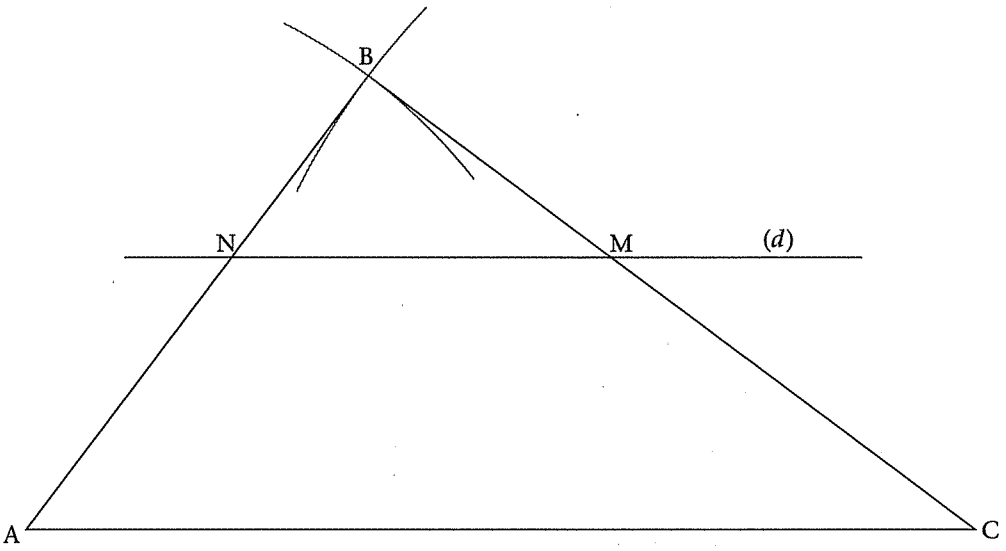
2. Calculons le pgcd de 108 et 288 en appliquant l'algorithme d'Euclide :
$288 = 108 \times 2 + 72$; $108 = 72 \times 1 + 36$; $72 = 36 \times 2 + 0$.
Le dernier reste non nul obtenu par l'algorithme est 36.
Donc **pgcd (108 ; 288) = 36.**

3. On a donc : $E = \frac{108}{288} = \frac{36 \times 3}{36 \times 8}$
d'où, sous forme irréductible : $E = \frac{3}{8}$.

Activités géométriques

Exercice 1

1.



2. On a : $AB^2 + BC^2 = 7{,}5^2 + 10^2 = 56{,}25 + 100 = 156{,}25$
et $AC^2 = 12{,}5^2 = 156{,}25$
donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut alors conclure que **le triangle ABC est rectangle en B.**

3. a. Voir figure ci-dessus.

3. b. Calcul de BN et MN
Les droites (AN) et (CM) se coupent en B et les droites (AC) et (NM) sont parallèles.
En appliquant le théorème de Thalès, on obtient alors :

$$\frac{BN}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{MN}{AC} \text{ d'où } \frac{BN}{7{,}5} = \frac{4}{10} = \frac{MN}{12{,}5}.$$

On a donc : $BN = 7{,}5 \times \frac{4}{10}$ et $MN = 12{,}5 \times \frac{4}{10}$

soit **BN = 3 cm et MN = 5 cm.**
On peut contrôler ces résultats sur la figure.

Exercice 2

1. Calcul du volume V du cône (en cm³)

$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$ où $\mathcal{A}$ est l'aire du disque de base du cône et h est sa hauteur.

Le disque de base a pour diamètre AB = 4 cm, donc pour rayon $\frac{AB}{2} = 2$ cm.

On en déduit que : $\mathcal{A} = \pi \times 2^2$ soit $\mathcal{A} = 4\pi$ cm².

De plus, [SO] est la hauteur du cône, donc $h = SO = 4{,}5$ cm.

On a donc : $V = \frac{1}{3} \times 4\pi \times 4{,}5$

soit $\mathbf{V = 6\pi\ cm^3 \approx 19\ cm^3}$ au cm³ près.

2. Calcul de l'angle $\widehat{ASO}$

L'angle $\widehat{AOS}$ est droit puisque [SO] est la hauteur du cône et que [AB] est un diamètre de son disque de base, de centre O.

Dans le triangle AOS rectangle en O, on a alors :

$\tan \widehat{ASO} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AO}{SO} = \frac{2}{4{,}5}$

($AO = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$ cm puisque O est le milieu de [AB]).

À l'aide d'une calculatrice, on obtient : $\mathbf{\widehat{ASO} \approx 24°}$.

Exercice 3

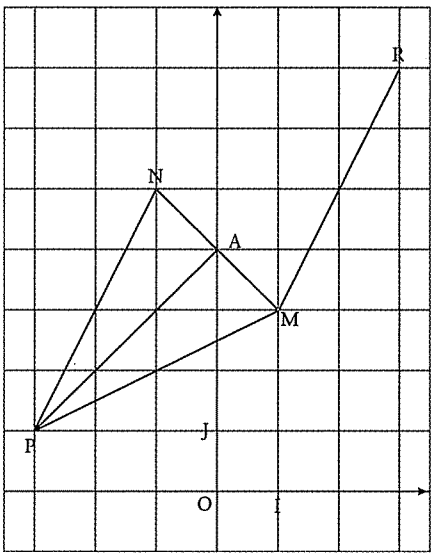
1. Le symétrique du triangle AOM par rapport à la droite (LN) est **le triangle DOP**.

2. Le symétrique du triangle AOM par rapport au point O est **le triangle COP**.

3. L'image du triangle AOM par la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre est **le triangle BON**.

4. $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}$.

Problème



2. Calcul de MN, NP et MP

Le repère (O, I, J) étant orthonormé, on a :

$MN^2 = (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 = (-1-1)^2 + (5-3)^2$

$MN^2 = (-2)^2 + 2^2 = 4 + 4 = 4 \times 2$

donc $MN = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2}$ soit $\mathbf{MN = 2\sqrt{2}}$

$NP^2 = (x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2 = (-3-(-1))^2 + (1-5)^2$

$NP^2 = (-2)^2 + (-4)^2 = 4 + 16 = 20 = 4 \times 5$

donc $NP = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5}$ soit $\mathbf{NP = 2\sqrt{5}}$.

$MP^2 = (x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 = (-3-1)^2 + (1-3)^2$

$MP^2 = (-4)^2 + (-2)^2 = 16 + 4 = 20 = 4 \times 5$

donc $MP = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5}$ soit $\mathbf{MP = 2\sqrt{5}}$.

On a donc bien : $\mathbf{NP = MP = 2\sqrt{5}}$.

3. De l'égalité NP = MP, on peut déduire que **le triangle MNP est isocèle en P.**

4. Le triangle MNP étant isocèle en P, sa médiane issue de P, en l'occurrence la droite (AP) puisque A est le milieu de [MN], est aussi sa hauteur issue de P. On en déduit donc que les droites (AP) et (MN) sont perpendiculaires. Les droites (AN) et (MN) étant confondues (A est le milieu de [MN]), il en est donc de même des droites (AP) et (AN).

Il en résulte que **le triangle APN est rectangle en A.**

5. A étant le milieu de [MN], on a :

$x_A = \dfrac{x_M + x_N}{2} = \dfrac{1-1}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$ et $y_A = \dfrac{y_M + y_N}{2} = \dfrac{3+5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$.

On a donc : **A(0 ; 4).**

On peut contrôler ce résultat sur la figure, ainsi que les suivants.

7. Le vecteur $\overrightarrow{PN}$ a pour coordonnées $(x_N - x_P ; y_N - y_P)$.

$x_N - x_P = -1 - (-3) = 2$ et $y_N - y_P = 5 - 1 = 4$.

On a donc : $\mathbf{\overrightarrow{PN}\ (2 ; 4)}$.

8. Les vecteurs $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{PN}$ étant égaux, ils ont les mêmes coordonnées. $\overrightarrow{MR}$ a pour coordonnées $(x_R - x_M ; y_R - y_M)$ et on a $\overrightarrow{PN}\ (2 ; 4)$.

On a donc : $x_R - x_M = 2$ et $y_R - y_M = 4$

d'où $x_R = x_M + 2 = 1 + 2 = 3$ et $y_R = y_M + 4 = 3 + 4 = 7$.

Ainsi, on a : **R (3 ; 7).**

CORRIGÉ

BREVET
MATHÉMATIQUES
SESSION 2004

Activités numériques *(12 points)*

Exercice 1

Les calculs devront être détaillés.

1. Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :
$A = \frac{2}{3} - \frac{7}{3} \times \frac{8}{21}$.

2. Écrire B sous la forme $a\sqrt{2}$, où a est un nombre entier : $B = \sqrt{50} - 2\sqrt{18}$.

Exercice 2

On donne l'expression $A = (2x + 3)^2 + (2x + 3)(5x - 7)$.

1. Développer et réduire l'expression A.

2. Factoriser l'expression A.

3. Résoudre l'équation : $(2x + 3)(7x - 4) = 0$.

Exercice 3

1. Résoudre le système : $\begin{cases} x + 2y = 76 \\ 4x + y = 115. \end{cases}$

2. Le responsable du CDI d'un collège voudrait renouveler le stock d'atlas et de dictionnaires. Au 1er trimestre, il commande 1 atlas et 2 dictionnaires. La facture est de 76 euros.
Au 2e trimestre, les prix n'ont pas changé, il commande 4 atlas et 1 dictionnaire. La facture est de 115 euros.
Quel est le prix d'un atlas ? Quel est le prix d'un dictionnaire ?

Exercice 4

Après un contrôle, les notes de 25 élèves ont été regroupées dans le tableau ci-après :

Notes n	$0 \leqslant n < 4$	$4 \leqslant n < 8$	$8 \leqslant n < 12$	$12 \leqslant n < 16$	$16 \leqslant n \leqslant 20$
Nombre d'élèves	1	6	7		3

1. Compléter le tableau ci-dessus en indiquant le nombre d'élèves ayant obtenu une note comprise entre 12 et 16 (16 exclu).

2. Combien d'élèves ont obtenu moins de 12 ?

3. Combien d'élèves ont obtenu au moins 8 ?

4. Quel est le pourcentage des élèves qui ont obtenu une note comprise entre 8 et 12 (12 exclu) ?

Activités géométriques *(12 points)*

Exercice 1

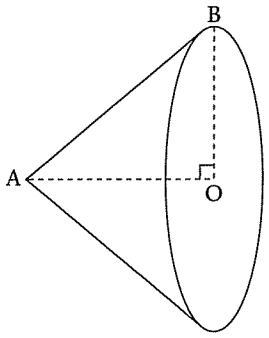
1. Tracer un segment [EF] de longueur 7 cm et de milieu O.
Tracer le cercle de diamètre [EF] puis placer un point G sur le cercle tel que : $\widehat{FEG} = 26°$.

2. Démontrer que le triangle EFG est un triangle rectangle en G.

3. Calculer une valeur approchée de la longueur FG, arrondie au millimètre.

4. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{GOF}$ (justifier votre réponse).

Exercice 2



On considère un cône de révolution semblable à celui qui est représenté ci-contre avec :

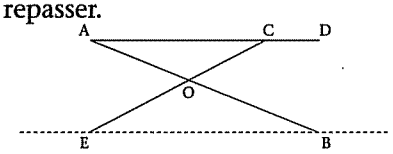
AO = 2 cm et BO = 3 cm.

1. Calculer la longueur de la génératrice [AB] : donner en cm la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.

2. Calculer le volume du cône : donner en cm^3 la valeur exacte puis la valeur arrondie à l'unité.

Exercice 3

La figure ci-dessous donne le schéma d'une table à repasser.
Le segment [AD] représente la planche.
Les segment [AB] et [EC] représentent les pieds.
Les droites (AB) et (EC) se coupent en O.



On donne : AD = 125 cm, AC = 100 cm, OA = 60 cm, OB = 72 cm, OE =60 cm, OC =50 cm.

1. Montrer que la droite (AC) est parallèle à la droite (EB).

2. Calculer l'écartement EB en cm.

Problème *(12 points)*

Dans un repère orthonormal (O, I, J), on considère les points A (– 4 ; 3), B (3 ; 2) et C (1 ; – 2).
L'unité graphique est le centimètre.

Partie A

1. Placer les points A, B, C dans le repère (O, I, J).

2. a. Calculer AB.
b. On admet que le calcul donne AC = $\sqrt{50}$ et BC = $\sqrt{20}$. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

3. Soit H le milieu du segment [BC]. Vérifier par le calcul que H a pour coordonnées (2 ; 0).

4. Pourquoi le segment [AH] est-il une hauteur du triangle ABC ?

5. a. Prouver que AH = $3\sqrt{5}$.

b. Calculer l'aire du triangle ABC.

Partie B

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

2. Le point D est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

a. Placer le point D.

b. Montrer par le calcul que D a pour coordonnées (8 ; – 3).

3. Quelle est la nature du quadrilatère ACDB ? Justifier.

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = \frac{2}{3} - \frac{7}{3} \times \frac{8}{21}$

donc $A = \frac{2}{3} - \frac{7 \times 8}{3 \times 3 \times 7} = \frac{2}{3} - \frac{8}{9}$

donc $A = \frac{6}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{2}{9}$.

2. $B = \sqrt{50} - 2\sqrt{18}$

donc $B = \sqrt{25 \times 2} - 2\sqrt{9 \times 2}$

donc $B = 5\sqrt{2} - 2 \times 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$

donc $B = -\sqrt{2}$.

Exercice 2

1. $A = (2x + 3)^2 + (2x + 3)(5x - 7)$

donc $A = 4x^2 + 12x + 9 + 10x^2 - 14x + 15x - 21$

donc $A = 14x^2 + 13x - 12$.

2. $A = (2x + 3)(2x + 3) + (2x + 3)(5x - 7)$

donc $A = (2x + 3)[(2x + 3) + (5x - 7)]$

donc $A = (2x + 3)(7x - 4)$.

3. $(2x + 3)(7x - 4) = 0$. Il s'agit d'une équation-produit. Ce produit est nul si et seulement si, l'un des facteurs, au moins, est nul.

Soit $2x + 3 = 0$ ou $7x - 4 = 0$

Soit $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = \frac{4}{7}$.

Conclusion : les solutions de l'équation sont : $-\frac{3}{2}$ et $\frac{4}{7}$.

Exercice 3

1. Soit (S) le système de deux équations à deux inconnues du premier degré, que nous allons résoudre en utilisant la méthode par substitution.

(S) $\begin{cases} x + 2y = 76 \\ 4x + y = 115. \end{cases}$

Vérifions que le système (S) admet un couple solution.

On a : $1 \times 1 - 2 \times 4 = 1 - 8 = -7$ et puisque $-7 \neq 0$, le système admet bien un unique couple comme solution.

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 76 - 2y \\ 4x + y = 115 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 76 - 2y \\ 4(76 - 2y) + y = 115 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 76 - 2y \\ 304 - 8y + y = 115 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 76 - 2y \\ -7y = 115 - 304 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 76 - 2y \\ y = \dfrac{189}{7} = 27 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 76 - 2 \times 27 = 22 \\ y = 27. \end{cases}$

Conclusion : Le système admet l'unique couple (22 ; 27) comme solution.

2. Appelons x le pris d'un Atlas et y le prix d'un dictionnaire. Les données contenues dans l'énoncé nous conduisent à résoudre le système suivant :

$\begin{cases} x + 2y = 76 \\ 4x + y = 115. \end{cases}$

Or il s'agit, précisément, du système (S) résolu à la question précédente.

Conclusion : un Atlas coûte 22 euros alors qu'un dictionnaire coûtera 27 euros.

Exercice 4

1. Complétons le tableau suivant :

Notes n	$0 \leqslant n < 4$	$4 \leqslant n < 8$	$8 \leqslant n < 12$	$12 \leqslant n < 16$	$16 \leqslant n \leqslant 20$
Nombre d'élèves	1	6	7	25 – 17 = 8	3
Effectifs cumulés croissants	1	7	14	22	25

2. À l'aide de la troisième ligne, nous pouvons affirmer que 14 élèves ont obtenu une note inférieure à 12.

3. $7 + 8 + 3 = 18$ élèves ont obtenu une note supérieure à 8.

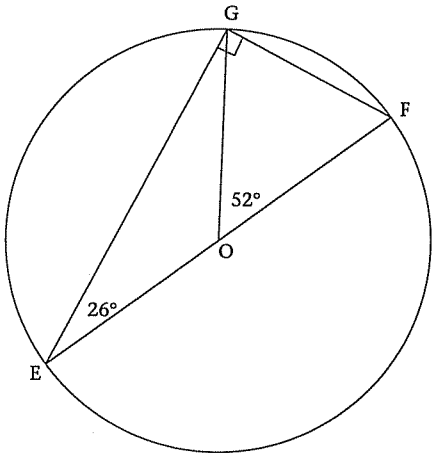
4. 7 élèves ont obtenu une note comprise entre 8 et 12.

Cela représente en pourcentage : $\dfrac{7}{25} = 28$ % de l'en-semble des élèves.

Activités géométriques

Exercice 1

1. Construction ci-dessous.



2. Le triangle EFG est inscrit dans le cercle de diamètre [EF]. Or pour tout triangle inscrit dans un cercle ayant son hypoténuse comme diamètre est rectangle.
Donc le triangle EFG est rectangle en G.

3. Le triangle EFG est rectangle en G, on peut y appliquer les formules de trigonométrie. En particulier :
$\sin \widehat{FEG} = \frac{FG}{EF}$ donc $FG = EF \times \sin \widehat{FEG}$.

Application numérique : $FG = 7 \times \sin(26°) \approx 3{,}1$ cm.

4. L'angle $\widehat{FEG}$ est un angle inscrit dans le cercle de diamètre [EF].
L'angle $\widehat{GOF}$ est un angle au centre dans le cercle de diamètre [EF].
Ces deux angles interceptent le même arc $\widehat{FG}$.
Dans ces conditions, le théorème de l'angle inscrit nous permet d'établir l'égalité suivante : mes $(\widehat{GOF}) = 2 \times$ mes $(\widehat{FEG})$.

Application numérique : mes $(\widehat{GOF}) = 52°$.

Exercice 2

1. Le triangle ABO est rectangle en O, on peut donc appliquer le théorème de Pythagore :
Donc $AB^2 = AO^2 + OB^2$
donc $AB^2 = 4 + 9 = 13$
donc $AB = \sqrt{13}$ cm $\approx 3{,}6$ cm.

2. Le volume V du cône est : $V = \frac{1}{3} \times$ Aire de la base $\times$ Hauteur

donc $V = \frac{1}{3} \times \pi \times OB \times OA$

donc $V = \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 2 = 6\pi$

donc $V = 19$ cm^3.

CORRIGÉ

Exercice 3

1. Calculons les rapports : $\frac{AO}{OB}$ et $\frac{OC}{OE}$.

On a : $\frac{AO}{OB} = \frac{60}{72} = \frac{5}{6}$ et $\frac{OC}{OE} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$

Donc $= \frac{OC}{OE}$.

Dans le triangle OAC, on a :

– E ∈ (OC) ;

– B ∈ (AO) ;

– les points A, O, B et C, O, E sont alignés dans le même ordre ;

de plus, $\frac{AO}{OB} = \frac{OC}{OE}$.

Dans ces conditions, la réciproque du théorème de Thalès nous permet d'affirmer que les droites (AC) et (EB) sont parallèles.

2. Dans le triangle OAC, on a

– E ∈ (OC) ;

– B ∈ (AO) ;

– les droites (AC) et (EB) son parallèles.

Dans ces conditions, le théorème de Thalès nous permet d'écrire l'égalité des rapports : $\frac{AO}{OB} = \frac{OC}{OE} = \frac{AC}{BE}$.

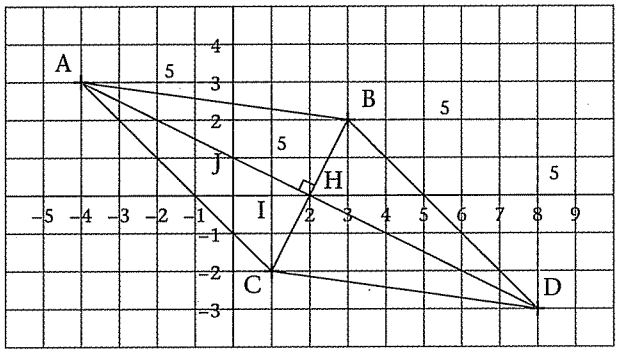
En particulier : $\frac{AC}{BE} = \frac{AO}{OB}$ donc $BE = \frac{AC \times OB}{AO}$.

Application numérique : $BE = \frac{100 \times 72}{60} = 120$ cm.

Problème

Partie A

1. Voir graphique.



2. a. Le repère est orthonormé donc on peut déterminer la longueur du segment [AB] à l'aide de la formule :
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
Donc $AB = \sqrt{(3 - (-4))^2 + (2 - 3)^2}$
donc $AB = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$ unités.
Conclusion : l'unité étant le cm, $AB = \sqrt{50}$ cm.
b. On donne $AC = \sqrt{50}$ et $BC = \sqrt{20}$.
D'après ce qui précède, on a l'égalité : AB = AC.
Conclusion : le triangle ABC est isocèle de sommet principal A.

3. On peut exprimer les coordonnées $(x_H ; y_H)$ du milieu H du segment [BC] à l'aide de la formule :

$$x_H = \frac{x_B + x_C}{2} \quad \text{donc} \quad x_H = \frac{3 + 1}{2} = 2$$
$$y_H = \frac{y_B + y_C}{2} \quad \text{donc} \quad y_H = \frac{2 - 2}{2} = 0$$

Conclusion : les coordonnées du point H sont (2 ; 0)

4. Le triangle ABC est isocèle en A et H est le milieu du segment [BC].
Or, la médiane issue du sommet principal d'un triangle isocèle est également la hauteur issue de ce sommet.
Donc, (AH) est la hauteur du triangle ABC issue de A.

5. a. Le repère est orthonormé donc on peut déterminer la longueur du segment [AH] à l'aide de la formule :
$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2}$.
Donc $AH = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (0 - 3)^2}$
donc $AH = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$.
Conclusion : $AH = 3\sqrt{5}$ cm.
b. L'aire du triangle ABC est :
$\frac{BC \times AH}{2} = \frac{\sqrt{20} \times 3\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}}{2} = 15$ cm².

Partie B

1. Relativement au repère (O, I, J), on peut déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ à l'aide de la formule $(x_C - x_A ; y_C - y_A)$.
Donc $\overrightarrow{AC}$ (1 – (– 4) ; – 2 – 3) ;
donc $\overrightarrow{AC}$ (5 ; – 5).

2. a. Voir graphique de la page 139.
b. Soit x_D et y_D les coordonnées du point D.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BD}$ sont $(x_D - 3 ; y_D - 2)$.

L'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ est le point D si et seulement si : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.
Or, deux vecteurs, relativement au même repère, sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales.
Donc les coordonnées du point D sont les solutions des équations : $x_D - 3 = 5$ et $y_D - 2 = -5$
Finalement : $x_D = 5 + 3 = 8$ et $y_D = -5 + 2 = -3$.
Conclusion : Les coordonnées du point D sont (8 ; – 3).

3. L'égalité vectorielle $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ signifie que le quadrilatère ACDB est un parallélogramme. De plus, le triangle ABC étant isocèle en A, les côtés consécutifs [AB] et [AC] ont la même longueur. Or un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.
Conclusion : ACDB est un losange.

SUJET 14 SUJET

GROUPEMENT 2 ◈ JUIN 2004

Activités numériques *(12 points)*

Exercice 1

Calculer les expressions suivantes :

$A = \dfrac{96 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^{-2}}{3 \times 10^{-1} \times 2 \times 10^{-6}}$;

$B = 11 \div \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{2}\right)$;

$C = (2\sqrt{3} - 3)(2\sqrt{3} + 3)$.

Exercice 2

On considère $D = (x - 2)^2 - 2(x - 2)$.

1. Factoriser D.

2. Résoudre l'équation $(x - 2)(x - 4) = 0$.

3. Développer et réduire D.

4. Calculer D pour $x = 1$.

Exercice 3

1. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ x + 2y = 8. \end{cases}$

2. Montrer que le couple (1 ; 3,5) est solution du système suivant : $\begin{cases} 10x + 4y = 24 \\ 3x + 6y = 24. \end{cases}$

3. Un artisan fabrique des perles noires et des perles dorées. Un sac contenant 10 perles noires et 4 perles dorées est vendu 24 euros. Un sac contenant 3 perles noires et 6 perles dorées est vendu également 24 euros.
Combien serait vendu un sac contenant 4 perles noires et 3 perles dorées ?

Activités géométriques *(12 points)*

Exercice 1

1. Construire le triangle EFG tel que EF = 12 cm, EG = 5 cm et FG = 13 cm.

2. Prouver que le triangle EFG est rectangle en E.

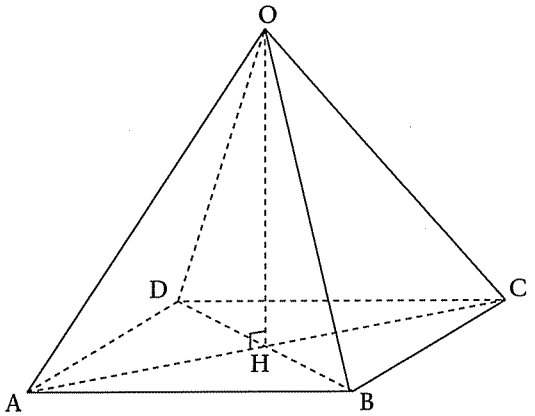
3. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{F}$. Le résultat sera arrondi au degré près.

4. Placer le point B sur le segment [EF] tel que EB = 7 cm. Tracer la droite passant par B et parallèle au côté [FG]. Elle coupe le côté [EG] en M.

5. Calculer la valeur exacte de BM, puis en donner l'arrondi au mm près.

Exercice 2

On considère la pyramide régulière OABCD. La base ABCD est un carré. H est le point d'intersection des diagonales [BD] et [AC]. On sait que la hauteur [OH] mesure 4 cm.



1. Sachant que le volume de la pyramide est égal à 24 cm^3, montrer que l'aire de la base est égale à 18 cm^2.

2. En déduire que le côté [AB] du carré ABCD mesure $3\sqrt{2}$ cm.

3. Calculer la longueur de la diagonale [AC] du carré ABCD.

4. Calculer l'aire du triangle AOC.

Exercice 3

On considère un repère orthonormé (O, I, J). L'unité choisie est le centimètre.

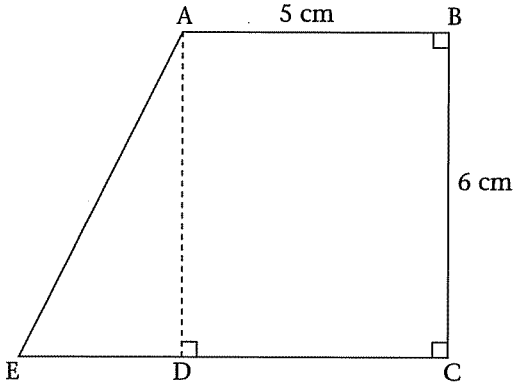
1. Placer les points A (2 ; 2), B (– 4 ; 5), C (– 4 ; – 2).

2. a. Montrer que AC est égale à $\sqrt{52}$ cm.
b. Calculer BC.
c. Le triangle ABC est-il isocèle en C ? Justifier.

3. a. Construire le milieu K du segment [AB].
b. La droite (CK) est-elle la médiatrice du segment [AB] ? Justifier.

Problème *(12 points)*

On considère un trapèze ABCE rectangle en B et C. On donne AB = 5 cm et BC = 6 cm. Le point D se trouve sur le segment [EC] de telle sorte que ABCD soit un rectangle.
La figure ci-dessous n'est pas réalisée en vraie grandeur.



Partie A

Dans cette partie, ED = 3 cm.

1. Faire une figure aux dimensions exactes.

2. Calculer l'aire du rectangle ABCD.

3. Calculer l'aire du triangle rectangle ADE.

4. Montrer que l'aire du trapèze ABCE est égale à 39 cm².

Partie B

Dans cette partie, on ne connaît pas la longueur ED. On note ED = x (en cm). On rappelle que AB = 5 cm et BC = 6 cm.

1. Montrer que l'aire du trapèze ABCE, en cm^2, peut s'écrire $3x + 30$.

2. Sur le repère (x, y), représenter la fonction affine $x \mapsto 3x + 30$.

3. Par lecture graphique, trouver la valeur de x pour laquelle l'aire du trapèze ABCE est égale à 36 cm^2. Faire apparaître les traits justificatifs en pointillés sur le graphique.

4. Retrouver ce résultat en résolvant une équation.

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

$A = \dfrac{96 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^{-2}}{3 \times 10^{-1} \times 2 \times 10^{-6}}$

donc $A = \dfrac{96 \times 5 \times 10^{-4} \times 10^{-2}}{3 \times 2 \times 10^{-1} \times 10^{-6}}$

donc $A = 80 \times \dfrac{10^{-4-2}}{3 \times 10^{-1-6}}$

donc $A = 80 \times 10^{-6-(-7)}$

donc $A = 80 \times 10$

donc $A = 800$.

$B = 11 \div \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{2}\right)$

donc $B = 11 \div \left(\dfrac{4}{6} - \dfrac{15}{6}\right)$

donc $B = 11 \div \dfrac{-11}{6}$

donc $B = -11 \times \dfrac{6}{11}$

donc $B = -6$.

$C = (2\sqrt{3} - 3)(2\sqrt{3} + 3)$

donc $C = (2\sqrt{3})^2 - 3^2$

donc $C = 12 - 9$

donc $C = 3$.

Exercice 2

1. $D = (x - 2)(x - 2) - 2(x - 2)$

donc $D = (x - 2)(x - 2 - 2)$

donc $D = (x - 2)(x - 4)$.

2. Soit $(x - 2)(x - 4) = 0$. Il s'agit d'une équation-produit. Ce produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul.

Soit $x - 2 = 0$ ou $x - 4 = 0$
Soit $x = 2$ ou $x = 4$.
Conclusion : Les solutions de l'équation sont 2 et 4.

3. $D = (x - 2)^2 - 2(x - 2)$
donc $D = x^2 - 4x + 4 - 2x + 4$
donc $D = x^2 - 6x + 8$.

4. Pour $x = 1$, on a $D = 1^2 - 6 \times 1 + 8$
donc $D = 3$.

Exercice 3

1. Soit (S) le système de deux équations à deux inconnues du premier degré ci -dessous.
(S) $\begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ que nous allons résoudre en utilisant la méthode par substitution.
Vérifions que le système (S) admet un couple solution. On a : $5 \times 2 - 2 \times 1 = 10 - 2 = 8$ et puisque $8 \neq 0$, le système admet bien un unique couple comme solution.
(S) est équivalent à $\begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ x = 8 - 2y \end{cases}$
(S) est équivalent à $\begin{cases} 5(8 - 2y) + 2y = 12 \\ x = 8 - 2y \end{cases}$
(S) est équivalent à $\begin{cases} 40 - 10y + 2y = 12 \\ x = 8 - 2y \end{cases}$
(S) est équivalent à $\begin{cases} -8y = 12 - 40 \\ x = 8 - 2y \end{cases}$
(S) est équivalent à $\begin{cases} -8y = -28 \\ x = 8 - 2y \end{cases}$
(S) est équivalent à $\begin{cases} y = \dfrac{28}{8} = \dfrac{7}{2} \\ x = 8 - 2 \times \dfrac{7}{2} \end{cases}$
(S) est équivalent à $\begin{cases} y = \dfrac{7}{2} \\ x = 8 - 7 = 1. \end{cases}$
Conclusion : l'unique couple solution du système est le couple (1 ; 3,5).

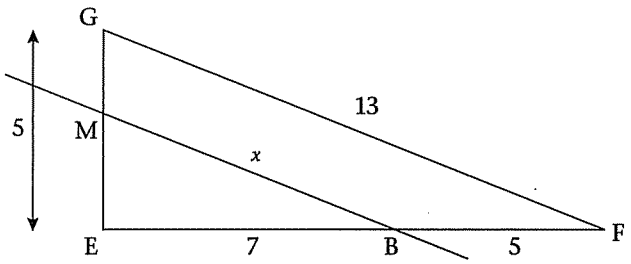
2. On considère le système (S') $\begin{cases} 10x + 4y = 24 \\ 3x + 6y = 24. \end{cases}$
Le couple sera solution du système (S') si il vérifie simultanément deux équations.
Pour $x = 1$ et $y = 3{,}5$ on a :
$10 \times 1 + 4 \times 3{,}5 = 10 + 14 = 24$
Pour $x = 1$ et $y = 3{,}5$ on a : $3 \times 1 + 6 \times 3{,}5 = 3 + 21 = 24$
Conclusion : Le couple (1 ; 3,5) est la solution du système.

3. Appelons x le prix d'une perle noire et y le prix d'une perle dorée.
Les données de l'énoncé nous conduisent au système :
$\begin{cases} 10x + 4y = 24 \\ 3x + 6y = 24. \end{cases}$
D'après ce qui précède, on peut affirmer qu'une perle noire coûte 1 euro alors qu'une perle dorée coûtera 3,5 euros.
Conclusion : Un sac contenant 4 perles noires et 3 perles dorées sera vendu :
$4 \times 1 + 3 \times 3{,}5 = 4 + 10{,}5 = 14{,}5$ euros.

Activités géométriques

Exercice 1

1. Construction.



2. On a : $EF^2 + EG^2 = 12^2 + 5^2 = 169$
$FG^2 = 13^2 = 169$
Donc $EF^2 + EG^2 = FG^2$.
Dans le triangle EFG, l'égalité précédemment établie nous permet d'appliquer la réciproque du théorème de Pythagore.
Conclusion : Le triangle EFG est rectangle en E.

3. Dans le triangle EFG rectangle en E, nous pouvons appliquer les formules de trigonométrie.
En particulier :
$\cos \widehat{F} = \dfrac{EF}{FG}$ donc mes $(\widehat{F}) = \cos^{-1}\left(\dfrac{EF}{FG}\right)$.

Application Numérique : mes $(\widehat{F}) = \cos^{-1}\left(\dfrac{12}{13}\right) = 23°$.

4. Voir la construction.

5. Par B, on mène la parallèle à la droite (FG) qui coupe le segment [EG] en M. Donc les droites (BM) et (FG) sont parallèles.
Dans le triangle EFG, on a :
– $B \in [EF]$;
– $M \in [EG]$;
– les droites (BM) et (FG) sont parallèles.

Dans ces conditions, la théorème de Thalès peut s'appliquer et nous permet d'écrire l'égalité des rapports :
$\frac{EB}{EF} = \frac{EM}{EG} = \frac{BM}{FG}$.
En particulier : $\frac{EB}{EF} = \frac{BM}{FG}$ donc $BM = \frac{EB \times FG}{EF}$.
Application Numérique : $BM = \frac{7 \times 13}{12} \approx 7{,}6$ mm.

Exercice 2

1. OABCD est une pyramide régulière de sommet O, de base le carré ABCD et de hauteur h. Son volume V est donc défini par la relation :
$V = \frac{1}{3} \times$ Aire de la base $\times$ h.
Il en résulte que : Aire de la base $= \frac{3\,V}{h}$.
Or $V = 24$ cm^3 et $h = OH = 4$ cm
Donc Aire de la base $= \frac{3 \times 24}{4} = 18$.
Conclusion : l'aire de la base est de 18 cm^2.

2. On a :
$\left.\begin{array}{l}\text{Aire de la base} = 18 \\ \text{Aire de la base} = AB^2\end{array}\right\}$ donc $AB^2 = 18$.
Donc $AB = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$.
Conclusion : le côté [AB] du carré ABCD a pour longueur $AB = 3\sqrt{2}$ cm.

3. ABCD est un carré donc ces quatre sommets forment des angles droits. Cela signifie, en particulier, que le triangle ABC est rectangle (et isocèle) en B. On peut donc y appliquer le théorème de Pythagore.
On a donc : $AC^2 = AB^2 + BC^2$
Donc $AC^2 = 18 + 18 = 36$
Donc $AC = \sqrt{36} = 6$.
Conclusion : la diagonale [AC] du carré ABCD a pour longueur AC = 6 cm.

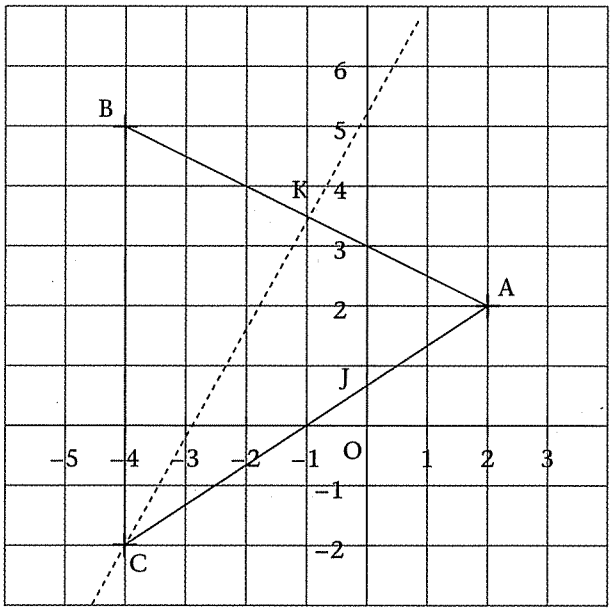
4. La pyramide étant régulière, le triangle AOC est isocèle en O et la hauteur issue du sommet principal est la hauteur de la pyramide (c'est à dire [OH]).
Donc son aire A_{AOC} est définie par la relation :

$$A_{AOC} = \frac{AC \times OH}{2}$$

Application numérique : $A_{AOC} = \frac{6 \times 4}{2} = 12$ cm².

Exercice 3

1. Graphique.



2. a. Le repère est orthonormé donc on peut déterminer la longueur du segment [AC] à l'aide de la formule :
$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$.
Donc $AC = \sqrt{(-4-2)^2 + (-2-2)^2}$.
Donc $AC = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$ cm.
Conclusion : l'unité étant le cm, $AC = \sqrt{52}$ cm.
b. De même on peut établir que :
$BC = \sqrt{(-4-(-4))^2 + (-2-5)^2}$
Donc $BC = \sqrt{0 + 49} = 7$ unités.
Conclusion : L'unité étant le cm, BC = 7 cm.

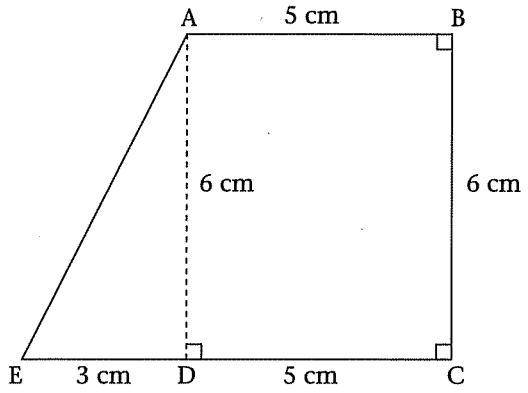
c. Nous avons montré que AC = $\sqrt{52}$ cm et que BC = 7 cm.
Or $\sqrt{52} \neq 7$, Donc AC ≠ BC.
Conclusion : le triangle ABC n'est pas isocèle en C.

3. a. Voir graphique
b. K est le milieu du segment [AB] et C est un sommet du triangle ABC, Il en résulte que (CK) est la médiane du triangle ABC issue de C.
Or nous avons démontré, à la question précédente que le triangle n'était pas isocèle en C.
Donc la médiane issue de C n'est ni la hauteur, ni la médiatrice du segment [AB].

Problème

Partie A

1. Constructions.



2. Le quadrilatère ABCD est un rectangle donc son aire est : AB × BC = 5 × 6 = 30 cm².

3. Le triangle ADE est rectangle en D donc son aire est :
$\frac{1}{2} \times AD \times ED = \frac{6 \times 3}{2} = 9$ cm².

4. L'aire du trapèze est la somme des aires du rectangle ABCD et du triangle ADE. Cette aire vaut donc : 30 + 9 = 39 cm².

Partie B

1. L'aire est définie par la relation :

$A_{ABCE} = \frac{1}{2} \times$ (grande base + petite base) $\times$ hauteur

$A_{ABCE} = \frac{1}{2} \times (x + 5 + 5) \times 6$

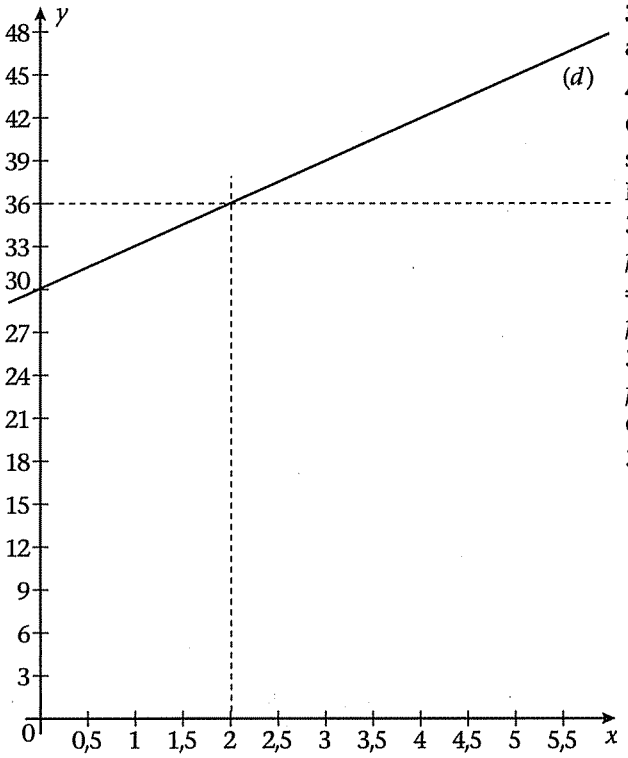
Donc $A_{ABCE} = (x + 10) \times 3$

Donc $A_{ABCE} = 3x + 30$.

2. Soit $f : x \mapsto 3x + 30$.

f est une fonction affine. Sa représentation graphique est donc la droite (d) passant les points de coordonnées (0 ; 30) et (3 ; 39).

Soit (O, I, J) le repère orthogonal ci-dessous. Nous allons représenter graphiquement cette fonction.



3. Pour $x = 2$ cm, le trapèze ABCE aura une aire de 36 cm².

4. L'aire du trapèze f dépend de x. Cette aire vaut 36 cm². Donc x est solution de l'équation $f(x) = 36$

Donc $f(x) = 36$ si et seulement si $3x + 30 = 36$.

$f(x) = 36$ si et seulement si $3x + 30 = 36$

$f(x) = 36$ si et seulement si $3x = 36 - 30$

$f(x) = 36$ si et seulement si $x = 2$.

Conclusion : l'aire du trapèze vaut 36 cm².

SUJET 15 SUJET

GROUPEMENT 3 ◇ JUIN 2004

Activités numériques *(12 points)*

Exercice 1

Dans toute cette partie, les résultats des calculs demandés doivent être accompagnés d'explications.

Soient les expressions $A = \frac{9}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{11}{4}$ et $B = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{27} + \sqrt{75}$.

1. Calculer A en détaillant les étapes de calcul et écrire le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Calculer et écrire B sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers relatifs, b étant un nombre positif le plus petit possible.

Exercice 2

On considère l'expression $C = (2x - 1)^2 + (2x - 1)(x + 5)$.

1. Développer et réduire l'expression C.

2. Factoriser l'expression C.

3. Résoudre l'équation $(2x - 1)(3x + 4) = 0$.

Exercice 3

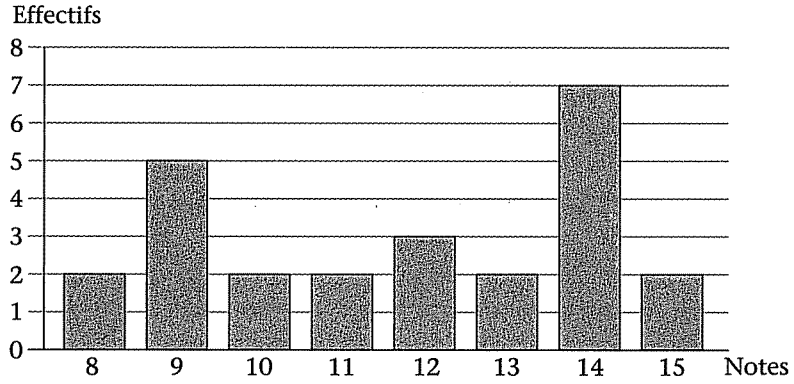
1. Les nombres 682 et 352 sont-ils premiers entre eux ? Justifier.

2. Calculer le plus grand diviseur commun (PGCD) de 682 et 352.

3. Rendre irréductible la fraction $\frac{682}{352}$ en indiquant clairement la méthode utilisée.

Exercice 4

Le diagramme en barres ci-dessous donne la répartition des notes obtenues à un contrôle de mathématiques par les élèves d'une classe de Troisième.



1. Combien d'élèves y a-t-il dans cette classe ?

2. Quelle est la moyenne de la classe à ce contrôle ?

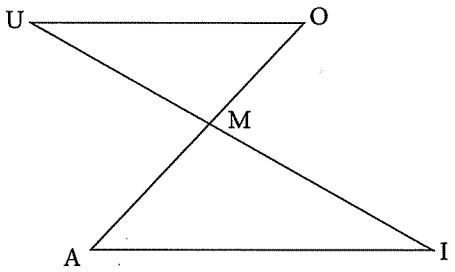
3. Quelle est la note médiane ?

4. Quelle est l'étendue de cette série de notes ?

Activités géométriques *(12 points)*

Exercice 1

Les segments [OA] et [UI] se coupent en M.
On a : MO = 21, MA = 27, MU = 28, MI = 36, AI = 45 (l'unité de longueur étant le millimètre).



1. Prouver que les droites (OU) et (AI) sont parallèles.

2. Calculer la longueur OU.

3. Prouver que le triangle AMI est un triangle rectangle.

4. Déterminer, à un degré près, la mesure de l'angle $\widehat{AIM}$.

5. Montrer que les angles $\widehat{MAI}$ et $\widehat{MOU}$ ont la même mesure.

Exercice 2

On considère la figure $\mathcal{F}$ (voir ci-dessous).

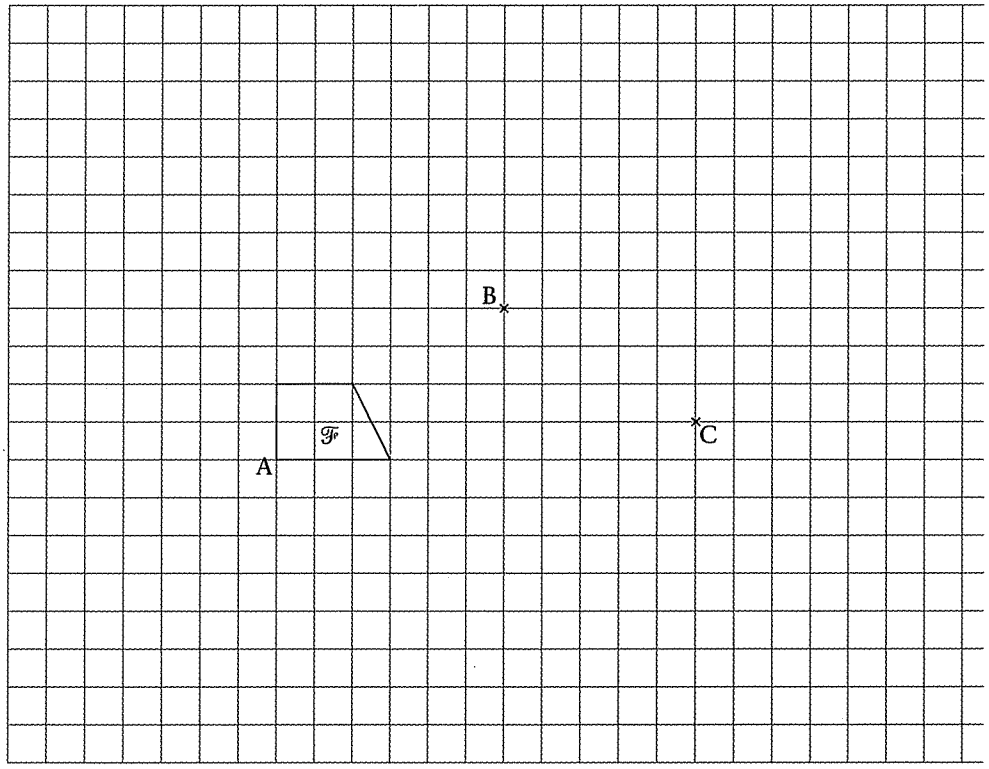
1. Construire :

a. La figure $\mathcal{F}_1$, image de la figure $\mathcal{F}$ par la symétrie centrale de centre B (nommer E l'image de A).

b. La figure $\mathcal{F}_2$, image de la figure $\mathcal{F}_1$ par la symétrie centrale de centre C (nommer T l'image de E).

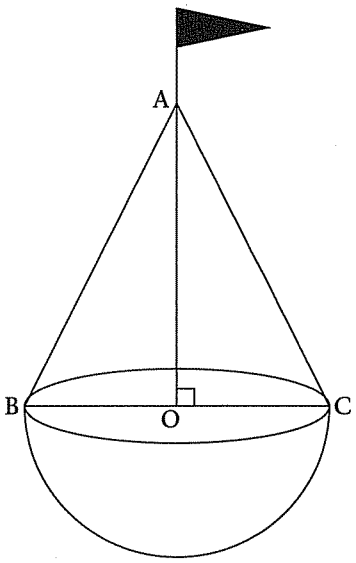
On hachurera, sur le dessin, les figures $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ainsi obtenues.

2. Quelle transformation permet de passer directement de la figure $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}_2$?



Exercice 3

La balise ci-dessous est formée d'une demi-boule surmontée d'un cône de révolution de sommet A.



Le segment [BC] est un diamètre de la base du cône et le point O est le centre de cette base.
On donne AO = BC = 6 dm.

1. Montrer que AB = $3\sqrt{5}$ dm.

2. Dans cette question, on se propose de calculer des volumes.
On rappelle que si V est le volume d'une boule de rayon R, $V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$.

On rappelle que si V est le volume d'un cône de hauteur h et de rayon r, $V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$.

a. Calculer en fonction de π le volume du cône (on donnera la valeur exacte de ce volume).
b. Calculer en fonction de π le volume de la demi-boule (on donnera la valeur exacte de ce volume).
c. Calculer la valeur exacte du volume de la balise, puis en donner la valeur arrondie à 0,1 dm^3 près.

Problème *(12 points)*

On considère un triangle rectangle en A tel que AB = 6 cm et AC = 4 cm.

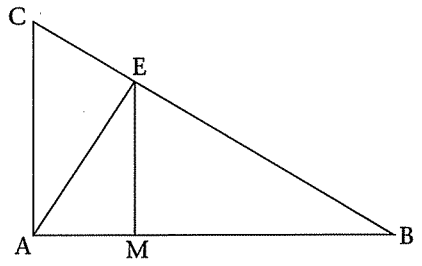
Partie A

1. Construire ce triangle.

2. Placer le point M sur le segment [AB] tel que BM = 3,5 cm et tracer la droite passant par le point M et perpendiculaire à la droite (AB) ; elle coupe le segment [BC] en E.
a. Calculer AM.
b. Démontrer que les droites (AC) et (ME) sont parallèles.
c. Calculer EM (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).
d. Le triangle AEM est-il un triangle isocèle en M ?

Partie B

On souhaite placer le point M sur le segment [AB] de façon à ce que le triangle AEM soit isocèle en M comme sur la figure ci-dessous que l'on ne demande pas de refaire.
On rappelle que : AB = 6 cm et AC = 4 cm.



1. On pose BM = x (on a donc : $0 \leqslant x \leqslant 6$). Démontrer, en utilisant la propriété de Thalès, que ME = $\frac{2}{3}x$.

2. a. Montrer que : MA = $6 - x$.

b. Calculer x pour que le triangle AME soit isocèle en M.

3. Soit un repère orthogonal avec pour unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

a. Représenter, dans ce repère, les fonctions f et g définies par :

$f(x) = \frac{2}{3}x$ et $g(x) = 6 - x$, pour $0 \leqslant x \leqslant 6$.

b. En utilisant ce graphique, retrouver le résultat de la question 2.b.

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = \frac{9}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{11}{4}$

Donc $A = \frac{9}{5} - \frac{11}{10} = \frac{18}{10} - \frac{11}{10}$

Donc $A = \frac{7}{10}$.

2. $B = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{27} + \sqrt{75}$

donc $B = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{9 \times 3} + \sqrt{25 \times 3}$

donc $B = 5\sqrt{3} - 4 \times 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

donc $B = 5\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

donc $B = -2\sqrt{3}$.

Exercice 2

1. $C = (2x - 1)^2 + (2x - 1)(x + 5)$

donc $C = 4x^2 - 4x + 1 + 2x^2 + 10x - x - 5$

donc $C = 6x^2 - 5x - 4$.

2. $C = (2x - 1)(2x - 1) + (2x - 1)(x + 5)$

donc $C = (2x - 1)(2x - 1 + x + 5)$

donc $C = (2x - 1)(3x + 4)$.

3. Soit $(2x - 1)(3x + 4) = 0$.

Il s'agit d'une équation-produit. Ce produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul.

Soit $2x - 1 = 0$ ou $3x + 4 = 0$

Soit $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{4}{3}$.

Conclusion : les solutions de l'équation sont $\frac{1}{2}$ et $-\frac{4}{3}$.

Exercice 3

1. Les nombres 682 et 352 sont tous les deux pairs donc ils admettent 2 comme diviseur commun.
Conclusion : Les nombres 682 et 352 ne sont pas premier entre eux.
2. Calcul du PGCD (682 ; 352) par la méthode des divisions successives (Algorithme d'Euclide) ; Consignons les résultats des divisions successives dans le tableau suivant :

		1	1	15	Quotients
Dividendes	682	352	330	22	Diviseurs
Restes	330	22	0		

Conclusion : Le PGCD correspond au dernier reste non nul. Le PGCD (682 ; 352) = 22.
3. Le PGCD (682 ; 352) $\neq$ 1 donc les nombres 682 et 352 ne sont pas premiers entre eux. La fraction $\frac{682}{352}$ n'est pas irréductible.
Pour obtenir la fraction sous la forme irréductible, il faut et il suffit de simplifier le numérateur et le dénominateur de la fraction par leur PGCD donc par 22. On a ainsi :
$\frac{682}{352} = \frac{22 \times 31}{22 \times 16} = \frac{31}{16}$.

Exercice 4

À l'aide du diagramme en barres, complétons le tableau suivant :

Notes	8	9	10	11	12	13	14	15
Effectifs	2	5	2	2	3	2	7	2
Effectifs cumulés croissants	2	7	9	11	14	16	23	25

1. Dans cette classe, il y a : 2 + 5 + 2 + 2 + 3 + 2 + 7 + 2 = 25.

2. La note moyenne est :
$\bar{x} = \frac{2 \times 8 + 5 \times 9 + 2 \times 10 + 2 \times 11 + 3 \times 12 + 2 \times 13 + 7 \times 14 + 2 \times 15}{25}$
donc : $\bar{x} = \frac{293}{25} = 11{,}72$.
Conclusion : la note moyenne est 11,72.

3. La note médiane est la 13e note lorsque celles-ci sont rangées dans l'ordre croissant. Cette note partage la série en deux séries de même effectif.
Conclusion : La note médiane est 12.

4. L'étendue de la série correspond à la différence entre la meilleure note et la note la plus faible. Cette étendue vaut donc 15 – 8 = 7.
Conclusion : l'étendue de la série est de 7 points.

Activités géométriques

Exercice 1

1. Comparons les rapports $\frac{MI}{MU}$ et $\frac{MA}{MO}$.

On a :

$\frac{MI}{MU} = \frac{36}{28} = \frac{9 \times 4}{7 \times 4} = \frac{9}{7}$ donc $\frac{MI}{MU} = \frac{MA}{MO}$

$\frac{MA}{MO} = \frac{27}{21} = \frac{3 \times 9}{3 \times 7} = \frac{9}{7}$

Dans le triangle MAI, on a :

U ∈ (MI) ; O ∈ (MA) ;

les points U, M, I et O, M, A sont alignés dans cet ordre.

De plus $\frac{MI}{MU} = \frac{MA}{MO}$. Dans ces conditions, la réciproque du théorème de Thalès peut s'appliquer et cela nous permet de conclure que les droites (AI) et (OU) sont parallèles.

2. Dans le triangle MAI, on a :

U ∈ (MI) ; O ∈ (MA) ;

– les droites (AI) et (OU) sont parallèles.

Dans ces conditions, le théorème de Thalès peut s'appliquer et nous permettre d'écrire l'égalité des rapports $\frac{MI}{MU} = \frac{MA}{MO} = \frac{AI}{OU}$. En particulier : $\frac{MI}{MU} = \frac{AI}{OU}$ donc $OU = \frac{AI \times MU}{MI}$.

Application numérique : $OU = \frac{45 \times 28}{36} = 35$ mm.

3. On a : $\begin{cases} MA^2 + MI^2 = 27^2 + 36^2 = 2\,025 \\ AI^2 = 45^2 = 2\,025. \end{cases}$

Donc $MA^2 + MI^2 = AI^2$.

Dans le triangle MAI, l'égalité précédente nous permet d'appliquer la réciproque du théorème de Pythagore.

Conclusion : Le triangle MAI est rectangle en M.

4. Dans le triangle MAI rectangle en M, on peut appliquer les formules de trigonométrie.

En particulier, on a : $\cos(\widehat{AIM}) = \frac{MI}{AI}$ donc mes $(\widehat{AIM}) = \cos^{-1}\left(\frac{36}{45}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$.

Conclusion : mes $(\widehat{AIM}) \approx 37°$.

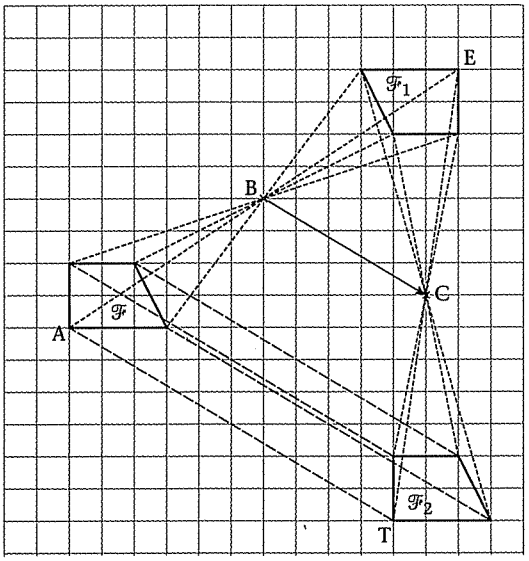
5. Les angles $\widehat{MOU}$ et $\widehat{MAI}$ sont des angles alternes- internes compris entre les droites (AI) et (OU) parallèles donc ils ont la même mesure.

Conclusion : mes $(\widehat{MAI})$ = mes $(\widehat{MOU})$.

CORRIGÉ

Exercice 2

1. Construction.



2. La composée de deux symétries centrales de centres distincts est une translation. Ainsi, la transformation qui transforme la figure F en figure F_2 est la composée de la symétrie de centre B suivie de la symétrie de centre C. C'est donc la translation de vecteur $2\overrightarrow{BC}$.

Exercice 3

1. [BC] est un diamètre de la base du cône et O est le centre de cette base. Il en résulte que O est le milieu du [BC].

Donc $OB = \frac{1}{2} \times BC = 3$ dm.

Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle ABO rectangle en O.

On a : $AB^2 = AO^2 + OB^2$.

Application numérique : $AB^2 = 6^2 + 3^2 = 45$ donc $AB = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$.

Conclusion : $AB = 3\sqrt{5}$ dm.

2. a. Le volume V_1 du cône est $V_1 = \frac{\pi \times OB^2 \times AO}{3}$.

Application numérique : $V_1 = \frac{\pi \times 3^2 \times 6}{3} = 18\pi$.

b. Le volume V_2 de la demi-boule est :

$V_2 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times OB^3$.

Application numérique : $V_2 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 18\pi$.

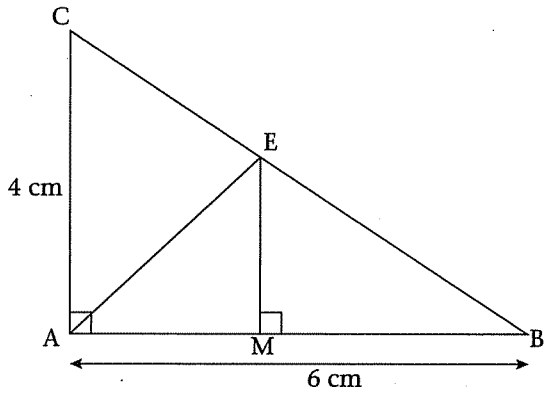
c. Le volume V de la balise est la somme des volumes du cône et de la demi-boule.

Application numérique : $V = V_1 + V_2 = 36\pi \approx 113{,}1$ dm^3.

Problème

Partie A

1. Construction.



2. a. M appartient au segment [AB] donc AB = AM + MB donc AM = AB – MB.
Application numérique :
AM = 6 – 3,5 = 2,5 cm.

b. Le triangle ABC est rectangle en A donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Par M, on mène la perpendiculaire à la droite (AB) qui coupe le segment [BC] en E donc la droite (ME) est perpendiculaire à la droite (AB).

Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
Conclusion : Les droites (AC) et (ME) sont parallèles.

c. Dans le triangle ABC, on a :
– M ∈ [AB];
– E ∈ [CB] ;
– les droites (ME) et (AC) sont parallèles.
Dans ces conditions le théorème de Thalès peut s'appliquer et nous permet d'écrire l'égalité des rapports :
$\frac{BM}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{EM}{AC}$.
En particulier : $\frac{BM}{BA} = \frac{EM}{AC}$ donc $EM = \frac{BM \times AC}{BA}$.
Application numérique : $EM = \frac{3,5 \times 4}{6} = \frac{7}{3}$ cm.

d. On a : $\left.\begin{array}{r} EM = \frac{7}{3} \\ AM = 2,5 \end{array}\right\}$ donc EM ≠ AM.

Conclusion : le triangle AEM n'est pas isocèle en M.

CORRIGÉ

Partie B

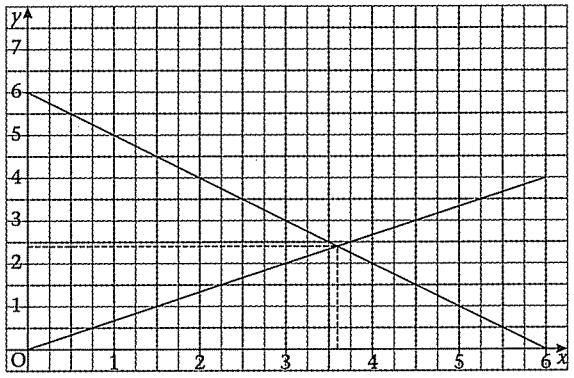
On veut placer le point M sur le segment [AB] de façon à ce que le triangle AEM soit isocèle en M.

1. Dans le triangle ABC, on a :
– M ∈ [AB] ;
– E ∈ [CB] ;
– les droites (ME) et (AC) sont parallèles.
Dans ces conditions, le théorème de Thalès peut s'appliquer et nous permet d'écrire l'égalité des rapports :
$\frac{BM}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{ME}{AC}$.
En particulier : $\frac{BM}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{ME}{AC}$ donc $ME = \frac{BM \times AC}{BA}$.
Application numérique : $ME = \frac{4x}{6} = \frac{2}{3}x$.

2. a. M appartient au segment [AB] donc AB = AM + MB donc AM = AB – MB.
Application numérique : $AM = 6 - x$.

b. Le triangle AME est isocèle en M si, et seulement si, AM = ME.
AM = ME si et seulement si $\frac{2}{3}x = 6 - x$
AM = ME si et seulement si $\frac{2}{3}x + x = 6$
AM = ME si et seulement si $\frac{5}{3}x = 6$
AM = ME si et seulement si $x = \frac{18}{5}$.
Conclusion : le triangle AME est isocèle en M si et seulement si $x = 3{,}6$ cm.

3. Soit (O, I, J) un repère orthogonal. On considère les fonctions $f : x \mapsto \frac{2}{3}x$ et $g : x \mapsto 6 - x$ pour $0 \leqslant x \leqslant 6$.
La fonction f est une fonction linéaire donc sa représentation graphique est le segment qui a pour origine le point O et dont l'autre extrémité est le point de coordonnées (6 ; 4).
La fonction g est une fonction affine donc sa représentation graphique est le segment dont les extrémités sont les points (0 ; 6) et (6 ; 0).
a. Représentons ces deux segments.
b. Graphiquement, la solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est le point de coordonnées (3,6 ; 2,4).
Conclusion : Pour $x = 3{,}6$, le triangle AME est isocèle et AM = ME = 2,4 cm.



CORRIGÉ

SUJET 16 SUJET

GROUPEMENT 4 ◆ JUIN 2004

Activités numériques *(12 points)*

Exercice 1

1. On donne $A = \frac{3}{7} - \frac{15}{7} \div \frac{5}{24}$.

Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

2. On donne $B = \sqrt{300} - 4\sqrt{27} + 6\sqrt{3}$;
$C = (5 + \sqrt{3})^2$; $D = (\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})$.

a. Écrire B sous la forme $b\sqrt{3}$, où b est un nombre entier.

b. Écrire C sous la forme $e + f\sqrt{3}$ avec e et f entiers.

c. Montrer que D est un nombre entier.

Exercice 2

On donne $E = (2x - 3)(x + 2) - 5(2x - 3)$.

1. Développer et réduire E.

2. Factoriser E.

3. Calculer E pour $x = -2$.

4. Résoudre l'équation $(2x - 3)(x - 3)$.

Exercice 3

Une station de ski réalise une enquête auprès de 300 skieurs qui la fréquentent. Les résultats de l'enquête sont notés dans le tableau ci-dessous et indiquent la répartition en classe des skieurs en fonction de leur âge (en années).

Âge	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[	[60 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 90[
Centre de classe	5	...	...	...	...	...	...	...	...
Effectifs	27	45	48	39	42	36	33	24	6

1. Compléter le tableau précédent en indiquant le centre de chaque classe d'âge.

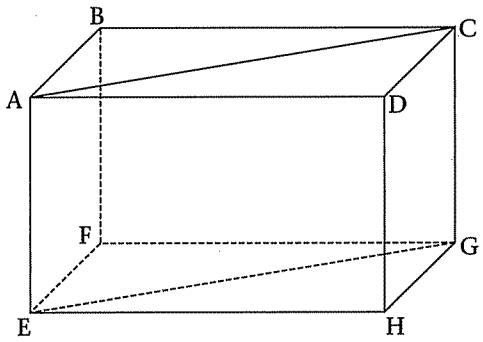
2. Calculer l'âge moyen des skieurs fréquentant cette station.

3. Quelle est la fréquence, en pourcentage, de skieurs ayant un âge strictement inférieur à 20 ans ?

Activités géométriques *(12 points)*

Exercice 1

On considère le pavé droit ABCDEFGH représenté ci-dessous :

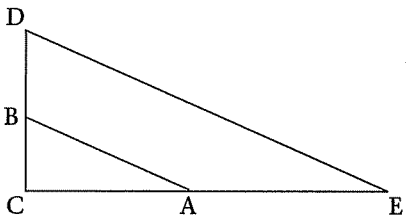


Observer la figure et compléter le tableau ci-dessous, sans justification.

Objet	Nature de l'objet
Triangle ABC	
Angle $\widehat{ABF}$	
Quadrilatère ABFE	
Angle $\widehat{ACG}$	
Quadrilatère ACGE	

Exercice 2

Dans le triangle CDE, A est un point du segment [CE] ;
B est un point du segment [CD].
Sur le schéma ci-dessous, les longueurs représentées ne sont pas exactes.
On donne AC = 8 cm ; CE = 20 cm; BC = 6 cm ; CD = 15 cm; DE = 25 cm.



1. Montrer que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

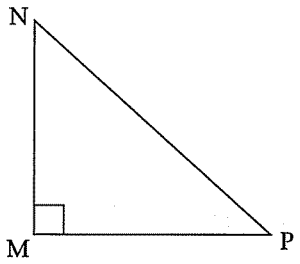
2. Le triangle CDE est-il rectangle ? Justifier.

3. Calculer AB.

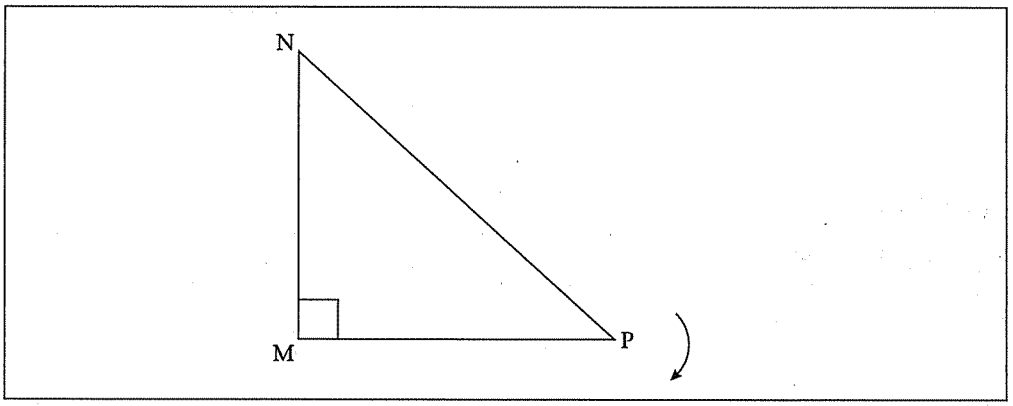
4. Calculer la valeur arrondie au degré de l'angle $\widehat{CDE}$.

Exercice 3

On considère un triangle MNP rectangle en M.



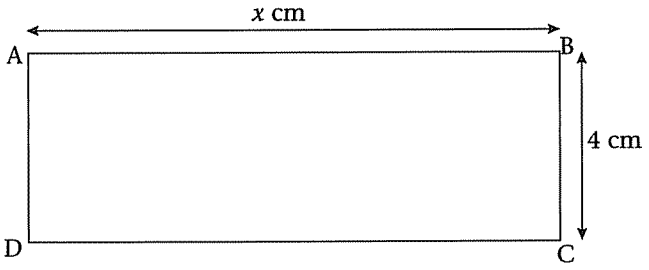
1. Tracer l'image F_1 de ce triangle MNP par la rotation de centre P et d'angle 90° dans le sens indiqué par la flèche.

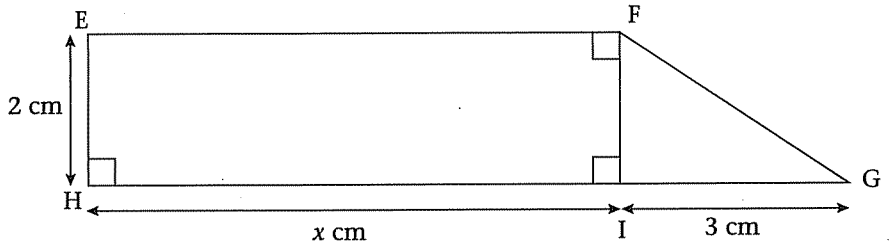


2. Tracer l'image F_2 de ce triangle MNP dans la translation du vecteur $\overrightarrow{PM}$.

Problème *(12 points)*

On donne les figures suivantes.





1. Exprimer en fonction de x l'aire A_{ABCD} du rectangle ABCD.

2. Exprimer en fonction de x l'aire A_{EFGH} du rectangle EFGH.

3. Dans un repère orthonormal, tracer en justifiant :
– la représentation graphique (d) de la fonction f définie par $x \mapsto 4x$
– la représentation graphique (d') de la fonction g définie par $x \mapsto 2x + 3$.

4. a. Calculer l'aire du rectangle ABCD pour $x = 3$.
b. Retrouver ce résultat sur le graphique. On laissera apparents les traits nécessaires.

5. a. Calculer la valeur de x pour que l'aire du quadrilatère EFGH soit égale à 15 cm^2.
b. Retrouver ce résultat sur le graphique. On laissera apparents les traits nécessaires.

6. a. Résoudre graphiquement l'équation : $4x = 2x + 3$.
b. Retrouver ce résultat en résolvant l'équation : $4x = 2x + 3$.
c. Comment interpréter ce résultat pour le rectangle ABCD et le quadrilatère EFGH ?

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = \frac{3}{7} - \frac{15}{7} \div \frac{5}{24}$ donc $A = \frac{3}{7} - \frac{15}{7} \times \frac{24}{5}$

donc $A = \frac{3}{7} - \frac{3 \times 5 \times 24}{7 \times 5}$ donc $A = \frac{3}{7} - \frac{72}{7}$ donc $A = -\frac{69}{7}$.

2. a. $B = \sqrt{300} - 4\sqrt{27} + 6\sqrt{3}$ $B = \sqrt{100 \times 3} - 4\sqrt{9 \times 3} + 6\sqrt{3}$

$B = 10\sqrt{3} - 4 \times 3\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$ $B = 10\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$ $B = 4\sqrt{3}$.

b. $C = (5 + \sqrt{3})^2$ $C = 25 + 10\sqrt{3} + 3$ $C = 28 + 10\sqrt{3}$.

c. $D = (\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})$ $D = \sqrt{2}^2 - \sqrt{5}^2$

$D = 2 - 5$ $D = -3$.

Exercice 2

1. On a $E = (2x - 3)(x + 2) - 5(2x - 3)$
donc $E = 2x^2 + 4x - 3x - 6 - 10x + 15$
donc $E = 2x^2 - 9x + 9$.

2. On a $E = (2x - 3)(x + 2) - 5(2x - 3)$
donc $E = (2x - 3)(x + 2 - 5)$
donc $E = (2x - 3)(x - 3)$.

3. Pour $x = -2$, on a $E = 2(-2)^2 - 9(-2) + 9$
donc $E = 8 + 18 + 9$
donc $E = 35$.

4. $(2x - 3)(x - 3) = 0$.
Il s'agit d'une équation-produit. Ce produit est nul, si et seulement si, l'un au moins, des facteurs est nul.
Soit $2x - 3 = 0$ ou $x - 3 = 0$
Soit $x = \frac{3}{2}$ ou $x = 3$.

Conclusion : les solutions de l'équation sont $\frac{3}{2}$ et 3.

Exercice 3

1. Complétons ce tableau :

Âge	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[	[60 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 90[
Centre de classe	5	15	25	35	45	55	65	75	85
Effectifs	27	45	48	39	42	36	33	24	6

2. L'âge moyen $\overline{x}$ des skieurs est une moyenne pondérée définie par l'égalité :

$\overline{x} = \frac{5 \times 27 + 15 \times 45 + 25 \times 48 + 35 \times 29 + 45 \times 42 + 55 \times 36 + 65 \times 33 + 75 \times 24 + 85 \times 6}{27 + 45 + 48 + 39 + 42 + 36 + 33 + 24 + 6}$ donc $\overline{x} = \frac{11\,700}{300} = 39$.

Conclusion : l'âge moyen des skieurs est de 39 ans.

3. Il y a 27 + 45 = 72 skieurs âgés de moins de 20 ans ce qui représente $\frac{72}{300} = 24$ % de l'ensemble des skieurs (soit un peu moins du quart).

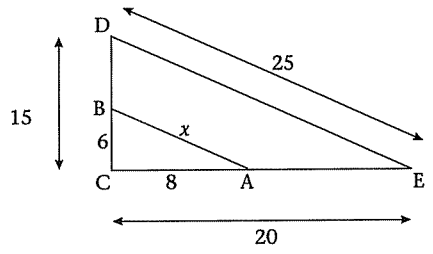
Activités géométriques

Exercice 1

Le pavé droit ABCDEFGH est coupé par le plan ACGE. La section obtenue est donc le rectangle ACGE. À l'aide de cette observation nous pouvons compléter le tableau ci-après :

Objet	Nature de l'objet
Triangle ABC	C'est un triangle rectangle en B
Angle $\widehat{ABF}$	C'est un angle droit
Quadrilatère ABFE	C'est un rectangle
Angle $\widehat{ACG}$	C'est un angle droit
Quadrilatère ACGE	C'est un rectangle

Exercice 2



1. Comparons d'abord les rapports $\frac{CA}{CE}$ et $\frac{CB}{CD}$.

On a $\frac{CA}{CE} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ et $\frac{CB}{CD} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

donc $\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD}$.

Dans le triangle CDE, on a :

– A ∈ [CE] ;

– B ∈ [CD] ;

– les points C, A, E et C, B, D sont alignés dans cet ordre ;

– de plus, on a l'égalité : $\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD}$.

Dans ces conditions, la réciproque du théorème de Thalès peut s'appliquer et nous permettre de conclure que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

2. Nous avons : $\begin{cases} CD^2 + CE^2 = 15^2 + 20^2 = 625 \\ DE^2 = 25 = 625 \end{cases}$

donc $CD^2 + CE^2 = DE^2$.

Dans ce triangle CDE, l'égalité précédente nous permet d'appliquer la réciproque du théorème de Pythagore et de conclure que le triangle CDE est rectangle en C.

3. Dans le triangle CDE, on a :

– A ∈ [CE] ;

– B ∈ [CD] ;

– les droites (AB) et (DE) sont parallèles. Dans ces conditions, le théorème de Thalès peut s'appliquer et nous permet d'écrire des rapports : $\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD} = \frac{AB}{DE}$.

En particulier : $\frac{CA}{CE} = \frac{AB}{DE}$ donc $AB = \frac{CA \times DE}{CE}$.

Application numérique : $AB = \frac{8 \times 25}{20} = 10$ cm.

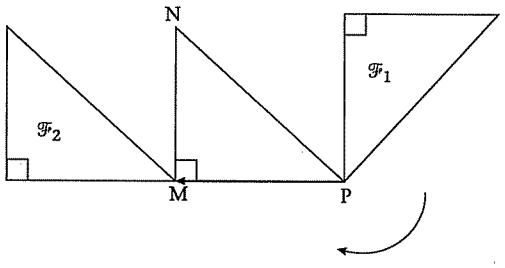
4. Le triangle CDE étant rectangle en C, on peut y appliquer les formules de trigonométrie.

En particulier : $\cos \widehat{CDE} = \frac{CD}{DE}$ donc $\text{mes}\,(\widehat{CDE}) = \cos^{-1}\left(\frac{CD}{DE}\right)$.

Application numérique : $\text{mes}\,(\widehat{CDE}) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 53°$.

Exercice 3

1. et **2.** Voir constructions.



Problème

1. ABCD est un rectangle donc son aire vaut : AB × BC donc $A_{ABCD}(x) = 4x$ cm.

2. Le quadrilatère EFGH est un trapèze rectangle donc son aire vaut : $\frac{(GH + EF) \times EH}{2}$

donc $A_{ABCD}(x) = \frac{(x + 3 + x)^2}{2} = (2x + 3)$ cm².

3. $f : x \mapsto 4x$ est une fonction linéaire de coefficient 4.
Sa représentation graphique est donc la droite (d) qui passe par l'origine du repère et par le point de coordonnées (3 ; 12).
$g : x \mapsto 2x + 3$ est une fonction affine.
Sa représentation graphique est la droite (d') qui passe par les points de coordonnées (0 ; 3) et (3 ; 9). Nous pouvons désormais construire ces deux droites dans le repère orthonormal (O, I, J) page suivante.

4. a. Pour $x = 3$ l'aire du rectangle vaut $A_{ABCD}(3) = 12$ cm².
b. Voir graphique page suivante.

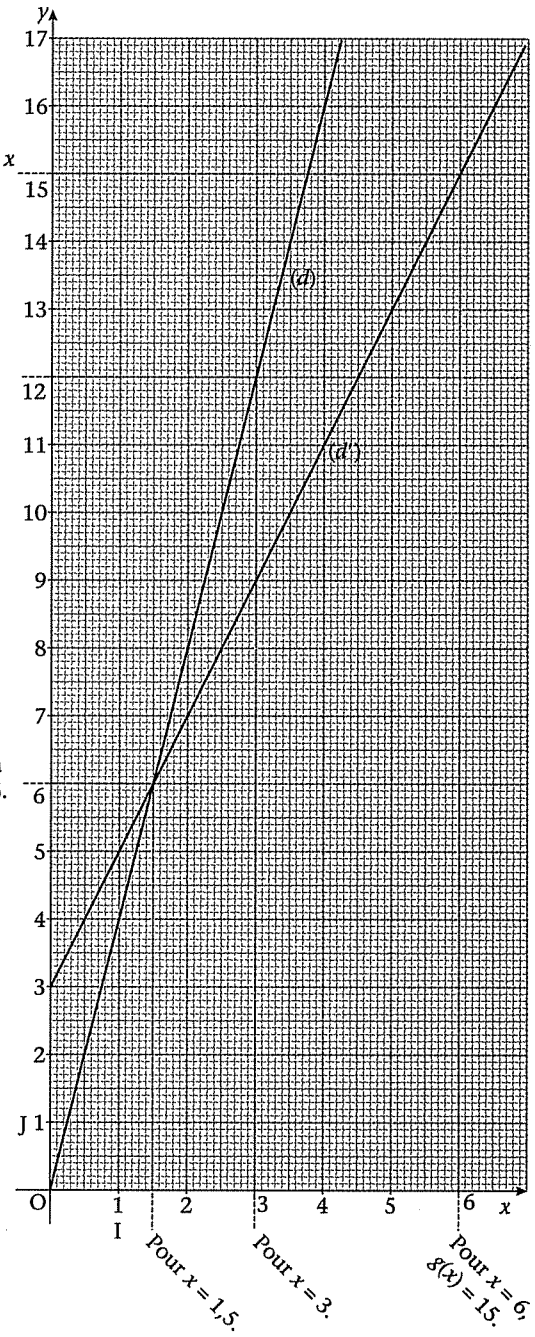
5. a. x est la solution de l'équation $A_{EFGH}(x) = 15$
$A_{EFGH}(x) = 15$ si et seulement si $2x + 3 = 15$
$A_{EFGH}(x) = 15$ si et seulement si $x = 6$.
b. En effet, pour $x = 6$, on a bien graphiquement que $g(6) = 15$.

6. a. Graphiquement, $4x = 2x + 3$ signifie que $f(x) = g(x)$ donc il s'agit de déterminer l'abscisse du point d'intersection de (d) et (d'). On trouve $x = 1{,}5$.
b. Soit l'équation $4x = 2x + 3$.
$4x = 2x + 3$ si et seulement si $4x - 2x = 3$
$4x = 2x + 3$ si et seulement si $2x = 3$
$4x = 2x + 3$ si et seulement si $x = \frac{3}{2} = 1{,}5$.
Conclusion : la solution de l'équation est 1,5.
c. Interprétation géométrique.
Les deux quadrilatères auront la même aire pour $x = 1{,}5$.
On aura ainsi : $A_{ABCD}(1{,}5) = A_{EFGH}(1{,}5) = 6$ cm².

On cherche la valeur de x pour laquelle $g(x) = 15$.

Pour $x = 3$, l'aire du rectangle vaut $f(3) = 12$.

Pour $x = 1{,}5$, on a $f(1{,}5) = g(1{,}5) = 6$.



SUJET 17 SUJET

◇ CENTRES ÉTRANGERS GROUPE 1 ◇ JUIN 2004

Activités numériques *(12 points)*

Exercice 1

1. On donne : $A = 2 - \frac{4}{5}$ et $B = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} : \frac{6}{5}$.

Écrire A et B sous forme de fraction irréductible en indiquant toutes les étapes du calcul.

2. On donne $C = 2\sqrt{18} - 3\sqrt{2} + \sqrt{8}$.
Écrire C sous forme $a\sqrt{b}$, ou a et b sont deux entiers.

Exercice 2

On donne $D = (3x - 2)^2 - 9$.

1. Développer et réduire D.

2. Factoriser D.

3. Résoudre l'équation : $(3x - 5)(3x + 1) = 0$.

Exercice 3

1. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x + y = 41 \\ 3x + 2y = 64. \end{cases}$

2. Dans un grand magasin, tous les CD sont à un prix unique ainsi que tous les livres de poche. Louis a acheté 2 CD et 1 livre pour 41 euros. Loïc a acheté 3 CD et 2 livres pour 64 euros. Quel est le prix d'un CD ? d'un livre ?

Exercice 4

On donne : $E = (\sqrt{7} + 1)^2 + (\sqrt{7} - 1)^2$.

1. Après avoir développé les carrés, montrer que E est un nombre entier.

2. En déduire la nature d'un triangle dont les cotés mesurent respectivement, en centimètres, $\sqrt{7} + 1$, $\sqrt{7} - 1$ et 4 ; justifier votre réponse.

SUJET

Activités géométriques *(12 points)*

Exercice 1

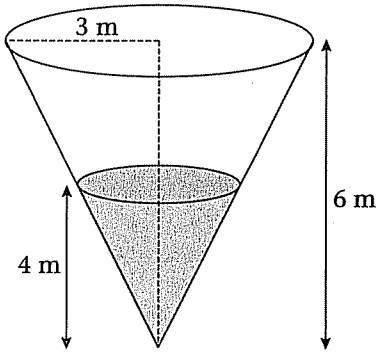
On donne : Volume du cône $= \dfrac{\textit{Aire de la base} \times \textit{Hauteur}}{3}$.

Un bassin a la forme d'un cône qui a pour base un disque de 3 m de rayon et pour hauteur 6 m.

1. a. Montrer que son volume exact V, en m^3, est égal à 18π ; en donner l'arrondi au m^3.
b. Ce volume représente-t-il plus ou moins de 10 000 litres ?

2. a. Combien de temps faudrait-il à une pompe débitant 15 litres par seconde pour remplir complètement le bassin ? Donner ce résultat arrondi à la seconde.
b. Cette durée est-elle inférieure à une heure ?

3. On remplit ce bassin avec de l'eau sur une hauteur de 4 m. On admet que l'eau occupe un cône qui est une réduction du bassin.



a. Quel est le coefficient de la réduction ?
b. En déduire le volume d'eau exact V′ contenu dans le bassin.

Exercice 2

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points :

A(– 3 ; 0) B(1 ; 4) C(5 ; 3) D(1 ; – 1)

1. Placer ces points dans le repère (O, I, J).

2. Calculer les coordonnées de vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

3. Que peut-on en déduire pour la nature du quadrilatère ABCD ?

Pour la suite, ce quadrilatère ABCD est appelé figure 1.

4. Construire la figure 2 symétrique de la figure 1 par rapport au point B.

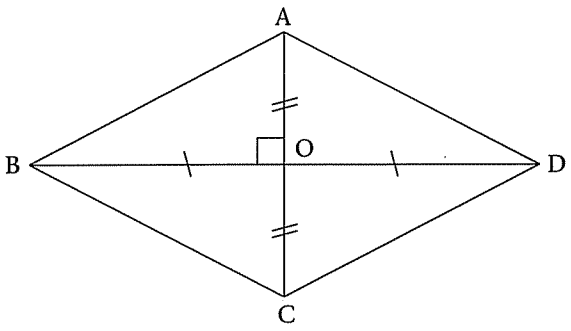
5. Construire la figure 3 symétrique de la figure 1 par rapport à la droite (CD).

6. a. Construire la figure 4 image de la figure 1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

b. Quelle autre transformation permet de passer de la figure 1 à la figure 4 ?

Problème *(12 points)*

ABCD est un losange dont les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O.
On donne : AB = 5 cm et AC = 6 cm.
Sur cette figure, les dimensions ne sont pas respectées.



Partie A

1. Calculer BO, justifier ; en déduire que BD = 8 cm.

2. Calculer la mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{ABO}$.

3. Calculer l'aire du losange ABCD.

Partie B

On place un point M sur le segment [AB].
La droite passant par M et parallèle à la droite (BD) coupe le côté [AD] en N.

1. On suppose que AM = 3. Calculer AN et MN. Justifier.

2. On pose AM = x. Montrer que MN = 1,6x.

Partie C

Pour cette partie, on a encore AM = x.
La droite passant par M et parallèle à la droite (AC) coupe le côté [BC] en P.
1. Exprimer BM en fonction de x, puis montrer que MP = 6 – 1,2x.

2. Calculer la valeur de x pour laquelle le triangle MNP est isocèle en M.

Partie D

1. Montrer que la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (MN) puis que AM = AN.
En déduire que la droite (AC) est la médiatrice du segment [MN].
De la même façon, on démontrerait que la droite (BD) est la médiatrice du segment [MP].

2. En déduire le rôle du point O pour le triangle MNP.

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = 2 - \frac{4}{5}$ donc $A = \frac{10}{5} - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$.

$B = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \div \frac{6}{5}$ donc $B = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{5}{6}$

donc $B = \frac{5}{3} - \frac{5}{9}$ donc $B = \frac{15}{9} - \frac{5}{9}$ donc $B = \frac{10}{9}$

2. $C = 2\sqrt{18} - 3\sqrt{2} + \sqrt{8}$

donc $C = 2\sqrt{9 \times 2} - 3\sqrt{2} + \sqrt{4 \times 2}$

donc $C = 2\sqrt{9 \times 2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

donc $C = 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ donc $C = 5\sqrt{2}$.

Exercice 2

1. $D = (3x - 2)^2 - 9$

donc $D = 9x^2 - 12x + 4 - 9$

donc $D = 9x^2 - 12x - 5$.

2. $D = (3x - 2)^2 - 3^2$

donc $D = (3x - 2 + 3)\ (3x - 2 - 3)$

donc $D = (3x + 1)(3x - 5)$.

3. $(3x + 1)(3x - 5) = 0$. Il s'agit d'une équation-produit. Ce produit est nul si et seulement si, l'un, au moins, des facteurs est nul. Soit $3x - 5 = 0$ ou $3x + 1 = 0$, soit $x = \frac{5}{3}$ ou $x = -\frac{1}{3}$.

Conclusion : les solutions de l'équation sont $\frac{5}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

Exercice 3

1. Soit (S) le système de deux équations à deux inconnues du premier degré ci-dessous.

(S) $\begin{cases} 2x + y = 41 \\ 3x + 2y = 64 \end{cases}$ que nous allons résoudre en utilisant la méthode par substitution.

Vérifions que le système (S) admet un couple solution. On a : $2 \times 2 - 1 \times 3 = 4 - 3 = 1$ et puisque $1 \neq 0$, le système admet bien un unique couple comme solution.

(S) est équivalent à $\begin{cases} y = 41 - 2x \\ 3x + 2y = 64 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} y = 41 - 2x \\ 3x + 2(41 - 2x) = 64 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} y = 41 - 2x \\ 3x + 82 - 4x = 64 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} y = 41 - 2x \\ -x = 64 - 82 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 18 \\ y = 41 - 36 = 5. \end{cases}$

Conclusion : le système admet l'unique couple (18 ; 5) comme solution.

2. Appelons x le prix d'un CD et y le prix d'un livre. Les données contenues dans l'énoncé nous conduisent à résoudre le système suivant :

$\begin{cases} 2x + y = 41 \\ 3x + 2y = 64. \end{cases}$

Or il s'agit, précisément, du système (S) résolu à la question précédente.

Conclusion : un CD coûte 18 euros alors qu'un livre coûtera 5 euros.

Exercice 4

1. $E = (\sqrt{7} + 1)^2 + (\sqrt{7} - 1)^2$

Donc $E = 7 + 2\sqrt{7} + 1 + 7 - 2\sqrt{7} + 1$, donc $E = 16$ (qui est effectivement un nombre entier).

2. D'après ce qui précède, on a l'égalité :

$(\sqrt{7} + 1)^2 + (\sqrt{7} - 1)^2 = 4^2$. Soit un triangle dont les côtés mesurent respectivement $\sqrt{7} - 1$; $\sqrt{7} + 1$ et 4. L'égalité précédente permet d'utiliser la réciproque du théorème de Pythagore et cela nous permet de conclure que le triangle est rectangle.

Activités géométriques

Exercice 1

1. a. Soit V le volume du bassin.

On a $V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 6$ donc $V = \frac{54}{3}\pi = 18\pi$ (en m^3).

Conclusion : Le volume contenu dans le bassin est environ 57 m^3 (arrondi au m^3 près).

b. On sait que $1 m^3$ équivaut à 1 000 litres. Donc le volume contenu dans le bassin est environ 57 000 litres, ce qui correspond à un volume très supérieur à 10 000 litres !

2. a. La pompe a un débit de 15 litres par seconde. Le volume contenu dans le bassin est, arrondi au litre près : 59 549 litres. Remplissons le tableau de proportionnalité ci-dessous :

Volume en litres	15	56 549
Temps en secondes	1	x

Donc, $x = \dfrac{56\,549}{15} = 3\,770$ secondes.

b. Une heure vaut 3 600 secondes donc il faudra plus d'une heure pour remplir le bassin avec la pompe considérée.

3. a. Le coefficient de réduction est le rapport $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Remarquons que ce rapport est inférieur à 1 ce qui atteste bien qu'il s'agit d'une réduction.

b. Soit V′ le volume du cône obtenu après une réduction de coefficient $\dfrac{2}{3}$. Le volume V′ est alors défini en fonction de V par la relation : $V' = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \times V$.

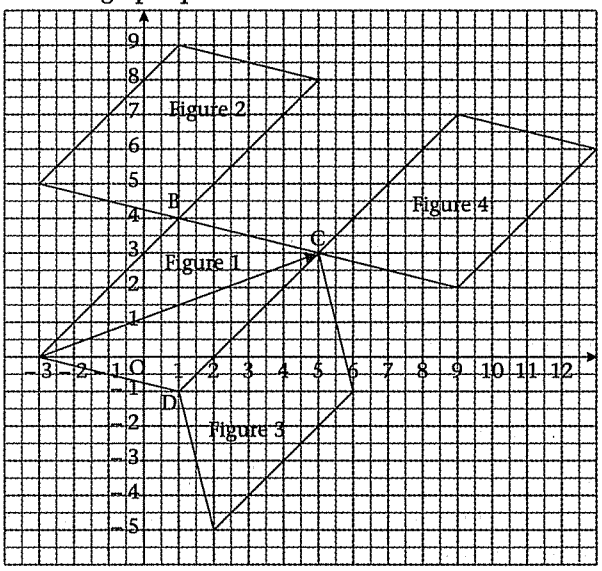
Donc $V' = \dfrac{8}{27} \times 18 \times \pi$.

Conclusion : Le volume d'eau exact dans le bassin est :

$V' = \dfrac{16}{3} \times \pi$ (en m^3).

Exercice 2

1. Voir le graphique.



2. Relativement au repère (O, I, J), on peut déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ à l'aide de la formule $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.
Donc $\overrightarrow{AB}$ (1 – (– 3) ; 4 – 0))
donc $\overrightarrow{AB}$ (4 ; 4).
De même, on a $\overrightarrow{DC}$ $(x_C - x_D ; y_C - y_D)$.
Donc $\overrightarrow{DC}$ (5 – 1 ; 3 – (– 1))
donc $\overrightarrow{DC}$ (4 ; 4).
Conclusion : on a établit l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

3. L'égalité vectorielle précédente implique que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

4. 5. 6. a. Voir le graphique.
b. La symétrie de centre C transforme la **figure 1** en **figure 4**.

Problème

Partie A

1. ABCD est un losange donc ses diagonales se coupent perpendiculairement en leur milieu O. Cela signifie que :
– O est le milieu du segment [BD] donc (BD = 2BO) ;
– Les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
Donc le triangle ABO est rectangle en O et l'on peut y appliquer le théorème de Pythagore.
Ainsi : $AB^2 = AO^2 + BO^2$
donc $BO^2 = AB^2 - AO^2$
Application numérique : $BO^2 = 5^2 - 3^2 = 16$
donc BO = 4 cm d'où BD = 8 cm.

2. Le triangle ABO est rectangle en O donc on peut y appliquer les formules de trigonométrie. En particulier :
$\cos \widehat{ABO} = \dfrac{BO}{AB}$ donc $\widehat{ABO} = \cos^{-1}\left(\dfrac{BO}{AB}\right)$

Application numérique : $\widehat{ABO} = \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{5}\right) \approx 37°$

3. L'aire du losange est : $\dfrac{AC \times BD}{2} = \dfrac{6 \times 8}{2} = 24$ cm².

Partie B

M est un point du segment [AB].
Par M on mène la parallèle à la droite (BD) qui coupe le segment [AD] en N donc les droites (MN) et (BD) sont parallèles.

1. Dans le triangle ABD, on a :
– M ∈ [AB] ;
– N ∈ [AD] ;
– Les droites (MN) et (BD) sont parallèles.
Dans ces conditions, le théorème de Thalès nous permet d'écrire l'égalité des rapports :
$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD} = \frac{MN}{BD}$.
En particulier : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ et $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BD}$.
Donc $AN = \frac{AM \times AD}{AB}$ et $MN = \frac{AM \times BD}{AB}$ (1)
Or ABCD étant un losange ses quatre cotés ont la même longueur donc AB = AD.
Donc AN = AM (2).
Applications numériques : AN = 3 cm et
$MN = \frac{3 \times 8}{5} = 4{,}8$ cm.

2. On pose $AM = x$.
La relation (1) nous permet alors de calculer MN.
Donc $MN = \frac{8x}{5} = 1{,}6x$.

Partie C

M ∈ [AB] et $AM = x$ donc $BM = BA - AM = 5 - x$.
Par M, on mène la parallèle à la droite (AC) qui coupe le segment [BC] en P donc les droites (MP) et (AC) sont parallèles.

1. Dans le triangle ABC, on a :
– M ∈ [AB] ;
– P ∈ [BC] ;
– Les droites (MP) et (AC) sont parallèles.
Dans ces conditions, le théorème de Thalès nous permet d'écrire l'égalité des rapports :
$\frac{BM}{BA} = \frac{BP}{BC} = \frac{MP}{AC}$.
En particulier $\frac{BM}{BA} = \frac{BP}{BC}$ et $\frac{BM}{BA} = \frac{MP}{AC}$
donc $BM = \frac{BP \times BA}{BC}$ et $MP = \frac{BM \times AC}{BA}$

Or ABCD étant un losange ses quatre côtés ont la même longueur donc AB = AD.
Applications numériques : L'unité est le cm.
BM = $(5 - x)$ et MP = $\frac{6(5-x)}{5} = 6 - 1{,}2x$.

2. Le triangle MNP est isocèle en M si et seulement si MN = MP.
MN = MP si et seulement si $1{,}6x = 6 - 1{,}2x$
MN = MP si et seulement si $1{,}6x + 1{,}2x = 6$
MN = MP si et seulement si $2{,}8x = 6$
MN = MP si et seulement si $x = \frac{6}{2{,}8} = \frac{15}{7}$.
Conclusion : Pour $x = \frac{15}{7}$, le triangle MNP est isocèle en M.

Partie D

1. La droite (MN) est parallèle à la droite (BD) et la droite (BD) est perpendiculaire à la droite (AC). Or si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Donc les droites (AC) et (MN) sont perpendiculaires.
De plus, l'égalité (2) montre que AM = AN donc M appartient à la médiatrice du segment [MN]. De ces deux déductions, il résulte que la droite (AC) est la médiatrice du segment [MN]. De la même façon, on montrerait que la droite (BD) est la médiatrice du segment [MP].

2. Nous savons que :
– (AC) est la médiatrice du segment [MN] ;
– (BD) est la médiatrice du segment [MP] ;
– Les segments [AC] et [BD] se coupent en leur milieu O.
Il en résulte que le point O est le point de concours des médiatrices du triangle MNP donc c'est le centre du cercle circonscrit au triangle.

SUJET 18 SUJET

NIGER ◈ JUIN 2004

SUJET

Activités numériques *(12 points)*

Dans cette partie, on détaillera les différentes étapes de calcul.

Exercice 1

1. On donne $A = \dfrac{\frac{2}{3} + 3}{\frac{1}{3} + 5}$.

Écrire A sous la forme d'une fraction irréductible.

2. On donne :$B = 2\sqrt{50} - 3\sqrt{8} + 7\sqrt{18}$.
Écrire B sous la forme $a\sqrt{2}$ avec a nombre entier.

3. On donne : $C = \dfrac{2{,}6 \times 10^2 \times 1{,}7 \times 10^2}{0{,}2 \times 10^5 \times 10^3}$. Donner l'écriture scientifique de C.

Exercice 2

On donne : $E = (5x - 4)^2 + (5x - 4)(x + 3)$.

1. Développer et réduire E.

2. Factoriser E.

3. Calculer E pour $x = -1$.

4. Résoudre l'équation : $(5x - 4)(6x - 1) = 0$.

Exercice 3

Athlétisme : 400 m

Au cours d'une course d'athlétisme (400 m) le temps mis par chaque coureur a été chronométré.
Ces mesures sont reportées dans le tableau ci-après :

Effectif des coureurs	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Temps en s.	48,65	49,02	50	50,12	50,13	520,45	512	51,80	51,85	51,90	52,05	52,20	52,60	53,28	54,80

Étude statistique de la course

1. Quelle est l'étendue de cette série ?

2. Donner la moyenne arrondie au centième de cette série.

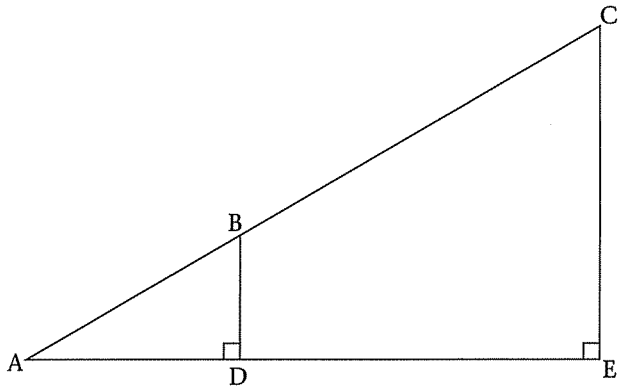
3. Donner la médiane de cette série.

4. Quel pourcentage de coureurs ont mis moins de 52,50 secondes pour effectuer les 400 mètres ?

Activités géométriques *(12 points)*

Exercice 1

Les points A, B et C sont alignés ainsi que les points A, D et E.
Les droites (BD) et (CE) sont perpendiculaires à la droite (AE).
AB = 2,5 ; BD = 1,5 ; CE = 4,5.



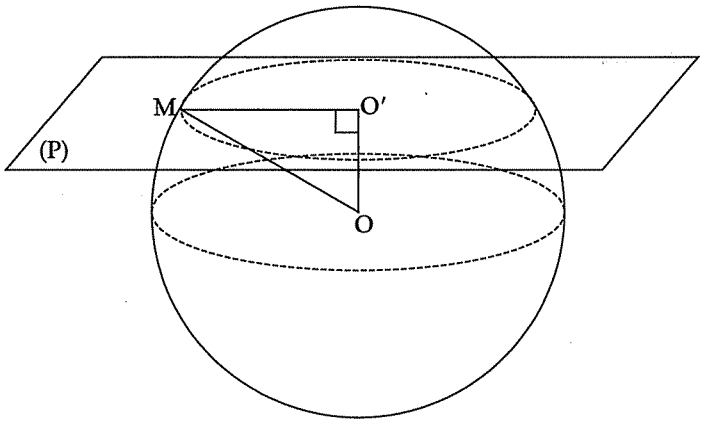
1. Calculer AD. Justifier.

2. Déterminer la mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{BAD}$. Justifier.

3. Calculer AC et AE. Justifier.

Exercice 2

On considère la sphère de centre O et de rayon 6 cm.



1. Écrire le volume d'une boule de rayon 6 cm et en donner un arrondi au mm^3.

2. On note O' le point tel que OO' = 4 cm.
(P) est le plan passant par le point O' et perpendiculaire à la droite (OO').
On note M le point appartenant au plan (P) et à la sphère. Aucun calcul n'est nécessaire pour les deux constructions suivantes.
a. Tracer en vraie grandeur le triangle OO'M.
b. Tracer en vraie grandeur l'intersection de la sphère et du plan.

Problème *(12 points)*

En utilisant la feuille de papier millimétré fournie, dans un repère orthonormal (O, I, J) d'unité le centimètre, placer les points suivants :
A(6 ; 5), B(2 ; – 3), C(– 4 ; 0).

1. Montrer que $AB = 4\sqrt{5}$.

2. On donne de plus $AC = \sqrt{125}$, $BC = \sqrt{45}$. En déduire la nature du triangle ABC. Justifier la réponse.

3. Calculer l'aire du triangle ABC en cm^2.

4. On considère le cercle circonscrit au triangle ABC.
a. Préciser la position de son centre appelé K et la longueur de son rayon. Justifier. Placer K.
b. Calculer les coordonnées de K.

5. a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
b. En déduire les coordonnées du point D tel que ACBD soit un parallèlogramme.
c. Placer le point D.

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = \dfrac{\frac{2}{3}+3}{\frac{1}{3}+5}$ donc $A = \dfrac{\frac{2}{3}+\frac{9}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{15}{3}}$

donc $A = \dfrac{\frac{11}{3}}{\frac{16}{3}} = \dfrac{11}{3} \times \dfrac{3}{16}$.

Conclusion : $A = \dfrac{11}{16}$.

2. $B = 2\sqrt{50} - 3\sqrt{8} + 7\sqrt{18}$
donc $B = 2\sqrt{25 \times 2} - 3\sqrt{4 \times 2} + 7\sqrt{9 \times 2}$
donc $B = 2 \times 5\sqrt{2} - 3 \times 2\sqrt{2} + 7 \times 3\sqrt{2}$
donc $B = 10\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 21\sqrt{2}$
Conclusion : $B = 25\sqrt{2}$.

3. $C = \dfrac{2{,}6 \times 10^2 \times 1{,}7 \times 10^2}{0{,}2 \times 10^5 \times 1{,}7 \times 10^3}$
donc $C = \dfrac{2{,}6 \times 1{,}7}{0{,}2} \times \dfrac{10^2 \times 10^2}{10^5 \times 10^3}$
donc $C = 22{,}1 \times 10^{2+2-5-3}$
Conclusion : L'écriture scientifique de C est $C = 2{,}21 \times 10^{-3}$.

Exercice 2

Soit $E = (5x - 4)^2 + (5x - 4)(x + 3)$
1. $E = 25x^2 - 40x + 16 + 5x^2 + 15x - 4x - 12$.
Conclusion : la forme développée de E est $E = 30x^2 - 29x + 4$.

2. $E = (5x - 4)(5x - 4) + (5x - 4)(x + 3)$
donc $E = (5x - 4)[(5x - 4) + (x + 3)]$
donc $E = (5x - 4)(5x - 4 + x + 3)$.
Conclusion : La forme factorisée de E est $E = (5x - 4)(6x - 1)$.

3. Pour $x = -1$, on a $E = 30(-1)^2 - 29(-1) + 4$
donc $E = 30 + 29 + 4$
donc $E = 63$.

4. Soit l'équation $(5x - 4)(6x - 1) = 0$.
Il s'agit d'une équation-produit. Ce produit est nul si, et seulement si, l'un, au moins, des facteurs est nul.
Soit $5x - 4 = 0$ ou $6x - 1 = 0$,
Soit $x = \frac{4}{5}$ ou $x = \frac{1}{6}$.

Conclusion : Les solutions de l'équation sont $\frac{4}{5}$ et $\frac{1}{6}$.

Exercice 3

1. L'étendue correspond à la différence entre le temps le plus long et le temps le plus court.
Cette étendue vaut donc : $54{,}80 - 48{,}65 = 6{,}15$ secondes.
Le temps moyen $\bar{x}$ mis pour accomplir un tour est le rapport défini ainsi :

$$\bar{x} = \frac{48{,}65 + 49{,}2 + 50 + 50{,}12 + 50{,}13 + 50{,}45 + 51 + 51{,}8 + 51{,}85 + 51{,}9 + 52{,}05 + 52{,}2 + 52{,}6 + 53{,}28 + 54{,}8}{15}$$

soit finalement : $\bar{x} = \frac{770{,}03}{15} = 51{,}34$ secondes.

3. Lorsque les temps sont rangés dans l'ordre croissant, la médiane de la série correspond au huitième temps (c'est-à-dire qu'il y a 7 temps inférieurs et 7 temps supérieur à cette valeur...). Le temps médian est donc de 51,80 secondes.

4. Il y a 12 coureurs qui ont parcouru la course en moins de 52,50 secondes.
Le pourcentage correspondant est défini par le rapport, $\frac{12}{15} = 80$ %.
Conclusion : 80 % des athlètes ont réalisé un temps inférieur à 52,50 secondes.

Activités géométriques

Exercice 1

Les droites (BD) et (CE) étant respectivement perpendiculaires à la droite (AE) en D et en E, les triangles ABD et ACE sont respectivement rectangles en D et en E.

1. Dans le triangle ABD rectangle en D, on peut appliquer le théorème de Pythagore.
Donc $AD^2 = AB^2 - BD^2$
donc $AD^2 = 4$
donc $AD = 2$.

2. Dans le triangle ABD rectangle en D, on peut appliquer les formules de trigonométrie.
En particulier, on a : $\sin \widehat{BAD} = \frac{BD}{AB}$ et $\frac{BD}{AB} = \frac{1,5}{2,5} = \frac{3}{5}$

donc $\widehat{BAD} = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$
donc $\widehat{BAD} \approx 37°$.

3. Dans le triangle ACE rectangle en E, on peut également appliquer les formules de trigonométrie.
En particulier, on a : $\sin \widehat{BAD} = \frac{EC}{AC}$ donc $AC = \frac{EC}{\sin \widehat{BAD}}$

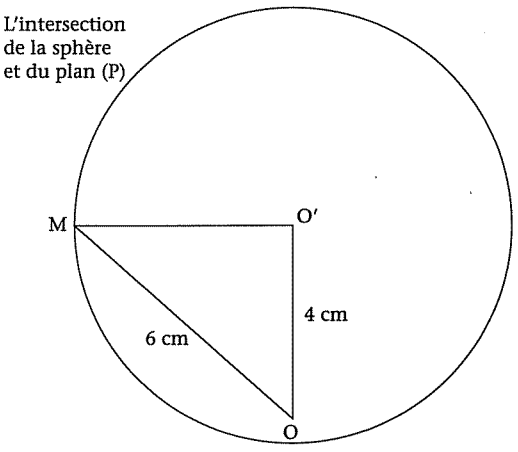
donc $AC = \frac{4,5}{\frac{3}{5}} = 7,5$.

Dès lors, nous pouvons appliquer le théorème de Pythagore pour trouver AE.
On a : $AE^2 = AC^2 - EC^2$
donc $AE^2 = 7,5^2 - 4,5^2 = 36$
donc $AE = 6$.

Exercice 2

On considère une boule de rayon R = 60 mm.

1. Le volume V de cette boule est : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ donc $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 60^3 = 288\,000\,\pi$ mm^3.



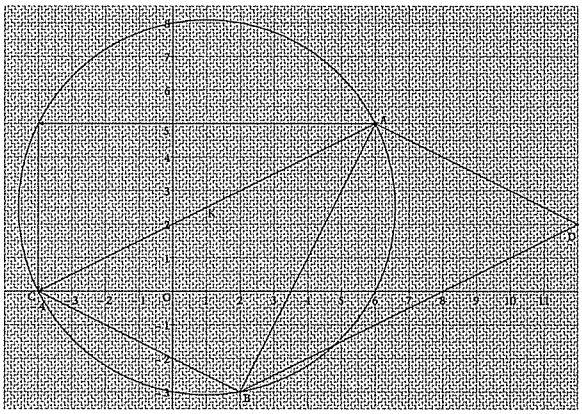
Conclusion : Le volume de la boule arrondi au mm^3 est : V = 904 779 mm^3.

2. (P) est le plan passant par O' et perpendiculaire à la droite (OO').
Donc, toute droite contenue dans ce plan sera perpendiculaire à la droite (OO').
En particulier, puisque le point M appartient au plan (P), il en résulte que la droite (MO') est perpendiculaire à la droite (OO').
Par conséquent cela prouve que le triangle MOO' est effectivement rectangle en O'.

a. Pour construire le triangle MOO', il suffit de connaître les longueurs des segments [OO'] et [OM].

b. L'intersection de la sphère et du plan (P) est le cercle de centre O' et de rayon [O'M].
Nous pouvons désormais réaliser les deux constructions demandées :
On sait que OO' = 4 cm. De plus M appartient à la sphère donc OM = R = 6 cm.
Voir figure page 187.

Problème



1. Le repère étant orthonormal, on peut déterminer la longueur du segment [AB] à l'aide de la formule suivante : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
On a ainsi : $AB = \sqrt{(2-6)^2 + (-3-5)^2}$
donc $AB = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = \sqrt{80}$
donc $AB = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$ unités
Conclusion : L'unité étant le cm, on obtient $AB = 2\sqrt{5}$ cm.

2. On a $AC = \sqrt{125}$, $BC = \sqrt{45}$ et $AB = 4\sqrt{5}$.
Il en résulte que : $AC^2 = 125$ et $AB^2 + BC^2 = 125$.
Dans le triangle ABC, on a $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc la réciproque du théorème de Pythagore nous permet de conclure que le triangle ABC est rectangle en B.

3. ABC étant rectangle en B, son aire vaut donc :
$\frac{AB \times BC}{2} = \frac{4\sqrt{5} \times \sqrt{45}}{2} = 30$ cm².

4. Le triangle ABC est rectangle en B donc inscriptible dans un cercle dont le centre est le milieu de l'hypoténuse [AC].
a. Le centre K du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu du segment [AC].
b. Les coordonnées $(x_K ; y_K)$ du point K peuvent se calculer à l'aide de la formule suivante :

$$\begin{cases} x_K = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_K = \frac{y_A + y_C}{2} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x_K = \frac{6-4}{2} = 1 \\ y_K = \frac{5+0}{2} = 2{,}5 \end{cases}$$

Conclusion : Les coordonnées du point K relativement au repère (O, I, J) sont (1 ; 2,5).

5. a. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont
$(x_C - x_A ; y_C - y_A)$.
Avec $x_C - x_A = -4 - 6 = -10$ et $y_C - y_A = 0 - 5 = -5$
donc $\overrightarrow{AC}(-10 ; -5)$

b. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DB}$ sont : $(x_B - x_D ; x_B - y_D)$.
ACBD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.
Or deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs coordonnées relativement à un même repère sont égales.
Ainsi, l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$ se traduit-elle par les égalités :

$$\begin{cases} 2 - x_D = -10 \\ -3 - y_D = -5 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x_D = 12 \\ y_D = 2 \end{cases}$$

Conclusion : Les coordonnées du point D relativement au repère (O, I, J) sont (12 ; 2).

c. Voir graphique précédent.

SUJET 19

◈ *GROUPEMENT 1, SEPTEMBRE 2004*

SUJET

Activités numériques (12 points)

Exercice 1

Les calculs devront être détaillés.

1. Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible : $A = \frac{2}{3} - \frac{7}{3} \times \frac{8}{21}$.

2. Écrire B sous la forme $a\sqrt{2}$, où a est un nombre entier :
$B = \sqrt{50} - 2\sqrt{18}$.

Exercice 2

On donne l'expression $A = (2x + 3)^2 + (2x + 3)(5x - 7)$.

1. Développer et réduire l'expression A.

2. Factoriser l'expression A.

3. Résoudre l'équation $(2x + 3)(7x - 4) = 0$.

Exercice 3

1. Résoudre le système :
$\begin{cases} x + 2y = 76 \\ 4x + y = 115. \end{cases}$

2. Le responsable du CDI d'un collège voudrait renouveler le stock d'atlas et de dictionnaires. Au premier trimestre, il commande 1 atlas et 2 dictionnaires. La facture est de 76 euros. Au deuxième trimestre, les prix n'ont pas changé, il commande 4 atlas et 1 dictionnaire. La facture est de 115 euros.
Quel est le prix d'un atlas? Quel est le prix d'un dictionnaire?

Exercice 4

Après un contrôle, les notes de 25 élèves ont été regroupées dans le tableau ci-dessous.

Note n	$0 \leqslant n < 4$	$4 \leqslant n < 8$	$8 \leqslant n < 12$	$12 \leqslant n < 16$	$16 \leqslant n < 20$
Nombre d'élèves	1	6	7		3

1. Compléter le tableau en indiquant le nombre d'élèves ayant obtenu une note comprise entre 12 et 16 (16 exclu).

2. Combien d'élèves ont obtenu moins de 12?

3. Combien d'élèves ont obtenu au moins 8?

4. Quel est le pourcentage des élèves qui ont obtenu une note comprise entre 8 et 12 (12 exclu)?

Activités géométriques (12 points)

Exercice 1

1. Tracer sur la copie un segment [EF] de longueur 7 cm et de milieu O.

Tracer le cercle de diamètre [EF] puis placer un point G sur le cercle tel que : $\widehat{\text{FEG}} = 26$.

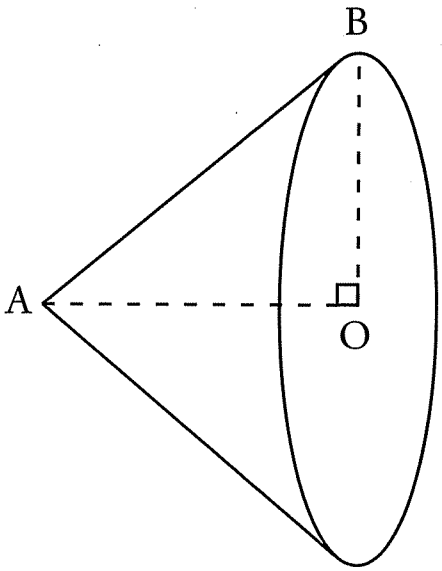
2. Démontrer que le triangle EFG est un triangle rectangle en G.

3. Calculer une valeur approchée de la longueur FG, arrondie au millimètre.

4. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{\text{GOF}}$ (justifier votre réponse).

Exercice 2

On considère un cône de révolution semblable à celui qui est représenté ci-dessous avec : AO = 2 cm et BO = 3 cm.



1. Calculer la longueur de la génératrice [AB] : donner en centimètres la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.

2. Calculer le volume du cône : donner en cm^3 la valeur exacte puis la valeur arrondie à l'unité.

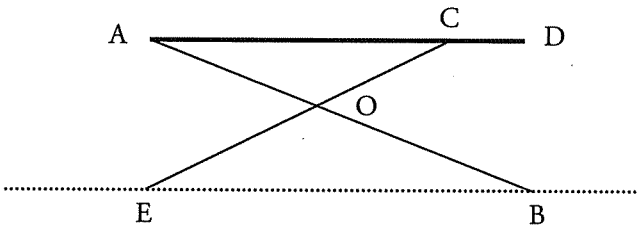
Exercice 3

La figure ci-dessous donne le schéma d'une table à repasser.

Le segment [AD] représente la planche.

Les segments [AB] et [EC] représentent les pieds.

Les droites (AB) et (EC) se coupent en O.



On donne : AD = 125 cm ; AC = 100 cm ; OA = 60 cm ; OB = 72 cm ; OE = 60 cm ; OC = 50 cm.

1. Montrer que la droite (AC) est parallèle à la droite (EB).

2. Calculer l'écartement EB en centimètres.

Problème (12 points)

Dans un repère orthonormal (O, I, J), on considère les points A(−4 ; 3), B(3 ; 2) et C(1 ; −2). L'unité graphique est le centimètre.

Partie A

1. Placer les points A, B, C dans un repère (O, I, J), l'unité est le centimètre.

2. a) Calculer AB.

b) On admet que le calcul donne $AC = \sqrt{50}$ et $BC = \sqrt{20}$. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC?

3. Soit H le milieu du segment [BC]. Vérifier par le calcul que H a pour coordonnées (2 ; 0).

4. Pourquoi le segment [AH] est-il une hauteur du triangle ABC?

5. a) Prouver que $AH = 3\sqrt{5}$.

b) Calculer l'aire du triangle ABC.

Partie B

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

2. Le point D est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

a) Placer le point D.

b) Montrer par le calcul que D a pour coordonnées (8 ; −3).

3. Quelle est la nature du quadrilatère ACDB? Justifier.

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = \dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{3} \times \dfrac{8}{21} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{7 \times 8}{3 \times 7 \times 3}$

donc $A = \dfrac{2}{3} - \dfrac{8}{9} = \dfrac{2 \times 3}{3 \times 3} - \dfrac{8}{9}$

donc $A = \dfrac{6}{9} - \dfrac{8}{9} = -\dfrac{2}{9}$.

2. $B = \sqrt{50} - 2\sqrt{18} = \sqrt{25 \times 2} - 2\sqrt{9 \times 2}$

donc $B = 5\sqrt{2} - 2 \times 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$

donc $B = -\sqrt{2}$.

Exercice 2

1. $A = (2x + 3)^2 + (2x + 3)(5x - 7)$

donc $A = 4x^2 + 12x + 9 + 10x^2 - 14x + 15x - 21$

donc $A = 14x^2 + 13x - 12$.

2. $A = (2x + 3)(2x + 3) + (2x + 3)(5x - 7)$

donc $A = (2x + 3)(2x + 3 + 5x - 7)$

donc $A = (2x + 3)(7x - 4)$.

3. Soit l'équation $(2x + 3)(7x - 4) = 0$.

Il s'agit d'une équation-produit. Ce produit est nul si et seulement si l'un des facteurs, au moins, est nul.

C'est-à-dire si $2x + 3 = 0$ ou $7x - 4 = 0$, soit $x = -\dfrac{3}{2}$ ou $x = \dfrac{4}{7}$.

Les solutions de l'équation sont : $-\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{4}{7}$.

Exercice 3

1. Soit (S) le système de deux équations à deux inconnues du premier degré ci-dessous.

(S) $\begin{cases} x + 2y = 76 \\ 4x + y = 115 \end{cases}$

Vérifions que le système (S) admet un couple solution.

On a : $1 \times 1 - 2 \times 4 = 1 - 8 = -7$. Puisque $-7 \neq 0$, le système admet bien un unique couple comme solution.

Résolvons ce système en utilisant la méthode par substitution.

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 76 - 2y \\ 4x + y = 115 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 76 - 2y \\ 4(76 - 2y) + y = 115 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 76 - 2y \\ 304 - 8y + y = 115 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 76 - 2y \\ -7y = -189 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 76 - 2y \\ y = 27 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 76 - 2 \times 27 \\ y = 27 \end{cases}$

soit $\begin{cases} x = 22 \\ y = 27 \end{cases}$

L'unique couple solution du système est le couple (22 ; 27).

2. Soit x le prix d'un atlas et y le prix d'un dictionnaire.

La commande du premier trimestre d'un montant de 76 € conduit à l'équation : $x + 2y = 76$.

La commande du second trimestre d'un montant de 115 € conduit à l'équation : $4x + y = 115$.

Autrement dit (x,y) est solution du système :

(S) $\begin{cases} x + 2y = 76 \\ 4x + y = 115. \end{cases}$

D'après la question précédente, le couple solution de ce système est :

(22 ; 27).

Le prix d'un atlas est de 22 € et celui d'un dictionnaire de 27 €.

Exercice 4

1. Tableau

Note n	$0 \leqslant n < 4$	$4 \leqslant n < 8$	$8 \leqslant n < 12$	$12 \leqslant n < 16$	$16 \leqslant n < 20$
Nombre d'élèves	1	6	7	8	3

2. Il y a : $1 + 6 + 7 = 14$ élèves qui ont obtenu moins de 12.

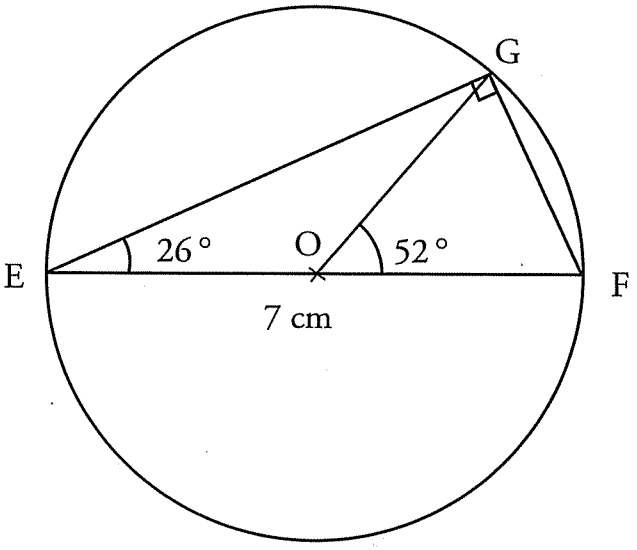
3. Il y a : $7 + 8 + 3 = 18$ élèves qui ont obtenu au moins 8.

4. Le pourcentage des élèves ayant obtenu une note comprise entre 8 et 12 exclu est défini par le rapport : $\frac{7}{25} = 0{,}28$ soit 28 %.

Activités géométriques

Exercice 1

1. Figure



2. Le triangle EFG est inscrit dans le cercle de diamètre [EF]. Or tout triangle inscrit dans un cercle ayant un côté comme diamètre est rectangle.

Donc le triangle EFG est rectangle en G.

3. Le triangle EFG est rectangle en G donc on peut y appliquer les formules de trigonométrie.

En particulier, on a : $\sin \widehat{FEG} = \dfrac{FG}{EF}$ donc $FG = EF \times \sin \widehat{FEG}$.

Numériquement, on a : $FG = 7 \times \sin 26 \approx 3{,}1$ cm.

4. Les angles $\widehat{FEG}$ et $\widehat{FOG}$ représentent un angle inscrit et un angle au centre correspondant du cercle interceptant le même arc de cercle FG.

D'après le théorème de l'angle inscrit, on peut dire que

$\widehat{GOF} = \widehat{FOG} = 2 \times \widehat{FEG}$. Finalement, on a : $\widehat{GOF} = 2 \times 26 = 52$.

Exercice 2

1. Il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle AOB rectangle en O.

On a ainsi : $AO^2 + OB^2 = AB^2$ donc $AB^2 = 2^2 + 3^2 = 13$.

Comme AB est une longueur $(AB > 0)$ donc $AB = \sqrt{13} \approx 3{,}6$ cm.

2. Le volume V du cône est :

$V = \dfrac{1}{3} \times \pi \times OB^2 \times AO$

$V = \dfrac{1}{3} \times 3^2 \times 2 \times \pi = 6\pi \text{ cm}^3$.

La valeur arrondie à l'unité de ce volume est : 19 cm^3.

Exercice 3

1. Les triangles OAC et OEB de sommet commun O sont tels que :

$B \in (AO)$, $E \in (OC)$; les points A, O et B d'une part et C, O et E d'autre part sont alignés dans cet ordre.

De plus, on a : $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{60}{72} = \dfrac{5}{6}$ et $\dfrac{OC}{OE} = \dfrac{50}{60} = \dfrac{5}{6}$ donc $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OC}{OE}$.

Dans ces conditions, la réciproque du théorème de Thalès nous permet de conclure que les droites (AC) et (EB) sont parallèles.

2. Les triangles OAC et OEB de sommet commun O sont tels que :

$B \in (AO)$;

$E \in (OC)$.

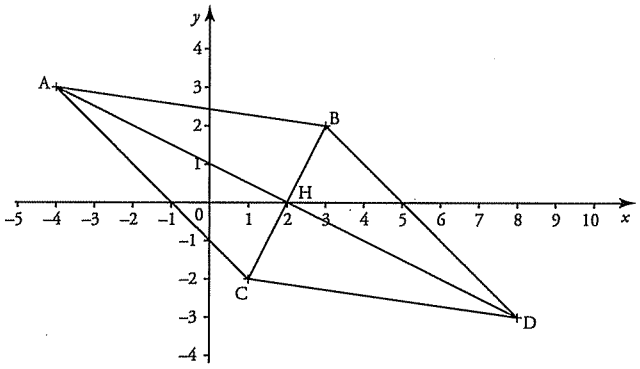
Les droites (AC) et (EB) sont parallèles.

Dans ces conditions le théorème de Thalès nous permet d'écrire les égalités des rapports :
$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OE} = \frac{AC}{EB}$.
En particulier, on a : $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{EB}$ d'où $EB = \frac{OB \times AC}{OA}$.
Numériquement, on obtient : $EB = \frac{72 \times 100}{60} = 120$ cm.

Problème

Partie A

1. Voir graphique ci-dessous.



2. a) Le repère est orthonormé donc on peut calculer la longueur du segment [AB] à l'aide de la formule :
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
On obtient alors :
$AB = \sqrt{(3-(-4))^2 + (2-3)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$ cm.
b) Un calcul analogue nous conduirait aux résultats suivants :
$AC = \sqrt{50}$ cm et $BC = \sqrt{20}$ cm.
On peut en déduire que le triangle ABC possède deux côtés de même longueur (AB =

CORRIGÉ

AC) et par conséquent ce triangle est isocèle en A.

3. Appelons H le milieu du segment [BC]. Les coordonnées $(x_H\,;\,y_H)$ du point H peuvent s'exprimer en fonctions des coordonnées des points B et C.

$$\begin{cases} x_H = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ y_H = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases}$$

donc $\begin{cases} x_H = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ y_H = \dfrac{2-2}{2} = 0 \end{cases}$

Le point H a pour coordonnées (2 ; 0).

4. H est le milieu du segment [BC] donc (AH) est la médiane du triangle ABC issue de A. Or le triangle ABC est isocèle en A, donc la médiane issue de A est également la hauteur (issue de A).

5. a) (AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC qui coupe [BC] en H. Il en résulte que le triangle ABH est rectangle en H et donc nous pouvons y appliquer le théorème de Pythagore.

Nous avons donc :

$AB^2 = AH^2 + HB^2$ d'où

$AH^2 = AB^2 - HB^2$

de plus H est le milieu du segment [BC] donc

$$HB = \frac{1}{2} \times BC = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}\,\text{cm}.$$

Numériquement cela donne : $AH^2 = 50 - 5 = 45$.

Comme AH est une longueur AH est positif, on obtient finalement :

$AH = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm.

b) L'aire du triangle ABC est :

$$\frac{BC \times AH}{2} = \frac{\sqrt{20} \times 3\sqrt{5}}{2} = 15\,\text{cm}^2.$$

Partie B

1. Relativement au repère (O ; I, J) les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ se calculent à l'aide de la formule suivante :

$\overrightarrow{AC}(x_C - x_A\,;\, y_C - y_A)$.

On obtient alors $\overrightarrow{AC}(1-(-4)\,;\,-2-3)$.

Conclusion : les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(5\,;\,-5)$.

2. a) Voir dessin.

b) Le point D est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Cela se traduit vectoriellement par l'égalité : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.

Or deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées, relativement à un même repère, sont égales.

Cela nous donne une condition nécessaire et suffisante pour déterminer les coordonnées $(x_D\,;\,y_D)$ du point D.

On aura ainsi :

$\overrightarrow{BD}(x_D - 3\,;\,y_D - 2)$ et $\overrightarrow{AC}(5\,;\,-5)$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.

Donc $\begin{cases} x_D - 3 = 5 \\ y_D - 2 = -5 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x_D = 8 \\ y_D = -3. \end{cases}$

Les coordonnées du point D sont donc $(8\,;\,-3)$.

3. L'égalité vectorielle $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ traduit le fait que le quadrilatère ACDB est un parallélogramme.

Or, par hypothèse, H est le milieu du segment [BC] et nous avons établi que le triangle AHB est rectangle en H. Cela implique que les diagonales du parallélogramme sont perpendiculaires en H.

Or tout parallélogramme ayant des diagonales perpendiculaires est un losange.

Conclusion : ACDB est un losange.

SUJET 20

GROUPEMENT 2, SEPTEMBRE 2004

Activités numériques (12 points)

Exercice 1

On donne les nombres A et B : $A = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$; $B = \frac{\frac{8}{3} - 2}{\frac{3}{5}}$.

Écrire A et B sous forme de fractions irréductibles, en détaillant les calculs.

Exercice 2

On donne le nombre $C = 3\sqrt{15} + \sqrt{60}$.

Écrire C sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers.

Exercice 3

On donne l'expression $E = (3x - 4)^2 - 4x^2$.

1. Développer et réduire E.

2. Factoriser E.

3. a) Calculer E pour $x = 0$.

b) Calculer E pour $x = -1$.

4. Résoudre l'équation $(5x - 4)(x - 4) = 0$.

Exercice 4

1. Résoudre le système : $\begin{cases} x - y = 8 \\ 7x + 5y = 104. \end{cases}$

2. Une bibliothèque achète 7 DVD et 5 livres.

Le prix total est de 104 euros.

Un livre coûte 8 euros de moins qu'un DVD.

a) Quel est le prix d'un DVD ?

b) Quel est le prix d'un livre ?

SUJET

Activités géométriques (12 points)

Exercice 1

1. Dans un repère orthonormé (O, I, J), l'unité étant le centimètre, placer les points suivants : A(2 ; −1) , B(−2 ; 3) et C(−4 ; −3).

2. a) Calculer AC et BC.

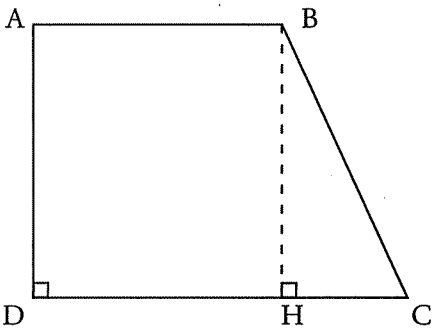
b) En déduire que le triangle ABC est isocèle.

3. Démontrer que J est le milieu du segment [AB].

4. Démontrer que la droite (CJ) est la médiatrice du segment [AB].

Exercice 2

La famille Hoarau possède un terrain ABCD dont la forme est un trapèze rectangle comme le montre le schéma ci-dessous. On donne : AB = 15 m ; AD = 20 m ; DC = 25 m .



1. Montrer que l'aire du terrain est égale à 400 m^2.

2. Calculer BC. On arrondira au dixième de mètre.

3. M. Hoarau aura-t-il assez de 90 mètres de grillage pour clôturer son terrain ? Justifiez la réponse.

Exercice 3

Dans cet exercice, l'unité est le centimètre. On considère le triangle ABC tel que AB = 4, AC = 6 et BC = 3.

1. Construire le triangle en vraie grandeur.

2. On désigne par I le milieu du segment [AC].

a) Sur la figure précédente, construire le symétrique D du point B par rapport au point I.

b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD? Justifier.

3. On désigne par F le symétrique de B par rapport à la droite (AC). Démontrer que les droites (DF) et (AC) sont parallèles.

Problème (12 points)

Partie A

Un professeur d'éducation physique et sportive fait courir ses élèves autour d'un stade rectangulaire mesurant 90 m de long et 60 m de large.

1. Calculer, en mètres, la longueur d'un tour de stade.

2. Pour effectuer 15 tours en 24 minutes à vitesse constante, combien de temps un élève doit-il mettre pour faire un tour? On donnera la réponse en minutes et secondes.

3. Un élève parcourt 6 tours en 9 minutes. Calculer sa vitesse en m/min, puis en km/h.

Partie B

On a relevé le nombre de pulsations par minute de 32 élèves avant qu'ils n'effectuent leurs tours de stade. Les résultats obtenus sont les suivants :

57	61	55	67	59	52	59	63
62	65	59	54	59	57	62	54
61	65	63	61	63	55	66	63
61	59	62	63	58	61	59	63

1. Montrer que le nombre moyen de pulsations par minute est égal à 60,25.

2. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre n de pulsations par minute	$52 \leqslant n < 56$	$56 \leqslant n < 60$	$60 \leqslant n < 64$	$64 \leqslant n < 68$
Effectif	5			

3. Faire l'histogramme représentant le tableau ci-dessus.

Les unités choisies sont : sur l'axe des abscisses, 1 cm pour représenter 1 pulsation par minute ; sur l'axe des ordonnées, 1 cm pour représenter 1 élève.

4. Combien d'élèves ont au moins 60 pulsations par minute?

5. Quel est le pourcentage d'élèves ayant un nombre de pulsations par minute inférieur à 60?

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

$A = \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{6}$

donc $A = \dfrac{4}{18} + \dfrac{3}{18} = \dfrac{7}{18}$.

$B = \dfrac{\frac{8}{3} - 2}{\frac{3}{5}} = \dfrac{\frac{8}{3} - \frac{6}{3}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}}$

donc $B = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{3} = \dfrac{10}{9}$.

Exercice 2

$C = 3\sqrt{15} + \sqrt{60} = 3\sqrt{15} + \sqrt{4 \times 15}$

donc $C = 3\sqrt{15} + 2\sqrt{15}$

donc $C = 5\sqrt{15}$.

Exercice 3

1. $E = (3x - 4)^2 - 4x^2$

donc $E = 9x^2 - 24x + 16 - 4x^2$

donc $E = 5x^2 - 24x + 16$.

2. $E = (3x - 4)^2 - 4x^2$

donc $E = (3x - 4)^2 - (2x)^2$

donc $E = (3x - 4 - 2x)(3x - 4 + 2x)$

donc $E = (x - 4)(5x - 4)$.

3. a) Pour $x = 0$ on a : $E = 16$.

b) Pour $x = -1$ on a : $E = 5 + 24 + 16 = 45$.

4. Soit l'équation $(x - 4)(5x - 4) = 0$.

Il s'agit d'une équation-produit. Ce produit est nul si et seulement si l'un des facteurs, au moins, est nul.

C'est-à-dire si $x - 4 = 0$ ou $5x - 4 = 0$, soit $x = 4$ ou $x = \frac{4}{5}$.

Les solutions de l'équation sont : 4 et $\frac{4}{5}$.

Exercice 4

1. Soit (S) le système de deux équations à deux inconnues du premier degré ci-dessous que nous allons résoudre en utilisant la méthode par substitution.

(S) $\begin{cases} x - y = 8 \\ 7x + 5y = 104 \end{cases}$

Vérifions que le système (S) admet un couple solution.

On a : $1 \times 5 + 1 \times 7 = 5 + 7 = 12$ et puisque $12 \neq 0$, le système admet bien un unique couple comme solution.

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 8 + y \\ 7x + 5y = 104 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 8 + y \\ 7(8 + y) + 5y = 104 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 8 + y \\ 56 + 7y + 5y = 104 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 8 + y \\ 12y = 104 - 56 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 8 + y \\ y = 4 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 8 + 4 \\ y = 4 \end{cases}$

(S) est équivalent à $\begin{cases} x = 12 \\ y = 4. \end{cases}$

L'unique couple solution du système est le couple (12, 4).

2. Soit x le prix d'un DVD et y le prix d'un livre.

La commande de la bibliothèque d'un montant de 104 € conduit à l'équation : $7x + 5y = 104$.

Un livre coûte 8 euros de moins qu'un DVD conduit à l'équation : $x - y = 8$.

Autrement dit (x,y) est solution du système :

(S) $\begin{cases} x - y = 8 \\ 7x + 5y = 104. \end{cases}$

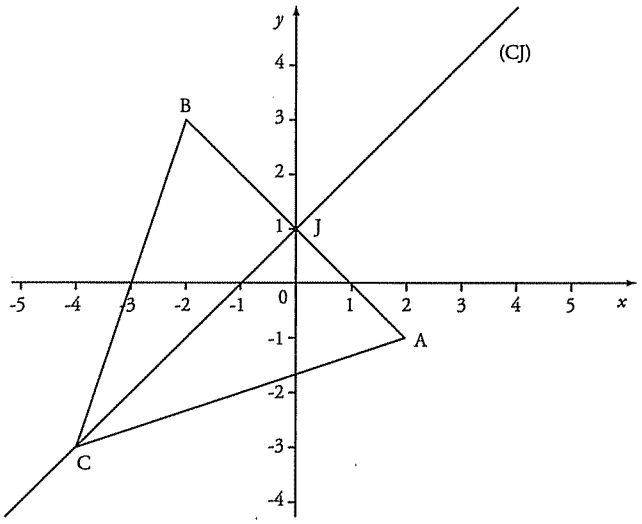
D'après la question précédente, le couple solution de ce système est (12, 4).

Le prix d'un DVD est de 12€ et celui d'un livre de 4€.

Activités géométriques

Exercice 1

1. Voir figure ci-après.



2. a) Le repère est orthonormé donc on peut calculer la longueur des segments [AC] et [BC] à l'aide des formules :

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

donc $AC = \sqrt{(-4-2)^2 + (-3-(-1))^2}$

$AC = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$ cm.

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

donc $BC = \sqrt{(-4-(-2))^2 + (-3-3)^2}$

$BC = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$ cm.

b) D'après la question précédente on peut affirmer que le triangle ABC possède deux côtés de même longueur (AC = BC) donc il est isocèle en C.

3. Appelons H le milieu du segment [AB].

Les coordonnées $(x_H\,;\,y_H)$ du point H peuvent s'exprimer en fonctions des coordonnées des points A et B.

On a ainsi :

$$\begin{cases} x_H = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ \\ y_H = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

donc $\begin{cases} x_H = \dfrac{2-2}{2} = 0 \\ \\ y_H = \dfrac{3-1}{2} = 1. \end{cases}$

Le point H a pour coordonnées (0 ; 1). Le point J admet les mêmes coordonnées. Or si deux points ont les mêmes coordonnées alors ils sont confondus.

Conclusion : le milieu du segment [AB] est le point J.

4. J est le milieu du segment [AB] donc cela signifie que la droite (CJ) est la médiane du triangle ABC issue de C. Or nous avons démontré que le triangle ABC est isocèle en C. Nous pouvons alors en conclure que la médiane issue de C est aussi la médiatrice du segment [AB].

Conclusion : (CJ) est la médiatrice du segment [AB].

Exercice 2

1. L'aire du trapèze est définie par la relation :

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} \times (\text{grande base} + \text{petite base}) \times \text{hauteur}.$$

$$\text{Donc Aire} = \frac{(AB + CD) \times AD}{2} = \frac{(15 + 25) \times 20}{2} = 400 \text{ m}^2.$$

2. Le point H appartient au segment [CD] donc $CD = CH + HD$ d'où $CH = CD - HD$. De plus, ABHD est un rectangle donc

$AB = HD = 15$ m et $AD = HB = 20$ m.

Finalement, $CH = 25 - 15 = 10$ m.

Le triangle BCH est rectangle en H donc on peut y appliquer le théorème de Pythagore.

On a ainsi : $BC^2 = CH^2 + HB^2$ d'où : $BC^2 = 10^2 + 20^2 = 500$.

Comme BC est une longueur BC est positif et on a finalement :

$BC = 10\sqrt{5} \approx 22{,}4$ m.

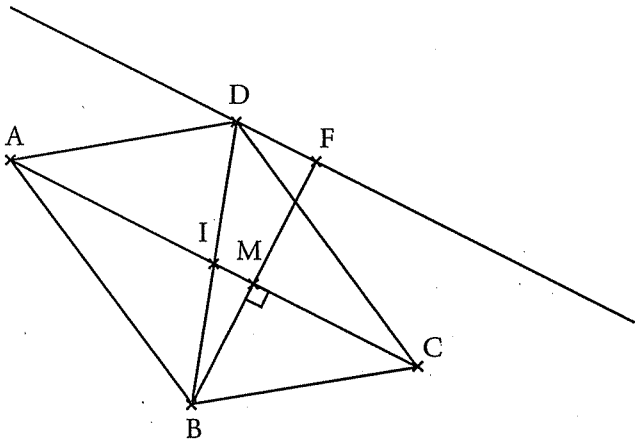
3. Le périmètre P du terrain est :

$P = \text{AB} + \text{BC} + \text{CD} + \text{DA} \approx 15 + 22{,}4 + 25 + 20 \approx 82{,}4$ m.

Avec 90 m de grillage, M. Hoarau aura largement de quoi clôturer son terrain.

Exercice 3

1. Constructions :



2. a) Voir construction ci-dessus.

b) D est le symétrique de B par rapport à I donc I est le milieu du segment [BD]. Par hypothèse, I est le milieu du segment [AC], donc I est le milieu des segments [AC] et [BD].

Or tout quadrilatère ayant ses diagonales se coupant en leur milieu est un parallélogramme.

Conclusion : ABCD est un parallélogramme.

3. F est le symétrique de B par rapport à la droite (AC) donc cela signifie que la droite (AC) est la médiatrice du segment [BF].

Dès lors, appelons M le point d'intersection des droites (AC) et (BF).

M appartenant à la médiatrice du segment [BF], il est équidistant des points B et F, M est donc le milieu du segment [BF].

De plus I est le milieu du segment [BD].

En conséquence, dans le triangle BDF, nous savons que I est le milieu de [BD] et M est le milieu de [BF].

Or, dans un triangle, la droite qui joint les milieux de deux des côtés est parallèle au troisième côté.

Il en résulte que les droites (IM) et (DF) sont parallèles.

Pour conclure, disons simplement que les points A, I et C d'une part et A, M et C d'autre part sont alignés, donc les droites (IM) et (AC) sont confondues.

Les droites (DF) et (AC) sont donc parallèles.

Problème

Partie A

1. Le stade a une forme rectangulaire donc la longueur d'un tour va correspondre au périmètre du rectangle : $(90 + 60) \times 2 = 300\,\text{m}$.

2. Il s'agit de compléter le tableau de proportionnalité suivant (car la vitesse est supposée constante).

Distance parcourue (en tours)	15	1
Temps de parcours (en minutes)	24	1,6

On convertit : 1,6 min = 1 min + 0,6 min = 1 min + 0,6 × 60 s= 1 min + 36 s.

Pour effectuer un tour, il lui faudra en moyenne 1 minute et 36 secondes.

3. Un élève parcourt 6 tours en 9 minutes. Cela représente donc 1800 m en 9 minutes.

Sa vitesse est donc de $\dfrac{1800}{9} = 200\,\text{m/min}$ soit $200 \div 1000 = 0{,}2\,\text{km/min}$ ou encore $0{,}2 \times 60 = 12\,\text{km/h}$.

Partie B

1. Il s'agit de calculer le nombre moyen de pulsations par minute des 32 élèves. On nous demande donc de calculer une moyenne. Cette moyenne est :

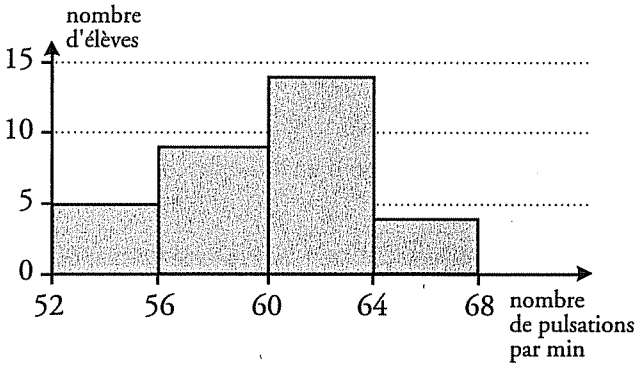
$$\frac{52 + 54 \times 2 + 55 \times 2 + 57 \times 2 + 58 + 59 \times 6}{32} + \frac{61 \times 5 + 62 \times 3 + 63 \times 6 + 65 \times 2 + 66 + 67}{32} = 60{,}25.$$

Le nombre moyen de pulsations par minute est 60,25.

2. Tableau

Nombre n de pulsations par minute	$52 \leqslant n < 56$	$56 \leqslant n < 60$	$60 \leqslant n < 64$	$64 \leqslant n < 68$
Effectif	5	9	14	4

3. Graphique



4. Il y a : $14 + 4 = 18$ élèves qui ont au moins 60 pulsations par minute.

5. Il y a $5 + 9 = 14$ élèves qui ont moins de 60 pulsations par minute.
En pourcentage cela donne :
$\frac{14}{32} = 0{,}4375$; soit 43,75 %.

BREVET
MATHÉMATIQUES
SESSION 2005

SUJET 21

◈ *GROUPEMENT I, JUIN 2005*

SUJET

Activités numériques

Exercice 1

Soit $A = \dfrac{5}{3} - \dfrac{7}{3} \times \dfrac{9}{4}$ et $B = \sqrt{45} - 12\sqrt{5}$.

1. Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Écrire B sous la forme $a\sqrt{5}$ où a est un entier relatif.

Exercice 2

On donne l'expression $A = (2x - 3)^2 - (4x + 7)(2x - 3)$.

1. Développer et réduire A.

2. Factoriser A.

3. Résoudre l'équation $(2x - 3)(-2x - 10) = 0$.

Exercice 3

Un pâtissier dispose de 411 framboises et de 685 fraises. Afin de préparer des tartelettes, il désire répartir ces fruits en les utilisant tous et en obtenant le maximum de tartelettes identiques.

1. Calculer le nombre de tartelettes.

2. Calculer le nombre de framboises et de fraises dans chaque tartelette.

Exercice 4

Une élève de CP fait des courses pour elle et ses camarades :
– la première fois, elle achète 5 crayons et 2 gommes pour 10,90 € ;
– la seconde fois, elle achète 8 crayons et 3 gommes pour 17,20 €.

En utilisant un système d'équations, aider l'élève de CP à retrouver le prix de chaque article.

Activités géométriques

Exercice 1

1. Construire un triangle ABC tel que :

BC = 7 cm, $\widehat{BCA} = 37$ et $\widehat{CBA} = 53$.

2. Prouver que ce triangle est un triangle rectangle.

3. Calculer la longueur CA puis donner la valeur arrondie au millimètre.

Exercice 2

1. Dans un repère orthonormé (O, I, J) tel que OI = OJ = 1 cm, placer les points A(0 ; 4) B(3 ; 2) C(-1 ; -4).

2. Calculer la longueur BC, donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.

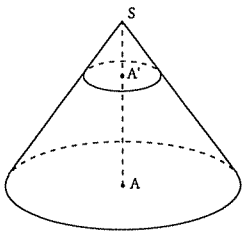
3. En admettant que $AB = \sqrt{13}$ cm et $AC = \sqrt{65}$ cm, démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

4. Placer dans le repère le point E image du point C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

5. Démontrer que le quadrilatère ABCE est un rectangle.

Exercice 3

Sur la figure ci-dessous on a un cône de révolution tel que SA = 12 cm. Un plan parallèle à la base coupe ce cône tel que SA' = 3 cm. (La figure ci-dessous n'est pas à l'échelle.)



1. Le rayon du disque de base du grand cône est de 7 cm. Calculer la valeur exacte du volume du grand cône.

2. Quel est le coefficient de réduction qui permet de passer du grand cône au petit cône?

3. Calculer la valeur exacte du volume de ce petit cône, puis en donner la valeur arrondie au cm^3.

SUJET

Problème

Monsieur Martin habite Petitville. Monsieur Gaspard habite à une distance de 900 km de Petitville.

À huit heures du matin les deux personnes commencent à rouler l'une vers l'autre :
– Monsieur Martin quitte Petitville et roule à 60 km/h ;
– Monsieur Gaspard se dirige vers Petitville et roule à 90 km/h.

On note x le temps écoulé depuis huit heures du matin (x est exprimé en heures).

Ainsi, quand il est huit heures du matin, $x = 0$.

Après avoir roulé une heure, c'est-à-dire quand $x = 1$, Monsieur Martin est à 60 km de Petitville et Monsieur Gaspard est lui à 810 km de Petitville.

1. À quelle distance de Petitville Monsieur Martin se situe-t-il quand $x = 4$? Quand $x = 10$?

2. À quelle distance de Petitville Monsieur Gaspard se situe-t-il quand $x = 4$? Quand $x = 10$?

3. Exprimer en fonction de x la distance qui sépare Monsieur Martin de Petitville.

Exprimer en fonction de x la distance qui sépare Monsieur Gaspard de Petitville.

4. On donne les fonctions suivantes $f : x \mapsto 60x$ et $g : x \mapsto 900 - 90x$.

Recopier les tableaux suivants et les compléter :

x	0	1	4	10
$f(x)$				

x	0	1	4	10
$g(x)$				

5. Représenter graphiquement les fonctions f et g sur une feuille de papier millimétré en prenant :

– en abscisse : 1 cm pour une durée d'une heure ;
– en ordonnée : 1 cm pour une distance de 100 km.

6. À l'aide d'une lecture graphique, répondre aux questions qui suivent.

a) Au bout de combien de temps les deux personnes se croisent-elles?

b) À quelle distance de Petitville se croisent-elles? Faire apparaître les pointillés néces-

saires.

7. a) Retrouver le résultat de la question 6.a) en résolvant une équation.

b) Retrouver le résultat de la question 6.b) par le calcul.

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = \dfrac{5}{3} - \dfrac{7}{3} \times \dfrac{9}{4} = \dfrac{5}{3} - \dfrac{7 \times 3 \times 3}{3 \times 4}$

donc $A = \dfrac{5}{3} - \dfrac{21}{4} = \dfrac{5 \times 4}{3 \times 4} - \dfrac{21 \times 3}{3 \times 4}$

donc $A = \dfrac{20}{12} - \dfrac{63}{12} = -\dfrac{43}{12}$.

2. $B = \sqrt{45} - 12\sqrt{5} = \sqrt{9 \times 5} - 12\sqrt{5}$

donc $B = 3\sqrt{5} - 12\sqrt{5}$

donc $B = -9\sqrt{5}$.

Exercice 2

1. $A = (2x - 3)^2 - (4x + 7)(2x - 3)$

donc $A = 4x^2 - 12x + 9 - 8x^2 + 12x - 14x + 21$

donc $A = -4x^2 - 14x + 30$.

2. $A = (2x - 3)(2x - 3) - (4x + 7)(2x - 3)$

donc $A = (2x - 3)(2x - 3 - 4x - 7)$

donc $A = (2x - 3)(-2x - 10)$.

3. Soit l'équation $(2x - 3)(-2x - 10) = 0$.

Il s'agit d'une équation-produit. Ce produit est nul si et seulement si l'un des facteurs, au moins, est nul.

Soit $2x - 3 = 0$ ou $-2x - 10 = 0$. Soit $x = \dfrac{3}{2}$ ou $x = -5$.

Conclusion : les solutions de l'équation sont $\frac{3}{2}$ et -5.

Exercice 3

1. Le pâtissier veut utiliser tous les fruits pour composer des tartelettes identiques, donc le nombre de tartelettes est un diviseur du nombre de framboises et du nombre de fraises. Par ailleurs, il veut composer un maximum de tartelettes donc ce nombre sera le plus grand diviseur commun du nombre de framboises et du nombre de fraises.

Calculons alors PGCD(685 ; 411) par la méthode des divisions successives (algorithme d'Euclide).

Consignons les résultats des divisions successives dans le tableau suivant :

		1	1	2	Quotients
Dividendes	685	411	274	137	Diviseurs
Restes	274	137	0		

Conclusion : le PGCD correspond au dernier reste non nul, d'où

PGCD(685 ; 411) = 137.

Le pâtissier pourra réaliser au maximum 137 tartelettes toutes identiques.

2. Chaque tartelette sera composée de :

$\frac{685}{137} = 5$ fraises et de $\frac{411}{137} = 3$ framboises.

Exercice 4

Soit x le prix d'un crayon et y le prix d'une gomme.

Le premier achat d'un montant de 10,90 € conduit à l'équation :

$5x + 2y = 10{,}9$.

Le second achat d'un montant de 17,20 € conduit à l'équation :

$8x + 3y = 17{,}2$.

Autrement dit, le couple $(x ; y)$ est solution du système :

$$(S) \begin{cases} 5x + 2y = 10{,}9 \\ 8x + 3y = 17{,}2. \end{cases}$$

Le système (S) est un système de deux équations à deux inconnues du premier degré. Nous allons résoudre ce système en utilisant la méthode par addition.

Vérifions d'abord que le système (S) admet un couple solution.

On a : $5 \times 3 - 2 \times 8 = 15 - 16 = -1$ et puisque $-1 \neq 0$, le système admet bien un unique couple comme solution.

Puis «supprimons» les y. Pour cela, on multiplie la première équation par 3 et la seconde

équation par 2.

On obtient le nouveau système équivalent au précédent :

$\begin{cases} 15x + 6y = 32{,}7 \\ 16x + 6y = 34{,}4. \end{cases}$

On soustrait membre à membre les deux équations et on obtient le système équivalent au précédent :

$\begin{cases} x = 1{,}7 \\ 5x + 2y = 10{,}9. \end{cases}$

La seconde équation nous permet alors de déterminer, par substitution, y.

On obtient le nouveau système équivalent au précédent :

$$\begin{cases} x = 1{,}7 \\ y = \dfrac{10{,}9 - 5 \times 1{,}7}{2} = 1{,}2. \end{cases}$$

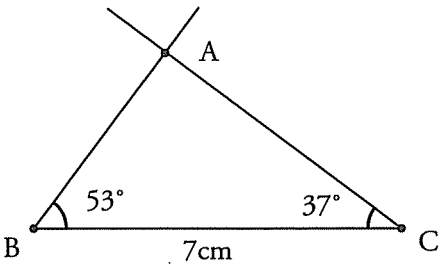
Conclusion : l'unique couple solution du système est le couple (1,7 ; 1,2).

Le prix d'un crayon est de 1,70 € et celui d'une gomme de 1,20 €.

Activités géométriques

Exercice 1

1. Voici la figure demandée.



2. La somme des angles dans un triangle vaut 180°.

Donc $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180°$

donc $\widehat{BAC} = 180 - \widehat{ABC} - \widehat{ACB}$

donc $\widehat{BAC} = 180 - 53 - 37$

donc $\widehat{BAC} = 90°$.

Conclusion : le triangle ABC est un triangle rectangle en A ($\widehat{BAC}$ est droit).

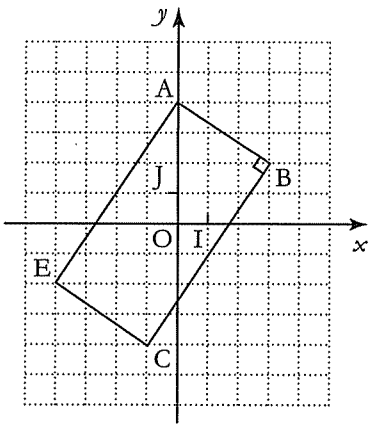
3. Le triangle ABC est rectangle en A, donc on peut y appliquer les formules de trigonométrie. En particulier, on a : $\cos \widehat{ACB} = \dfrac{CA}{CB}$

donc $CA = CB \times \cos \widehat{ACB}$.

Donc, on a : $CA = 7 \times \cos(37) \approx 5{,}6$ cm.

Exercice 2

1. Voir le graphique ci-dessous.



2. Le repère est orthonormé donc on peut calculer la longueur du segment [BC] à l'aide de la formule : $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$.

On obtient alors :

$BC = \sqrt{(-1-3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$ unités.

L'unité étant le centimètre, on a $BC = \sqrt{52} \approx 7{,}2$ cm.

3. Un raisonnement identique nous conduirait aux résultats suivants :

$AB = \sqrt{13}$ cm et $AC = \sqrt{65}$ cm.

Ainsi, on a : $AB^2 + BC^2 = 13 + 52 = 65$ et $AC^2 = 65$

donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Dans ces conditions, la réciproque du théorème de Pythagore s'applique et nous permet d'affirmer que le triangle ABC est rectangle en B.

4. Le point E est l'image du point C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$, ce qui se traduit par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$.
Cela signifie que le point E est le quatrième sommet du parallélogramme ABCE (voir le graphique).

5. D'après ce qui précède, on a établi que le quadrilatère ABCE était un parallélogramme et que triangle ABC était rectangle en B.
On peut donc affirmer que le parallélogramme ABCE admet un angle droit, ce qui fait de lui un rectangle.

Exercice 3

1. Le volume V du grand cône est défini par la relation :

$V = \frac{1}{3} \times$ aire de la base $\times$ hauteur.

On a donc : $V = \frac{1}{3} \times \pi \times 7^2 \times 12 = 196\pi$ cm^3.

2. Par définition, le coefficient k de la réduction est : $k = \frac{SA'}{SA} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Le volume V' du petit cône peut s'exprimer en fonction du coefficient de réduction k et du volume V de la pyramide initiale.

On a $V' = k^3 \times V$ donc le coefficient cherché est : $k^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$.

3. On a ainsi : $V' = \frac{1}{64} \times V = \frac{1}{64} \times 196\pi = 3{,}0625\pi \approx 10$ cm^3.

Problème

On supposera, bien sûr, que M. Martin et M. Gaspard roulent à vitesse constante sur l'ensemble du parcours.

1. Après 4 heures, M. Martin aura roulé $4 \times 60 = 240$, soit 240 km.
Il se situe donc à 240 km de Petitville.
Après 10 heures, M. Martin aura roulé $10 \times 60 = 600$, soit 600 km.
Il se situe donc à 600 km de Petitville.

2. Après 4 heures, M. Gaspard aura roulé $4 \times 90 = 360$, soit 360 km.

Il se situe donc à $900 - 360 = 540$ km de Petitville.

Après 10 heures, M. Gaspard aura roulé $10 \times 90 = 900$, soit 900 km.

Il se situe donc à $900 - 900$, soit 0 km de Petitville : autrement dit, il est arrivé à Petiteville.

3. La distance f qui sépare M. Martin de Petitville correspond à la distance parcourue en fonction du temps x de parcours.

Ainsi on a : $f(x) = 60x$.

La distance g qui sépare M. Gaspard de Petitville correspond à 900 km moins la distance parcourue en fonction du temps x de parcours. Ainsi, a-t-on : $g(x) = 900 - 90 \times x$.

4. Tableaux :

x	0	1	4	10
$f(x)$	0	60	240	600

x	0	1	4	10
$g(x)$	900	810	540	0

5.

La fonction f est la fonction linéaire de coefficient 60.

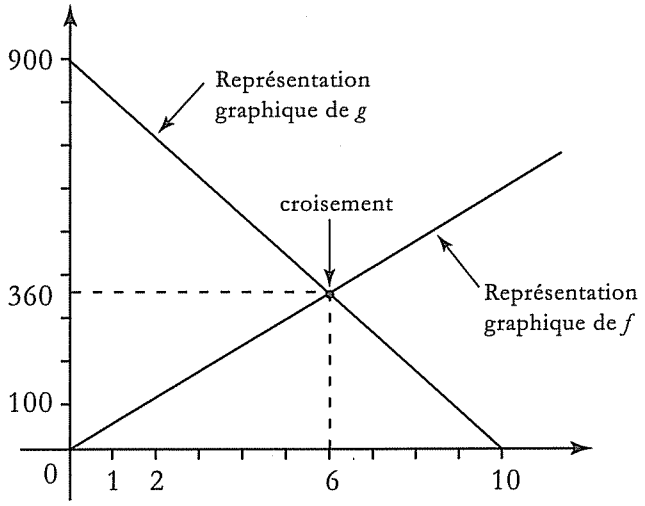
Sa représentation graphique est donc la droite qui passe par l'origine O du repère et par exemple par le point de coordonnées (10 ; 600).

La fonction g est une fonction affine.

Sa représentation graphique est donc la droite qui passe par les points de coordonnées (0 ; 900) et (10 ; 0).

Avec ces indications, nous pouvons désormais tracer ces deux droites dans le repère ci-dessous.

CORRIGÉ



6. a) La durée au bout de laquelle les deux personnes se croisent correspond à l'abscisse du point d'intersection des représentations graphiques des deux droites : c'est-à-dire 6.

b) La distance de Petitville à laquelle elles se trouvent au moment où elles se croisent correspond à l'ordonnée du point d'intersection des représentations graphiques des deux droites : c'est-à-dire 360.

Conclusion : M. Martin et M. Gaspard se croisent au bout de 6 heures de route. À ce moment, ils seront à 360 km de Petitville.

7. a) Lorsque les deux personnes se croisent, elles se situent à la même distance de Petitville.

Donc le nombre x d'heures nécessaires pour arriver à ce croisement est la solution de l'équation : $f(x) = g(x)$.

Cette équation est successivement équivalente à :

$60x = 900 - 90x$

$150x = 900$

$x = 6$.

b) Au bout de 6 heures, nos deux compères seront séparés de Petitville de :

$f(6) = 360$ km et $g(6) = 360$ km.

Remarquons qu'effectivement, ils seront au même endroit.

SUJET 22

◈ *GROUPEMENT 2, JUIN 2005*

SUJET

Activités numériques

Exercice 1

1. Calculer $A = 2 - \dfrac{5}{2} \div \dfrac{15}{4}$.

On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

2. On considère $B = \dfrac{2{,}5 \times 10^{-3} \times 9 \times 10^{5}}{15 \times 10^{-4}}$.

a) Calculer B ; le résultat sera donné en écriture décimale.

b) Écrire B en écriture scientifique.

3. Calculer l'expression $C = 2\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - 10\sqrt{5}$.

On donnera le résultat sous la forme $a\sqrt{5}$ où a est un entier relatif.

Exercice 2

1. Calculer le PGCD des nombres 675 et 375.

2. Écrire la fraction $\dfrac{675}{375}$ sous forme irréductible.

Exercice 3

On considère l'expression suivante : $E = (x-3)^2 + (x-3)(x+3)$.

1. Développer et réduire E.

2. Factoriser E.

3. Calculer Epour $x = 5$.

4. Résoudre l'équation $x(x-3) = 0$.

Exercice 4

Aujourd'hui, Marc a 11 ans et Pierre a 26 ans. Dans combien d'années l'âge de Pierre sera-t-il le double de celui de Marc?

Activités géométriques

Exercice 1

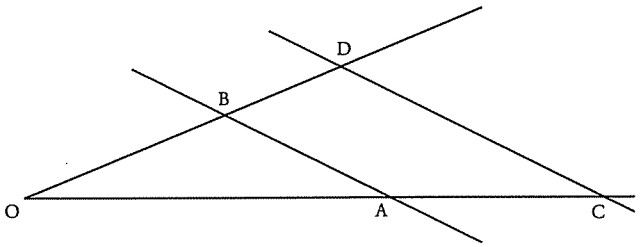
Dans tout cet exercice, l'unité de longueur est le centimètre.

On considère la figure ci-dessous. Ses dimensions ne sont pas respectées et on ne demande pas de la représenter.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Les points O, B et D sont alignés, ainsi que les points O, A et C.

On donne les mesures suivantes : OA = 8 ; OB = 6 ; OC = 10.



1. Calculer la longueur BD.

La démarche suivie sera expliquée sur la copie.

2. Dans les questions qui suivent, on suppose que $\widehat{OBA}$ est droit.

a) Calculer cos $\widehat{AOB}$ puis en déduire une valeur approchée arrondie au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

b) Justifier que le triangle ODC est rectangle.

c) En utilisant le théorème de Pythagore, donner une valeur approchée, en centimètres, arrondie au dixième de la longueur CD (on pourra admettre que OD = 7,5).

Exercice 2

On considère un repère orthonormal (O ; I, J) (unité : le centimètre).

1. Placer les points A (−2 ; 3) et C (3 ; 2) dans le repère précédent.

2. Calculer les distances OA, OC et AC. On donnera les valeurs exactes de ces distances.

3. Montrer que le triangle OAC est un triangle rectangle isocèle en O.

4. Construire le point B tel que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

5. En déduire la nature du quadrilatère OABC.

6. Déterminer les coordonnées du point M, centre de symétrie du quadrilatère OABC.

Problème (12 points)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Dans une bibliothèque ouverte du mardi au samedi inclus, on a comptabilisé, jour par jour, le nombre de livres prêtés au cours d'une semaine et on a obtenu les résultats consignés dans le tableau suivant :

Jour	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi
Nombre de livres prêtés	61	121	42	59	82

1. a) Calculer le nombre total de livres prêtés sur la semaine entière.

b) Calculer le nombre moyen de livres prêtés, par jour, durant cette semaine de cinq jours.

2. a) Calculer le pourcentage de livres prêtés le mercredi par rapport à la semaine entière. Arrondir le résultat à l'unité.

b) Le bibliothécaire dit : « Le mercredi, nous prêtons le quart des livres de la semaine ». A-t-il raison ? Expliquer.

Partie B

Sur une année, on propose au public deux types de tarifs pour l'emprunt de livres dans une bibliothèque :

- le tarif plein : 0,90 euro par livre emprunté ;
- le tarif « abonné » : cotisation annuelle de 10 euros à laquelle s'ajoute 0,50 euro par livre emprunté.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Nombre de livres empruntés pendant l'année	10	20	50	100
Prix payé au plein tarif (en €)		18		
Prix payé au tarif « abonné » (en €)	15			

2. Quel est le prix payé, en euros, pour l'emprunt de 35 livres :

a) avec le tarif plein ? Justifier.

b) avec le tarif «abonné»? Justifier.

3. On note :
– x le nombre de livres empruntés sur l'année ;
– $P(x)$ le prix payé pour l'emprunt de $x$livres au tarif plein ;
– $A(x)$ le prix payé pour l'emprunt de x livres au tarif «abonné».

Exprimer $P(x)$ et $A(x)$ en fonction de x.

4. a) Résoudre l'équation : $0{,}9x = 0{,}5x + 10$.

b) Que représente la solution trouvée pour une personne empruntant des livres à la bibliothèque?

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = 2 - \dfrac{5}{2} \div \dfrac{15}{4} = 2 - \dfrac{5}{2} \times \dfrac{4}{15}$

donc $A = 2 - \dfrac{5 \times 2 \times 2}{2 \times 3 \times 5}$, soit $A = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{3} - \dfrac{2}{3}$

donc $A = \dfrac{4}{3}$.

2. $B = \dfrac{2{,}5 \times 10^{-3} \times 9 \times 10^{5}}{15 \times 10^{-4}} = \dfrac{2{,}5 \times 9}{15} \times \dfrac{10^{-3} \times 10^{5}}{10^{-4}}$

donc $B = 1{,}5 \times 10^{-3+5-(-4)}$ soit $B = 1{,}5 \times 10^{6}$.

a) De ce qui précède, on peut dire que l'écriture décimale de B est : 1 500 000.

b) De ce qui précède, on peut dire que l'écriture scientifique de B est : $1{,}5 \times 10^{6}$.

Exercice 2

1. Déterminons le PGCD des nombres 675 et 375 en utilisant l'algorithme d'Euclide. Consignons les divisions successives dans le tableau suivant.

		1	1	4	Quotients
Dividendes	675	375	300	75	Diviseurs
Restes	300	75	0		

Conclusion : PGCD correspond au dernier reste non nul. Donc :
PGCD(675 ; 375) = 75.

2. Pour rendre irréductible une fraction, on divise le numérateur et le dénominateur de la fraction par leur PGCD.
Ainsi, on a : $\frac{675}{375} = \frac{675 \div 75}{375 \div 75} = \frac{9}{5}$.

Exercice 3

1. $E = (x-3)^2 + (x-3)(x+3)$
donc $E = x^2 - 6x + 9 + x^2 - 9$
donc $E = 2x^2 - 6x$.

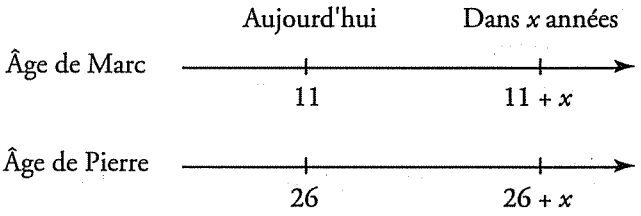
2. $E = (x-3)(x-3) + (x+3)(x-3)$
donc $E = (x-3)(x-3+x+3)$
donc $E = 2x(x-3)$.

3. Pour $x = 5$, on a $E = 10 \times 2 = 20$.

4. Soit l'équation $x(x-3) = 0$. Il s'agit d'une équation-produit. Ce produit est nul si et seulement si l'un des facteurs, au moins, est nul.
Soit $x = 0$ ou $x - 3 = 0$.
Soit $x = 0$ ou $x = 3$.
Conclusion : les solutions de l'équation sont 0 et 3.

Exercice 4

Soit x le nombre d'années nécessaires pour que l'âge de Pierre soit le double de l'âge de Marc.



CORRIGÉ

La mise en équation s'écrit donc : $26 + x = 2(11 + x)$.

Cette équation est successivement équivalente à :

$26 + x = 22 + 2x$

$2x - x = 26 - 22$

$x = 4$.

Conclusion : dans 4 ans, Pierre aura 30 ans et Marc aura 15 ans (donc Pierre sera bien deux fois plus âgé que Marc).

Activités géométriques

Exercice I 1. Les triangles OAB et OCD de sommet commun O sont tels que :

$B \in (OD)$;

$A \in (OC)$;

les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Dans ces conditions, le théorème de Thalès nous permet d'écrire les égalités des rapports :

$\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{AB}{CD}$.

En particulier : $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$ donc : $OD = \dfrac{OB \times OC}{OA}$.

Application numérique : $OD = \dfrac{6 \times 10}{8} = 7{,}5$ cm.

De plus, le point B appartient au segment [OD] donc OD = OB + BD

donc BD = OD − OB

donc BD = 7,5 − 6 = 1,5 cm.

2. a) Le triangle OAB est rectangle en B : on peut y appliquer les formules de trigonométrie.

En particulier, on a : $\cos \widehat{AOB} = \dfrac{OB}{OA}$.

Application numérique : $\cos \widehat{AOB} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$;

$\widehat{AOB} = \cos^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right) \approx 41°$.

b) Le triangle OAB est rectangle en B donc les droites (OB) et (AB) sont perpendiculaires.

Par hypothèse, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Or, si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire

à l'autre.

Il en résulte que la droite (CD) est perpendiculaire à la droite (OB).

De plus, les points O, B et D étant alignés, on en déduit que le triangle ODC est rectangle en D.

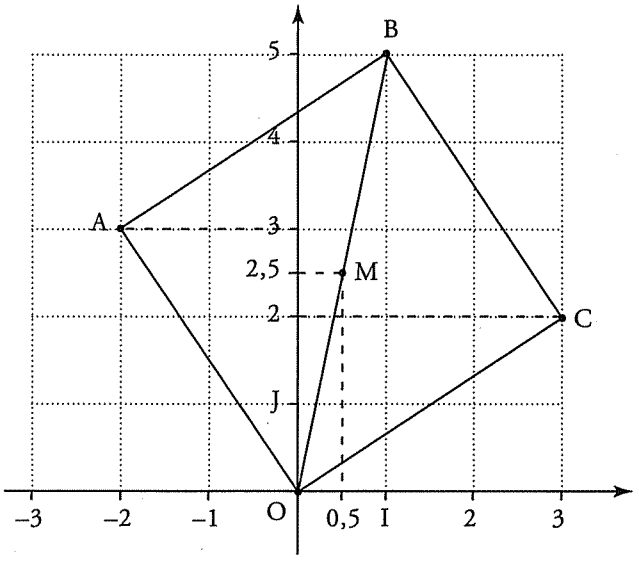
c) D'après ce qui précède, le triangle OCD est rectangle en D donc on peut y appliquer le théorème de Pythagore.

Ainsi : $OC^2 = OD^2 + CD^2$. Donc : $CD^2 = OC^2 - OD^2$.

Application numérique : $CD^2 = 10^2 - 7{,}5^2 = 43{,}75$ d'où $CD \approx 6{,}6$ cm.

Exercice 2

1. Voir le graphique suivant.



2. Le repère est orthonormé donc on peut calculer la longueur du segment [OA] à l'aide de la formule : $OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2}$.

On obtient alors : $OA = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ unités.

L'unité étant le cm, on a $BC = \sqrt{13}$ cm.

Des calculs similaires nous permettraient d'écrire :

$OC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ cm ;

$AC = \sqrt{(3-(-2))^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$ cm.

3. Ainsi on a : $OA^2 + OC^2 = 13 + 13 = 26$ et $AC^2 = 26$ donc $OA^2 + OC^2 = AC^2$.

Dans ces conditions, la réciproque du théorème de Pythagore s'applique et nous permet d'affirmer que le triangle OAC est rectangle en O. De plus, on a établi que OA = OC.
Conclusion : Le triangle OAC rectangle en O a deux côtés de même longueur : le triangle OAC est rectangle et isocèle en O.

4. Le point B est défini par l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

Voir le graphique ci-dessus.

5. De l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$, on en déduit que le quadrilatère OABC est un parallélogramme.

De plus, nous avons également prouvé que le triangle OAC était rectangle et isocèle en O.

Conclusion : Le parallélogramme OABC a deux côtés consécutifs de même longueur et perpendiculaires donc OABC est un carré.

6. Le centre de symétrie M du carré OABC est le point d'intersection de ses diagonales. Ce point M est donc le milieu du segment [AC].

Les coordonnées $(x_M ; y_M)$ du point M peuvent s'exprimer en fonction des coordonnées des points A et C.

On aura ainsi :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x_M = \dfrac{-2+3}{2} = 0{,}5 \\ y_M = \dfrac{3+2}{2} = 2{,}5 \end{cases}$$

Conclusion : Le point M a pour coordonnées (0,5 ; 2,5).

Problème

Partie A

1. a) Tableau :

	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	total
Nombre de livres prêtés	61	121	42	59	82	365

Le nombre total de livres prêtés sur la semaine entière est 365.

b) Le nombre moyen de livres prêtés par jour est défini par le rapport entre le nombre total de livres prêtés et le nombre de jours où la bibliothèque est ouverte.

On a : $\frac{365}{5} = 73$; donc 73 livres sont, en moyenne, prêtés par jour.

2. a) Le pourcentage de livres prêtés le mercredi par rapport à la semaine entière est : $\frac{121}{365} \approx 0{,}33$ soit 33 %.

b) Le bibliothécaire se trompe car le quart des livres représente 25 % et non 33 %.

Partie B

1. Tableau :

Nombre de livres empruntés pendant l'année	10	20	50	100
Prix payé au plein tarif (en €)	9	18	45	90
Prix payé au tarif «abonné»(en €)	15	20	35	60

2. a) Avec le plein tarif, l'emprunt de 35 livres coûtera :

$35 \times 0{,}90 = 31{,}50$ €.

b) Avec le tarif «abonné», ce même emprunt coûtera :

$10 + 35 \times 0{,}50 = 27{,}50$ €.

3. On désigne par $P(x)$ et $A(x)$ les prix payés respectivement avec les formules plein tarif et tarif abonné, en fonction du nombre x de livres empruntés.

On aura donc : $P(x) = 0{,}9x$ et $A(x) = 10 + 0{,}5 \times x = 10 + 0{,}5x$.

4. a) L'équation $0{,}9x = 0{,}5x + 10$ est équivalente à l'équation

$0{,}9x - 0{,}5x = 10$.

L'équation $0{,}9x - 0{,}5x = 10$ est équivalente à l'équation $0{,}4x = 10$.

Enfin, $0{,}4x = 10$ est équivalente à $x = 25$.

b) L'équation précédente traduit le fait qu'une personne qui emprunterait 25 livres paierait le même prix avec chacun des deux tarifs proposés.

En effet $P(25) = A(25) = 22{,}50$ €.

SUJET 23

GROUPEMENT 4, JUIN 2005

Activités numériques (12 points)

Exercice 1 (4 points)

Dans cet exercice, tous les calculs devront être détaillés.

1. Calculer l'expression : $A = \dfrac{13}{3} - \dfrac{4}{3} \times \dfrac{5}{2}$ (donner le résultat sous sa forme la plus simple).

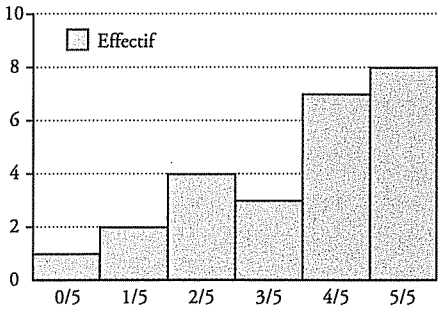
2. Donner l'écriture scientifique du nombre B tel que :
$B = \dfrac{7 \times 10^{15} \times 8 \times 10^{-8}}{5 \times 10^{-4}}$.

3. Écrire sous la forme $a\sqrt{7}$ (où a est un entier) le nombre C tel que :
$C = 4\sqrt{7} - 8\sqrt{28} + \sqrt{700}$.

4. Développer et simplifier : $(4\sqrt{5} + 2)^2$.

Exercice 2 (3 points)

Voici l'histogramme des notes d'un contrôle noté sur 5 pour une classe de 25 élèves.



1. Reproduire et remplir le tableau des notes suivant.

Note	0	1	2	3	4	5
Effectif						
Effectif cumulé croissant						

2. Calculer la moyenne des notes de la classe.

3. Quelle est la médiane des notes de la classe?

4. Calculer la fréquence des notes inférieures ou égales à 3 points sur 5.

Exercice 3 (2 points)

Répondre aux questions suivantes. (Les calculs pourront être totalement faits à la calculatrice : on ne demande pas d'étapes intermédiaires ni de justification.)

1. Donner un arrondi au centième du nombre A tel que : $A = \dfrac{831 - 532}{84}$.

2. Convertir 3,7 heures en heures et minutes.

3. Donner un arrondi au millième du nombre B tel que :
$B = \dfrac{\frac{53}{51} - \frac{32}{85}}{\frac{63}{34}}$.

4. Calculer à 0,01 près $C = \sqrt{\dfrac{83 + 167}{158}}$.

Exercice 4 (3 points)

1. Trouver le PGDC de 6 209 et 4 435 en détaillant la méthode.

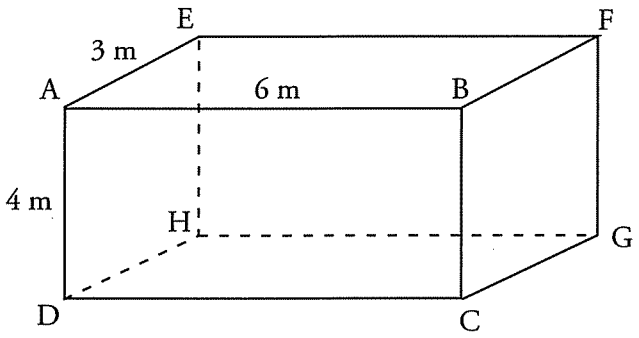
2. En utilisant le résultat de la question précédente, expliquer pourquoi la fraction $\dfrac{4\,435}{6\,209}$ n'est pas irréductible.

3. Donner la fraction irréductible égale à $\dfrac{4\,435}{6\,209}$.

Activités géométriques (12 points)

Exercice 1 (5 points)

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. On donne :
AE = 3 m ; AD = 4 m ; AB = 6 m.



1. a) Que peut-on dire des droites (AE) et (AB) ? Le justifier.

b) Les droites (EH) et (AB) sont-elles sécantes ?

2. a) Calculer EG. On donnera la valeur exacte.

b) En considérant le triangle EGC rectangle en G, calculer la valeur exacte de la longueur de la diagonale [EC] de ce parallélépipède rectangle.

3. Montrer que le volume de ABCDEFGH est égal à 72 m^3.

4. Montrer que l'aire totale de ABCDEFGH est égale à 108 m^2.

Exercice 2 (3 points)

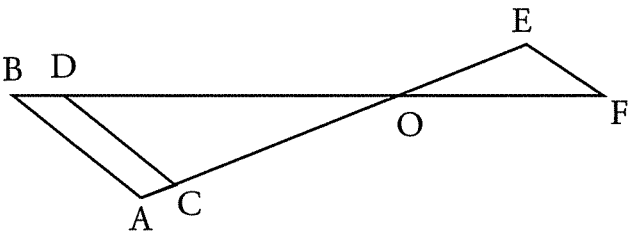
Sur le dessin ci-dessous, les droites (AB) et (CD) sont parallèles, les points A, C, O, E sont alignés ainsi que les points B, D, O et F. (On ne demande pas de faire le dessin.)

De plus, on donne les longueurs suivantes :

CO = 3 cm, AO = 3,5 cm, OB = 4,9 cm, CD = 1,8 cm, OF = 2,8 cm et OE = 2 cm.

1. Calculer (en justifiant) OD et AB.

2. Prouver que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.



Exercice 3 (4 points)

Soit ABC un triangle tel que AB = 4,2 cm, BC = 5,6 cm, AC = 7 cm.

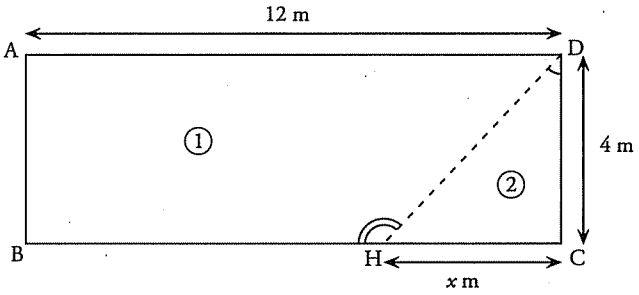
1. Faire une figure en vraie grandeur.

2. Prouver que ABC est rectangle en B.

3. Calculer le périmètre et l'aire de ABC.

Problème (12 points)

On dispose d'un séjour rectangulaire dans lequel on veut réaliser un petit cagibi triangulaire. Pour cela, on veut installer une cloison.



Voici ci-dessus, une représentation de la pièce.

La partie (2) est le cagibi et la partie (1) représente le séjour après la création du cagibi. La cloison a été dessinée en pointillé.

Dans l'exercice, on considérera que la cloison a une épaisseur nulle.

Les trois parties sont indépendantes.

Partie A (3 points)

On considère que x = 3 m.

1. Quelle est la longueur de la cloison (en pointillé)?

2. Calculer la valeur (à 1° près) de l'angle $\widehat{HDC}$.

3. Calculer la valeur (à 1° près) de l'angle $\widehat{DHB}$.

Partie B (6 points)

1. a) Exprimer la surface au sol du cagibi (2) en fonction de x, sous la forme $f(x)$ = ...

b) Exprimer la surface au sol du séjour (1) en fonction de x, sous la forme $g(x)$ = ...

2. On admet que $f(x) = 2x$ et que $g(x) = 48 - 2x$.

a) Quelle est la nature de la fonction f? Quelle est la nature de la fonction g?

b) Tracer dans un repère (en abscisses 1 cm pour 0,5 unité et en ordonnées, 1 cm pour 5 unités) les représentations graphiques des fonctions f et g pour x compris entre 0 et 10.

3. On veut que le séjour (1) ait une surface minimale de 35 m^2.

a) Lire sur le graphique la valeur maximale de x pour que cette condition soit respectée.

b) Écrire une inéquation qui traduise que la surface du séjour doit être supérieure ou égale à 35 m^2.

c) Résoudre cette inéquation.

Partie C (3 points)

On réalise une maquette de cette pièce, avant la création du cagibi, à l'échelle 1/200.

1. Rappeler ce que signifie échelle « 1/200 ».

2. Quelle sera, sur la maquette, la longueur du mur de 12 m?

3. La surface réelle du séjour est de 48 m^2. Quelle est la surface du sol du séjour dans la maquette (en cm^2)?

4. Le volume du séjour de la maquette est de 13,125 cm^3. Quel est le volume réel du séjour (en cm^3 puis en m^3)?

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = \dfrac{13}{3} - \dfrac{4}{3} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{13}{3} - \dfrac{2 \times 2 \times 5}{3 \times 2}$

donc $A = \dfrac{13}{3} - \dfrac{10}{3}$

donc $A = 1$.

2. $B = \dfrac{7 \times 10^{15} \times 8 \times 10^{-8}}{5 \times 10^{-4}} = \dfrac{7 \times 8}{5} \times \dfrac{10^{15} \times 10^{-8}}{10^{-4}}$

donc $B = 11{,}2 \times 10^{15-8-(-4)}$

donc $B = 11{,}2 \times 10^{11} = 1{,}12 \times 10^{12}$.

3. $C = 4\sqrt{7} - 8\sqrt{28} + \sqrt{700}$

donc $C = 4\sqrt{7} - 8\sqrt{4 \times 7} + \sqrt{7 \times 100}$

donc $C = 4\sqrt{7} - 16\sqrt{7} + 10\sqrt{7}$

donc $C = -2\sqrt{7}$.

4. $(4\sqrt{5} + 2)^2 = (4\sqrt{5})^2 + 2 \times 4\sqrt{5} \times 2 + 2^2$

donc $(4\sqrt{5} + 2)^2 = 4^2 \times \sqrt{5}^2 + 16\sqrt{5} + 4$

donc $(4\sqrt{5} + 2)^2 = 16 \times 5 + 16\sqrt{5} + 4$

donc $(4\sqrt{5})^2 = 84 + 16\sqrt{5}$.

Exercice 2

1. Tableau de notes :

Note	0	1	2	3	4	5
Effectif	1	2	4	3	7	8
Effectif cumulé croissant	1	3	7	10	17	25

2. La moyenne des notes est :

$\dfrac{0 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 3 + 4 \times 7 + 5 \times 8}{25}$, soit 3,48.

3. La médiane des notes correspond à la note qui, lorsque la série est ordonnée, sépare la série en deux séries de même effectif.

La médiane de la série ordonnée est donc la treizième note.

Ordonnons la série :

$\underbrace{0;1;1;2;2;2;2;3;3;3;4;4;}_{\text{12 notes inférieures à 4}}\underbrace{4}_{\text{4 est donc la médiane}}\underbrace{;4;4;4;5;5;5;5;5;5;5;5.}_{\text{12 notes supérieures à 4}}$

4. À l'aide de la ligne des effectifs cumulés croissants du tableau, on peut affirmer que 10 élèves sur 25 ont obtenu une note inférieure ou égale à 3.

En pourcentage, cela représente : $\frac{10}{25} = 40\%$ des élèves.

Exercice 3

1. Soit $A = \frac{831 - 532}{84} = \frac{299}{84}$.

L'arrondi au centième de A est donc 3,56.

2. On a : 3,7 heures = 3,7×60 minutes = 222 minutes.

3. Soit $B = \frac{\frac{53}{51} - \frac{32}{85}}{\frac{63}{34}} = \frac{\frac{169}{255}}{\frac{63}{34}} = \frac{169}{255} \times \frac{34}{63} = \frac{5746}{16065}$.

L'arrondi au millième de B est donc 0,358.

4. Soit $C = \sqrt{\frac{83 + 167}{158}} = \sqrt{\frac{250}{158}} = \sqrt{\frac{125}{79}}$.

La valeur approchée au centième de C est donc 1,26.

Exercice 4

1. Calculons le PGCD(6209 ; 4435) par la méthode des divisions successives (algorithme d'Euclide).

Consignons les résultats des divisions successives dans le tableau suivant :

		1	2	2	Quotients
Dividendes	6209	4435	1774	887	Diviseurs
Restes	1774	887	0		

Conclusion : PGCD correspond au dernier reste non nul.

PGCD (6209 ; 4435) = 887.

2. Le PGCD (6209 ; 4435) = 887 ($\neq$ 1) donc le numérateur et le dénominateur de la fraction $\dfrac{4435}{6209}$ admettent 887 comme diviseur commun donc la fraction n'est pas irréductible.

3. Pour rendre irréductible une fraction, il suffit de diviser le numérateur et le dénominateur de la fraction par leur PGCD.

Ainsi on a : $\dfrac{4435}{6209} = \dfrac{4435 \div 887}{6209 \div 887} = \dfrac{5}{7}$.

Activités géométriques

Exercice 1

1. a) ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. Donc ses faces sont des rectangles. En particulier, la face ABFE est un rectangle ; cela signifie que les droites (AE) et (AB) sont perpendiculaires.

b) Les plans (EFGH) et (ABCD) étant parallèles, les droites (AB) et (EH) ne sont pas sécantes.

2. a) EFGH est un rectangle donc le triangle EFG est rectangle en F. On peut y appliquer le théorème de Pythagore.

On a ainsi : $EG^2 = EF^2 + FG^2$.

Numériquement, on obtient : $EG^2 = 6^2 + 4^2 = 50$.

Comme EG désigne une longueur (donc un nombre positif), on a :

$EG = \sqrt{50}$ m.

b) Le triangle EGC est rectangle en G donc on peut y appliquer le théorème de Pythagore.

On a ainsi : $EC^2 = EG^2 + GC^2$.

Numériquement, on obtient : $EC^2 = 50 + 3^2 = 59$.

Comme EC désigne une longueur (donc un nombre positif), on a :

$EG = \sqrt{59}$ m.

3. Le volume V du parallélépipède rectangle ABCDEFGH est :

$V = AB \times AE \times AD = 3 \times 4 \times 6 = 72$ m^3.

4. L'aire totale du parallélépipède rectangle ABCDEFGH est :

$A = (AE \times AB + AB \times AD + AE \times AD) \times 2 = (3 \times 6 + 6 \times 4 + 3 \times 4) \times 2$

$A = (18 + 24 + 12) \times 2 = 108$ m^2.

Exercice 2

1. Les triangles OAB et OCD de sommet commun O sont tels que :

- $C \in (OA)$;
- $D \in (OB)$;
- les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Dans ces conditions, le théorème de Thalès peut s'appliquer et nous permet d'écrire l'égalité des rapports : $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB}$.

En particulier : $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}$ et $\frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB}$.

Donc $OD = \frac{OC \times OB}{OA}$ et $AB = \frac{OA \times CD}{OC}$.

Numériquement, on obtient :

$OD = \frac{3 \times 4{,}9}{3{,}5} = 4{,}2$ cm

et $AB = \frac{3{,}5 \times 1{,}8}{3} = 2{,}1$ cm.

2. Les triangles OAB et OEF de sommet commun O sont tels que :

- $E \in (OA)$;
- $F \in (OB)$;
- les points A, O et E d'une part et B, O et F d'autre part sont alignés dans ce même ordre ;
- de plus, on a : $\frac{OA}{OE} = \frac{3{,}5}{2} = 1{,}75$ et $\frac{OB}{OF} = \frac{4{,}9}{2{,}8} = 1{,}75$

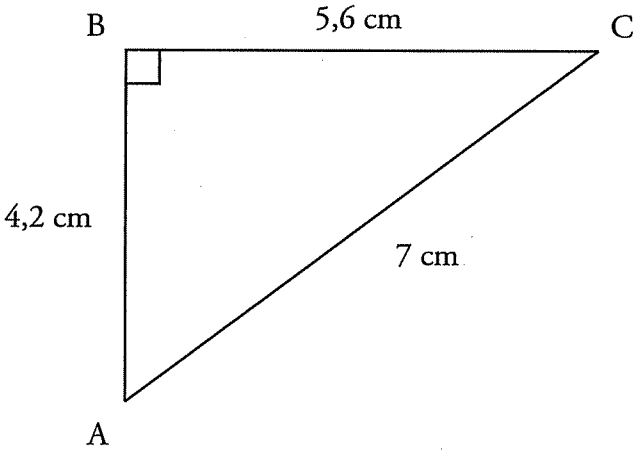
donc $\frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OF}$.

Dans ces conditions, la réciproque du théorème de Thalès peut s'appliquer et nous permet d'affirmer que les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

CORRIGÉ

Exercice 3

1. Figure :



2. Dans le triangle ABC, on a :
$AB^2 + BC^2 = 4{,}2^2 + 5{,}6^2 = 49$ et $AC^2 = 7^2 = 49$
donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
Dans ces conditions, la réciproque du théorème de Pythagore s'applique et nous permet d'affirmer que le triangle ABC est rectangle en B.

3. Soit P, le périmètre du triangle ABC : P = AB + BC + CA = 16,8 cm.
Soit A, l'aire du triangle ABC rectangle en B :
$A = \frac{1}{2} \times AB \times BC = 11{,}76$ cm^2.

Problème

Partie A

Dans cette partie x = 3 m.

1. ABCD est un rectangle et H appartient au segment [BC] donc le triangle CDH est rectangle en C.
On peut donc y appliquer le théorème de Pythagore.

On a ainsi : $DH^2 = CH^2 + CD^2$

Numériquement, on obtient : $DH^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.

Comme EG désigne une longueur (donc un nombre positif), on a : DH = 5 m.

2. Le triangle CDH est rectangle en C, donc on peut y appliquer les formules de trigonométrie.

En particulier : $\cos \widehat{HDC} = \dfrac{CD}{HD}$ donc $\cos \widehat{HDC} = \dfrac{4}{5}$.

Il en résulte que $\widehat{HDC} = \cos^{-1}(\dfrac{4}{5}) \approx 37$.

3. Le triangle CDH est rectangle en C, donc on peut y appliquer les formules de trigonométrie.

En particulier : $\sin \widehat{DHC} = \dfrac{CD}{HD}$ donc $\sin \widehat{HDC} = \dfrac{4}{5}$.

Il en résulte que $\widehat{DHC} = \sin^{-1}(\dfrac{4}{5}) \approx 53°$.

De plus, les points B , H et C sont alignés dans cet ordre donc l'angle $\widehat{BHC}$ est un angle plat donc $\widehat{BHC} = 180°$.

Or $\widehat{BHC} = \widehat{DHC} + \widehat{DHB}$ donc $\widehat{DHB} = \widehat{BHC} - \widehat{DHC}$.

Finalement : $\widehat{DHB} \approx 180 - 53 \approx 127°$.

Partie B

1. a) L'aire du rectangle ABCD est : $12 \times 4 = 48 m^2$.

L'aire du triangle CDH rectangle en C, en fonction de x, est :

$f(x) = \dfrac{4}{2} \times x = 2x$.

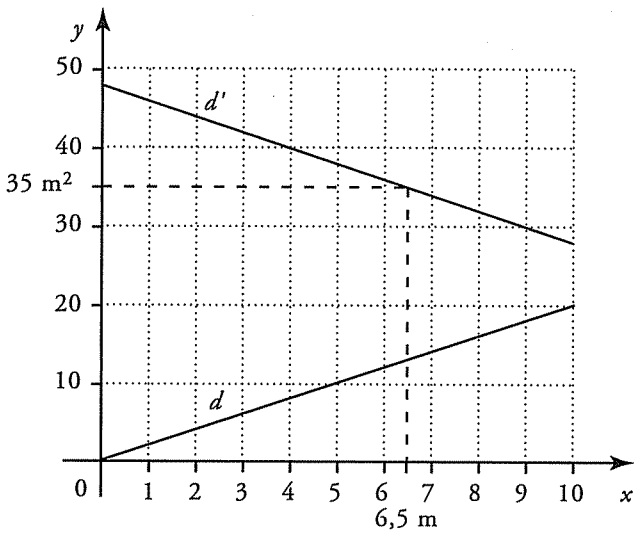
b) On en déduit que l'aire du trapèze ABHD, en fonction de x, est :

$g(x) = 48 - 2x$.

2. a) f est la fonction linéaire de coefficient 2 donc sa courbe représentative est la droite (d) qui passe par l'origine du repère et, par exemple, par le point de coordonnées (5 ;10).

g est une fonction affine donc sa courbe représentative est la droite (d') qui passe par exemple par les points de coordonnées (0 ; 48) et (5 ; 38).

b) Avec les observations ci-dessus, on peut tracer les droites (d) et (d') dans le repère ci-dessous.



3. a) La valeur maximale de x pour que le séjour ait une surface minimale de 35 m^2 est : $x = 6{,}5$ m.

b) L'inéquation qui traduit cette condition est : $g(x) \geqslant 35$.

c) $g(x) \geqslant 35$ si et seulement si $48 - 2x \geqslant 35$

donc $g(x) \geqslant 35$ si et seulement si $48 - 35 \geqslant 2x$

donc $g(x) \geqslant 35$ si et seulement si $13 \geqslant 2x$

donc $g(x) \geqslant 35$ si et seulement si $x \leqslant 6{,}5$.

Partie C.

1. Réaliser une maquette au 1/200^e de la pièce consiste à faire une réduction de la pièce dont le coefficient est 1/200.

Ainsi, toutes les longueurs de la figure seront divisées par 200 ; les aires seront divisées par $(200)^2 = 40000$ et les volumes par $(200)^3 = 8 \times 10^6$.

2. Ainsi, un mur de 12 mesurera sur la maquette : $\dfrac{12}{200} = 0{,}06$ m = 6 cm.

3. La surface réelle du séjour de 48 m^2 sera représentée sur la maquette par une surface de $\dfrac{48}{40\,000} = 0{,}0012$ m^2 = 12 cm^2.

4. Le volume du séjour de la maquette est de 13,125 cm^3. Donc le volume réel de ce séjour sera : $13{,}125 \times 8 \times 10^6 = 105\,000\,000\ cm^3 = 105\ m^3$.

SUJET 24

GROUPEMENT I, SEPTEMBRE 2005

SUJET

Activités numériques (12 points)

Exercice 1

Calculer et donner le résultat sous forme de fractions irréductibles pour A et B et en notation scientifique pour C :

$$A = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3};$$

$$B = \frac{2 - \frac{1}{3}}{3 + \frac{1}{4}};$$

$$C = \frac{3 \times 10^4 \times 10^{-2} \times 5}{10^{-1}}.$$

Exercice 2

Écrire D sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux nombres entiers :

$D = 3\sqrt{12} + \sqrt{27} - 5\sqrt{3}$.

Exercice 3

$E = (2x - 3)^2 - 3(2x - 3)$.

1. Développer E.

2. Factoriser E.

3. Résoudre l'équation $(2x - 3x)\,(2x - 6) = 0$.

4. Calculer E pour $x = \sqrt{2}$.

(On écrira le résultat sous la forme $a - b\sqrt{2}$ où a et b sont deux nombres entiers.)

Exercice 4

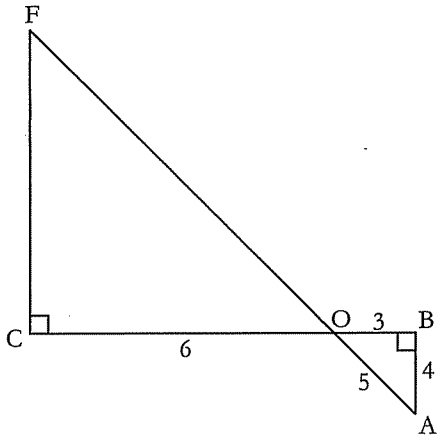
1. Calculer le PGCD de 696 et 406.

2. Rendre la fraction $\frac{406}{696}$ irréductible.

Activités géométriques (12 points)

Exercice 1

(La figure ci-dessous n'est pas en vraie grandeur.)



On donne AB = 4 cm, OB = 3 cm et OC = 6 cm.
Les droites (BC) et (AF) se coupent en O.

1. Expliquer pourquoi (AB) et (CF) sont parallèles.

2. Montrer que OA = 5 cm.

3. Calculer OF et CF.

Exercice 2

Soit C le cercle de centre O et de rayon 4 cm.
[AB] est un diamètre du cercle C et M est un point de ce cercle tel que :
AM = 5 cm.

1. Faire une figure en respectant les dimensions données et la compléter au fur et à mesure.

2. Démontrer que AMB est un triangle rectangle.

3. Calculer sin $\widehat{MBA}$. En déduire une mesure de $\widehat{MBA}$ arrondie au degré.

4. Placer le point R milieu du segment [OB]. Tracer le symétrique de M par rapport à R,

on l'appelle P.
Quelle est la nature du quadrilatère MBPO ? (Justifier.)

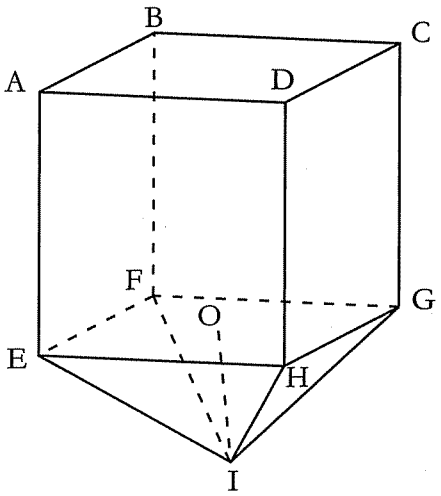
5. En déduire que $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{BP}$.

6. Construire le point N tel que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{BP}$.

Problème (12 points)

Première partie

Un réservoir est constitué d'une pyramide régulière à base carrée surmontée d'un parallélépipède rectangle (voir figure).
AB = BC = 2 m, AE = 5 m et OI = 1,5 m.
(OI est la hauteur de la pyramide.)



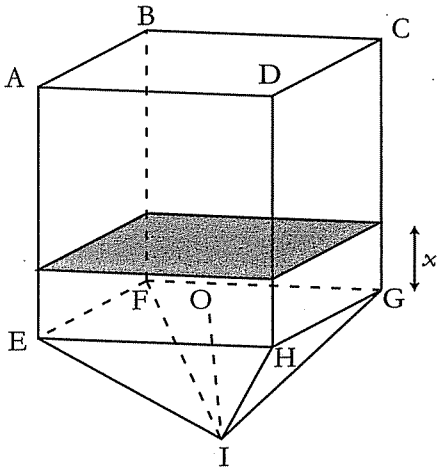
1. Calculer le volume de la pyramide en m^3.

2. Calculer le volume du parallélépipède rectangle en m^3.

3. En déduire le volume du réservoir lorsqu'il est plein.

Deuxième partie

On remplit d'eau ce réservoir. La partie pyramidale étant entièrement pleine, on appelle x la hauteur d'eau dans le parallélépipède rectangle.



1. Quelles sont les valeurs de x possibles? Donner la réponse sous forme d'un encadrement de x.

2. Exprimer en fonction de x le volume d'eau dans le parallélépipède.

3. Montrer que le volume d'eau dans le réservoir est donné par la fonction affine V définie par $V(x) = 4x + 2$.

4. Représenter graphiquement cette fonction affine V en prenant 1 cm pour.0,5 m en abscisse et 1 cm pour 2 m^3 en ordonnée.

5. Lire sur le graphique une valeur de x telle que le volume d'eau égale 12 m^3.

6. Trouver par le calcul le volume d'eau dans le réservoir lorsque x vaut 1,8 m.
Quel est alors le pourcentage de remplissage du réservoir? (Arrondir à l'unité.)

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

$A = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4} + \frac{2}{12} + \frac{1}{2}$

$A = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9+2+4}{12}$

$A = \frac{15}{12} = \frac{3 \times 5}{3 \times 4}$, donc $A = \frac{5}{4}$.

$B = \frac{2 - \frac{1}{3}}{3 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{6}{3} - \frac{1}{3}}{\frac{12}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{13}{4}}$

$B = \frac{5}{3} \times \frac{4}{13} = \frac{5 \times 4}{3 \times 13}$, donc $B = \frac{20}{39}$

$C = \frac{3 \times 10^4 \times 10^{-2} \times 5}{10^{-1}} = \frac{3 \times 5 \times 10^{4+(-2)}}{10^{-1}}$

$C = 15 \times \frac{10^2}{10^{-1}} = 15 \times 10^{2-(-1)} = 15 \times 10^3$.

Donc, en écriture scientifique, $C = 1{,}5 \times 10^4$.

Exercice 2

$D = 3\sqrt{12} + \sqrt{27} - 5\sqrt{3} = 3\sqrt{4 \times 3} + \sqrt{9 \times 3} - 5\sqrt{3}$

$D = 3 \times 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = (6 + 3 - 5)\sqrt{3}$.

donc $D = 4\sqrt{3}$.

Exercice 3

1. $E = (2x - 3)^2 - 3(2x - 3)$

$E = 4x^2 - 12x + 9 - 6x + 9$

Donc $E = 4x^2 - 18x + 18$.

2. $E = (2x - 3)(2x - 3) - 3(2x - 3)$

$E = (2x - 3)[(2x - 3) - 3]$

Donc $E = (2x + 3)(2x - 6)$.

3. $(2x - 3)(2x - 6) = 0$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

Donc $2x - 3 = 0$ ou $2x - 6 = 0$.

Soit $2x = 3$ ou $2x = 6$, soit $x = \dfrac{3}{2}$ ou $x = 3$.

Donc les solutions de l'équation sont $\dfrac{3}{2}$ et 3.

4. Pour $x = \sqrt{2}$, on utilise la forme développée de E :

$E = 4\left(\sqrt{2}\right)^2 - 18 \times \sqrt{2} + 18 = 4 \times 2 - 18\sqrt{2} + 18$

$E = 26 + 18\sqrt{2}$.

Exercice 4

1. On calcule le PGCD à l'aide de la méthode des divisions successives (algorithme d'Euclide) :

$696 = 406 \times 1 + 290$

$406 = 290 \times 1 + 116$

$290 = 116 \times 2 + 58$

$116 = 58 \times 2 + 0$

Le dernier reste non nul est 58, donc PGCD (696 ; 406) = 58.

2. Si on divise le numérateur et le dénominateur d'une fraction par leur PGCD, on obtient une fraction irréductible :

$\dfrac{406}{696} = \dfrac{7 \times 58}{12 \times 58} = \dfrac{7}{12}$.

7 et 12 sont premiers entre eux, donc la fraction $\dfrac{7}{12}$ est irréductible.

Activités géométriques

Exercice 1

1. D'après la figure, les droites (AB) et (FC) sont perpendiculaires à la droite (BC).

Or, si deux droites sont perpendiculaires à la même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Donc les droites (AB) et (FC) sont parallèles.

2. Le triangle OAB est rectangle en B ; d'après le théorème de Pythagore, on a : $OA^2 = OB^2 + BA$

D'où $OA^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$.

$OA = \sqrt{25}$

Or OA>0 (OA est une longueur), donc OA = 5 cm.

3. Les triangles OAB et OFC sont tels que :

– le point F est un point de la droite (OA) ;
– le point C est un point de la droite (OB) ;
– les droites (AB) et (FC) sont parallèles.

On peut appliquer le théorème de Thalès. On a alors :

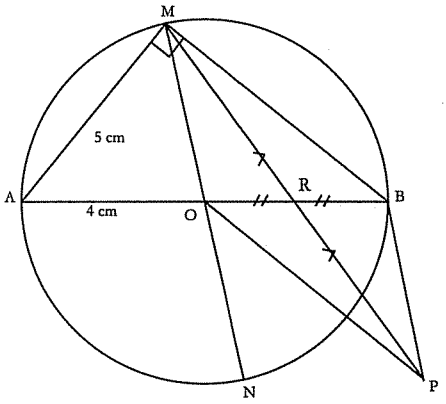
$\frac{OF}{OA} = \frac{OC}{OB} = \frac{FC}{AB}$, soit $\frac{OF}{5} = \frac{6}{3} = \frac{FC}{4}$.

On en déduit que : $OF = \frac{6}{3} \times 5 = 10$ et $FC = \frac{6}{3} \times 4 = 8$.

Donc CF = 10 cm et FC = 8 cm.

Exercice 2

1.



2. M est un point du cercle C de diamètre [AB].

Or, si un triangle est inscrit dans un cercle et un de ses côtés est un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle.

Donc le triangle AMB est rectangle en M.

CORRIGÉ

3. Dans le triangle AMB rectangle en M, d'après la trigonométrie :

$\sin \widehat{MBA} = \dfrac{AM}{AB}$, soit $\sin \widehat{MBA} = \dfrac{5}{8}$.

Donc $\widehat{MBA} = \sin^{-1}\left(\dfrac{5}{8}\right)$.

À l'aide de la calculatrice, $\widehat{MBA} \approx 37°$ (valeur arrondie au degré).

4. Le point P est le symétrique de M par rapport à R, donc le point R est le milieu du segment [MP].

De plus, R est le milieu du segment [OB].

Les diagonales [MP] et [OB] du quadrilatère MBPO ont le même milieu R, donc MBPO est un parallélogramme.

5. Comme MBPO est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{BP}$.

6. Comme $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{BP}$, alors $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{MO}$.

Donc N est le point tel que le point O soit le milieu de [MN].

Problème

Première partie

1. Soit V_1 le volume de la pyramide régulière à base carrée de côté [EF] et de hauteur OI. V_1 est donné par la formule :

$V_1 = \dfrac{1}{3} \times EF^2 \times OI$.

La face latérale ABFE étant un rectangle, on a EF = AB = 2 m.

D'où : $V_1 = \dfrac{1}{3} \times 2^2 \times 1{,}5 = 2$.

Donc le volume de la pyramide est égal à 2 m^3.

2. Soit V_2 le volume du parallélépipède rectangle. V_2 est égal au produit des trois dimensions :

$V_2 = AB^2 \times AE$.

$V_2 = 2^2 \times 2 = 20$. Donc le volume du parallélépipède est égal à 20 m^3

3. Le volume V du réservoir plein est égal à la somme des deux volumes précédents :

$V = V_1 + V_2$, soit $V = 2 + 20 = 22$.

Donc le volume du réservoir plein est égal à 22 m^3.

Deuxième partie

1. La hauteur de l'eau peut varier de 0 à la hauteur totale du parallélépipède rectangle, c'est-à-dire AE = 5 m.

On écrit : $0 \leqslant x \leqslant 5$.

2. Le volume de l'eau dans le parallélépipède est celui d'un parallélépipède de base carrée et de hauteur x.

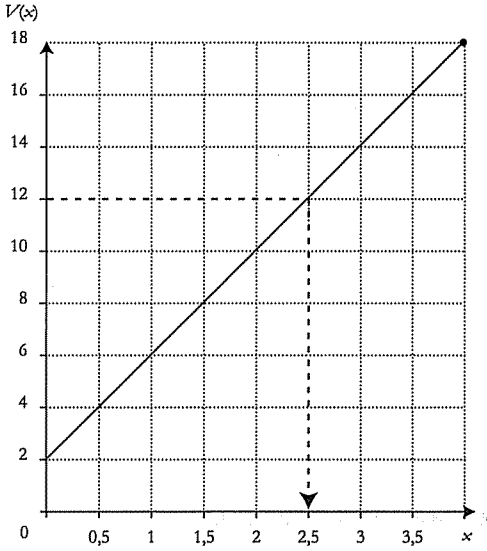
Donc l'expression de ce volume en fonction de x est $2 \times 2 \times x$, soit $4x$ m^3.

3. Le volume d'eau dans le réservoir est égal à celui de la pyramide plus celui contenu dans le parallélépipède.

On a donc $V(x) = 4x + 2$.

4. La représentation graphique de la fonction affine V est une droite.

Pour la tracer, on détermine les coordonnées de deux points. Par exemple, les points (0 ; 2) et (4 ; 18).



5. Par lecture graphique, le point de la droite représentant V dont l'ordonnée est 12 a pour abscisse 2,5.
Lorsque la hauteur x vaut 2,5 m, le volume d'eau est égal à 12 m^3.

6. Si x vaut 1,8 m, alors le volume est égal à :
$V(1{,}8) = 4 \times 1{,}8 + 2 = 9{,}2$ m^3.
Le pourcentage de remplissage est alors : $\frac{9{,}2}{22} \times 100 \approx 42\%$.

SUJET 25

GROUPEMENT 2, SEPTEMBRE 2005

SUJET

Activités numériques (12 points)

Exercice 1

On considère les nombres suivants :

$A = -\dfrac{13}{7} + \dfrac{3}{7} \div \dfrac{5}{3}$;

$B = \sqrt{8} \times 5\sqrt{18}$;

$C = \sqrt{8} + 5\sqrt{18}$;

$D = \dfrac{45 \times 10^{-6} \times 10^{8} \times 4}{3 \times 10^{-3}}$.

En faisant apparaître toutes les étapes de calculs sur la copie :

1. Écrire A sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Écrire B sous la forme d'un nombre entier.

3. Écrire C sous la forme $a\sqrt{2}$, où a est un nombre entier.

4. Écrire D en écriture scientifique.

Exercice 2

On considère l'expression $F = (5x + 4)^2 - 49$.

1. Développer puis réduire F.

2. Factoriser F.

3. Résoudre l'équation $(5x - 3)(5x + 11) = 0$.

4. Calculer F pour $x = -2$.

Exercice 3

1. Résoudre le système $\begin{cases} 6x + 5y = 25 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$

2. Pierre et Jules achètent des poissons rouges et des poissons jaunes dans le même magasin spécialisé.

Pour l'achat de 6 poissons rouges et de 5 poissons jaunes, Pierre dépense 25 euros.

Pour l'achat de 2 poissons rouges et de 3 poissons jaunes, Jules dépense 11 euros.
Quel est le prix d'un poisson rouge?
Quel est le prix d'un poisson jaune?
La démarche suivie sera expliquée sur la copie.

Activités géométriques (12 points)

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; I, J) d'unité 1 cm sur chaque axe.
On considère les points A(1 ; 2), B(−2 ;1) et C(−3 ;−2).

1. Placer les points A, B, C dans le repère (O ; I, J).

2. Calculer les distances AB et BC.

3. Construire le point D image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

4. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD? Justifier.

Exercice 2

IJK est un triangle tel que IJ = 9,6 cm, JK = 10,4 cm et IK = 4 cm.

1. Tracer le triangle IJK en vraie grandeur.

2. Démontrer que le triangle IJK est rectangle en I.

3. Calculer la tangente de l'angle $\widehat{IKJ}$; en déduire la valeur arrondie au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{IKJ}$.

4. M est le point du segment [IJ] tel que IM = 7,2 cm ;
N est le point du segment [IK] tel que IN = 3 cm.
a) Démontrer que les droites (MN) et (JK) sont parallèles.
b) Calculer la distance MN.

Problème (12 points)

Un parc d'attraction pratique les tarifs suivants :

– tarif 1 : par jour de présence dans le parc, le prix à payer est de 12 euros pour un enfant et de 18 euros pour un adulte ;

– tarif 2 : quel que soit le nombre de jours de présence dans le parc et le nombre de membres de la famille, le prix pour la famille est constitué d'un forfait de 100 euros auquel s'ajoute une participation de 10 euros par jour.

1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous pour une famille constituée d'un adulte et d'un enfant :

Nombre de jours passés dans le parc	1	4	14
Prix payé avec le tarif 1 (en €)	30		
Prix payé avec le tarif 2 (en €)		140	

Dans toute la suite du problème, on considère une famille constituée d'un adulte et d'un enfant.

2. a) Exprimer, en fonction du nombre x de jours de présence dans le parc, le prix payé par la famille avec le tarif 1. On note $p_1(x)$ ce prix.

b) Exprimer, en fonction du nombre x de jours de présence dans le parc, le prix payé par la famille avec le tarif 2. On note $p_2(x)$ ce prix.

3. Tracer sur votre copie les représentations graphiques des fonctions p_1 et p_2 définies par $p_1 : x \mapsto 30x$ et $p_2 : x \mapsto 10x + 100$.

Sur l'axe des abscisses, 1 cm représente un jour.

Sur l'axe des ordonnées, 1 cm représente 20 euros.

(Placer l'origine des axes en bas et à gauche de votre feuille.)

4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le travail graphique ci-dessus.

a) Si la famille souhaite rester 8 jours dans le parc, quel est le tarif le plus avantageux ? Justifier.

b) Si la famille dispose d'un budget de 120 euros pour l'entrée au parc, quel tarif lui permet d'y passer le plus grand nombre de jours ? Justifier.

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = -\frac{13}{7} + \frac{3}{7} \div \frac{5}{3} = -\frac{13}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{3}{5}$

$A = -\frac{13}{7} + \frac{3 \times 3}{7 \times 5} = -\frac{65}{35} + \frac{9}{35} = -\frac{56}{35}$

$A = -\frac{8 \times 7}{5 \times 7}$, donc $A = -\frac{8}{5}$.

2. $B = \sqrt{8} \times 5\sqrt{18} = 5 \times \sqrt{8} \times \sqrt{18}$

$B = 5 \times \sqrt{8 \times 18} = 5 \times \sqrt{144} = 5 \times 12$

Donc $B = 60$.

3. $C = \sqrt{8} + 5\sqrt{18} = \sqrt{4 \times 2} + 5\sqrt{9 \times 2}$

$C = \sqrt{4} \times \sqrt{2} + 5 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2}$

$C = 2\sqrt{2} + 5 \times 3\sqrt{2} = (2 + 15)\sqrt{2}$

Donc $C = 17\sqrt{2}$.

4. $D = \frac{45 \times 10^{-6} \times 10^{8} \times 4}{3 \times 10^{-3}} = \frac{45 \times 4}{3} \times \frac{10^{-6} \times 10^{8}}{10^{-3}}$

$D = \frac{15 \times 3 \times 4}{3} \times \frac{10^{-6+8}}{10^{-3}} = 60 \times 10^{2-(-3)}$

$D = 60 \times 10^{5}$

Donc, en écriture scientifique : $D = 6 \times 10^{6}$.

Exercice 2

1. $F = (5x + 4)^2 - 49 = 25x^2 + 40x + 16 - 49$

Donc $F = 25x^2 + 40x - 33$

2. $F = (5x + 4)^2 - 49 = (5x + 4)^2 - 7^2$

$F = (5x + 4 + 7)(5x + 4 - 7)$

Donc $F = (5x + 11)(5x - 3)$

3. L'équation $(5x - 3)(5x + 11) = 0$ est une équation produit nul.
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.
Donc $5x - 3 = 0$ ou $5x + 11 = 0$.
Soit $x = \frac{3}{5}$ ou $x = -\frac{11}{5}$.
Donc les solutions de l'équation sont $\frac{3}{5}$ et $-\frac{11}{5}$.

4. Pour $x = -2$, on peut utiliser la forme développée de F :
$F = 25 \times (-2)^2 + 40 \times (-2) - 33$
$F = 25 \times 4 - 80 - 33$
$F = 100 - 80 - 33$
Donc $F = -13$.

Exercice 3

1. Soit le système $\begin{cases} 6x + 5y = 25 & (1) \\ 2x + 3y = 11 & (2) \end{cases}$
On résout ce système par combinaison.
On multiplie l'équation (2) par -3, on obtient :
$\begin{cases} 6x + 5y = 25 & (1) \\ -6x - 9y = -33 & (2') \end{cases}$
En additionnant membre à membre les équations (1) et (2'), on obtient :
$-4y = -8$, soit $y = \frac{-8}{-4} = 2$.
On en déduit x en remplaçant y par sa valeur dans l'équation (1) :
$6x + 5 \times 2 = 25$; $6x = 25 - 10$.
Soit $x = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2{,}5$.
On vérifie : $\begin{cases} 6 \times 2{,}5 + 5 \times 2 = 15 + 10 = 25 \\ 2 \times 2{,}5 + 3 \times 2 = 5 + 6 = 11 \end{cases}$
Donc la solution du système est le couple (2,5 ; 2).

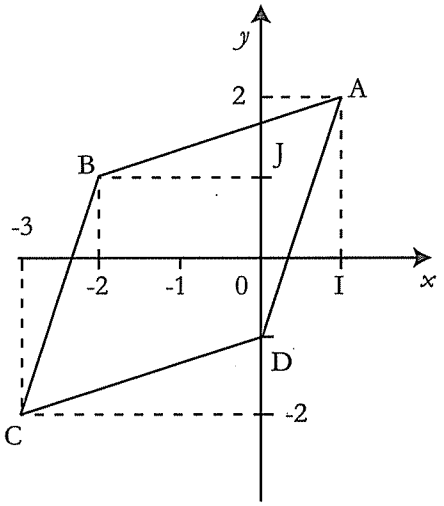
2. Soit x le prix d'un poisson rouge et y le prix d'un poisson jaune.
La première information se traduit par l'équation : $6x + 5y = 25$.
La seconde information se traduit par l'équation : $2x + 3y = 11$.
Les nombres x et y doivent vérifier les deux équations simultanément, donc x et y sont

solutions du système précédent, soit $(x\,;\,y) = (2{,}5\,;\,2)$.
Un poisson rouge coûte donc 2,5 euros et un poisson jaune coûte 2 euros.

Activités géométriques

Exercice 1

1.



2. Le repère (O ; I , J) étant orthonormal, on peut calculer la distance AB à l'aide de la formule :
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
$AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1}$
Donc AB = $\sqrt{10}$ cm.
De même $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$.
$BC = \sqrt{(-3-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9}$
Donc $BC = \sqrt{10}$ cm.

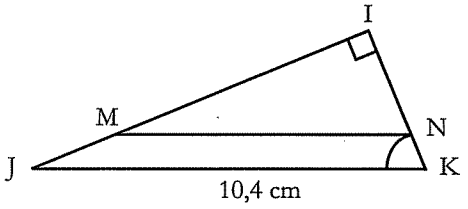
3. Le point D est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ signifie que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

4. Dire que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ signifie que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

De plus, d'après la question 1, on sait que AB = BC = $\sqrt{10}$ cm. Or un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.
Donc ABCD est un losange.

Exercice 2

1. La figure est réalisée à l'échelle $\frac{1}{2}$.



IJ = 9,6 cm
IM = 7,2 cm
IK = 4 cm
IN = 3 cm

2. Dans le triangle IJK, le plus long côté est [JK] et on a :
$JK^2 = 10{,}4^2 = 108{,}16$
$IJ^2 + IK^2 = 9{,}6^2 + 4^2 = 108{,}16$
d'où $JK^2 = IJ^2 + IK^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut affirmer que le triangle IJK est rectangle en I.

3. Dans le triangle IJK rectangle en I, d'après la trigonométrie :
$\tan \widehat{IKJ} = \frac{IJ}{IK}$, d'où $\tan \widehat{IKJ} = \frac{9{,}6}{4} = 2{,}4$.
On en déduit que $\widehat{IKJ} = \tan^{-1}(2{,}4)$.
À l'aide de la calculatrice, on obtient :
$\widehat{IKJ} \approx 67°$ (valeur arrondie au degré près).

4. a) Les triangles IJK et IMN de sommet commun I sont tels que les points I, M et J d'une part et les points I, N et K d'autre part sont alignés dans ce même ordre.
De plus, on a $\frac{IM}{IJ} = \frac{7{,}2}{9{,}6} = 0{,}75$ et $\frac{IN}{IK} = \frac{3}{4} = 0{,}75$; donc $\frac{IM}{IJ} = \frac{IN}{IK}$.
Dans ces conditions, d'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut affirmer que les droites (MN) et (JK) sont parallèles.
b) Les triangles IJK et IMN sont tels que :

– M est un point de la droite (IJ) ;
– N est un point de la droite (IK) ;
– les droites (MN) et (IJ) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a les égalités de rapports suivantes :
$\frac{IM}{IJ} = \frac{IN}{IK} = \frac{MN}{JK}$ et en particulier $\frac{IN}{IK} = \frac{MN}{JK}$.
En remplaçant par les valeurs numériques, on obtient :
$\frac{3}{4} = \frac{MN}{10,4}$,
d'où $MN = \frac{3 \times 10,4}{4} = 7,8$.
Donc la distance MN est égale à 7,8 cm.

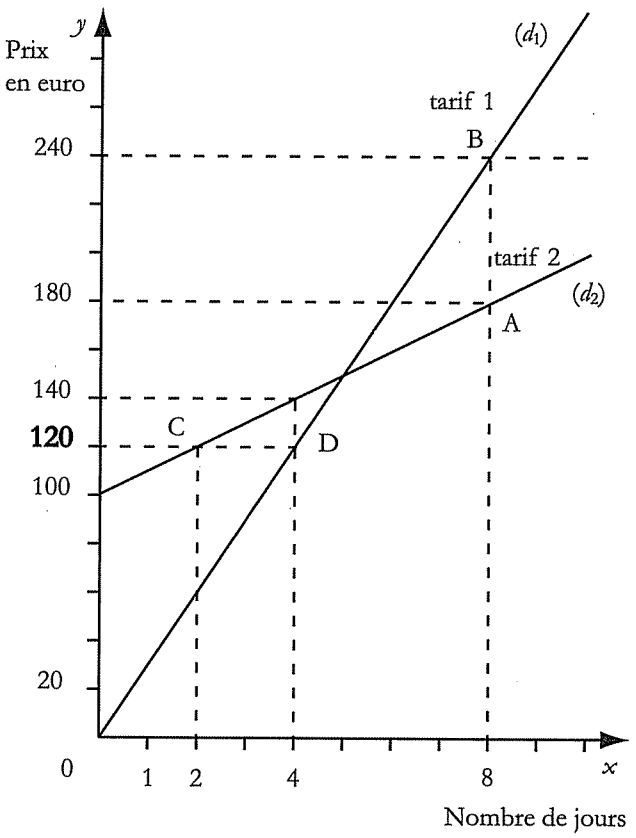
Problème

1.

Nombre de jours passés dans le parc	1	4	14
Prix payé avec le tarif 1 (en €)	30	120	420
Prix payé avec le tarif 2 (en €)	110	140	240

2. a) Avec le tarif 1, un adulte paye 18 € et un enfant paye 12 €, donc la famille va payer 30 € par jour.
Pour x jours, elle devra payer $x \times 30$ €. Soit $p_1(x) = 30x$.
b) Avec le tarif 2, la famille s'acquitte d'un forfait de 100 € et paye ensuite 10 € par jour de présence. Donc pour x jours, elle devra payer 100 € plus $x \times 10$ €. Soit $p_2(x) = 10x + 100$.

3. La fonction p_1 est linéaire, donc sa représentation graphique est une droite (d_1) passant par l'origine du repère O et le point de coordonnées (4 ; 120).
La fonction p_2 est affine, donc sa représentation graphique est une droite (d_2) passant par les points de coordonnées respectives (0 ; 100) et (4 ; 140).



4. a) Graphiquement, on voit que pour $x = 8$ jours, le point A de la droite (d_1) est en dessous du point B de la droite (d_2), ce qui signifie que le tarif 2 est plus avantageux.

b) Avec un budget de 120 €, on voit graphiquement que le point D de la droite (d_1) a pour abscisse 4, alors que le point C de la droite (d_2) a pour abscisse 2.

Ainsi, avec le tarif 1 et un budget de 120 €, la famille peut passer 4 jours sur le parc. Avec le tarif 2, la famille ne peut passer que 2 jours sur le parc. Le tarif 1 est donc préférable avec un budget de 120 €.

CORRIGÉ

SUJET 26

◇ *GROUPEMENT 3, SEPTEMBRE 2005*

Activités numériques (12 points)

Exercice 1

$A = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}}{2 - \frac{1}{2}}$;

$B = \dfrac{35 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{5}}{21 \times 10^{-1}}$;

$C = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{80} + \sqrt{20}$.

1. Écrire A sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Écrire B sous la forme $a \times 10^{n}$, où a est un entier et n un entier relatif.

3. Écrire C sous la forme $a\sqrt{b}$, où a est un entier relatif et b un entier positif le plus petit possible.

Exercice 2

Soit l'expression $D = (3x - 1)(2x+5) - (3x - 1)^2$.

1. Développer et réduire l'expression D.

2. Factoriser l'expression D.

Exercice 3

Résoudre les deux équations suivantes :

1. $(x + 2)(3x - 5) = 0$;

2. $x + 2(3x - 5) = 0$;

Exercice 4

1. Calculer le PGCD des nombres 462 et 546.

2. En déduire la fraction irréductible égale à $\dfrac{462}{546}$.

SUJET

Exercice 5

Voici les notes obtenues par 13 élèves à un devoir de mathématiques :
6 ; 8 ; 8 ; 9 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 14 ; 17 ; 18 ; 18 ; 19.

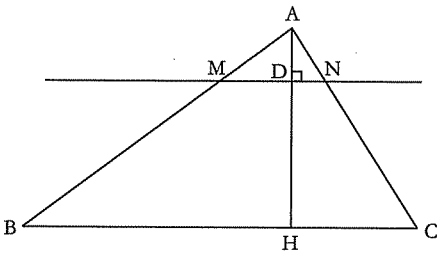
1. Calculer la moyenne arrondie au centième de cette série de notes.

2. Déterminer la médiane de cette série de notes.

Activités géométriques (12 points)

Exercice 1

Le schéma donné ci-dessous n'est pas en vraie grandeur.
On donne AM = 5 cm ; AB = 15 cm ; AN = 4 cm ; AC = 12 cm et AH = 7,5 cm. Les droites (AH) et (MN) sont perpendiculaires en D.



1. Démontrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

2. Calculer AD. Justifier.

3. Pourquoi peut-on dire que les angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ sont égaux?

4. Montrer que le triangle AHB est rectangle en H.

5. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à 9 fois l'aire du triangle AMN.

Exercice 2

1. a) Construire un carré ABCD de centre O et de côté 3 cm.
b) Construire le point E tel que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.
c) Construire le point F, symétrique de O par rapport à C.
d) Construire le point G tel que $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BO}$.

2. a) Démontrer que les points O, F et G sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

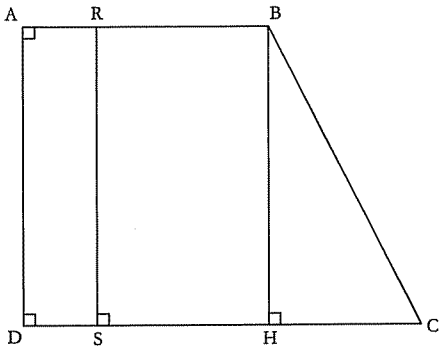
b) Démontrer que le triangle OFG est rectangle en G.

Problème (12 points)

Sur la figure ci-dessous, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, ABCD est un trapèze rectangle.

On donne AB = 6 cm ; AD = 8 cm et DC = 10 cm.

(HB) et (RS) sont perpendiculaires à (DC) et R est un point du segment [AB] tel que AR = x.



Rappel : l'aire du trapèze est donnée par la formule :

$A = \dfrac{(B + b) \times h}{2}$.

B, b et h désignent respectivement les longueurs de la grande base, de la petite base et de la hauteur du trapèze.

1. Calculer l'aire du trapèze ABCD.

2. Calcul de BC.

a) Démontrer que ADHB est un rectangle. En déduire HC.

b) Calculer BC. (On donnera le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b le plus petit possible.)

3. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BCD}$ arrondie au dixième de degré.

4. Calculs d'aires.

a) Exprimer, en fonction de x, l'aire $f(x)$ du rectangle ARSD.

b) Exprimer, en fonction de x, l'aire $g(x)$ du trapèze RBCS.

c) Calculer x pour que ces deux aires soient égales ; donner alors la valeur commune de chacune de ces deux aires.

5. x est un nombre compris entre 0 et 6. Sur une feuille de papier millimétré, construire une représentation graphique des fonctions f et de g dans un repère orthonormal. Une unité en abscisse représente 1 cm et une unité en ordonnée représente 4 cm^2.

6. Retrouver sur le graphique le résultat de la question 5.

On fera apparaître les pointillés nécessaires.

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = \dfrac{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}{2-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{4}{6}+\frac{1}{6}}{\frac{4}{2}-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{2}}$

$A = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{5 \times 2}{6 \times 3} = \dfrac{5 \times 2}{2 \times 3 \times 3}$

Donc $A = \dfrac{5}{9}$.

2. $B = \dfrac{35 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{5}}{21 \times 10^{-1}} = \dfrac{35 \times 3 \times 10^{-3+5}}{21 \times 10^{-1}}$

$B = \dfrac{5 \times 7 \times 3 \times 10^{2}}{3 \times 7 \times 10^{-1}} = 5 \times 10^{2-(-1)}$

Donc $B = 5 \times 10^{3}$.

3. $C = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{80} + \sqrt{20} = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{16 \times 5} + \sqrt{4 \times 5}$

$C = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{16} \times \sqrt{5} + \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5} - 8 \times \sqrt{5} + 2\sqrt{5}$

$C = (3 - 8 + 2)\sqrt{5}$.

Donc $C = -3\sqrt{5}$.

Exercice 2

1. $D = (3x - 1)(2x + 5) - (3x - 1)^2$
$D = 6x^2 + 15x - 2x - 5 - (9x^2 - 6x + 1)$
$D = 6x^2 + 13x - 5 - 9x^2 + 6x - 1$
$D = -3x^2 + 19x - 6$.

2. $D = (3x - 1)(2x + 5) - (3x - 1)(3x - 1)$
$D = (3x - 1)[(2x + 5) - (3x - 1)]$
$D = (3x - 1)(2x + 5 - 3x + 1)$
$D = (3x - 1)(-x + 6)$.

Exercice 3

1. L'équation $(x + 2)(3x - 5) = 0$ est une équation produit nul.
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.
Donc $x + 2 = 0$ ou $3x - 5 = 0$, soit $x = -2$ ou $x = \frac{5}{3}$.
Donc les solutions de l'équation sont -2 et $\frac{5}{3}$.

2. Soit l'équation $x + 2(3x - 5) = 0$. Cette équation équivaut à :
$x + 6x - 10 = 0$, soit $7x - 10 = 0$. On a donc $7x = 10$, soit $x = \frac{10}{7}$.
Donc la solution de l'équation est $\frac{10}{7}$.

Exercice 4

1. On calcule le PGCD à l'aide de la méthode des divisions successives (algorithme d'Euclide) :
$546 = 462 \times 1 + 84$
$462 = 84 \times 5 + 42$
$84 = 42 \times 2 + 0$
Le dernier reste non nul est 42, donc PGCD (546 ; 462) = 42.

2. Si on divise le numérateur et le dénominateur d'une fraction par leur PGCD, on obtient une fraction irréductible :
$\frac{462}{546} = \frac{42 \times 11}{42 \times 13} = \frac{11}{13}$.

11 et 13 sont premiers entre eux, donc la fraction $\frac{11}{13}$ est irréductible.

Exercice 5

1. Soit m la moyenne de cette série de notes :

$$m = \frac{6 + 2 \times 8 + 2 \times 9 + 10 + 11 + 12 + 14 + 17 + 2 \times 18 + 19}{13}$$

$$m = \frac{159}{13}$$

Donc la moyenne des notes est égale à 12,23 (valeur arrondie au centième).

2. La médiane de la série ordonnée est la note qui partage les 13 notes en deux groupes de même effectif. La médiane est donc la septième note, c'est-à-dire 11.

6 élèves ont eu moins de 11 et 6 élèves ont eu plus de 11.

Activités géométriques

Exercice 1

1. Les triangles ABC et AMN de sommet commun A sont tels que les points A, M et B d'une part et les points A, N et C d'autre part sont alignés dans ce même ordre.

De plus, on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Dans ces conditions, d'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut affirmer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

2. Les triangles ABH et AMD sont tels que :
– M est un point de la droite (AB) ;
– D est un point de la droite (AH) ;
– les droites (MD) et (BH) sont parallèles car D $\in$ (MN) et H $\in$ (BC).

D'après le théorème de Thalès, on a les égalités de rapports suivantes :

$\frac{AM}{AB} = \frac{AD}{AH} = \frac{MD}{BH}$ et en particulier $\frac{AM}{AB} = \frac{AD}{AH}$.

Ainsi, on a $\frac{1}{3} = \frac{AD}{7{,}5}$, d'où $AD = \frac{1}{3} \times 7{,}5 = 2{,}5$.

Donc la distance AD est égale à 2,5 cm.

3. Deux droites parallèles coupées par une sécante déterminent des paires d'angles cor-

respondants de même mesure.

Les droites (MN) et (BC) sont parallèles et déterminent, avec la sécante (AB), les angles correspondants $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$.

Donc les angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ sont égaux.

4. On sait que les droites (MN) et (BC) sont parallèles et que les droites (MN) et (AH) sont perpendiculaires.

Or, si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

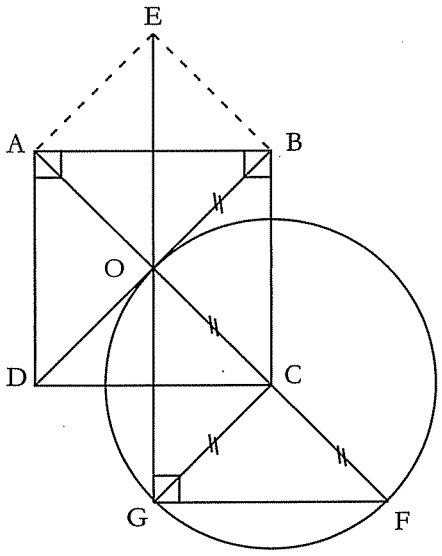
Donc la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (BC), ce qui nous permet d'affirmer que le triangle AHB est rectangle en H.

5. Le triangle ABC est un agrandissement du triangle AMN de rapport : $k = \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{15}{5} = 3$.

Dans un agrandissement de rapport k, l'aire est multipliée par k^2. Donc l'aire du triangle ABC est égale à l'aire du triangle AMN multipliée par 3^2, soit 9 fois l'aire du triangle AMN.

Exercice 2

1. Voici la figure demandée :



En particulier, le point E tel que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ est le quatrième sommet du parallélogramme OAEB.

2. a) Le point F est le symétrique du point O par rapport à C, donc C est le milieu du segment [OF] et on a CO = CF.

On a $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BO}$, donc CG = BO.

Or ABCD est un carré, donc ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu et ont la même longueur.

On en déduit que OB = OC.

Finalement, en comparant les égalités de longueur, on obtient :

CO = CF = CG.

Cette dernière égalité nous permet d'affirmer que les points O, F et G sont sur le cercle de centre C et de rayon CO.

b) D'après ce qui précède, le triangle OFG est inscrit dans un demi-cercle et un de ses côtés est un diamètre de ce demi-cercle, donc le triangle OFG est rectangle en G.

Problème

1. L'aire du trapèze ABCD est égale à :

$\frac{(AB + DC) \times AD}{2}$, soit $\frac{(6 + 10) \times 8}{2} = \frac{128}{2} = 64$.

Donc l'aire du trapèze est égale à 64 cm^2.

2. a) D'après la figure, ADHB est un quadrilatère qui a trois angles droits, c'est donc un rectangle.

Dans un rectangle les côtés opposés ont la même longueur ;

donc DH = AB = 6 cm.

Le point H est sur le segment [DC], donc DH + HC = DC.

Soit HC = 10 − 6. Donc HC = 4 cm.

b) Dans le triangle BHC rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$BC^2 = BH^2 + HC^2$, soit $BC^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80$.

Or BC > 0 (BC est une longueur), d'où $BC = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$.

Donc $BC = 4\sqrt{5}$ cm.

3. Les points C, H et D étant alignés, les angles $\widehat{BCH}$ et $\widehat{BCD}$ sont égaux.

Dans le triangle BHC rectangle en H, d'après la trigonométrie, on a :

CORRIGÉ

$\tan \widehat{BCH} = \dfrac{HB}{HC}$. D'où $\tan \widehat{BCH} = \dfrac{8}{4} = 2$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$\widehat{BCH} = \tan^{-1}(2) \approx 63{,}4°$.

Donc la mesure de l'angle $\widehat{BCD}$ est environ égale à 63,4° (à 0,1° près).

4. a) Soit AR = x. L'aire $f(x)$ du rectangle ARSD est donnée par la formule :

L × l = AD × AR, donc $f(x) = 8 \times x = 8x$.

b) On remarque que le trapèze ABCD est constitué du rectangle ARSD et du trapèze RBCS, donc l'aire du trapèze RBCS est égale à l'aire du trapèze ABCD moins celle du rectangle ARSD.

Soit $g(x) = 64 - 8x$.

c) Calculer x pour que ces deux aires soient égales revient à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. Cette équation s'écrit :

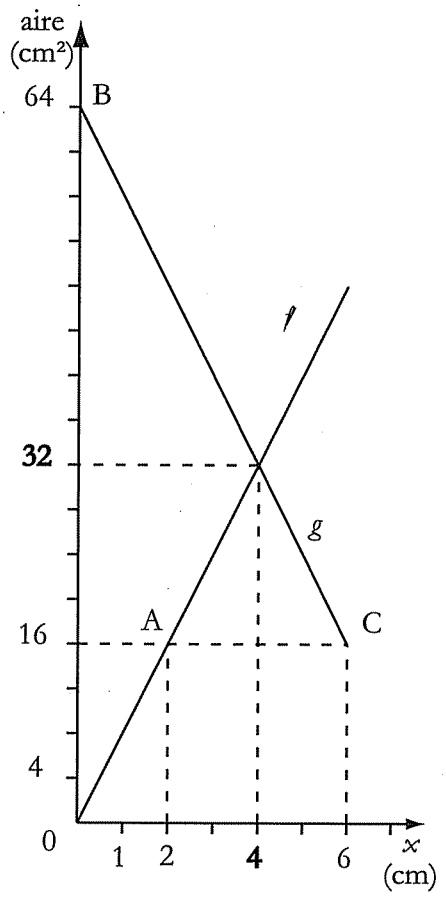
$8x = 64 - 8x$, soit $8x + 8x = 64$, soit $16x = 64$,

d'où $x = \dfrac{64}{16} = 4$.

Les deux aires sont égales lorsque $x = 4$ cm et la valeur commune des aires est alors $8 \times 4 = 32$ cm^2.

5. La fonction f est linéaire, donc sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère et le point A (2 ; 16).

La fonction g est affine, donc sa représentation graphique est une droite passant par les points B (0 ; 64) et C (6 ; 16).



6. Graphiquement, l'abscisse du point d'intersection des deux droites correspond à la valeur de $x = 4$ cm pour laquelle les deux aires sont égales et la valeur commune de ces aires est l'ordonnée du point, c'est-à-dire 32.

CORRIGÉ

BREVET
MATHÉMATIQUES
SESSION 2006

SUJET 27

GROUPEMENT I, JUIN 2006

SUJET

Activités numériques

Exercice 1

$A = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \div \frac{3}{2}$; $B = 50\sqrt{45} - 3\sqrt{5} + 6\sqrt{125}$;

$C = \dfrac{5 \times 10^{-2} \times 7 \times 10^{5}}{2 \times 10^{7}}$.

1. Calculer A en détaillant les étapes du calcul. Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

2. Écrire B sous forme $a\sqrt{5}$ où a est un nombre entier. Détailler les étapes du calcul.

3. Calculer C et donner son écriture scientifique en détaillant les étapes du calcul.

Exercice 2

Soit $D = (2x + 3)^2 + (2x + 3)(7x - 2)$

1. Développer et réduire D.

2. Factoriser D.

3. Calculer D pour $x = -4$.

4. Résoudre l'équation $(2x + 3)(9x + 1) = 0$

Exercice 3

Pierre a gagné 84 sucettes et 147 bonbons à un jeu. Étant très généreux, et ayant surtout très peur du dentiste, il décide de les partager avec des amis. Pour ne pas faire de jaloux, chacun doit avoir le même nombre de sucettes et le même nombre de bonbons.

1. Combien de personnes au maximum pourront bénéficier de ces friandises (Pierre étant inclus dans ces personnes) ? Expliquer votre raisonnement.

2. Combien de sucettes et de bonbons aura alors chaque personne ?

Exercice 4

1. Résoudre le système suivant :
$\begin{cases} 8x + 3y = 39{,}5 \\ 7x + 9y = 50{,}5 \end{cases}$

2. Une balade d'une heure en mer est proposée à deux groupes de touristes.
Le premier groupe, composé de 8 adultes et de 3 enfants, paie 39,50 €. Le second, composé de 7 adultes et de 9 enfants, paie 50,50 €.
Quel est donc le prix d'un ticket pour un adulte? Pour un enfant?

Activités géométriques

Exercice 1

1. Placer les points A $(-3\,;\,1)$, B $(-1{,}5\,;\,2{,}5)$ et C $(3\,;\,-2)$ dans un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$ (une unité = 1 cm).

2. Montrer que AC=$\sqrt{45}$.

3. Sachant que AB=$\sqrt{4{,}5}$ et BC=$\sqrt{40{,}5}$, démontrer que ABC est un triangle rectangle.

4. Placer le point D image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

5. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD? Justifier votre réponse.

Exercice 2

Soit un cercle de centre O et de diamètre [ST] tel que ST = 7 cm. Soit U un point de ce cercle tel que SU = 3 cm.

1. Faire une figure.

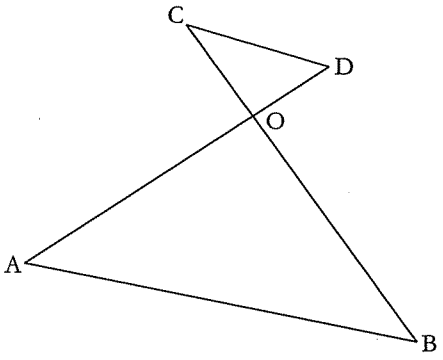
2. Démontrer que STU est un triangle rectangle en U.

3. Donner la valeur arrondie au dixième de l'angle $\widehat{STU}$.

4. En déduire une valeur approchée au dixième de $\widehat{SOU}$. Justifier votre réponse.

Exercice 3

Sur la figure ci-dessous, les mesures ne sont pas respectées.



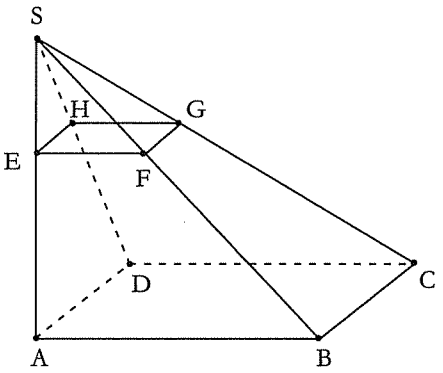
On a OA=$3\sqrt{3}$ cm, OD=$\sqrt{3}$ cm, CO = 3 cm, $\widehat{AOB}$ est un angle droit et $\widehat{OAB} = 60$.

1. Montrer que OB = 9 cm.

2. Montrer que les droites (CD) et (AB) sont parallèles.

Problème

Sur la figure ci-dessous, SABCD est une pyramide à base carrée de hauteur [SA] telle que AB = 9 cm et SA = 12 cm. Le triangle SAB est rectangle en A.



Partie A

EFGH est la section de la pyramide SABCD par le plan parallèle à la base et telle que SE = 3 cm.

1. a) Calculer EF.

b) Calculer SB.

2. a) Calculer le volume de la pyramide SABCD.

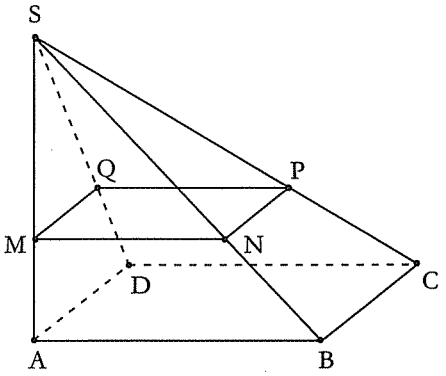
b) Donner le coefficient de réduction permettant de passer de la pyramide SABCD à la pyramide SEFGH.

c) En déduire le volume de SEFGH. On donnera une valeur arrondie à l'unité.

Partie B

Soit M un point de [SA] tel que SM = x cm, où x est compris entre 0 et 12.

On appelle MNPQ la section de la pyramide SABCD par le plan parallèle à la base passant par M.



1. Montrer que MN = 0,75 x.

2. Soit $A(x)$ l'aire du carré MNPQ en fonction de x.

Montrer que $A(x) = 0{,}5625\ x^2$.

3. Compléter le tableau ci-dessous.

x : longueur SM en cm	0	2	4	6	8	10	12
$A(x)$: aire du carré MNPQ en cm^2							

4. Placer dans un repère orthonormé les points d'abscisse x et d'ordonnée $A(x)$ donnés par le tableau.

Échelle : en abscisses, 5 mm par 1 cm, en ordonnées, 5 mm par 10 cm^2.

5. L'aire de MNPQ est-elle proportionnelle à la longueur SM ? Justifier à l'aide du graphique.

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \div \frac{3}{2} = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{5 \times 2}{2 \times 3 \times 3}$

$A = \frac{3}{9} + \frac{5}{9}$.

Donc $A = \frac{8}{9}$.

2. $B = 50\sqrt{45} - 3\sqrt{5} + 6\sqrt{125} = 50\sqrt{9 \times 5} - 3\sqrt{5} + 6\sqrt{25 \times 5}$

$B = 50 \times \sqrt{9} \times \sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 6 \times \sqrt{25} \times \sqrt{5} = 50 \times 3\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 6 \times 5\sqrt{5}$

$B = (150 - 3 + 30)\sqrt{5}$

Donc $B = 177\sqrt{5}$.

3. $C = \frac{5 \times 10^{-2} \times 7 \times 10^{5}}{2 \times 10^{7}} = \frac{5 \times 7 \times 10^{-2+5}}{2 \times 10^{7}}$

$C = \frac{35 \times 10^{3}}{2 \times 10^{7}} = \frac{35}{2} \times 10^{3-7} = 17{,}5 \times 10^{-4}$

Donc, en écriture scientifique, C = $1{,}75 \times 10^{-3}$.

Exercice 2

1. D = $(2x + 3)^2 + (2x + 3)(7x - 2) = (4x^2 + 12x + 9) + (14x^2 - 4x + 21x - 6)$

D = $18x^2 + 29x + 3$.

2. $D = (2x + 3)^2 + (2x + 3)(7x - 2)$

$D = (2x + 3)[(2x + 3)+(7x - 2)]$

$D = (2x + 3)(9x + 1)$.

3. Pour $x = -4$, en prenant l'expression factorisée de D :

$D = (2 \times (-4) + 3)(9 \times (-4) + 1) = (-8 + 3)(-36 + 1)$

$D = (-5)(-35)$

Donc D = 175.

4. L'équation $(2x + 3)(9x + 1) = 0$ est une équation produit nulle.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

Donc $2x + 3 = 0$ ou $9x + 1 = 0$.

Soit $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{1}{9}$.

Donc les solutions de l'équation sont $-\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{9}$.

Exercice 3

1. Pour que chacun ait le même nombre de friandises, il faut que le nombre de personnes soit un diviseur commun du nombre de sucettes et du nombre de bonbons. De plus, Pierre veut en faire profiter le plus de personnes possibles, donc ce nombre est le PGCD de 84 et 147.

On calcule le PGCD à l'aide de la méthode des divisions successives (Algorithme d'Euclide) :

$147 = 1 \times 84 + 63$

$84 = 1 \times 63 + 21$

$63 = 3 \times 21 + 0$

Le dernier reste non nul est 21, donc PGCD (84 ; 147) = 21.

2. On a : $147 = 21 \times 7$ et $84 = 21 \times 4$.

Donc chaque personne aura 7 bonbons et 4 sucettes.

Exercice 4

1. $\begin{cases} 8x + 3y = 39{,}5 & (1) \\ 7x + 9y = 50{,}5 & (2) \end{cases}$. On résout ce système par combinaison.

On multiplie l'équation (1) par -3, on obtient :

$\begin{cases} -24x - 9y = -118{,}5 \quad (1') \\ 7x + 9y = 50{,}5 \quad (2) \end{cases}$

En additionnant membre à membre les équations (1') et (2), on obtient une équation à une seule inconnue x : $-17x = -68$. Soit $x = \dfrac{-68}{-17} = 4$.

On en déduit y en remplaçant x par sa valeur dans l'équation (1) : $8 \times 4 + 3y = 39{,}5$.

D'où $3y = 39{,}5 - 32 = 7{,}5$. Soit $y = \dfrac{7{,}5}{3} = 2{,}5$.

On vérifie : $\begin{cases} 8 \times 4 + 3 \times 2{,}5 = 32 + 7{,}5 = 39{,}5 \\ 7 \times 4 + 9 \times 2{,}5 = 28 + 22{,}5 = 50{,}5 \end{cases}$

Donc la solution du système est le couple (4 ; 2,5).

2. Soit x le prix d'un ticket adulte et y le prix d'un ticket enfant, les sommes payées par les deux groupes se traduisent, respectivement, par les équations $8x + 3y = 39{,}50$ et $7x + 9y = 50{,}50$.

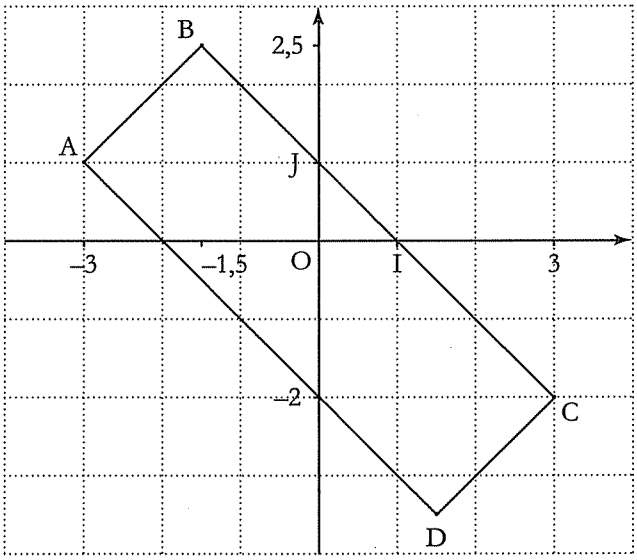
Les nombres x et y doivent vérifier simultanément les deux équations, donc ils sont solutions du système précédent, soit $x = 4$ et $y = 2{,}5$.

En conclusion, un ticket adulte coûte 4 euros et un ticket enfant coûte 2,50 euros.

Activités géométriques

Exercice I

1.



2. Le repère (O ; I, J) étant orthonormal, on peut calculer la distance AC à l'aide de la formule $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$.

$AC = \sqrt{(3-(-3))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{36+9}$

Donc $AC = \sqrt{45}$.

3. Dans le triangle ABC, le plus long côté est le côté [AC] et on a :

$AC^2 = (\sqrt{45})^2 = 45$

$AB^2 + BC^2 = \left(\sqrt{4{,}5}\right)^2 + \left(\sqrt{40{,}5}\right)^2 = 4{,}5 + 40{,}5 = 45$

d'où $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut affirmer que le triangle ABC est rectangle en B.

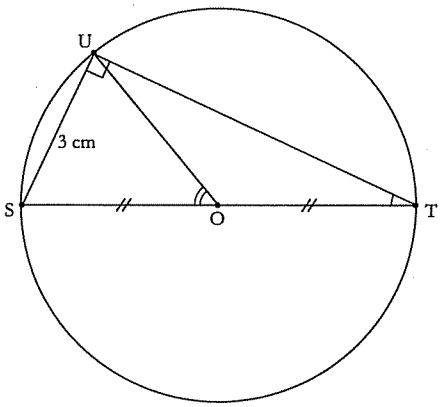
4. Par définition, si le point D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$, alors $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.

5. Dire que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ signifie que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

De plus, d'après la question 3, on sait que le triangle ABC est rectangle en B et un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.
Donc ABCD est un rectangle.

Exercice 2

1. Figure demandée :



ST = 7 cm

2. Le sommet U du triangle STU est un point du cercle de diamètre [ST], donc le triangle STU est rectangle en U.

3. Dans le triangle STU rectangle en U, d'après la trigonométrie :
$\sin \widehat{STU} = \dfrac{SU}{TS}$ d'où $\sin \widehat{STU} = \dfrac{3}{7}$.
On en déduit que : $\widehat{STU} = \sin^{-1}\left(\dfrac{3}{7}\right)$.
À l'aide de la calculatrice, on obtient : $\widehat{STU} \approx 25{,}4°$ à 0,1° près.

4. Dans le cercle de centre O, l'angle $\widehat{SOU}$ est l'angle au centre qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{SU}$ et l'angle $\widehat{STU}$ est l'angle inscrit qui intercepte le même arc $\overset{\frown}{SU}$. Or la mesure d'un angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit qui intercepte le même arc :
$\widehat{SOU} = 2 \times \widehat{STU}$, soit $\widehat{SOU} \approx 2 \times 25{,}4$. Donc $\widehat{SOU} \approx 50{,}8°$ à 0,1° près.

Exercice 3

1. L'angle $\widehat{AOB}$ est droit, ce qui signifie que le triangle AOB est rectangle en O et d'après la trigonométrie :

$\tan \widehat{OAB} = \dfrac{OB}{OA}$; $\tan 60 = \dfrac{OB}{3\sqrt{3}}$.

Donc $OB = 3\sqrt{3} \times \tan 60 = 9$ cm

2. Les triangles OAB et OCD, de sommet commun O, sont tels que les points A, O et D d'une part et les points B, O et C d'autre part sont alignés dans ce même ordre.

De plus, on a : $\dfrac{OD}{OA} = \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{OC}{OB} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$. Donc $\dfrac{OD}{OA} = \dfrac{OC}{OB}$.

Dans ces conditions, d'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut affirmer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Problème

Partie A

1. a) EFGH est la section de la pyramide par un plan parallèle à la base ABCD, cela signifie que les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

Les triangles SAB et SEF sont tels que :

– E est un point du côté [SA] ;
– F est un point du côté [SB] ;
– les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a les égalités de rapports suivantes :

$\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{SF}{SB} = \dfrac{EF}{AB}$. On en déduit que $\dfrac{3}{12} = \dfrac{EF}{9}$.

Soit $EF = \dfrac{3}{12} \times 9 = \dfrac{9}{4} = 2{,}25$. Donc EF = 2,25 cm.

b) Le triangle SAB est rectangle en A et d'après le théorème de Pythagore, on peut affirmer que $SB^2 = AS^2 + AB^2$.

Soit $SB^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$.

Or SB > 0 (SB est une longueur), donc $SB = \sqrt{225} = 15$ cm.

2. a) Le volume d'une pyramide est donné par la formule : $V = \frac{1}{3} \times B \times h$, où B est l'aire de la base et h est la hauteur de la pyramide.
SABCD étant une pyramide à base carrée et de hauteur SA, on a :
$V = \frac{1}{3} \times \text{AB}^2 \times \text{SA}$. Soit $V = \frac{1}{3} \times 9^2 \times 12 = \frac{81 \times 12}{3} = 324$.
Donc le volume de la pyramide SABCD vaut 324 cm^3.
b) EFGH est la section de la pyramide SABCD par un plan parallèle à la base, donc la pyramide SEFGH est une réduction de la pyramide SABCD de coefficient $k = \frac{\text{SE}}{\text{SA}}$.
Donc $k = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ ou 0,25.
c) Dans une réduction de rapport k, le volume est multiplié par k^3.
D'où le volume V' de la pyramide SEFGH est donné par :

$$V' = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times V.$$

Soit $V' = \frac{1}{64} \times 324 = \frac{81}{16} = 5{,}0625$. Donc le volume de la pyramide SEFGH vaut environ 5 cm^3 (valeur arrondie à l'unité près).

Partie B

1. De la même façon que la question 1.a), on peut appliquer le théorème de Thalès aux triangles SAB et SMN et on a : $\frac{\text{SM}}{\text{SA}} = \frac{\text{SN}}{\text{SB}} = \frac{\text{MN}}{\text{AB}}$.
D'où $\frac{x}{12} = \frac{\text{MN}}{9}$. Soit $\text{MN} = \frac{x}{12} \times 9 = \frac{x \times 3 \times 3}{3 \times 4} = x \times \frac{3}{4}$.
Donc MN = 0,75 x.

2. MNPQ est la section de la pyramide SABCD par un plan parallèle à la base, donc la pyramide SMNPQ est une réduction de la pyramide SABCD de coefficient $k = \frac{\text{SM}}{\text{SA}}$.
Soit $k = \frac{x}{12}$.
Dans une réduction de coefficient k, les aires sont multipliées par k^2. Donc l'aire $A(x)$ du carré MNPQ est égale à :

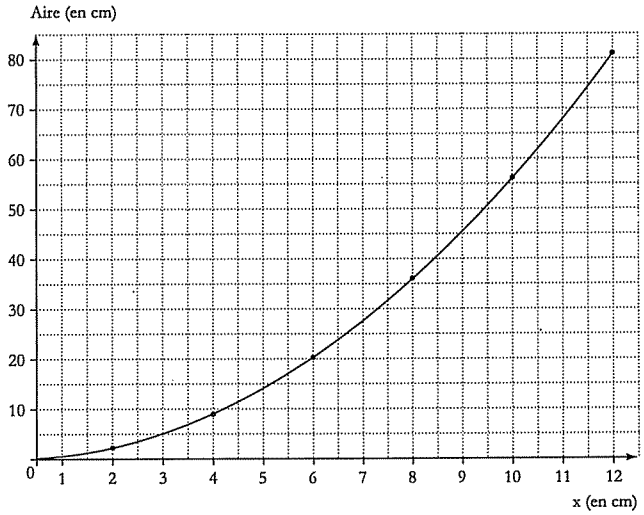
$$A(x) = k^2 \times A_{\text{ABCD}} = \left(\frac{x}{12}\right)^2 \times 9^2 = \frac{x^2}{144} \times 81.$$

Donc $A(x) = x^2 \times \dfrac{81}{144} = 0{,}5625\,x^2$.

3.

x : longueur SM en cm	0	2	4	6	8	10	12
$A(x)$: aire du carré MNPQ en cm^2	0	2,25	9	20,25	36	56,25	81

4. Graphique demandé :



5. D'après le graphique, on remarque que les points d'abscisse x et d'ordonnée $A(x)$ ne sont pas alignés sur une droite passant par l'origine du repère, donc on peut affirmer que l'aire de MNPQ n'est pas proportionnelle à la longueur SM.

SUJET 28

GROUPEMENT 2, JUIN 2006

SUJET

Activités numériques

Exercice 1

Toutes les étapes de calculs devront figurer sur la copie.

1. Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{1}{9} - \frac{15}{9} \times \frac{1}{6}$$

2. Écrire B sous la forme $a\sqrt{3}$ où a est un entier.

$$B = \sqrt{48} - 3\sqrt{12} + 7\sqrt{3}$$

3. Donner les écritures décimale et scientifique de C.

$$C = \frac{3 \times 10^2 \times 1{,}2 \times \left(10^{-3}\right)^4}{0{,}2 \times 10^{-7}}$$

Exercice 2

On considère l'expression : $E = (3x + 1)^2 - 4$.

1. Développer et réduire E.

2. Factoriser E.

3. Résoudre l'équation $(3x + 3)(3x - 1) = 0$

Exercice 3

Le tableau ci-dessous donne la répartition des notes obtenues à un contrôle de mathématiques par les 27 élèves de Troisième.

Notes	6	8	10	13	14	17
Effectifs	3	5	6	7	5	1

1. Calculer la note moyenne de la classe à ce contrôle. Arrondir le résultat à l'unité.

2. Calculer le pourcentage d'élèves ayant eu une note supérieure ou égale à 10. Arrondir le résultat au dixième.

Activités géométriques

Exercice 1

On considère un repère orthonormé (O ; I, J). L'unité est le centimètre.

1. Dans ce repère, placer les points :
A (1 ; 2), B (−2 ; 1) et C (−3 ; −2).

2. Calculer les distances AB et BC.

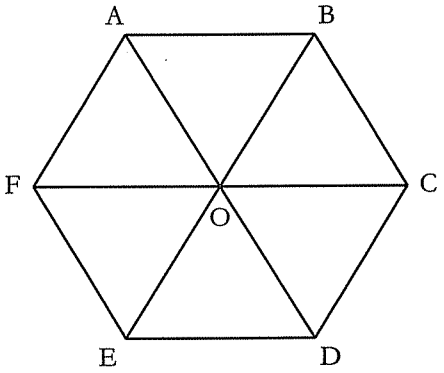
3. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

4. Construire le point D, image du point A par la translation qui transforme B en C.

5. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un losange.

Exercice 2

Dans cet exercice, les réponses seront données sans justification.



ABCDEF est un hexagone régulier de centre O.

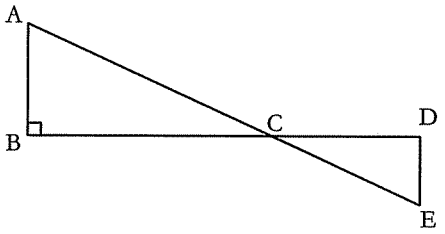
1. Quel est le symétrique du triangle OCD par rapport au point O?

2. Quel est le symétrique du triangle EFO par rapport à la droite (EO)?

3. Quelle est l'image du triangle OCD par la rotation de centre O, d'angle 60° dans le sens des aiguilles d'une montre?

Exercice 3

La figure ci-après n'est pas à l'échelle.
On ne demande pas de la reproduire.



Les points A, C et E sont alignés, ainsi que les points B, C et D.
Le triangle ABC est rectangle en B.
Les longueurs suivantes sont exprimées en centimètres.
BC = 12 ; CD = 9,6 ; DE = 4 ; CE = 10,4.

1. Montrer que le triangle CDE est rectangle en D.

2. En déduire que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

3. Calculer la longueur AB.

Problème

Dans un magasin, une cartouche d'encre pour imprimante coûte 15 €.
Sur un site Internet, cette même cartouche coûte 10 €, avec des frais de livraison fixes de 40 € quel que soit le nombre de cartouches achetées.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Nombre de cartouches achetées	2	5	11	14
Prix à payer en magasin en euros		75		
Prix à payer par Internet en euros		90		

2. Le nombre de cartouches achetées est noté x.

a) On note P_A le prix à payer pour l'achat de x cartouches en magasin. Exprimer P_A en fonction de x.

b) On note P_B le prix à payer, en comptant la livraison, pour l'achat de x cartouches par Internet. Exprimer P_B en fonction de x.

3. Dans un repère orthogonal (en abscisses 5 mm par 1 unité et en ordonnées 5 mm pour

10 unités, tracer les droites d et d' définies par :

d représente la fonction : $x \mapsto 15x$;

d' représente la fonction : $x \mapsto 10x + 40$.

4. En utilisant le graphique précédent :

a) Déterminer le prix le plus avantageux pour l'achat de 6 cartouches. Vous laisserez apparents les traits de constructions.

b) Sonia dispose de 80 euros pour acheter des cartouches. Est-il plus avantageux pour elle d'acheter des cartouches en magasin ou sur Internet ? Vous laisserez apparents les traits de constructions.

5. À partir de quel nombre de cartouches le prix sur Internet est-il inférieur ou égal à celui du magasin ? Expliquez votre réponse.

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = \dfrac{1}{9} - \dfrac{15}{9} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{9} - \dfrac{15 \times 1}{9 \times 6} = \dfrac{1}{9} - \dfrac{5 \times 3}{3 \times 3 \times 6}$

$A = \dfrac{2}{18} - \dfrac{5}{18} = \dfrac{-3}{18}$

Donc $A = -\dfrac{1}{6}$.

2. $B = \sqrt{48} - 3\sqrt{12} + 7\sqrt{3} = \sqrt{16 \times 3} - 3\sqrt{4 \times 3} + 7\sqrt{3}$

$B = \sqrt{16} \times \sqrt{3} - 3\sqrt{4} \times \sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 4 \times \sqrt{3} - 3 \times 2 \times \sqrt{3} + 7\sqrt{3}$

$B = (4 - 6 + 7)\sqrt{3}$

Donc $B = 5\sqrt{3}$.

3. $C = \dfrac{3 \times 10^2 \times 1{,}2 \times (10^{-3})^4}{0{,}2 \times 10^{-7}} = \dfrac{3 \times 1{,}2 \times 10^2 \times 10^{-3 \times 4}}{0{,}2 \times 10^{-7}}$

$$C = \frac{3{,}6 \times 10^{2-12}}{0{,}2 \times 10^{-7}} = \frac{3{,}6}{0{,}2} \times 10^{-10-(-7)} = 18 \times 10^{-3}$$

Donc, en écriture décimale : $C = 0{,}018$ et en écriture scientifique : $C = 1{,}8 \times 10^{-2}$.

Exercice 2

1. $E = (3x + 1)^2 - 4 = 9x^2 + 6x + 1 - 4$

$E = 9x^2 + 6x - 3$.

2. $E = (3x + 1)^2 - 4 = (3x + 1)^2 - 2^2$

$E = ((3x + 1) - 2)((3x + 1) + 2)$

$E = (3x - 1)(3x + 3)$.

3. L'équation $(3x + 3)(3x - 1) = 0$ est une équation produit nul.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

Donc $3x + 3 = 0$ ou $3x - 1 = 0$.

Soit $x = -\frac{3}{3} = -1$ ou $x = \frac{1}{3}$.

Donc les solutions de l'équation sont -1 et $\frac{1}{3}$.

Exercice 3

1. On calcule une moyenne pondérée :

$$m = \frac{6 \times 3 + 8 \times 5 + 10 \times 6 + 13 \times 7 + 14 \times 5 + 17 \times 1}{3 + 5 + 6 + 7 + 5 + 1} = \frac{296}{27} \simeq 11.$$

Donc la note moyenne de la classe est environ 11 (valeur arrondie à l'unité).

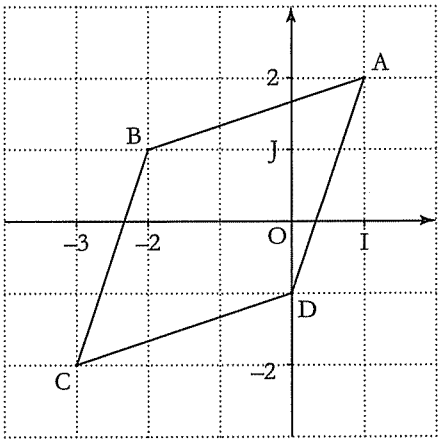
2. Ils sont $6 + 7 + 5 + 1$, soit 19 élèves sur 27, à avoir eu une note supérieure ou égale à 10. Donc le pourcentage est :

$\frac{17}{29} \times 100$. Soit environ 70,4 % (valeur arrondie au dixième).

Activités géométriques

Exercice I

1.



2. Le repère (O ; I, J) étant orthonormal, on peut calculer la distance AB à l'aide de la formule : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1}$.

Donc $AB = \sqrt{10}$ cm.

De la même façon :

$BC = \sqrt{(-3-(-2))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9}$.

Donc $BC = \sqrt{10}$ cm.

3. On détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ à l'aide de la formule $\overrightarrow{BC}\ (x_C - x_B\,;\, y_C - y_B)$. Soit $\overrightarrow{BC}\ (-3-(-2)\,;-2-1)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ sont $(-1\,;-3)$.

4. Par définition, le point D est l'image du point A par la translation qui transforme B en C (ou de vecteur $\overrightarrow{BC}$) signifie que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

5. D'après la construction du point D, on sait que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. De plus, d'après la question 2., on sait aussi que les longueurs AB et BC sont égales à $\sqrt{10}$ cm. Or un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de la même

longueur est un losange.
Donc ABCD est un losange.

Exercice 2

1. Le symétrique du triangle OCD par rapport au point O est le triangle OAF.

2. Le symétrique du triangle EFO par rapport à la droite (EO) est le triangle EOD.

3. L'image du triangle OCD par la rotation de centre O, d'angle 60° dans le sens des aiguilles d'une montre, est le triangle ODE.

Exercice 3

1. Dans le triangle CDE, le plus long côté est le côté [CE] et on a :
$CE^2 = 10{,}4^2 = 108{,}16$
$CD^2 + DE^2 = 9{,}6^2 + 4^2 = 92{,}16 + 16 = 108{,}16$
d'où $CE^2 = CD^2 + DE^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut affirmer que le triangle CDE est rectangle en D.

2. Les triangles CDE et ABC sont rectangles, respectivement, en D et B. Cela signifie que les droites (AB) et (CB) sont perpendiculaires, ainsi que les droites (DE) et (CD). On sait que les points B, C et D sont alignés, donc on peut affirmer que les droites (AB) et (DE) sont perpendiculaires à la même droite (BD).
Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors ces droites sont parallèles. Donc les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

3. Les triangles CDE et CBA sont tels que :

– les points A, C et E sont alignés ;
– les points B, C et D sont alignés ;
– les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a les égalités de rapports suivantes :
$\frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CA} = \frac{DE}{AB}$. On en déduit que $\frac{9{,}6}{12} = \frac{4}{AB}$.
Soit $9{,}6 \times AB = 12 \times 4$ (égalité des produits en croix). D'où $AB = \frac{48}{9{,}6} = 5$. Donc AB = 5 cm.

Problème

1.

Nombre de cartouches achetées	2	5	11	14
Prix payé en magasin en euros	30	75	165	210
Prix payé sur Internet en euros	60	90	150	180

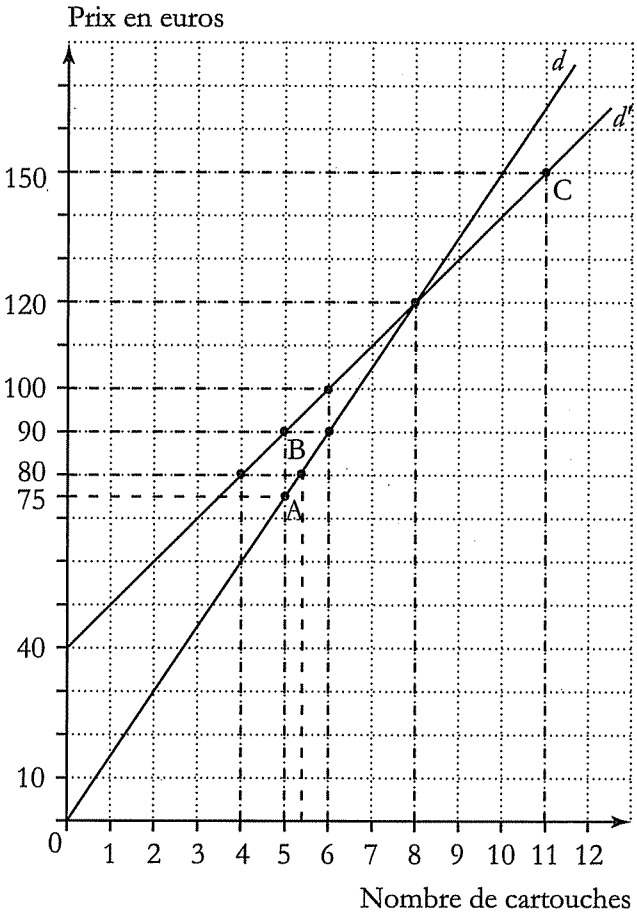
2. Soit x le nombre de cartouches achetées.

a) Le prix payé en magasin est : $P_A = 15x$.

b) Le prix payé sur Internet est : $P_B = 10x + 40$.

3. La fonction $P_A : x \mapsto 15x$ est linéaire, sa représentation graphique est la droite d qui passe par l'origine du repère et par le point A (5 ; 75).

La fonction $P_B : x \mapsto 10x + 40$ est affine, sa représentation graphique est la droite d' qui passe par les points B (5 ; 90) et C (11 ; 150). Les coordonnées des points A, B et C sont données par le tableau de la question 1.



CORRIGÉ

4. D'après le graphique :

a) Pour l'achat de 6 cartouches, soit $x = 6$, le point de la droite d d'abscisse 6 est en dessous du point de d'. Cela signifie que le prix payé en magasin (90 euros) est plus avantageux que le prix payé sur Internet (100 euros).

b) Avec 80 euros, le point de la droite d d'ordonnée 80 est plus loin que le point de la droite d'. Cela signifie que Sonia peut acheter plus de cartouches en magasin que sur Internet.

5. Pour trouver à partir de quel nombre de cartouches le prix payé sur Internet est infé-

rieur ou égal au prix payé en magasin, il faut résoudre l'inéquation suivante :

$P_B(x) \leqslant P_A(x)$; soit $10x + 40 \leqslant 15x$; $15x - 10x \geqslant 40$; $5x \geqslant 40$; $x \geqslant \frac{40}{5}$.

On obtient $x \geqslant 8$. Donc, à partir de 8 cartouches d'encre achetées, il est plus avantageux d'acheter sur Internet.

SUJET 29

GROUPEMENT 3, JUIN 2006

SUJET

Activités numériques

Exercice 1

On donne :

$A = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} \div \frac{8}{7}$; $B = \sqrt{12} - 7\sqrt{3} - \sqrt{75}$; $C = \frac{0{,}3 \times 10^2 \times 5 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-4}}$.

1. Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Écrire B sous la forme $a\sqrt{b}$, où a est un entier relatif et b un entier naturel le plus petit possible.

3. Calculer C et donner son écriture scientifique.

Exercice 2

On considère l'expression :

$E = (3x + 2)^2 - (5 - 2x)(3x + 2)$.

1. Développer et réduire l'expression E.

2. Factoriser E.

3. Calculer la valeur de E pour $x = -2$.

4. Résoudre l'équation $(3x + 2)(5x - 3) = 0$.

Les solutions de cette équation sont-elles des nombres décimaux?

Exercice 3

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5{,}5 \\ 3x + y = 4{,}05 \end{cases}$$

1. Le couple $(x = 2 ; y = 0{,}5)$ est-il solution de ce système?

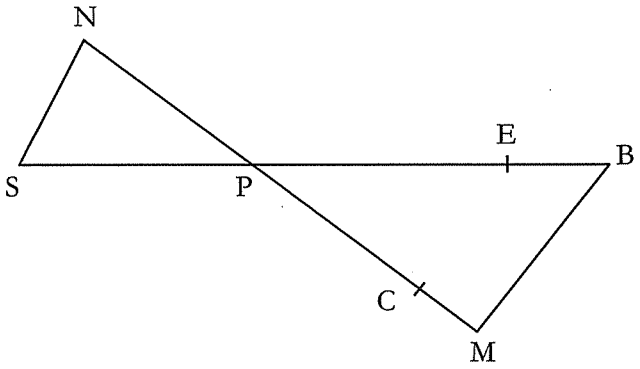
2. Résoudre le système d'équations.

3. À la boulangerie, Anatole achète 2 croissants et 3 pains au chocolat : il paie 5,50 €. Béatrice achète 3 croissants et 1 pain au chocolat et paie 4,05 €.
Quel est le prix d'un croissant? Quel est le prix d'un pain au chocolat?

Activités géométriques

Exercice 1

On considère la figure ci-dessous qui n'est pas réalisée à l'échelle.



Les points S, P, E et B sont alignés ainsi que les points N, P, C et M.
Les droites (MB) et (NS) sont parallèles.
On donne : PM = 12 cm, MB = 6,4 cm, PB = 13,6 cm et PN = 9 cm.

1. Démontrer que le triangle PBM est rectangle.

2. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{PBM}$ arrondie au degré près.

3. Calculer la longueur NS.

4. On considère le point E du segment [PB] tel que PE = 3,4 cm et le point C du segment [PM] tel que PC = 3 cm.
Les droites (CE) et (MB) sont-elles parallèles?

Exercice 2

La figure est à réaliser sur une feuille de papier millimétré.
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J). L'unité de longueur est le centimètre.

1. Placer les points : A (−2 ; 1), B (3 ; 2), C (−3 ; −2) et G (7 ; 0).

2. a) Placer le point E tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$. En déduire la nature du quadrilatère ABEC.

b) Donner par lecture graphique les coordonnées du point E.

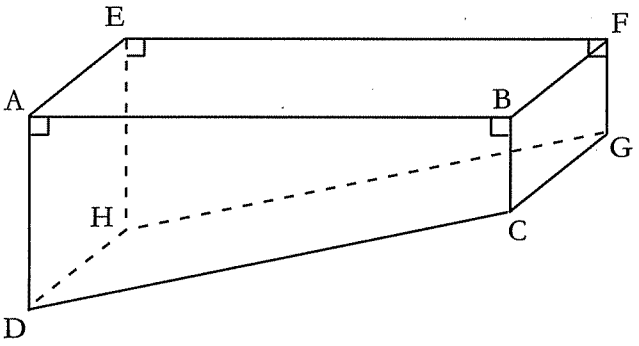
3. Calculer la valeur exacte de la longueur AB.

4. Placer le point F $(-1 ; 4)$ et démontrer que F est le symétrique de C par rapport à A.

5. Démontrer que B est le milieu du segment [FG] et en déduire sans autre calcul la longueur CG.

Problème

La piscine de Monsieur Dujardin a la forme d'un prisme droit dont la base ABCD est un trapèze rectangle.



On donne : AB = 14 m ; AE = 5 m ; AD = 1,80 m ; BC = 0,80 m.

Sur le schéma ci-dessus, les dimensions ne sont pas respectées.

Rappel :

Aire d'un trapèze = $\dfrac{(\text{somme des bases}) \times \text{hauteur}}{2}$;

Volume d'un prisme = (aire de la base) × hauteur.

Partie A

1. Montrer que le volume de cette piscine est 91 m^3.

2. À la fin de l'été, M. Dujardin vide sa piscine à l'aide d'une pompe dont le débit est $5m^3$ par heure.

a) Calculer le nombre de m^3 d'eau restant dans la piscine au bout de 5 heures.

b) On admet que le nombre de m^3 d'eau restant dans la piscine au bout de x heures est donné par la fonction affine f définie par : $f(x) = 91 - 5x$.

Sur la feuille de papier millimétré, construire un repère orthogonal tel que :

– en abscisse, 1 cm représente 1 heure ;
– en ordonnée, 1 cm représente $5m^3$.

Représenter graphiquement la fonction f dans ce repère.

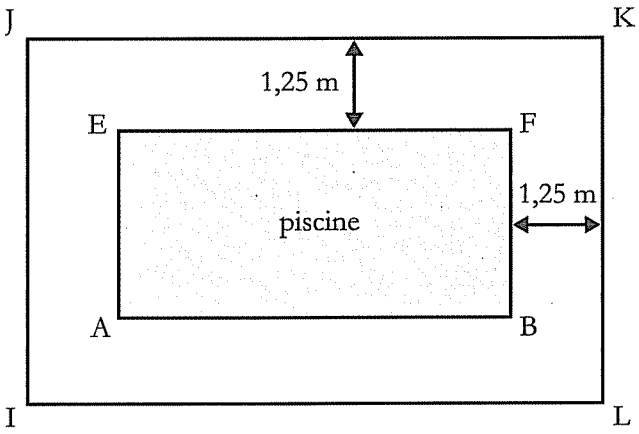
c) Par lecture graphique, déterminer le nombre d'heures nécessaires pour qu'il ne reste que 56 m^3 d'eau dans cette piscine.

d) Par lecture graphique, déterminer le nombre d'heures nécessaires pour vider complètement la piscine.

e) Retrouver ce dernier résultat par le calcul. Donner cette durée en heures et minutes.

Partie B

M. Dujardin doit clôturer son terrain, en laissant autour une distance de 1,25 m autour de la piscine comme le montre le schéma ci-dessous.



1. Calculer les distances IJ et JK en cm.

2. Pour réaliser la clôture, il souhaite utiliser un nombre entier de panneaux rectangulaires identiques, dont la longueur a est un nombre entier de centimètres, le plus grand possible.

Expliquer pourquoi a est le PGCD de 750 et de 1650.

3. Calculer la valeur de a, en indiquant la méthode utilisée.

4. Combien faudra-t-il de panneaux pour clôturer la piscine?

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} \div \frac{8}{7} = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{3} - \frac{2 \times 7}{3 \times 2 \times 4}$

$A = \frac{7}{3} - \frac{7}{12} = \frac{28}{12} - \frac{7}{12} = \frac{21}{12}$.

Donc $A = \frac{7}{4}$.

2. $B = \sqrt{12} - 7\sqrt{3} - \sqrt{75} = \sqrt{4 \times 3} - 7\sqrt{3} - \sqrt{25 \times 3}$

$B = \sqrt{4} \times \sqrt{3} - 7\sqrt{3} - \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} - 7\sqrt{3} - 5 \times \sqrt{3}$

$B = (2 - 7 - 5)\sqrt{3}$.

Donc B = $-10\sqrt{3}$.

3. $C = \frac{0{,}3 \times 10^2 \times 5 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-4}} = \frac{0{,}3 \times 5 \times 10^{2-3}}{4 \times 10^{-4}}$

$C = \frac{1{,}5 \times 10^{-1}}{4 \times 10^{-4}} = \frac{1{,}5}{4} \times 10^{-1-(-4)} = 0{,}375 \times 10^3$

Donc, en écriture scientifique : $C = 3{,}75 \times 10^2$.

Exercice 2

1. $E = (3x + 2)^2 - (5 - 2x)(3x + 2)$

$E = 9x^2 + 12x + 4 - (15x + 10 - 6x^2 - 4x)$

$E = 9x^2 + 12x + 4 - 15x - 10 + 6x^2 + 4x$

$E = 15x^2 + x - 6$.

2. $E = (3x + 2)^2 - (5 - 2x)(3x + 2) = (3x + 2)[(3x + 2) - (5 - 2x)]$

$E = (3x + 2)(3x + 2 - 5 + 2x)$

$E = (3x + 2)(5x - 3)$

3. Soit $x = -2$.

$E = (3x + 2)(5x - 3)$

$E = (3 \times -2 + 2)(5 \times -2 - 3)$

$E = -4 \times -13$

$E = 52$.

4. L'équation $(3x + 2)(5x - 3) = 0$ est une équation produit nulle.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

Donc $(3x + 2) = 0$ ou $5x - 3 = 0$

Soit $x = -\frac{2}{3}$ ou $x = \frac{3}{5}$

Donc les solutions de l'équation sont $-\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{5}$.

Seule la solution $\frac{3}{5}$ est un nombre décimal : $\frac{3}{5} = 0{,}6$.

Exercice 3

1. Soit le système $\begin{cases} 2x + 3y = 5{,}5 & (1) \\ 3x + y = 4{,}05 & (2) \end{cases}$.

On a $\begin{cases} 2 \times 2 + 3 \times 0{,}5 = 4 + 1{,}5 = 5{,}5 \\ 3 \times 2 + 0{,}5 = 6 + 0{,}5 = 6.5 \end{cases}$.

Le couple (2 ; 0,5) vérifie la première équation mais ne vérifie pas la seconde équation, donc le couple (2 ; 0,5) n'est pas solution du système.

2. On résout le système par substitution.

D'après l'équation (2), on obtient ;

$y = 4{,}05 - 3x$ (2').

On remplace y par cette expression dans l'équation (1), d'où :

$2x + 3(4{,}05 - 3x) = 5{,}5$; $2x + 12{,}15 - 9x = 5{,}5$; $-7x = 5{,}5 - 12{,}15$;

$x = \frac{-6{,}65}{-7} = 0{,}95$.

On en déduit y en remplaçant x par sa valeur dans l'équation (2') :

$y = 4{,}05 - 3 \times 0{,}95 = 1{,}2$.

Vérification : $\begin{cases} 2 \times 0{,}95 + 3 \times 1{,}2 = 1{,}9 + 3{,}6 = 5{,}5 \\ 3 \times 0{,}95 + 1{,}2 = 2{,}85 + 1{,}2 = 4{,}05 \end{cases}$.

Donc la solution du système est le couple (0,95 ; 1,2).

3. Soit x le prix d'un croissant et y le prix d'un pain au chocolat, la dépense d'Anatole se traduit par l'égalité :

$2x + 3y = 5{,}5$

et la dépense de Béatrice se traduit par :

$3x + y = 4{,}05$.

Donc le couple $(x ; y)$ est solution du système précédent et d'après la question 2., on peut affirmer qu'un croissant coûte 0,95 euro et qu'un pain au chocolat coûte 1,20 euros.

Activités géométriques

Exercice 1

1. Dans le triangle PMB, le plus long côté est le côté [PB] et on a :

$PB^2 = 13{,}6^2 = 184{,}96$

$PM^2 + MB^2 = 12^2 + 6{,}4^2 = 144 + 40{,}96 = 184{,}96$

d'où $PB^2 = PM^2 + MB^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut affirmer que le triangle PMB est rectangle en M.

2. Dans le triangle PMB rectangle en M, d'après la trigonométrie, on a :

$\cos \widehat{PBM} = \dfrac{BM}{BP}$.

D'où $\cos \widehat{PBM} = \dfrac{6{,}4}{13{,}6}$.

On en déduit que : $\widehat{PBM} = \cos^{-1}\left(\dfrac{6{,}4}{13{,}6}\right)$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$\widehat{PBM} \approx 62°$ (valeur arrondie au degré près).

3. Les triangles PSN et PBM, de sommet commun P, sont tels que :

– les points S, P et B sont alignés ;

– les points N, P et M sont alignés ;

– les droites (MB) et (SN) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a les égalités de rapports suivantes :

$\frac{PS}{PB} = \frac{PN}{PM} = \frac{NS}{MB}$.

En particulier : $\frac{PN}{PM} = \frac{NS}{MB}$,

d'où $\frac{9}{12} = \frac{NS}{6,4}$.

Soit NS = $\frac{9}{12} \times 6,4 = 4,8$.

Donc NS = 4,8 cm.

4. Les triangles PBM et PEC, de sommet commun P, sont tels que les points P, E et B d'une part et les points P, C et M d'autre part sont alignés dans ce même ordre.

De plus $\frac{PE}{PB} = \frac{3,4}{13,6} = 0,25$

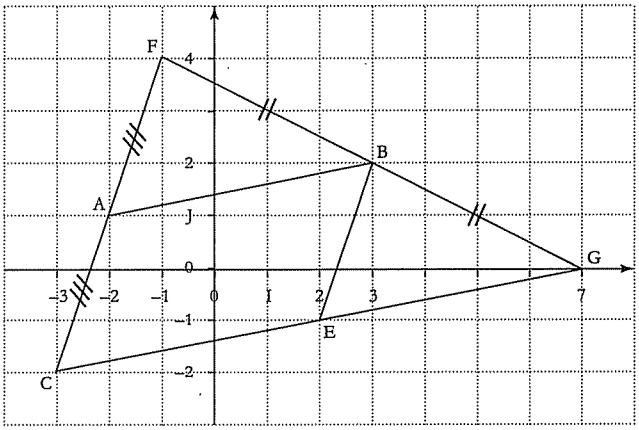
et $\frac{PC}{PM} = \frac{3}{12} = 0,25$,

donc $\frac{PE}{PB} = \frac{PC}{PM}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut affirmer que les droites (CE) et (MB) sont parallèles.

Exercice 2

1.



2. a) Le point E défini par $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ est le point tel que le quadrilatère ABEC soit un parallélogramme.

b) D'après le graphique, on peut lire les coordonnées du point E : $(2 ; -1)$.

3. Le repère $(O ; I, J)$ étant orthonormé, on calcule la longueur AB à l'aide de la formule :

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

$AB = \sqrt{(3-(-2))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{25+1}$.

Donc $AB = \sqrt{26}$ cm.

4. Démontrer que F est le symétrique de C par rapport à A revient à montrer que A est le milieu de [FC]. Pour cela, calculons les coordonnées du milieu du segment [FC] qui sont données par la formule :

$\left(\frac{x_F + x_C}{2} ; \frac{y_F + y_C}{2}\right)$.

Soit $\left(\frac{-1+(-3)}{2} ; \frac{4+(-2)}{2}\right)$.

Après calcul, on retrouve les coordonnées $(-2 ; 1)$ du point A, donc le point A est le milieu du segment [FC].

5. De la même façon que la question précédente, on calcule les coordonnées du milieu de [FG] :

$\left(\frac{-1+7}{2} ; \frac{4+0}{2}\right)$.

Donc le milieu du segment [FG] a pour coordonnées $(3 ; 2)$, on reconnaît les coordonnées du point B. Ce qui prouve que B est le milieu du segment [FG].

Dans le triangle FCG, A est le milieu du côté [FC] et B est le milieu du côté [FG]. Or, dans un triangle, la longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

Donc $AB = \frac{CG}{2}$. Soit $CG = 2 \times AB$.

Donc $CG = 2\sqrt{26}$ cm.

CORRIGÉ

Problème

Partie A

1. On calcule d'abord l'aire de la base du prisme, c'est-à-dire l'aire du trapèze rectangle ABCD de bases [BC] et [AD] et de hauteur [AB].

$A_{ABCD} = \dfrac{(0{,}80 + 1{,}80) \times 14}{2} = 18{,}2.$

Donc l'aire de la base du prisme vaut 18,2 m^2.

Volume du prisme : $V = A_{ABCD} \times AE$.

Soit $V = 18{,}2 \times 5 = 91$.

Donc le volume de la piscine est bien égal à 91 m^3.

2. a) La pompe vide 5 m^3 par heure, donc au bout de 5 heures la pompe a vidé 5×5, soit 25 m^3 d'eau.

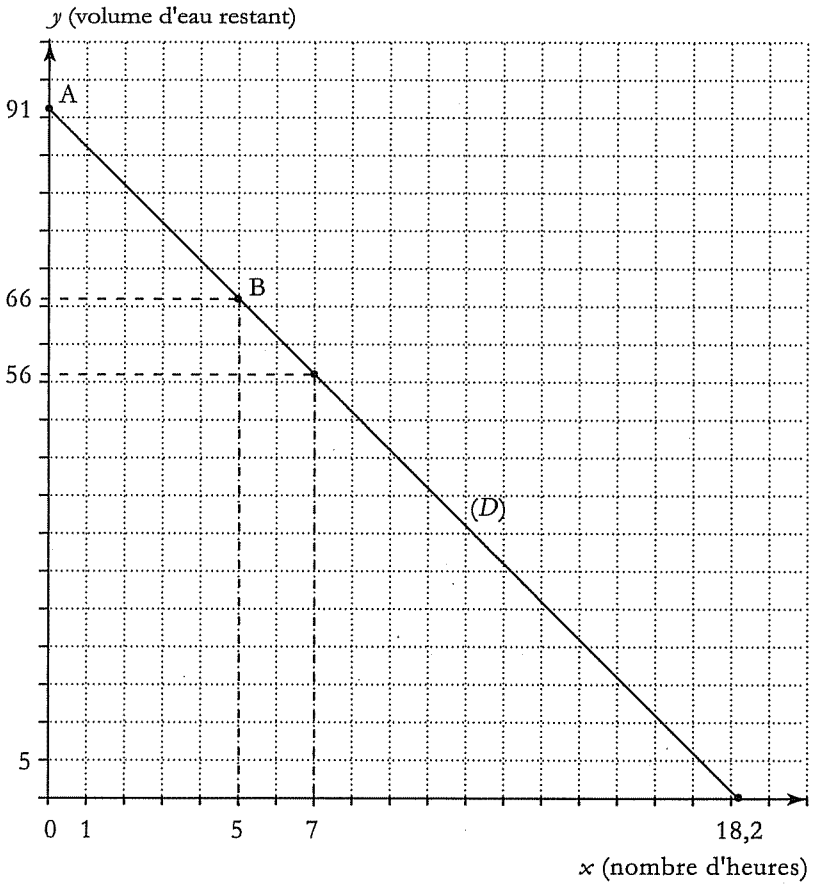
Il reste donc dans la piscine $91 - 25 = 66$ m^3 d'eau.

b) La fonction f définie par $f(x) = 91 - 5x$ est affine, donc sa représentation graphique est une droite (D).

On a $f(0) = 91$ et $f(5) = 66$,

donc la droite (D) passe par les points A (0 ; 91) et B (5 ; 66).

Graphique réalisé à l'échelle $\dfrac{1}{2}$:



c) Par lecture graphique, le point de coordonnées (7 ; 56) est sur la droite (D), cela signifie qu'il faut 7 heures pour qu'il ne reste que 56 m^3 d'eau dans la piscine.

d) D'après le graphique, il faut un peu plus de 18 heures pour que la piscine soit vidée complètement.

e) Il ne reste plus d'eau dans la piscine lorsque le volume restant est égal à 0 m^3, on doit donc résoudre l'équation suivante :

$91 - 5x = 0$.

Soit $5x = 91$; $x = \dfrac{91}{5} = 18{,}2$.

1 h = 60 min, d'où 0,2 h = 0,2 × 60 min = 12 min.

Donc il faut 18 h 12 min, pour vider complètement la piscine.

Partie B

1. D'après le schéma :

IJ = AE + 2 × 1,25 = 5 + 2,5,

donc IJ = 7,5 m = 750 cm.

Et JK = AB + 2 × 1,25 = 14 + 2,5,

donc JK = 16,5 m = 1650 cm.

2. La longueur a des panneaux est un nombre entier qui doit être un diviseur de chacune des longueurs IJ et JK. De plus on veut que cette longueur a soit la plus grande possible, donc a est le PGCD de 750 et 1650.

3. On calcule le PGCD avec la méthode des divisions successives ou algorithme d'Euclide :

1650 = 2 × 750 + 150 ; 750 = 5 × 150 + 0.

Le dernier reste non nul est 150, donc le PGCD de 1650 et 750 est 150.

4. On a : 1650 = 11 × 150 et 750 = 5 × 150.

Donc il faut 11 panneaux pour clôturer une longueur et 5 panneaux pour une largeur.

Au total, M. Dujardin aura besoin de 2 × 11 + 2 × 5, soit 32 panneaux pour clôturer sa piscine.

SUJET 30

GROUPEMENT 4, JUIN 2006

SUJET

Activités numériques

Exercice 1

En précisant les différentes étapes de calcul :

1. Écrire le nombre A ci-dessous sous forme d'une fraction irréductible :

$A = \dfrac{3 - \frac{2}{3}}{\frac{4}{3} \times 7}$.

2. Écrire le nombre B ci-dessous sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des nombres entiers, b étant le plus petit possible :

$B = \sqrt{300} - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{12}$.

3. Donner l'écriture scientifique de C :

$C = \dfrac{49 \times 10^3 \times 6 \times 10^{-10}}{14 \times 10^{-2}}$.

Exercice 2

On donne :

$D = (2x - 3)(5 - x) + (2x - 3)^2$.

1. Développer et réduire D.

2. Factoriser D.

3. Résoudre l'équation : $(2x - 3)(x + 2) = 0$.

Exercice 3

1. Résoudre le système :

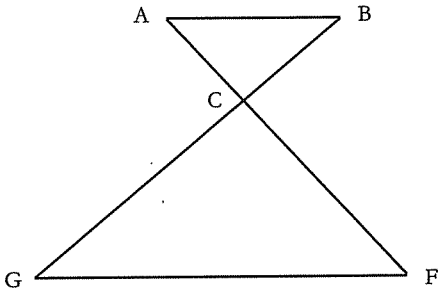
$\begin{cases} 6x + 5y = 57 \\ 3x + 7y = 55{,}5 \end{cases}$

2. Pour classer des photos, un magasin propose deux types de rangement : des albums ou des boîtes. Léa achète 6 boîtes et 5 albums et paie 57 €; Hugo achète 3 boîtes et 7 albums et paie 55,50 €. Quel est le prix d'une boîte? Quel est le prix d'un album?

Activités géométriques

Exercice 1

La figure ci-dessous n'est pas réalisée à l'échelle, elle n'est pas à reproduire.



Les points A, C et F sont alignés, ainsi que les points B, C et G.
Les droites (AB) et (GF) sont parallèles.
AB = 3 cm ;
FC = 8,4 cm ;
FG = 11,2 cm.

1. Calculer la longueur CA.

2. Soient D le point du segment [CF] et E le point du segment [GF] tels que :
FD = 6,3 cm et FE = 8,4 cm.
Montrer que les droites (GC) et (ED) sont parallèles.

Exercice 2

1. Construire un triangle ABC rectangle en C tel que AC = 5 cm et $\widehat{BAC} = 40°$.

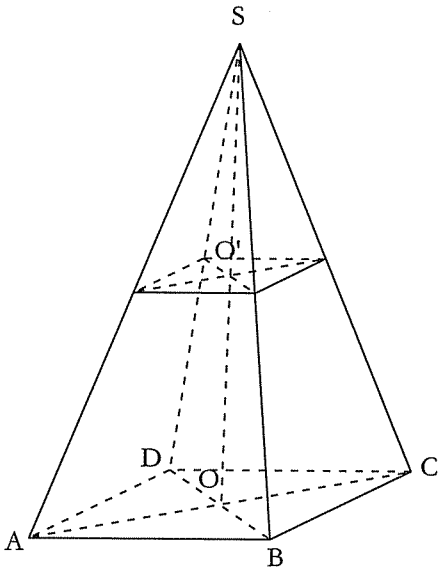
2. Calculer la longueur BC. (On donnera une valeur arrondie au millimètre).

3. a) Où se trouve le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC? Justifier.
b) Tracer ce cercle.

4. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$.

Exercice 3

Pour la pyramide SABCD ci-dessous :



La base est le rectangle ABCD de centre O.
AB = 3 cm et BD = 5 cm.
La hauteur [SO] mesure 6 cm.

1. Montrer que AD = 4 cm.

2. Calculer le volume de la pyramide SABCD en cm^3.

3. Soit O' le milieu de [SO].On coupe la pyramide par un plan passant par O' et parallèle à sa base.

a) Quelle est la nature de la section A'B'C'D' obtenue?

b) La pyramide SA'B'C'D' est une réduction de la pyramide SABCD. Donner le rapport de cette réduction.

c) Calculer le volume de la pyramide SA'B'C'D'.

Problème

La station de ski Blanche-Neige propose les tarifs suivants pour la saison 2004-2005 :

Tarif A : chaque journée de ski coûte 20 euros.

Tarif B : en adhérant au club des sports dont la cotisation annuelle s'élève à 60 euros, on bénéficie d'une réduction de 30 % sur le prix de chaque journée à 20 euros.

1. Yann est adhérent au club des sports de la station. Sachant qu'il a déjà payé sa cotisation annuelle, expliquez pourquoi il devra payer 14 euros par journée de ski.

2. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Nombre de jours de ski pour la saison 2004-2005	5	8	
Coût en euros avec le tarif A	100		220
Coût en euros avec le tarif B	130		

3. On appelle x le nombre de journée de ski durant la saison 2004-2005.

Exprimer en fonction de x :

a) le coût annuel C_A en euros pour un utilisateur ayant choisi le tarif A.

b) le coût annuel C_B en euros pour un utilisateur ayant choisi le tarif B.

4. Sachant que Yann adhérent au club a dépensé au total 242 €, combien de jours a-t-il skié?

5. Sur le papier millimétré (à rendre avec votre copie), dans un repère orthogonal, prendre :

– en abscisses : 1 cm pour 1 jour de ski ;
– en ordonnées : 1 cm pour 10 euros.

On placera l'origine du repère en bas à gauche de la feuille, l'axe des abscisses étant tracé sur le petit côté de la feuille.

Tracer dans ce repère les représentations graphiques des fonctions affines f et g définies par :

$f(x) = 20x$ et $g(x) = 14x + 60$.

6. Dans cette partie, on répondra aux différentes questions en utilisant le graphique (faire apparaître sur le graphique les traits nécessaires).

a) Léa doit venir skier douze journées pendant la saison 2004-2005. Quel est pour elle le tarif le plus intéressant? Quel est le prix correspondant?

b) En étudiant les tarifs de la saison, Chloé constate que, pour son séjour, les tarifs A et B sont égaux. Combien de journées de ski prévoit-elle de faire? Quel est le prix correspondant?

CORRIGÉ

Activités numériques

Exercice 1

1. $A = \dfrac{3-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}\times 7} = \dfrac{\frac{9}{3}-\frac{2}{3}}{\frac{4\times 7}{3}} = \dfrac{\frac{7}{3}}{\frac{28}{3}} = \dfrac{7}{3}\times\dfrac{3}{28}$

$A = \dfrac{7\times 3}{3\times 4\times 7}$.

Donc $A = \dfrac{1}{4}$.

2. $B = \sqrt{300} - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{12} = \sqrt{100\times 3} - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{4\times 3}$

$B = \sqrt{100}\times\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 3\times\sqrt{4}\times\sqrt{3} = 10\times\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 3\times 2\times\sqrt{3}$

$B = (10 - 4 + 6)\sqrt{3}$.

Donc $B = -12\sqrt{3}$.

3. $C = \dfrac{49\times 10^3\times 6\times 10^{-10}}{14\times 10^{-2}} = \dfrac{49\times 6\times 10^{3-10}}{14\times 10^{-2}}$

$C = \dfrac{294\times 10^{-7}}{14\times 10^{-2}} = \dfrac{294}{14}\times 10^{-7-(-2)} = 21\times 10^{-5}$.

Donc, en écriture scientifique : $C = 2{,}1\times 10^{-4}$.

Exercice 2

1. $D = (2x-3)(5-x) + (2x-3)^2 = (10x - 2x^2 - 15 + 3x) + (4x^2 - 12x + 9)$

$D = 2x^2 + x - 6$.

2. $D = (2x-3)(5-x) + (2x-3)^2 = (2x-3)[(5-x) + (2x-3)]$

$D = (2x-3)(x+2)$

3. L'équation $(2x - 3)(x + 2) = 0$ est une équation produit nulle.
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.
Donc $2x - 3 = 0$ ou $x + 2 = 0$. Soit $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -2$
Donc les solutions de l'équation sont $\frac{3}{2}$ et -2.

Exercice 3

1. Soit le système $\begin{cases} 6x + 5y = 57\,(1) \\ 3x + 7y = 55{,}5\,(2) \end{cases}$.
On résout le système par addition.
En multipliant l'équation (2) par -2, on a :
$\begin{cases} 6x + 5y = 57 \\ -6x - 14y = -111 \end{cases}$.
En additionnant membre à membre les deux équations, on obtient :
$(6x + 5y) + (-6x - 14y) = 57 - 111$.
Soit $-9y = -54$. Donc $y = \frac{-54}{-9} = 6$.
On en déduit la valeur de x en remplaçant y par 6 dans l'équation (1) :
$6x + 5 \times 6 = 57$, soit $6x = 57 - 30$.
Donc $x = \frac{27}{6} = 4{,}5$.
Vérification : $\begin{cases} 6 \times 4{,}5 + 5 \times 6 = 27 + 30 = 57 \\ 3 \times 4{,}5 + 7 \times 6 = 13{,}5 + 42 = 55{,}5 \end{cases}$.
Donc la solution du système est le couple (4,5 ; 6).

2. Soit x le prix d'une boîte et y le prix d'un album, la dépense de Léa se traduit par l'égalité $6x + 5y = 57$ et la dépense de Hugo se traduit par $3x + 7y = 55{,}50$.
Donc le couple $(x ; y)$ est solution du système précédent et d'après la question 1, on peut affirmer qu'une boîte coûte 4,50 euros et qu'un album coûte 6 euros.

Activités géométriques

Exercice 1

1. Les triangles CAB et CFG, de sommet commun C, sont tels que :
– les points A, C et F sont alignés ;
– les points B, C et G sont alignés ;

– les droites (AB) et (GF) sont parallèles.

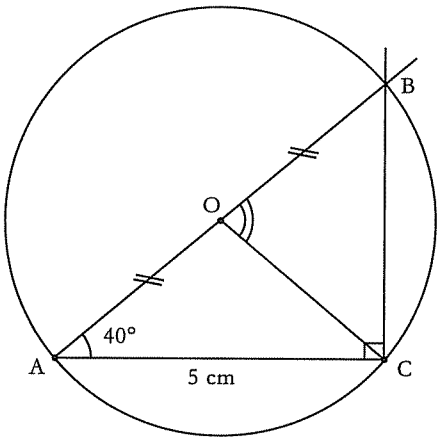
D'après le théorème de Thalès, on a les égalités de rapports suivantes :
$\frac{CA}{CF} = \frac{CB}{CG} = \frac{AB}{FG}$.
En particulier : $\frac{CA}{CF} = \frac{AB}{FG}$, d'où $\frac{CA}{8,4} = \frac{3}{11,2}$.

Soit $CA = \frac{3}{11,2} \times 8,4 = 2,25$. Donc CA = 2,25 cm.

2. Les triangles FCG et FDE, de sommet commun F, sont tels que les points F, D et C d'une part et les points F, E et G d'autre part sont alignés dans ce même ordre.
De plus $\frac{FD}{FC} = \frac{6,3}{8,4} = 0,75$ et $\frac{FE}{FG} = \frac{8,4}{11,2} = 0,75$;
donc $\frac{FD}{FC} = \frac{FE}{FG}$.
D'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut affirmer que les droites (GC) et (ED) sont parallèles.

Exercice 2

1.



2. Dans le triangle ABC rectangle en C, d'après la trigonométrie, on a :
$\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC}$, soit $\tan 40 = \frac{BC}{5}$.

D'où BC = $5 \times \tan 40 \approx 4{,}2$.

Donc la longueur BC, arrondie au millimètre, est 4,2 cm.

3. a) Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de son hypoténuse. Le triangle ABC étant rectangle en C, le centre O de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse [AB].

b) Voir la figure ci-dessus.

4. Dans le cercle de centre O, l'angle $\widehat{BOC}$ est l'angle au centre qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{BC}$ et l'angle $\widehat{BAC}$ est l'angle inscrit qui intercepte le même arc $\overset{\frown}{BC}$.

Or, dans un cercle, la mesure d'un angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit qui intercepte le même arc.

$\widehat{BOC} = 2 \times \widehat{BAC} = 2 \times 40°$.

Donc $\widehat{BOC} = 80°$.

Exercice 3

1. ABCD est un rectangle, donc les quatre angles sont droits et le triangle ABD est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$BD^2 = AD^2 + AB^2$.

D'où $AD^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$.

Or AD > 0 (AD est une longueur),

donc $AD = \sqrt{16} = 4$ cm.

2. Le volume d'une pyramide est donné par la formule :

$V = \frac{1}{3} \times B \times h$,

où B est l'aire de la base et h est la hauteur de la pyramide.

SABCD étant une pyramide de base le rectangle ABCD et de hauteur SO, on a :

$V = \frac{1}{3} \times (AB \times AD) \times SO$.

Soit $V = \frac{1}{3} \times 3 \times 4 \times 6 = 24$.

Donc le volume de la pyramide SABCD vaut 24 cm^3.

3. a) La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est une réduction de cette base. Donc la section A'B'C'D' obtenue est un rectangle.

b) Le plan parallèle à la base passe par le point O',

donc le rapport de réduction est $k = \dfrac{SO'}{SO}$.

De plus, on sait que O' est le milieu de [SO], donc $k = \dfrac{1}{2}$.

c) Dans une réduction de rapport k, le volume est multiplié par k^3.
D'où le volume V' de la pyramide SA'B'C'D'est donné par :

$V' = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \times V$.

Soit $V' = \dfrac{1}{8} \times 24 = 3$.

Donc le volume de la pyramide SA'B'C'D' vaut 3 cm^3.

Problème

1. En étant adhérent au club, Yann bénéficie d'une réduction de 30 % sur le prix normal de 20 euros, soit une réduction de 6 euros :

$\dfrac{30}{100} \times 20 = 0{,}3 \times 20 = 6$.

Donc le prix d'une journée d'un adhérent est de :

$20 - 6 = 14$ euros.

2.

Nombre de jours de ski	5	8	11
Coût en euros avec le tarif A	100	160	220
Coût en euros avec le tarif B	130	172	214

3. Soit x le nombre de jours de ski pendant la saison.

a) Avec le tarif A on paye 20 euros par jour, donc le coût annuel pour x jours est :

$C_A(x) = 20x$.

b) Avec le tarif B, on paye 14 euros par jour après avoir payé une adhésion de 60 euros, donc le coût annuel pour x jours est :

$C_B(x) = 14x + 60$.

4. Yann a payé 242 euros en étant adhérent au club et on cherche le nombre de jours x tel que :

$C_B(x) = 242$.

CORRIGÉ

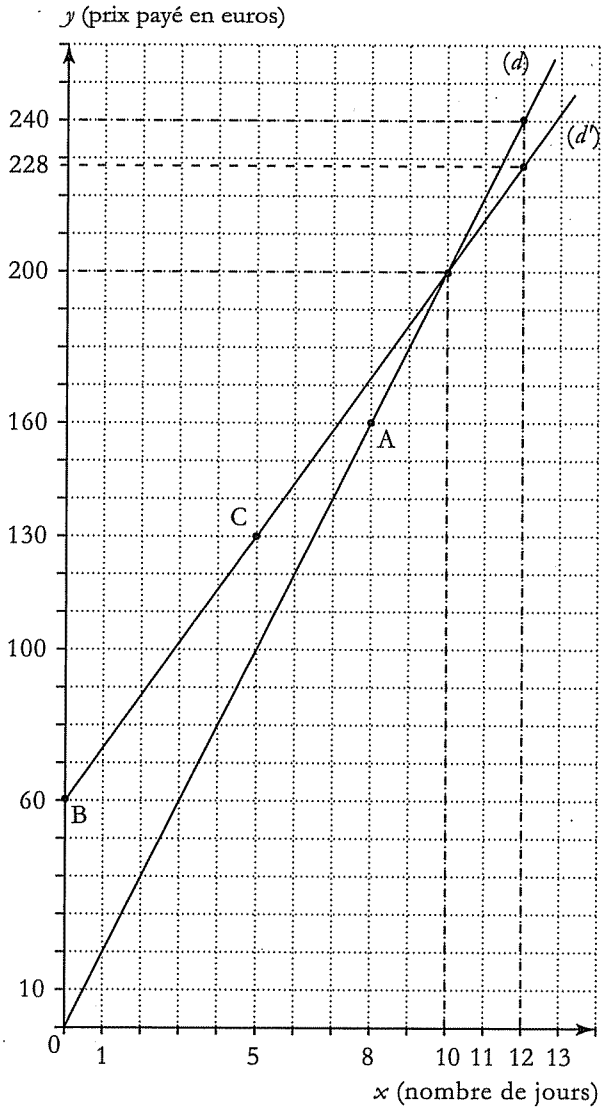
Soit $14x + 60 = 242$; $14x = 242 - 60$; $x = \dfrac{182}{14} = 13$.

Donc Yann a skié 13 jours dans la saison.

5. La fonction f définie par $f(x) = 20x$ est linéaire, sa représentation graphique est la droite (d) qui passe par l'origine du repère et le point A (8 ; 160).

La fonction g définie par $g(x) = 14x + 60$ est affine, sa représentation graphique est la droite (d') qui passe par les points B (0 ; 60) et C (5 ; 130).

Graphique réalisé à l'échelle $\dfrac{1}{2}$.



6. a) Pour 12 jours de ski dans la saison, soit $x = 12$, pour une abscisse égale à 12, le point de la droite (d') est en dessous du point de la droite (d).
Cela signifie que le tarif B est plus intéressant, Léa va payer 228 € (au lieu de 240 € avec

le tarif A).

b. Si les tarifs A et B sont égaux, alors les coûts annuels C_A et C_B sont égaux. Graphiquement, cela correspond aux coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (d'). On lit (10 ; 200), donc pour 10 jours de ski dans la saison les deux tarifs sont égaux à 200 €.

Ont contribué à la réalisation de cet ouvrage :

Bruno BENITAH
Vincent BIASONI
Lionel CUAZ
Danièle SPERANDIO

Achevé d'imprimé en août 2006
Dépôt légal : septembre 2006
Imprimé en UE

Mathématiques • Série collège

La compil du brevet

Les sujets incontournables ne sont pas nécessairement ceux de l'an dernier !

Ne faites pas l'impasse sur les questions qui pourraient tomber cette année... Révisez les sujets du brevet les plus récents, mais aussi ceux des 4 années précédentes...
Et multipliez vos chances de réussite !

- **Les annales 2003, 2004, 2005, 2006 et 2007**
- **30 sujets corrigés**
- **Une indexation des sujets par années du brevet**
- **Un tableau thématique pour s'exercer en fonction des notions étudiées en cours**

Dans la même collection :
Français, toutes séries
Histoire-Géographie (Éducation civique), toutes séries

9 782844 313874