



MODULE 03:

RESISTANCE DES MATERIAUX

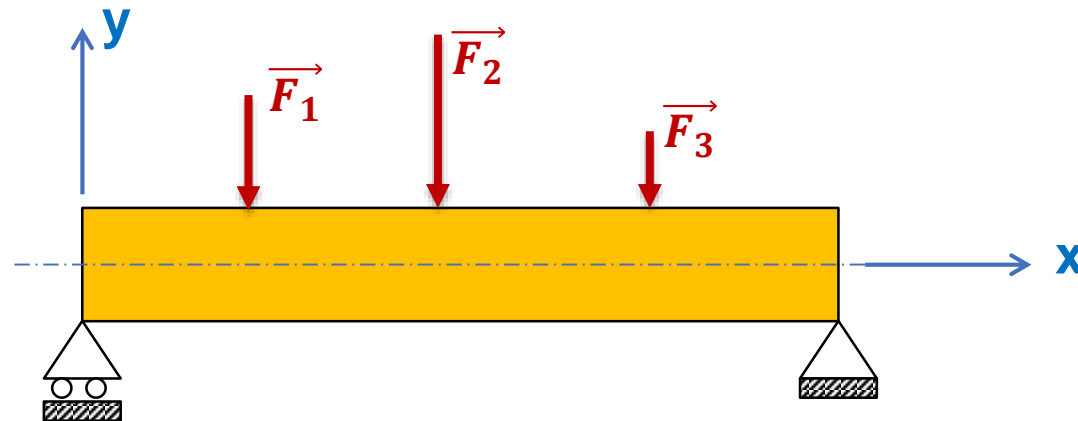
RDM

Par: Mr. MAGRI

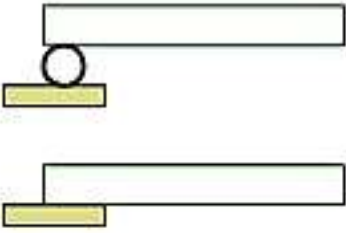
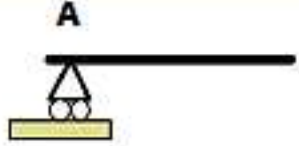
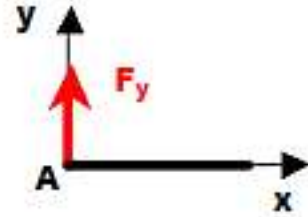


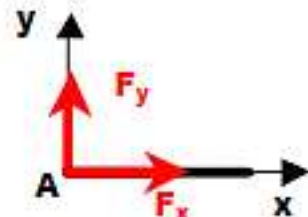
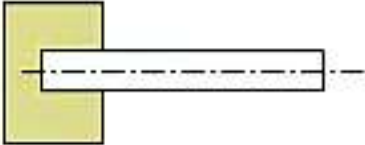

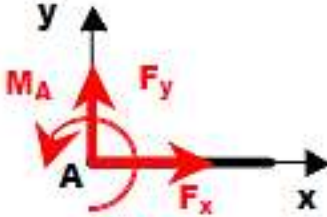
VII- Flexion Simple

1. Définition


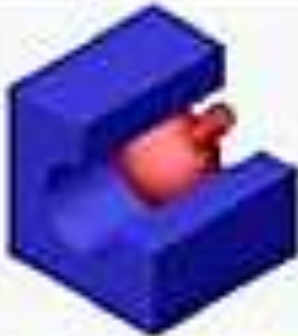
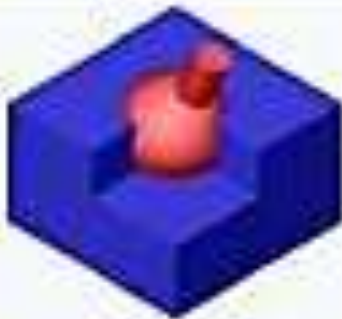
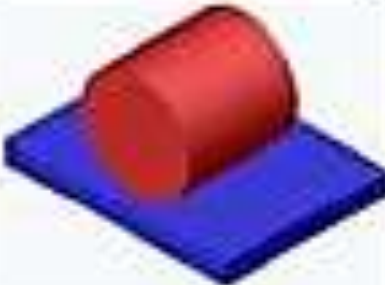
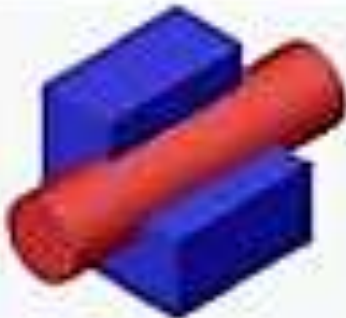

Une poutre droite est sollicitée en Flexion simple lorsque elle est soumise à un ensemble de forces coplanaires, perpendiculaires à la ligne moyenne, et qui tendent à la fléchir.



VII- Flexion Simple

TYPE	EXEMPLES	SCHEMATISATION	ACTIONS EXERCEES
Appui simple			
Appui double			
Encastrement			

Rappel: Liaisons mécaniques

	Plan	Cylindre	Sphère
Sphère			
Cylindre			
Plan			

Rappel: Liaisons mécaniques

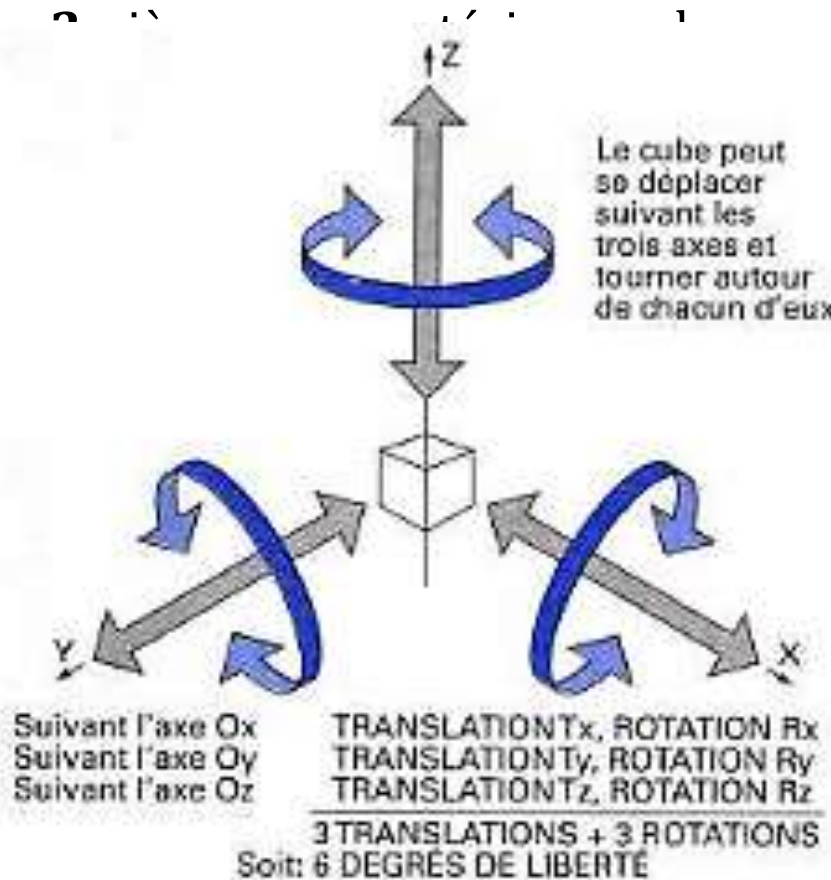
3. Degrés de liberté

La liaison entre deux corps peut avoir l'un ou plusieurs des mouvements suivants :

Ces degrés de liberté sont au nombre de :

- 3 translations
- 3 rotations

La nature d'une liaison dépend de la géométrie du contact (ponctuel, linéaire, surfacique) et de la position relative des corps.


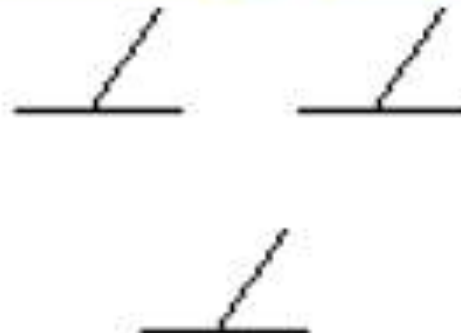


Le nombre de mobilités que possède un corps libre. Ces mobilités (ou degrés de liberté) sont :


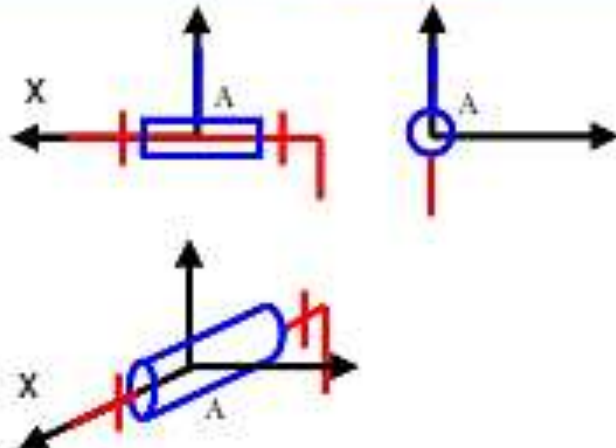
6 degrés de liberté élémentaires et

qui dépendent de la géométrie du contact et du nombre et de la position relative des corps.

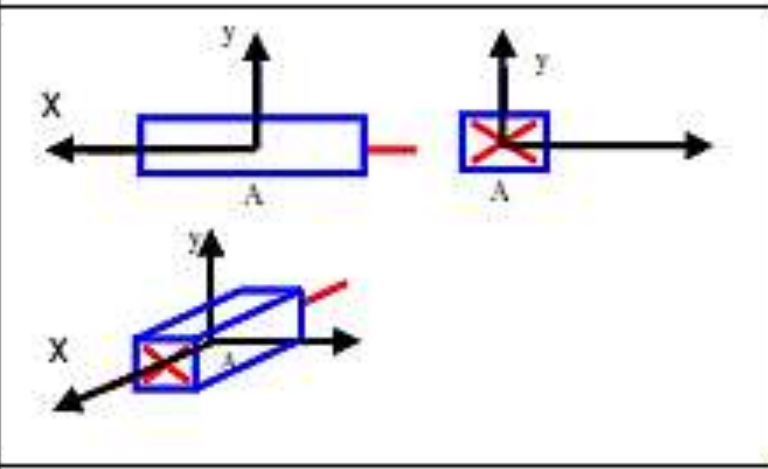
Rappel: Liaisons mécaniques

0 mobilité														
Liaison encastrement 		<table border="1"><thead><tr><th></th><th>T</th><th>R</th></tr></thead><tbody><tr><th>X</th><td>0</td><td>0</td></tr><tr><th>Y</th><td>0</td><td>0</td></tr><tr><th>Z</th><td>0</td><td>0</td></tr></tbody></table>		T	R	X	0	0	Y	0	0	Z	0	0
	T	R												
X	0	0												
Y	0	0												
Z	0	0												

Rappel: Liaisons mécaniques

1 mobilité														
<p>Liaison pivot d'axe x</p> 		<table border="1" style="border: 2px solid green;"> <thead> <tr> <th></th> <th>T</th> <th>R</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>X</th> <td>0</td> <td>RX</td> </tr> <tr> <th>Y</th> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <th>Z</th> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		T	R	X	0	RX	Y	0	0	Z	0	0
	T	R												
X	0	RX												
Y	0	0												
Z	0	0												

Rappel: Liaisons mécaniques



	T	R
X		
Y		
Z		

Rappel: Liaisons mécaniques

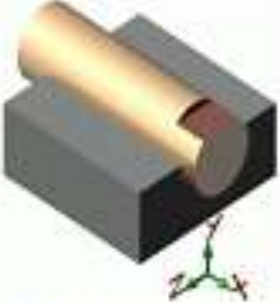
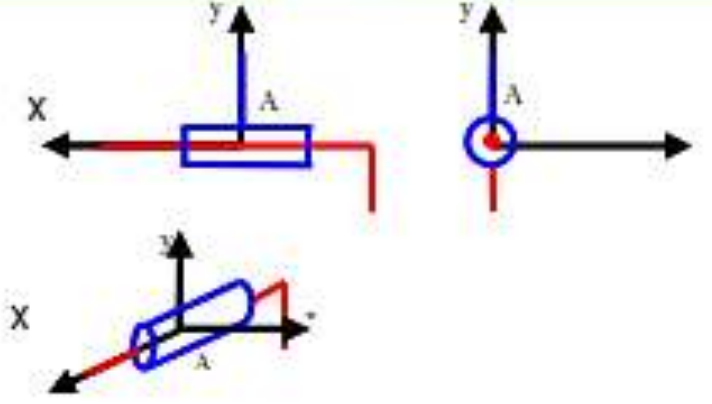

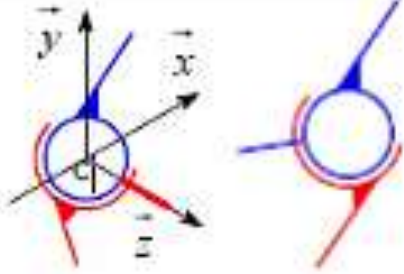
Liaison hélicoïdale d'axe X

$R_x = T_x \cdot 2\pi / p$

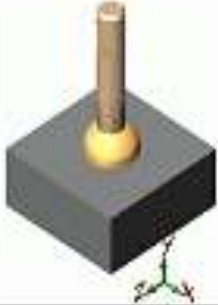
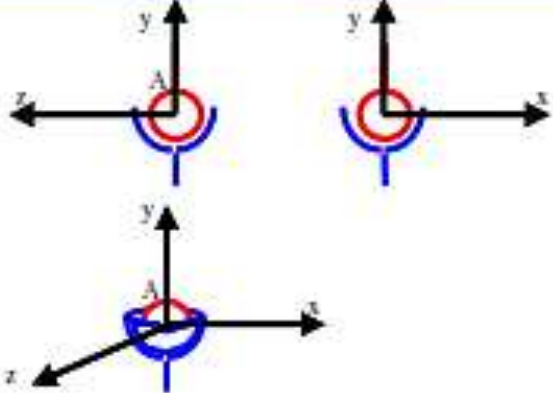
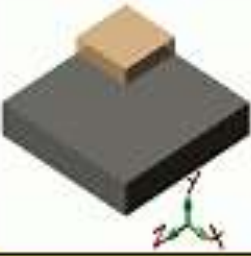
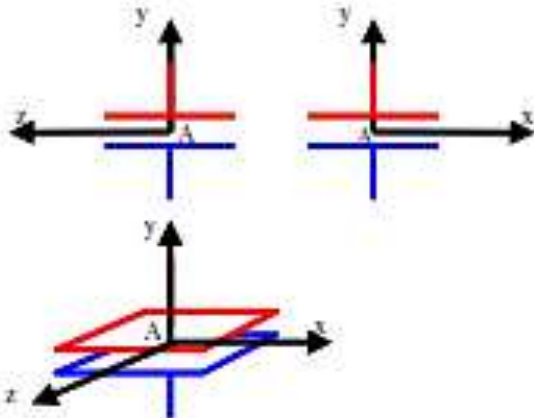
$p = \text{pas}$

	T	R
X		
Y		
Z		


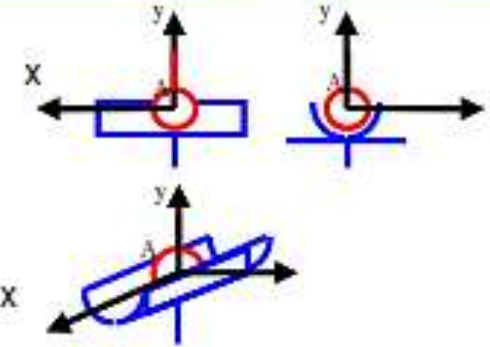
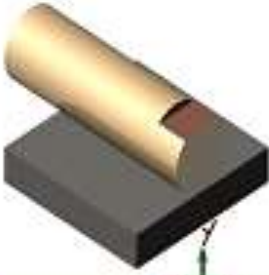
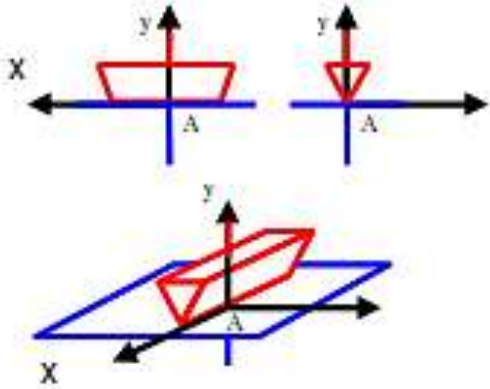
Rappel: Liaisons mécaniques

2 mobilités														
<p>Liaison pivot glissant d'axe x</p> 		<table border="1" style="border: 2px solid green;"> <tr> <td></td> <td>T</td> <td>R</td> </tr> <tr> <td>X</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Y</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Z</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>		T	R	X			Y			Z		
	T	R												
X														
Y														
Z														
<p>Liaison rotule à doigt</p> 		<table border="1" style="border: 2px solid green;"> <tr> <td></td> <td>T</td> <td>R</td> </tr> <tr> <td>X</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Y</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Z</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>		T	R	X			Y			Z		
	T	R												
X														
Y														
Z														

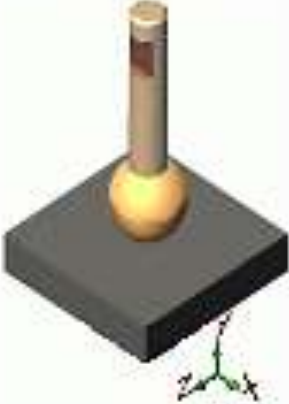
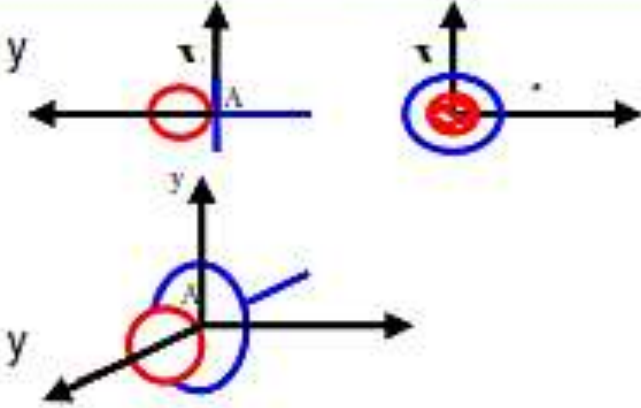
Rappel: Liaisons mécaniques

3 mobilités														
<p>Liaison rotule</p> 		<table border="1"> <tr> <td></td> <td>T</td> <td>R</td> </tr> <tr> <td>X</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Y</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Z</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>		T	R	X			Y			Z		
	T	R												
X														
Y														
Z														
<p>Liaison appui-plan de normale y</p> 		<table border="1"> <tr> <td></td> <td>T</td> <td>R</td> </tr> <tr> <td>X</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Y</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Z</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>		T	R	X			Y			Z		
	T	R												
X														
Y														
Z														

Rappel: Liaisons mécaniques

4 mobilités														
<p>Liaison sphère cylindre (linéaire annulaire) d'axe x</p> 		<table border="1"> <tr> <td></td> <td>T</td> <td>R</td> </tr> <tr> <td>X</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Y</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Z</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>		T	R	X			Y			Z		
	T	R												
X														
Y														
Z														
<p>Liaison cylindre plan (linéaire rectiligne), de normale y et d'axe x</p> 		<table border="1"> <tr> <td></td> <td>T</td> <td>R</td> </tr> <tr> <td>X</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Y</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Z</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>		T	R	X			Y			Z		
	T	R												
X														
Y														
Z														

Rappel: Liaisons mécaniques

5 mobilités														
<p>Liaison sphère plan (ponctuelle) de normale y</p> 		<table border="1"> <tr> <td></td> <td>T</td> <td>R</td> </tr> <tr> <td>X</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Y</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Z</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>		T	R	X			Y			Z		
	T	R												
X														
Y														
Z														

VII- Flexion Simple

3. Efforts Intérieurs:

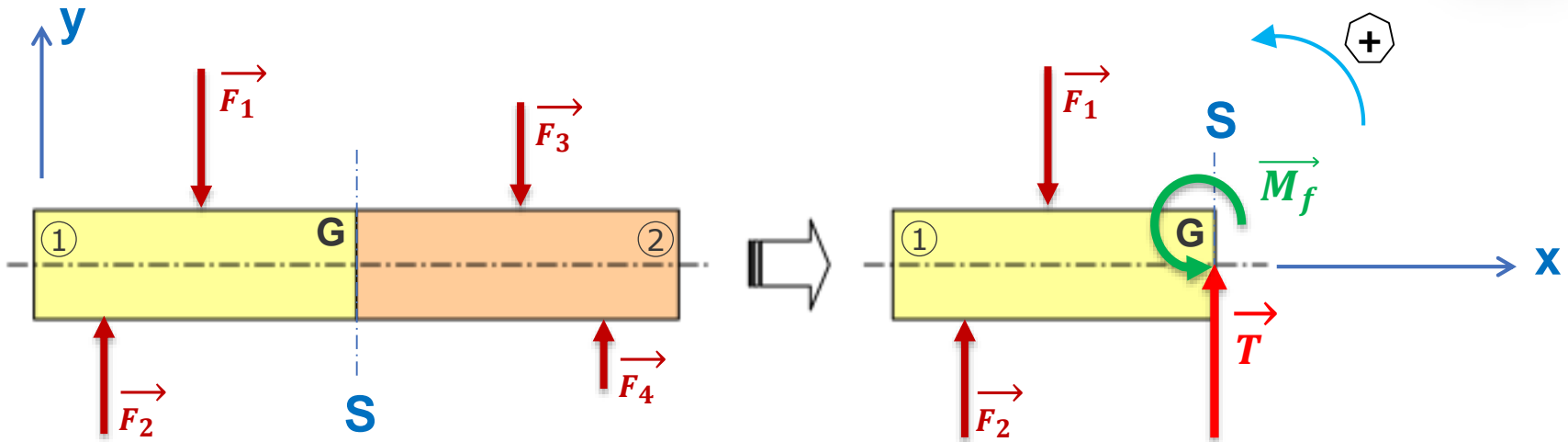
En Flexion:

- La résultante des forces intérieures $\vec{R}_{2/1}$ est réduite à la seule composante de l'effort tranchant \vec{T} .
- La résultante des Moments intérieurs $\vec{M}_{2/1}$ est réduite à la seule composante du moment fléchissant \vec{M}_f .

Remarque:

- L'effort tranchant \vec{T} est perpendiculaire à la ligne moyenne.
- Le moment fléchissant \vec{M}_f est perpendiculaire à l'effort tranchant \vec{T} et à la ligne moyenne.

VII- Flexion Simple



En appliquant le principe fondamental de la statique (PFS) sur le tronçon isolé après coupure fictive, on démontre que:

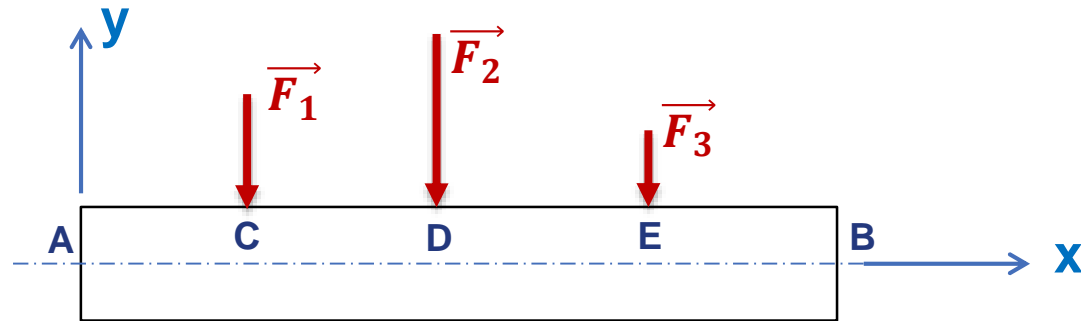
$$\vec{T} = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

$$\vec{M}_f = -[\mathcal{M}_G(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_G(\vec{F}_2)]$$

VII- Flexion Simple

Calcul des Efforts Intérieurs:

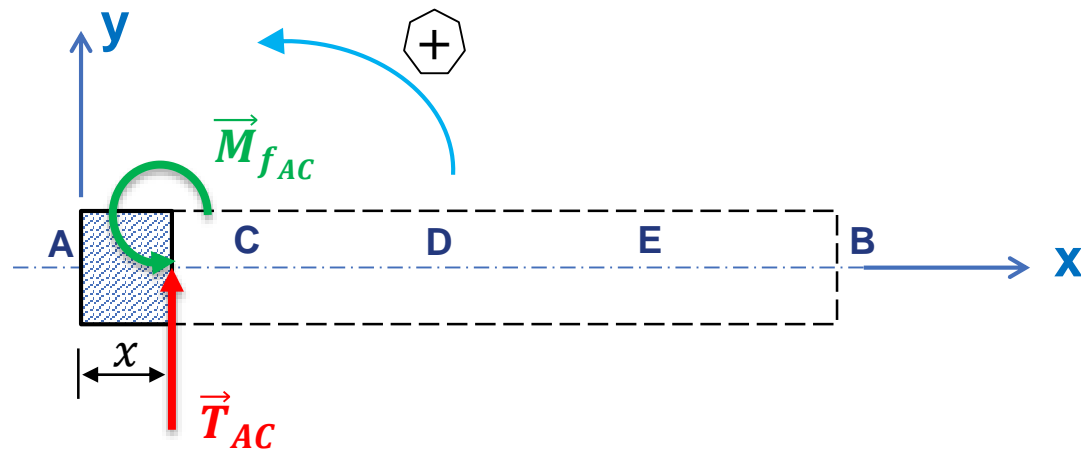
Soit une poutre soumise à la flexion sous l'action de trois forces F_1 , F_2 et F_3 :



Tronçon AC ($0 \leq x < AC$):

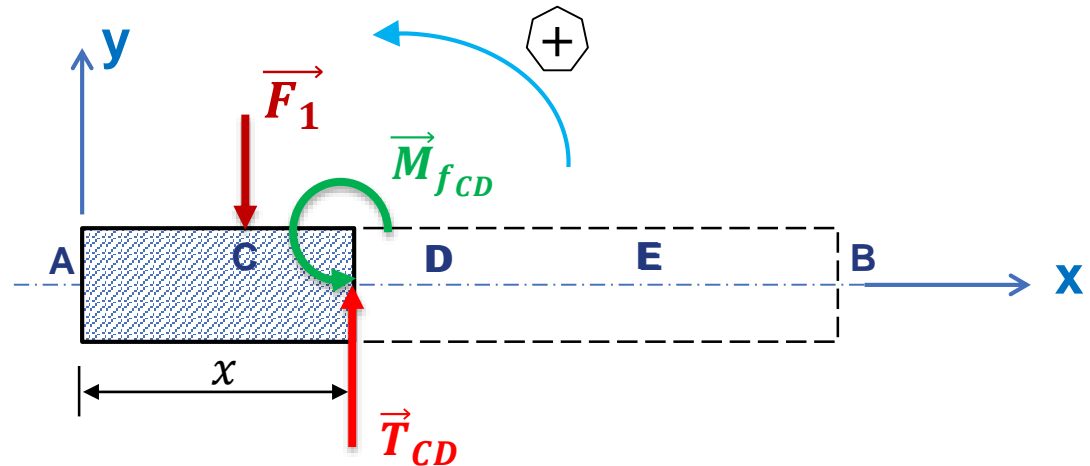
$$PFS \Rightarrow \begin{cases} \vec{T}_{AC} = \vec{0} \\ \vec{M}_{fAC} = \vec{0} \end{cases}$$

$$Projection \Rightarrow \begin{cases} (y) \left\{ \begin{array}{l} T_{AC} = 0 \\ M_{fAC} = 0 \end{array} \right. \\ (z) \end{cases}$$



VII- Flexion Simple

Tronçon CD ($AC \leq x < AD$):



$$PFS \Rightarrow \begin{cases} \vec{T}_{CD} + \vec{F}_1 = \vec{0} \\ \vec{M}_{fCD} + \vec{M}(\vec{F}_1) = \vec{0} \end{cases}$$

$$\text{Projection} \Rightarrow \begin{cases} (y) & T_{CD} - F_1 = 0 \\ (z) & M_{fCD} + F_1 \cdot (x - AC) = 0 \end{cases}$$

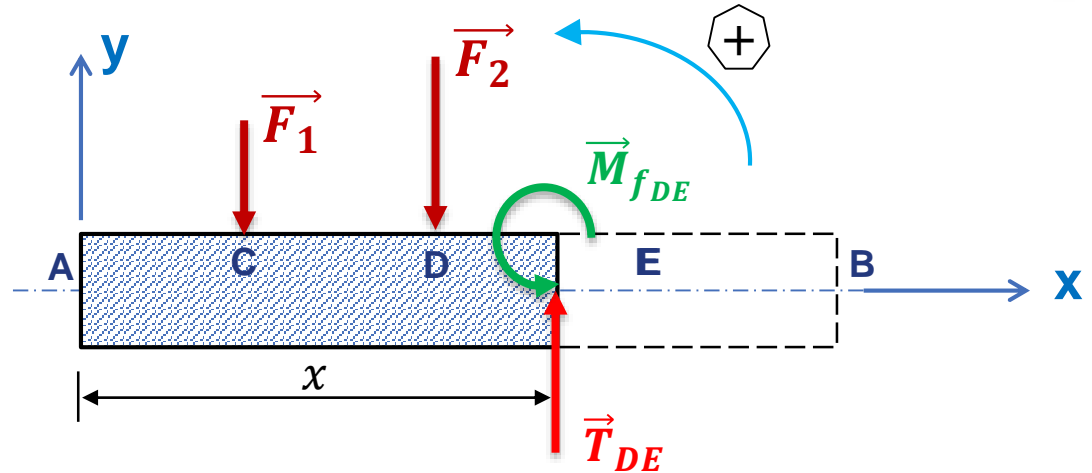
\Rightarrow

$$T_{CD} = F_1$$

$$M_{fCD} = -F_1 \cdot (x - AC)$$

VII- Flexion Simple

Tronçon DE ($AD \leq x < AE$):



$$PFS \Rightarrow \begin{cases} \vec{T}_{DE} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \\ \vec{M}_{fDE} + \vec{M}(\vec{F}_1) + \vec{M}(\vec{F}_2) = \vec{0} \end{cases}$$

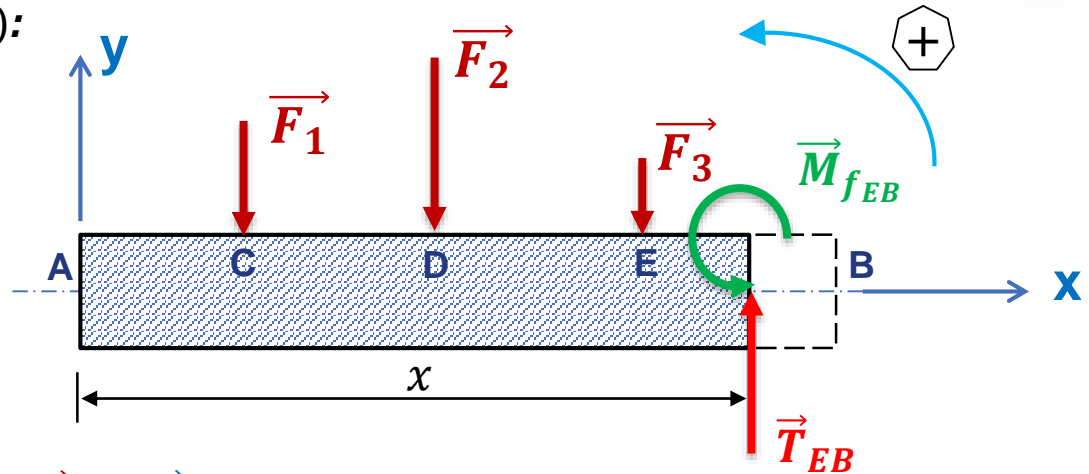
$$\text{Projection} \Rightarrow \begin{cases} (y) & T_{DE} - F_1 - F_2 = 0 \\ (z) & M_{fDE} + F_1 \cdot (x - AC) + F_2 \cdot (x - AD) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{DE} = (F_1 + F_2)}$$

$$\boxed{M_{fDE} = -F_1 \cdot (x - AC) - F_2 \cdot (x - AD)}$$

VII- Flexion Simple

Tronçon EB ($AE \leq x < AB$):



$$PFS \Rightarrow \begin{cases} \vec{T}_{EB} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \\ \vec{M}_{fEB} + \vec{M}(\vec{F}_1) + \vec{M}(\vec{F}_2) + \vec{M}(\vec{F}_3) = \vec{0} \end{cases}$$

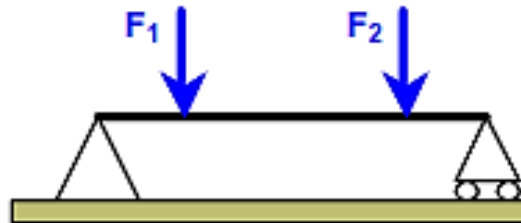
$$Projection \Rightarrow \begin{cases} (y) & T_{EB} - F_1 - F_2 - F_3 = 0 \\ (z) & M_{fEB} + F_1 \cdot (x - AC) + F_2 \cdot (x - AD) + F_3 \cdot (x - AE) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{EB} = (F_1 + F_2 + F_3)} \quad \boxed{M_{fEB} = -F_1 \cdot (x - AC) - F_2 \cdot (x - AD) - F_3 \cdot (x - AE)}$$

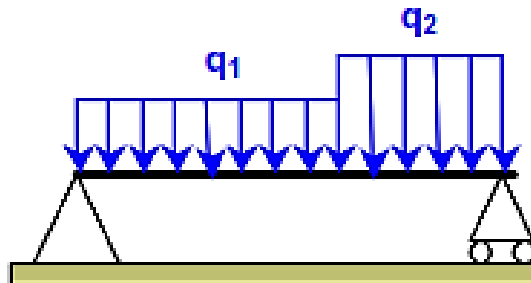
VII- Flexion Simple

Remarques:

- dans la plupart des schématisations, la poutre est modélisée par sa ligne moyenne.
- les poutres sont identifiées à partir des charges extérieures appliquées :
 - ✓ Poutre simple sur deux appuis avec charges concentrées:

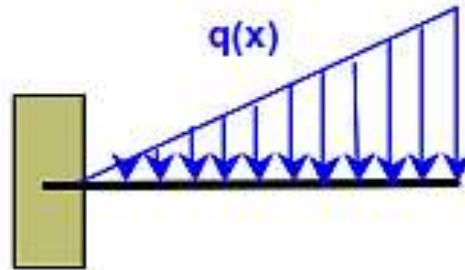


- ✓ Poutre simple sur deux appuis avec charges réparties :



VII- Flexion Simple

- ✓ Poutre encastrée avec charge répartie $q(x)$ linéairement croissante:



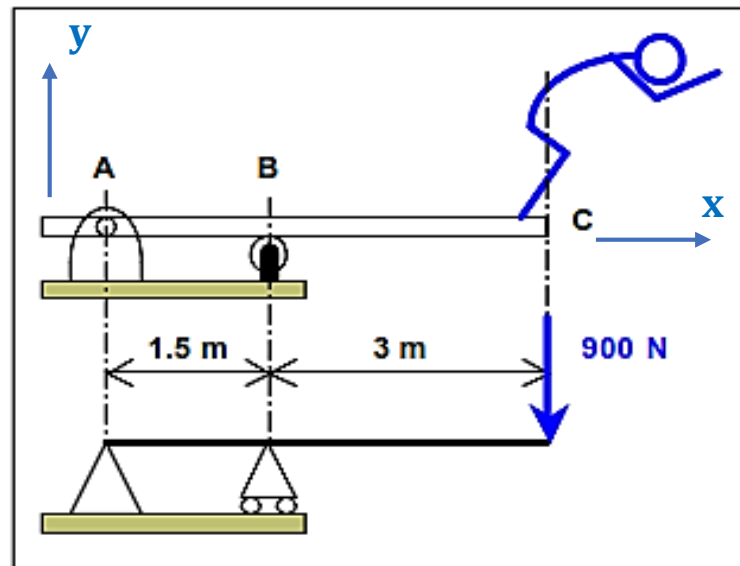
4. Diagrammes:

Les valeurs de l'effort tranchant \vec{T} et du moment fléchissant \vec{M}_f varient avec la position x de la coupure fictive. Les diagrammes de \vec{T} et \vec{M}_f permettent de décrire les variations de ces deux grandeurs et ainsi repérer les maximums à prendre en compte lors des calculs des contraintes.

VII- Flexion Simple

Exemple de calcul N°1: (planche de plongeur)

Soit la planche de plongeur schématisée par la poutre de ligne moyenne **AC**. La liaison en **A** (liaison pivot) est une articulation et la liaison en **B** est un appui simple. **$P = 900\text{ N}$** schématise l'action du nageur.

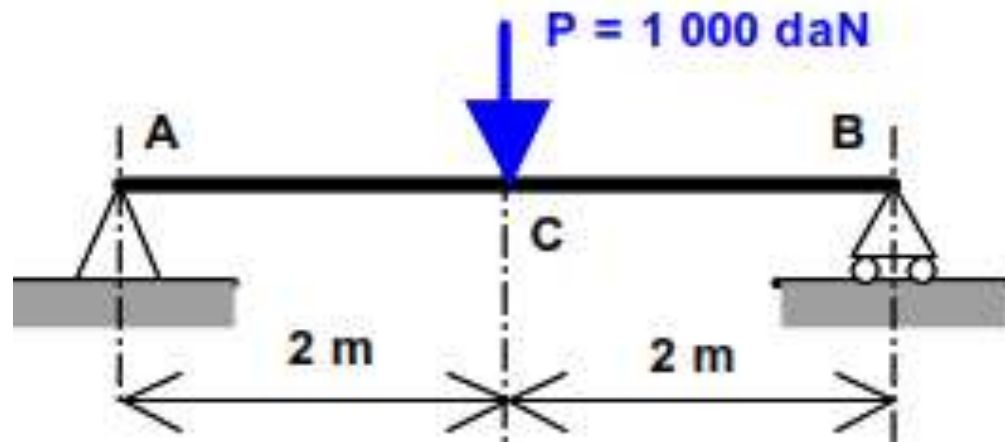


1. Déterminer les réactions aux appuis **A** et **B**
2. Déterminer l'effort tranchant \vec{T} et le moment fléchissant \vec{M}_f le long de la planche.
3. Tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

TRAVAUX DIRIGÉS

Exemple N° 2

Considérons la poutre ci-contre, de longueur $L = 4 \text{ m}$, soumise à une charge ponctuelle en son milieu.



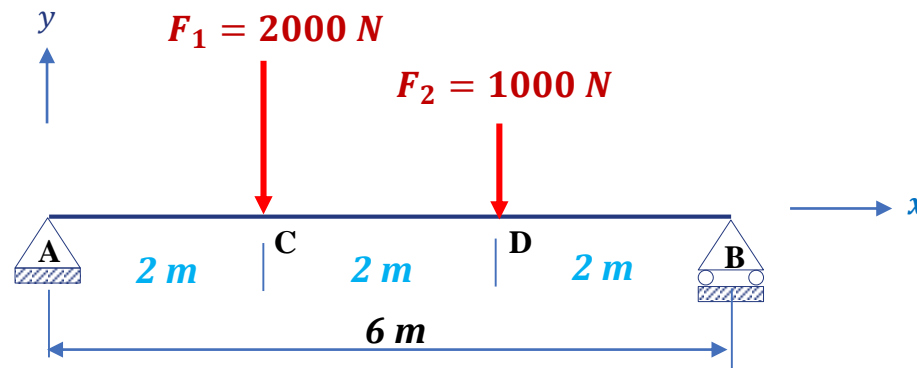
Questions:

1. Calculer les réactions aux appuis **A** et **B**.
2. Déterminer les équations des efforts tranchant $T(x)$ et des moment fléchissant $M_f(x)$ le long de la poutre.
3. Tracer les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant.

TRAVAUX DIRIGÉS

Exemple N° 3

Considérons la poutre ci-contre, de longueur $L = 6\text{ m}$, soumise à deux charges ponctuelles F_1 et F_2 .



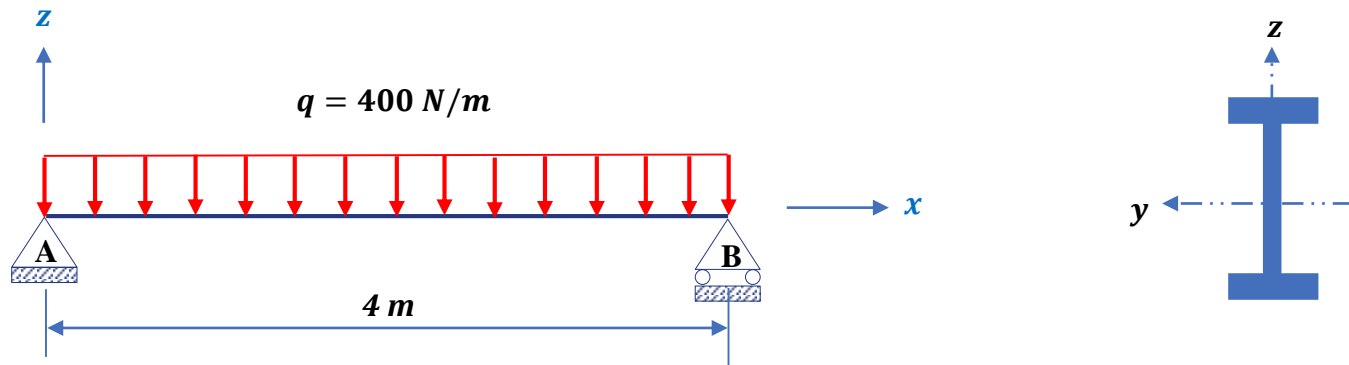
Questions:

1. Calculer les réactions aux appuis **A** et **B**.
2. Déterminer les équations des efforts tranchant $T(x)$ et des moments fléchissants $M_f(x)$ le long de la poutre.
3. Tracer les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant.

TRAVAUX DIRIGÉS

Exemple N° 4 (Charge répartie uniforme)

Considérons une poutre (longueur $L = 4 \text{ m}$) réalisée à partir d'un profilé **IPE** dont le poids est de 40 daN par mètre ($q = 400 \text{ N/m}$)



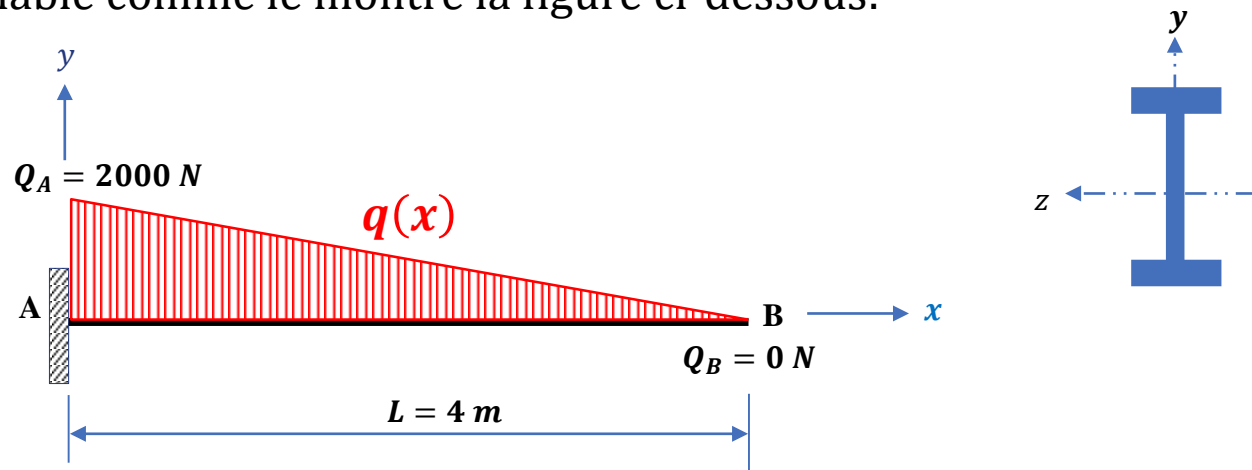
Questions:

1. Calculer les réactions aux appuis **A** et **B**.
2. Déterminer les équations des efforts tranchant $T(x)$ et des moments fléchissants $M_f(x)$ le long de la poutre.
3. Tracer les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant.

TRAVAUX DIRIGÉS

Exemple N° 5 (Charge répartie linéairement variable)

Considérons une poutre (longueur $L = 4\text{ m}$) réalisée à partir d'un profilé **IPE 140**, encasturé d'une coté et libre à l'autre. La poutre est soumise à une charge répartie linéairement variable comme le montre la figure ci-dessous:



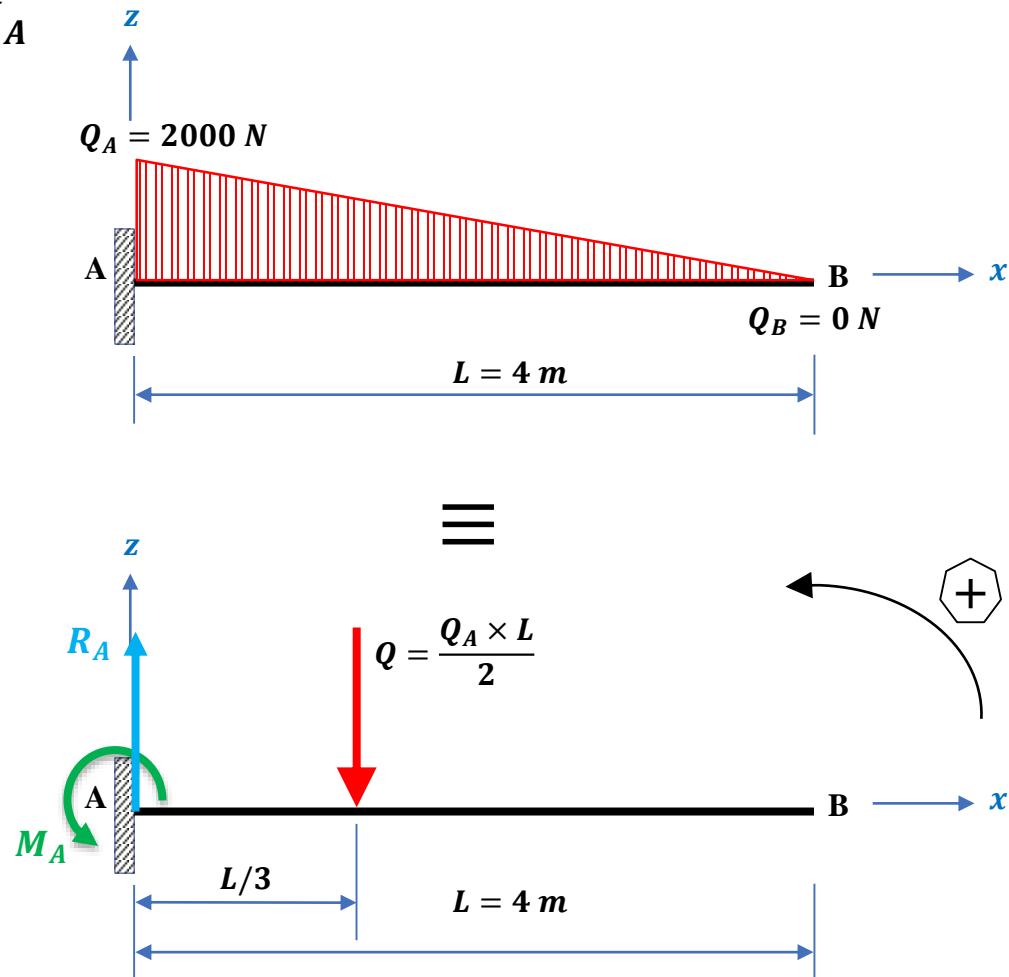
Questions:

1. Calculer les réactions de l'appuis **A**
2. Déterminer les équations des efforts tranchant $T(x)$ et des moment fléchissant $M_f(x)$ le long de la poutre
3. Tracer les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant.

TRAVAUX DIRIGÉS

Corrigé:

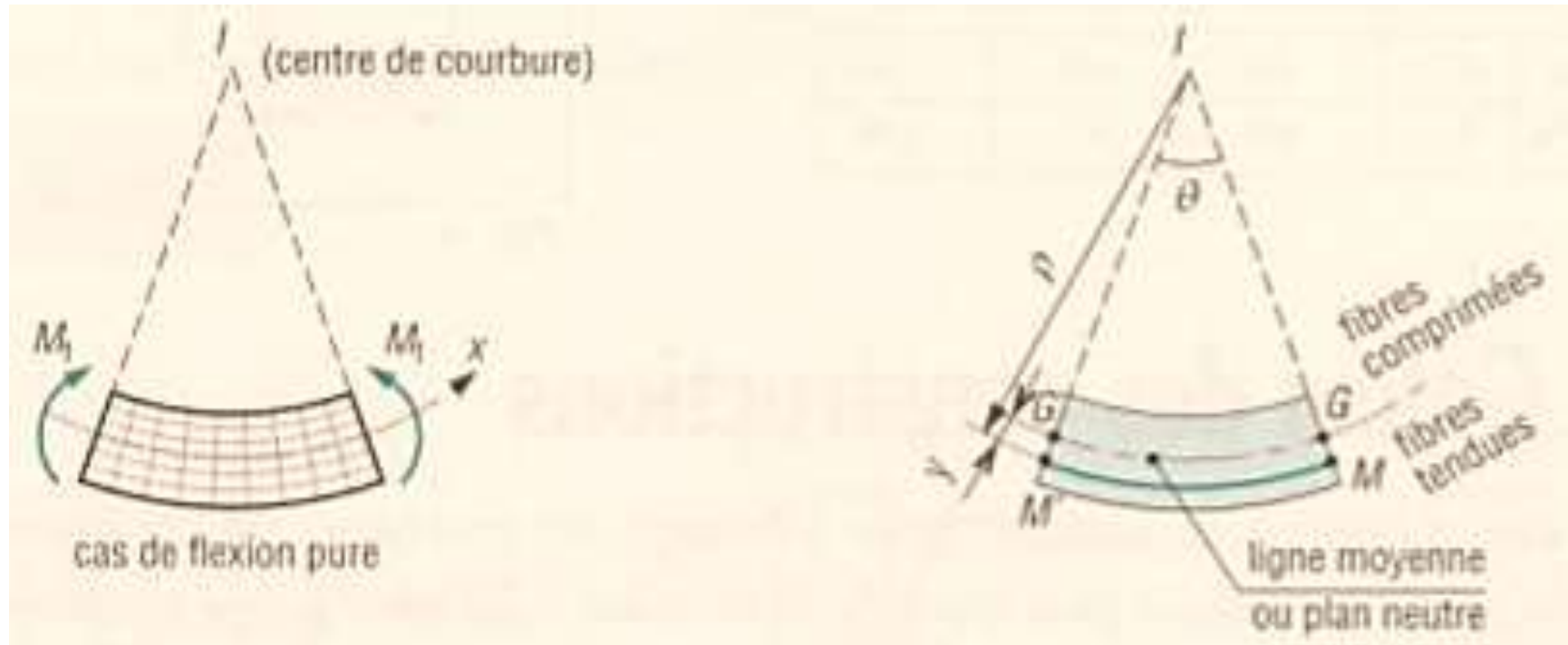
1. Calcul de R_A et M_A



VII- Flexion Simple

5. Contrainte Normale σ :

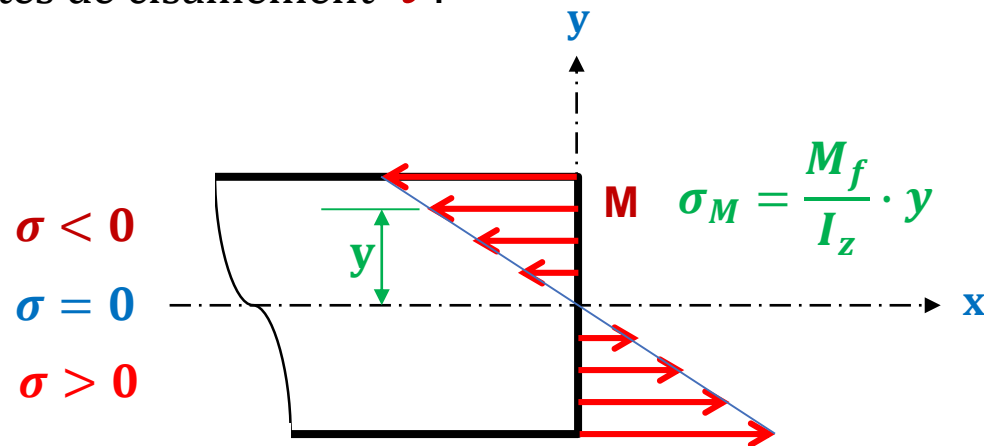
Les contraintes normales résultent du moment fléchissant M_f (les efforts tranchants n'ont aucun effet sur leur valeur). Dans le cas de flexion pure ($M_f \neq 0$ et $T = 0$), les poutres se déforment suivant des arcs de cercles.



VII- Flexion Simple

Remarques:

- La ligne moyenne GG' ne subit ni allongement ni raccourcissement ($\sigma = 0$).
- Les fibres situées au-dessus de la ligne neutre sont comprimées et supportent des contraintes de compression ($\sigma < 0$).
- Les fibres situées au-dessous (MM') sont tendues et supportent des contraintes de traction ($\sigma > 0$).
- En flexion, les contraintes normales σ sont généralement prépondérantes devant les contraintes de cisaillement τ .



VII- Flexion Simple

En utilisant la loi de Hooke et en faisant intervenir le moment fléchissant, on montre que:

$$\sigma = \frac{M_f}{I_z} \cdot y$$

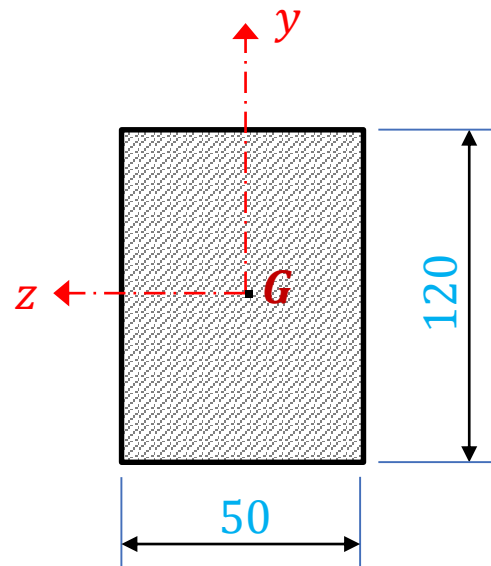
Avec:

- σ_M : Contrainte normale en **M** (en **Mpa**)
- M_f : Le moment fléchissant dans la section droite **S** (en **N.mm**)
- y : La distance du point **M** par rapport à la ligne neutre (en **mm**)
- I_z : Le moment quadratique de la section droite (**S**) par rapport à l'axe (**z**) (en **mm⁴**)

VII- Flexion Simple

Exemple de calcul:

Soit une poutre rectangulaire (50×120), soumise à un moment fléchissant de $M_f = 14.4 \text{ kN.m}$ constant sur toute sa longueur.



Compléter le tableau ci-dessous en calculant la contrainte normale pour les points indiqués:

$y \text{ (mm)}$	0	20	40	60
$\sigma \text{ (Mpa)}$				

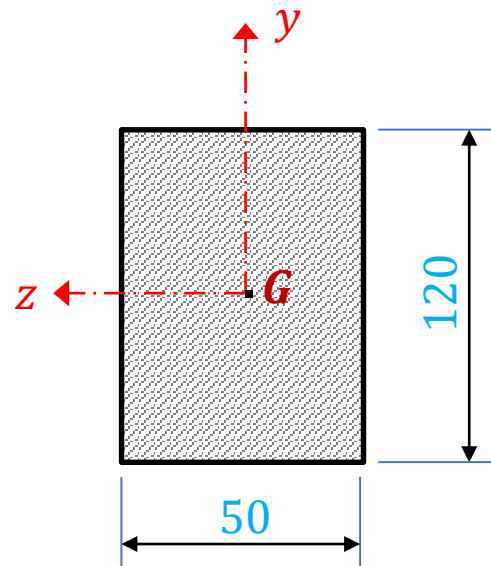
10^n	Préfixe français
10^{24}	yotta
10^{21}	zetta
10^{18}	exa
10^{15}	péta
10^{12}	téra
10^9	giga
10^6	méga
10^3	kilo
10^2	hecto
10^1	déca
10^0	(aucun)

10^{-1}	déci
10^{-2}	centi
10^{-3}	milli
10^{-6}	micro
10^{-9}	nano
10^{-12}	pico
10^{-15}	femto
10^{-18}	atto
10^{-21}	zepto
10^{-24}	yocto

VII- Flexion Simple

Exemple de calcul:

Soit une poutre rectangulaire (50×120), soumise à un moment fléchissant de $M_f = 14.4 \text{ kN.m}$ constant sur toute sa longueur.



Compléter le tableau ci-dessous en calculant la contrainte normale pour les points indiqués:

$y \text{ (mm)}$	0	20	40	60
$\sigma \text{ (Mpa)}$	0	40	80	120

VII- Flexion Simple

6. Condition de résistance:

Pour des questions de sécurité liées à l'usage des machines, la contrainte normale dans la section droite la plus chargée doit rester inférieure à une contrainte limite admissible liée au matériau R_{pe} .

Dans le cas précis de la flexion, il faut donc procéder ainsi :

- Commencer par déterminer la section la plus chargée (en général celle où le moment fléchissant est maximum) ;
- Vérifier que la contrainte maximale dans cette section est inférieure à la contrainte admissible R_{pe} .

$$\sigma_{max} = \frac{M_f^{max} \times y_{max}}{I_z} \leq R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

Ou:

$$\sigma_{max} = \frac{M_f^{max}}{(I_z/V)} \leq R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

Avec: $V = y_{max}$

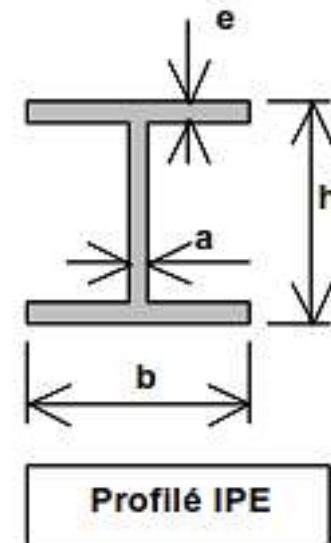
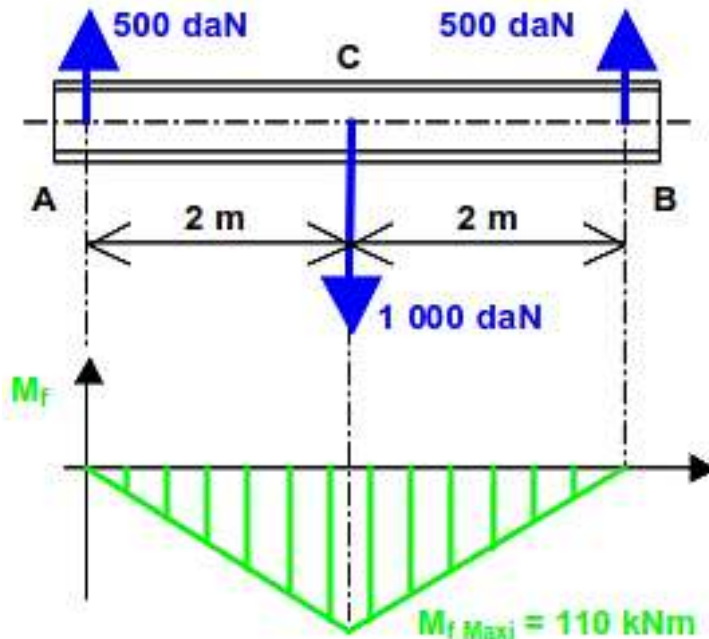
(I_z/V) : est appelé **Module de flexion** de la section (mm^3)

VII- Flexion Simple

Exemple de calcul:

une poutre de pont roulant (profilé *IPE*) est soumise aux charges indiquées sur la figure ci-dessous (cas le plus défavorables). Le moment fléchissant maximum est obtenu au milieu de la poutre et a pour valeur $M_f^{max} = 110 \text{ kN.m}$.

Si on considère une contrainte admissible de $R_{pe} = 100 \text{ Mpa}$, déterminer le profilé *IPE* pouvant convenir pour construire l'appareil.



VII- Flexion Simple

Corrigé:

On doit avoir:

$$\sigma_{max} = \frac{M_f^{max}}{(I_z/V)} \leq R_{pe}$$

$$\Rightarrow I_z/V \geq \frac{M_f^{max}}{R_{pe}}$$

$$AN : I_z/V \geq \frac{110 \times 10^3 \times 10^3}{100} = 11 \times 10^5 \text{ mm}^3 \\ = 1100 \text{ cm}^3$$

On choisi donc un profilé IPE dont le module de flexion $W_{el,y}$ est supérieur et proche à 1100 cm^3 . Soit un profilé **IPE 400**:

$$h = 400 \text{ mm}$$

$$b = 180 \text{ mm}$$

$$t_w = 8,6 \text{ mm}$$

$$W_{el,y} = 1156,4 \text{ cm}^3$$

$$W_{el,z} = 146,4 \text{ cm}^3$$

$$t_f = 13,5 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \sigma_{max} = 95,12 \text{ Mpa}$$

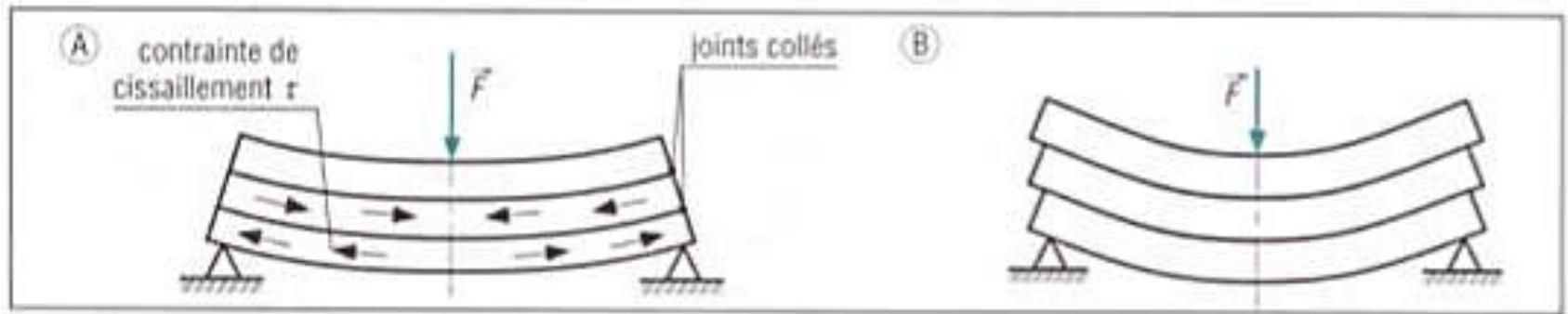
VII- Flexion Simple

6. Contrainte tangentielle en flexion τ :

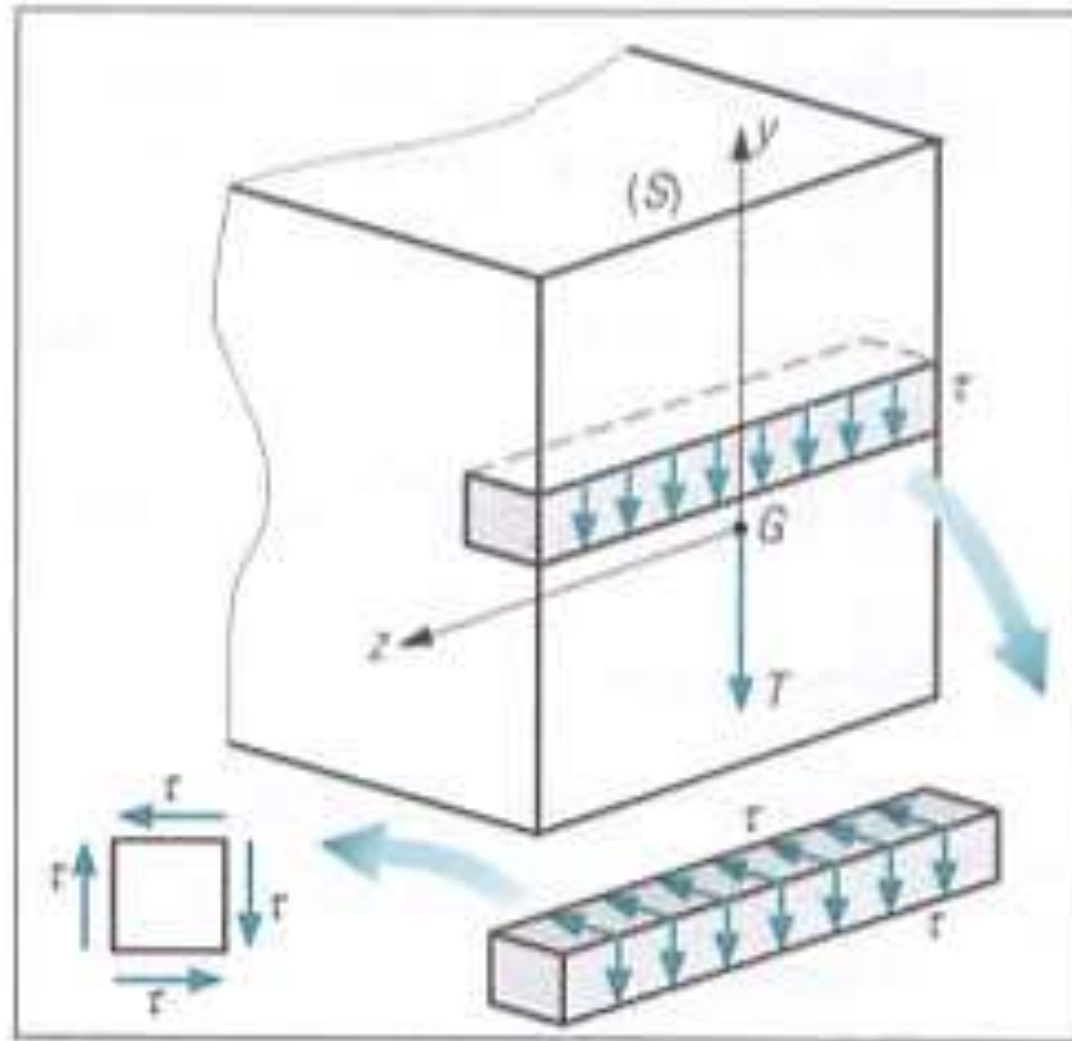
a. Mise en évidence:

Les contraintes de cisaillement τ qui s'exercent dans les joints collés assurent le maintien (évitent le glissement) entre les poutres respectives et limitent ainsi les déformations.

Les figures ci-dessous illustre la distribution des contraintes de cisaillement dans une section droite (S) supportant un effort tranchant T . Si les contraintes τ conservent une valeur constante suivant l'axe z , en revanche elles varient suivant y , avec un maximum près du plan neutre (inverse des contraintes normales σ).



VII- Flexion Simple



VII- Flexion Simple

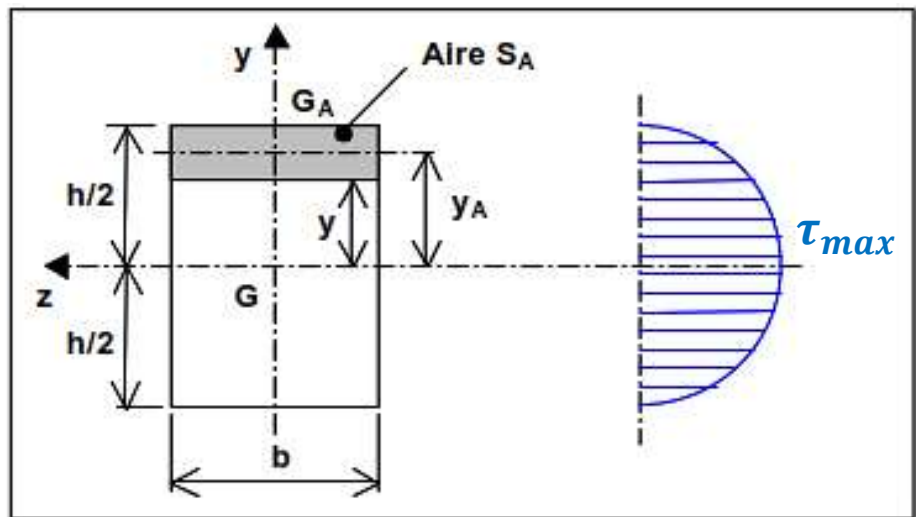
b. Cas des poutres rectangulaires:

Dans ce cas, la contrainte de cisaillement τ , à la distance y du plan neutre, est donnée par :

$$\tau = \frac{T \times Q}{I_z \times b}$$

Avec:

- τ : Contrainte de cisaillement à la distance y (en Mpa)
- T : L'effort tranchant (en N)
- Q : Moment statique de l'aire hachurée S_A (en mm^3)
- I_z : Le moment quadratique de la section droite (S) par rapport à l'axe (z) (en mm^4)



$$Q = y_A \times S_A = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

VII- Flexion Simple

Remarque:

La contrainte est maximale au niveau du plan neutre ($y = 0$) :

$$\tau_{max} = \frac{T \cdot h^2}{8 \cdot I_z}$$

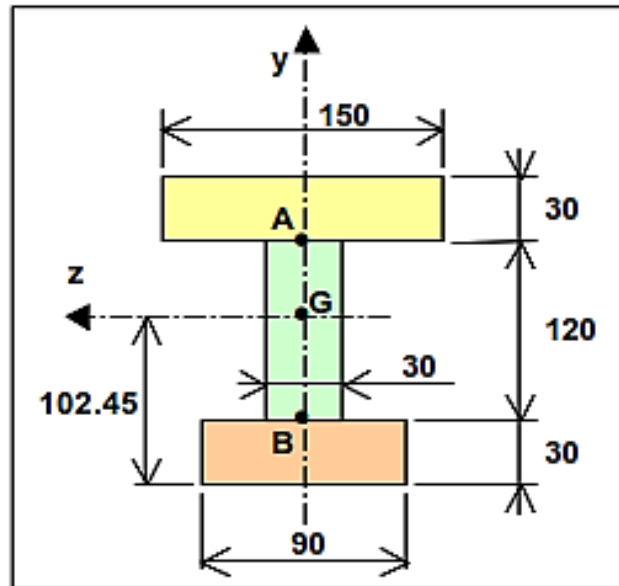
Elle est de **50** % plus grande que la contrainte moyenne de cisaillement T/S définie dans le cas du cisaillement pur:

$$\tau_{max} = \frac{3 \cdot T}{2 \cdot S}$$

VII- Flexion Simple

Exemple de calcul:

Un profilé est réalisé à partir de trois plats rectangulaires d'épaisseur 30 mm, collés ensemble en A et B. Si l'effort tranchant est $T = 13.5 \text{ kN}$, déterminer les contraintes de cisaillement dans les joints collés. On donne $I_z = 43,7 \times 10^6 \text{ mm}^4$



VII- Flexion Simple

Corrigé:

- Contrainte en A

On a:

$$\tau_A = \frac{T \times Q_A}{I_z \times b_A}$$

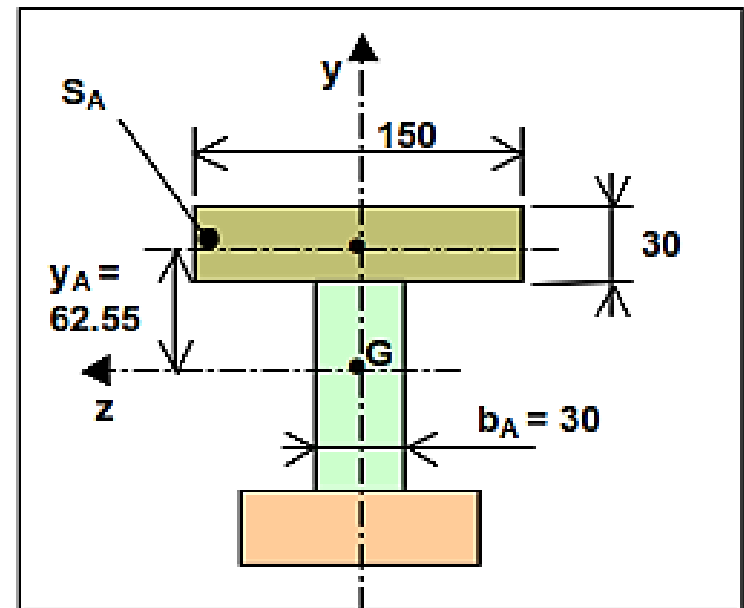
Avec:

$$Q_A = y_A \times S_A = 62,55 \times (150 \times 30) = 281,475 \text{ mm}^3$$

$$b_A = 30 \text{ mm}$$

A.N:

$$\tau_A \approx 2,9 \text{ Mpa}$$



VII- Flexion Simple

- Contrainte en B

On a:

$$\tau_B = \frac{T \times Q_B}{I_z \times b_B}$$

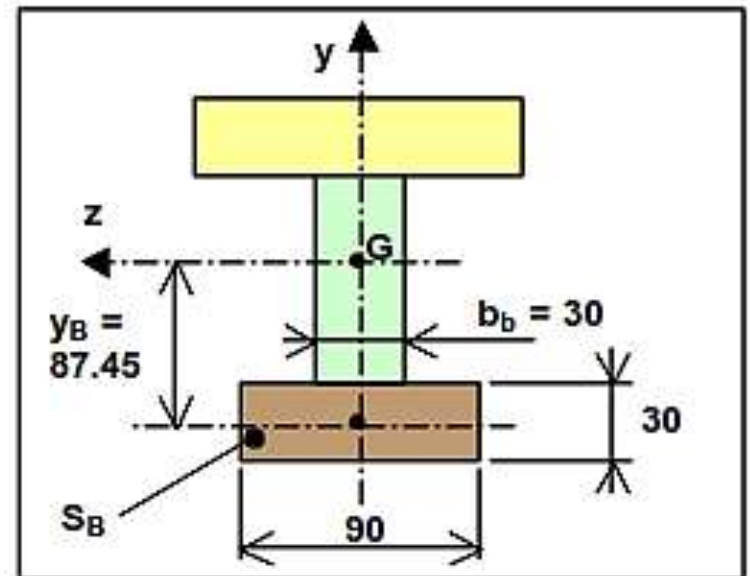
Avec:

$$Q_B = y_B \times S_B = 87,45 \times (90 \times 30) = 236115 \text{ mm}^3$$

$$b_B = 30 \text{ mm}$$

A.N:

$$\tau_B \approx 2,43 \text{ Mpa}$$



VII- Flexion Simple

c. Cas des poutres circulaires pleines:

Dans ce cas, la contrainte de cisaillement τ , à la distance y du plan neutre, est donnée par :

$$\tau = \frac{T \times Q}{I_z \times b}$$

Avec:

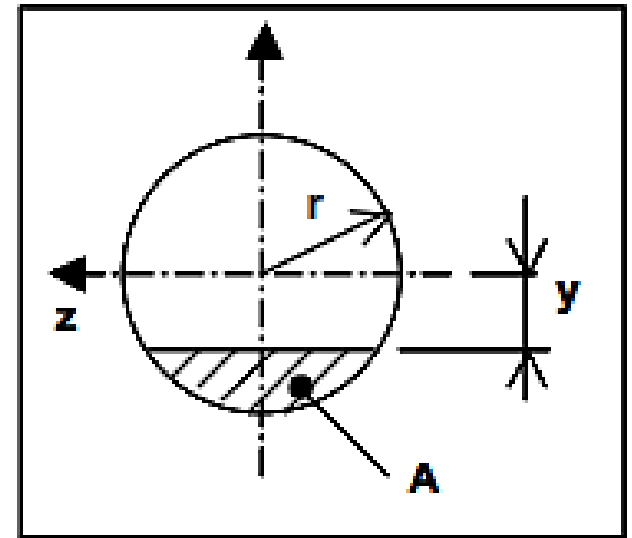
$$Q = \frac{2}{3} \times \sqrt[3]{(r^2 - y^2)}$$

⇒

$$\tau = \frac{4 T}{3 \pi r^2} \times \sqrt{(r^2 - y^2)}$$

et:

$$\tau_{max} = \frac{4 \cdot T}{3 \cdot S}$$



VII- Flexion Simple

d. Cas des poutres circulaires creuses:

Dans ce cas, la contrainte de cisaillement τ , à la distance y du plan neutre, est donnée par :

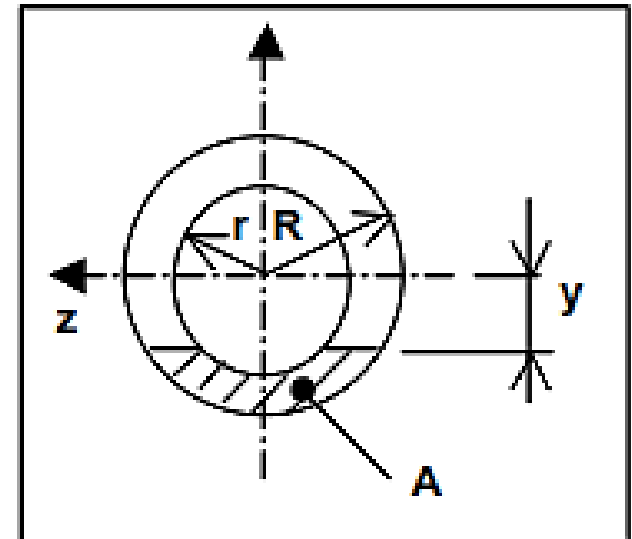
$$\tau = \frac{T \times Q}{I_z \times b}$$

Avec:

$$Q = \frac{2}{3} (r^3 - y^3)$$

⇒

$$\tau_{max} = \frac{4 \cdot T}{3 \cdot S} \left(\frac{R^2 + Rr + r^2}{R^2 + r^2} \right)$$



VII- Flexion Simple

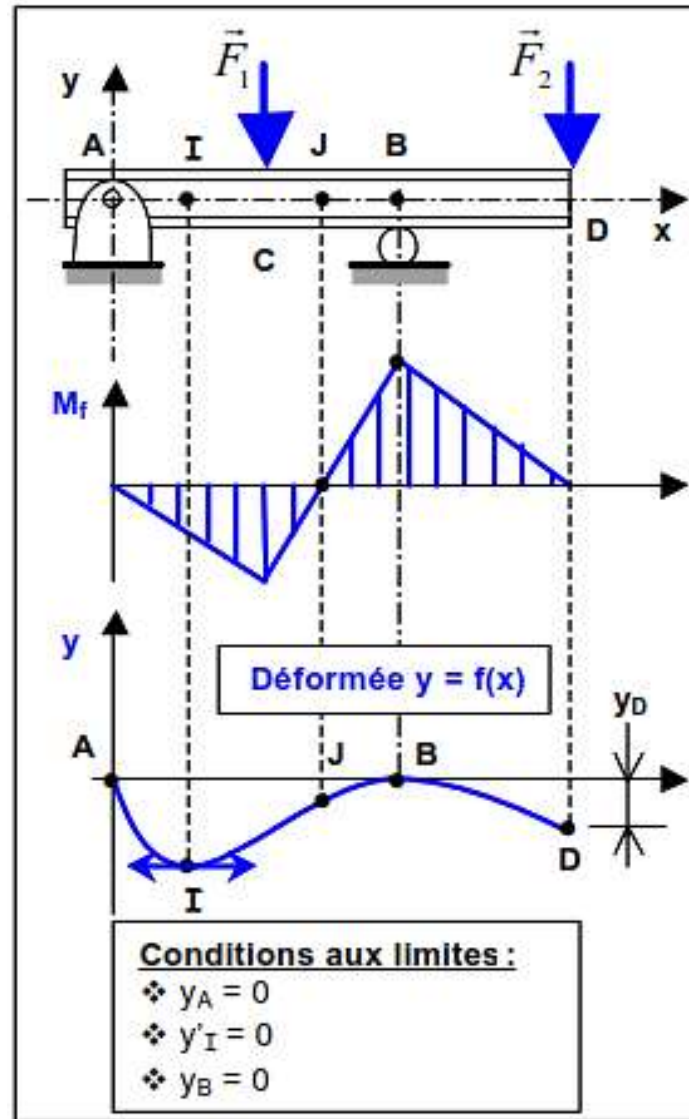
7. Déformations en flexion:

Dans ce qui précède, on s'est intéressé au poutres fléchies et à leur dimensionnement d'un point de vue de résistance sous charge. Nous allons voir à présent l'aspect déformation. En particulier, la détermination de la flèche maximale (et de sa valeur admissible) est l'un des éléments fondamentaux de la conception des poutres.

7.1 Notion de déformée

Pour la poutre ci-dessous, la ligne moyenne **AICJBD** a pour direction l'axe des **x** avant déformation et la courbe **$y = f(x)$** après déformation. Cette courbe est appelée déformée. **$y = f(x)$** est l'équation mathématique de la déformée dans le système d'axes **(x, y)** .

VII- Flexion Simple



VII- Flexion Simple

- **Conditions aux limites :**

Les conditions: $y_A = 0$; $y_B = 0$; $y'_I = 0$ appelées **conditions aux limites**, sont des éléments connus de la déformée. Ces éléments sont imposés par les appuis **A** et **B** ou par la forme de la déformée.

- **Flèches:**

la déformée présente des valeurs maximales en **I** (entre **A** et **B**) et à l'extrémité **D**. Pour ces points particuliers, la déformation est souvent appelée **flèche** (**f**):

$$f_I = y_I \text{ et } f_D = y_D$$

VII- Flexion Simple

7.2 Méthode par intégration

a. Principe

Connaissant l'équation des moments fléchissant M_f en fonction de x (position le long de la poutre), la pente y' et la déformée y sont obtenues par intégrations successives à partir de :

$$y'' = -\frac{M_f}{E I_z}$$


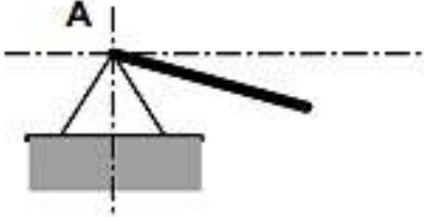
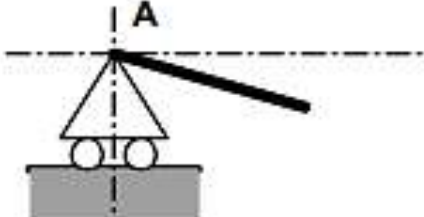
Avec:

- M_f : Moment fléchissant à la position x (en $N.mm$)
- E : Module d'élasticité longitudinale (en Mpa)
- y'' : Dérivée seconde de la déformée y
- I_z : Le moment quadratique de la section droite (S) par rapport à l'axe (z) (en mm^4)

VII- Flexion Simple

Remarque :

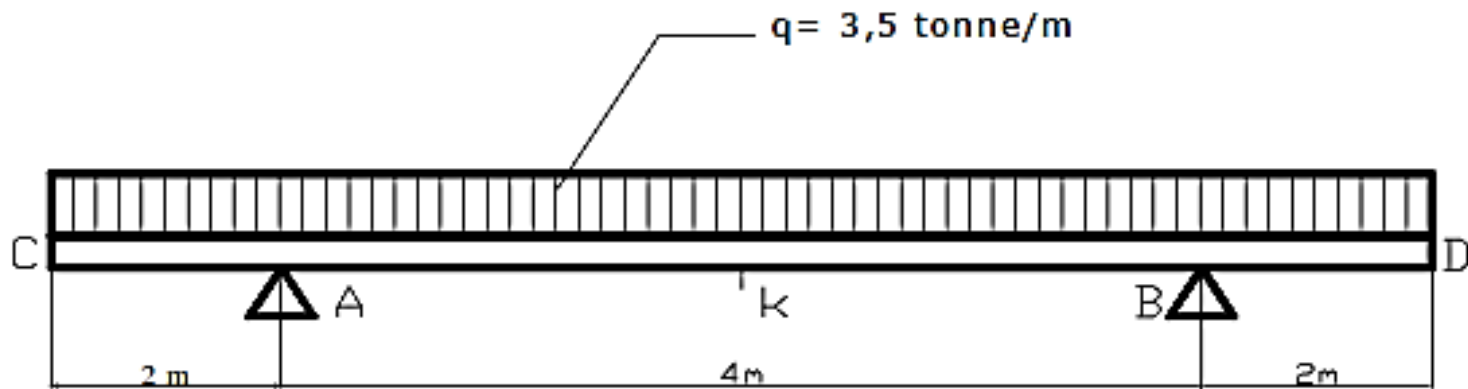
Les constantes d'intégration successives sont calculées à partir des conditions aux limites imposées par la position et la nature des appuis, ou encore par la forme générale de la déformée.

CONDITIONS AUX LIMITES Usuels		
ENCASTREMENT	ARTICULATION	APPUI SIMPLE
		
<ul style="list-style-type: none"> ❖ $y'_A = 0$ ❖ $y_A = 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ $y_A = 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ $y_A = 0$

TRAVAUX DIRIGÉS

EXERCICE N°3:

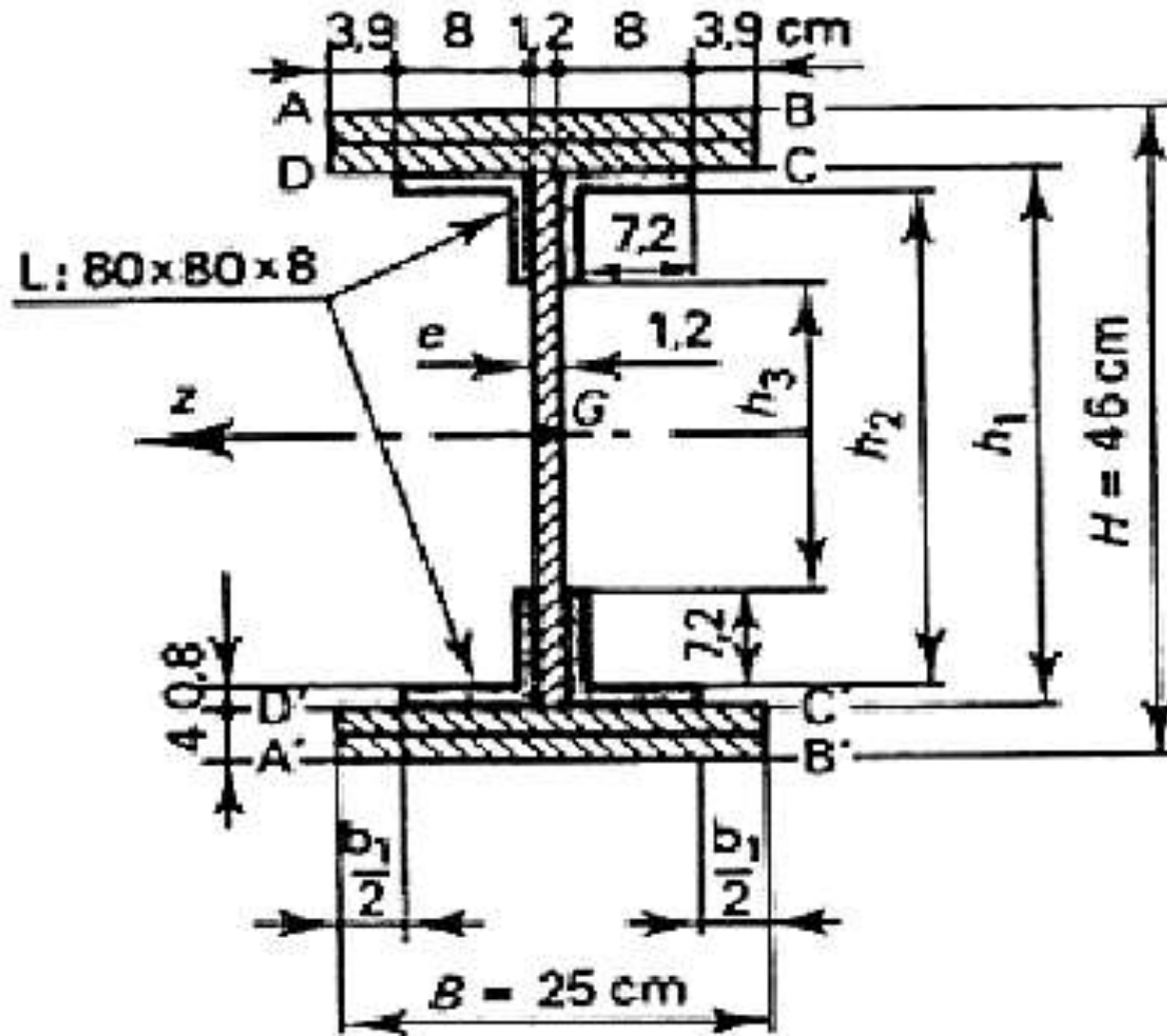
Soit une poutre droite à section constante sur deux appuis AB, supportant une charge uniformément répartie (q) sur AB et les deux porte-à-faux symétriques AC et BD.



Déterminer :

1. Les réactions d'appuis R_A et R_B /1pt
2. Déterminer l'expression littérale de l'effort tranchant et tracer le diagramme. /4pts
3. Déterminer l'expression littérale de moment de flexion $M_{f(x)}$ et tracer le diagramme. /4pts
4. La section de la poutre ayant la forme en I (constituée suivant le croquis ci-dessous),
Calculer le moment quadratique par rapport à l'axe Gz , G centre de gravité de la section. /5pts

TRAVAUX DIRIGÉS



TRAVAUX DIRIGÉS

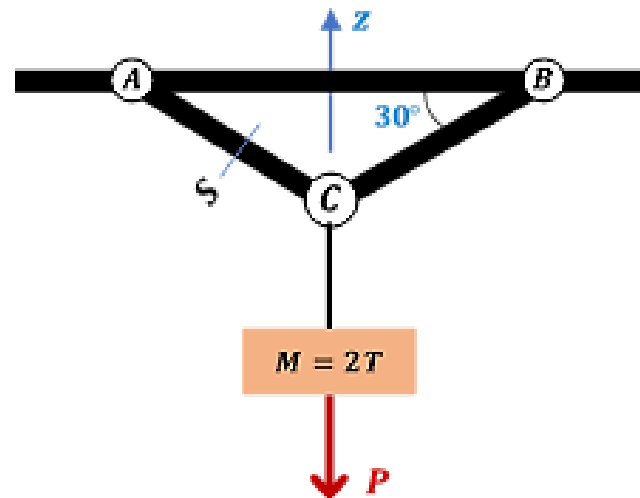
Exercice N°4 (Examen 2012) :

Une masse **M** est suspendue au point **C**, point d'articulation des deux barres **AC** et **BC** qui font chacune **30°** avec l'horizontal.

Les barres **AC** et **BC** sont d'égale longueur **L = 6 m**. Leurs poids est négligé.

1. Déterminer la section des deux barres si : $R_e = 400 \text{ N/mm}^2$ et le coefficient de sécurité $s = 4$
2. Calculer les allongements ΔL_{AC} et ΔL_{BC} si la section des barres $S = 200 \text{ mm}^2$
3. Déterminer le déplacement vertical δ du point **C**

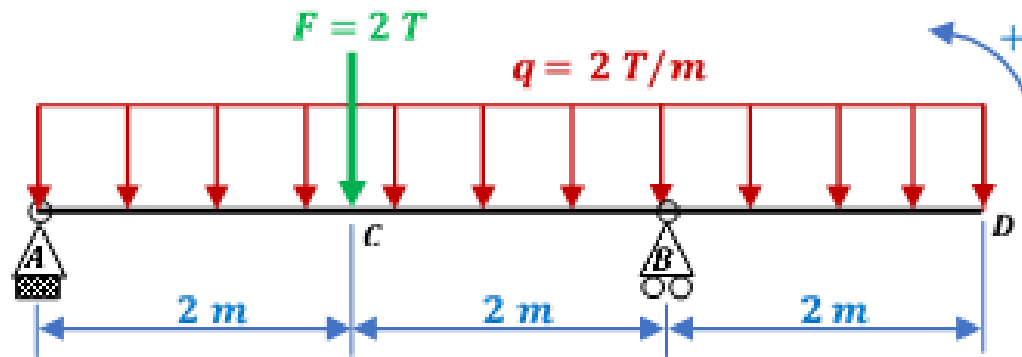
$$E = 210000 \text{ Mpa}$$



TRAVAUX DIRIGÉS

Exercice N°5 (Examen 2011) :

Soit la poutre suivante :

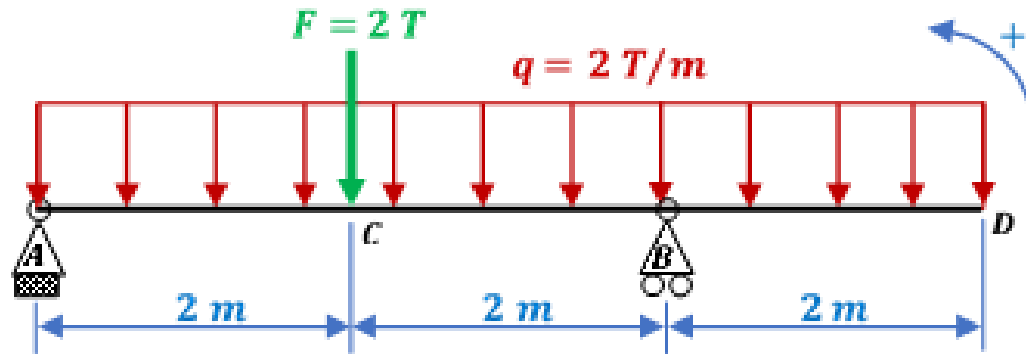


Acier E24 ($R_e = 24 \text{ daN/mm}^2$ $E = 21000 \text{ daN/mm}^2$)

1. Déterminer les réactions R_A et R_B
2. Tracer le diagramme de l'effort tranchant T
3. Tracer le diagramme du moment fléchissant M_f
4. Déterminer le moment fléchissant maximal M_f^{max}
5. Dimensionner la poutre en **IPE**
6. Vérifier la flèche : $f_{max} \leq L / 200$

CONTRÔLE CONTINU N°2

Soit la poutre suivante :



Acier E24 ($R_e = 24 \text{ daN/mm}^2$ $E = 21000 \text{ daN/mm}^2$)

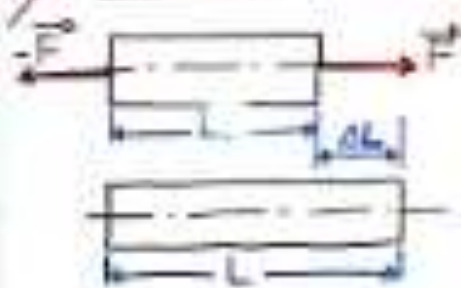
1. Déterminer les réactions R_A et R_B
2. Tracer le diagramme de l'effort tranchant T
3. Tracer le diagramme du moment fléchissant M_f
4. Déterminer le moment fléchissant maximal M_f^{max}
5. Dimensionner la poutre en **IPE**
6. Vérifier la flèche : $f_{max} \leq L / 200$

Résumé

Efforts intérieurs (Torseur de cohésion):

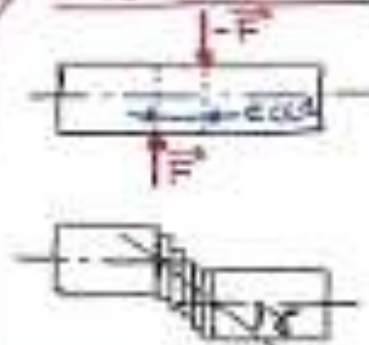
En RDM, les efforts (forces et moments) appliqués sur une poutre (un solide dont la longueur est prépondérante)

I/ Traction:



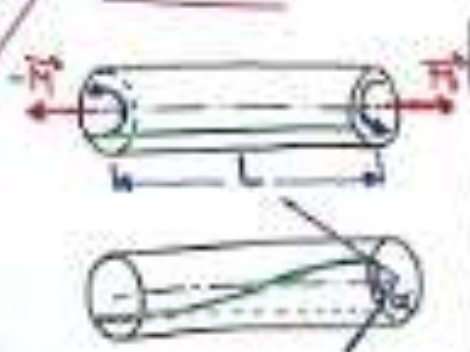
- Effort Normal: $N = F$
- Allongement: $\Delta L = L - L_0$
- Déformation: $\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$
- Contrainte Normale: $\sigma = \frac{N}{S}$
- Loi de Hooke: $\sigma = E \cdot \epsilon$
- Condition de Résistance:
 $\sigma = \frac{N}{S} \leq R_{ps} = \frac{R_{ps}}{\lambda}$

II/ Cisaillement:



- Effort tranchant: $T = F$
- Glissement: $\tan \gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- Contrainte tangentielle: $\tau = \frac{T}{S}$
- Loi de Hooke: $\tau = G \cdot \gamma$
- Condition de Résistance:
 $\tau = \frac{T}{S} \leq R_{ps} = \frac{R_{ps}}{\lambda}$

III/ Torsion:

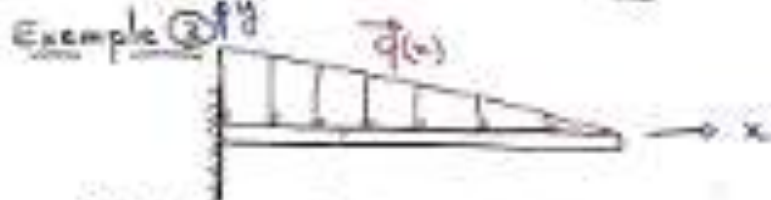
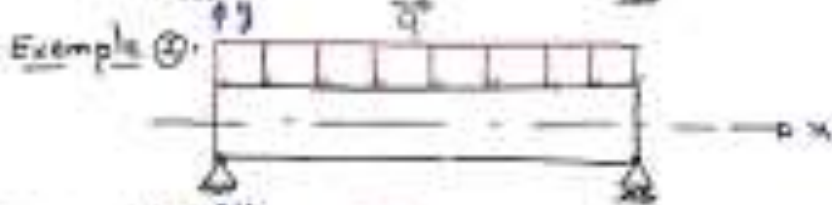
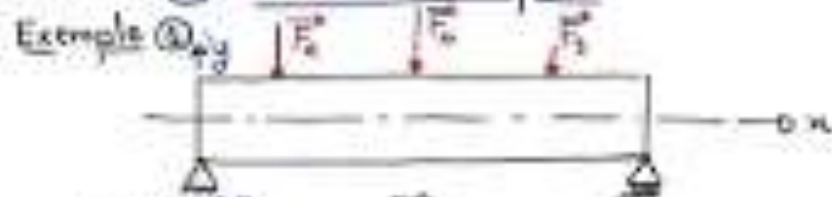


- Moment de torsion: $M_T = M$
- Angle de torsion: α
- Angle unitaire de torsion: $\theta = \frac{\alpha}{L}$
- Contrainte tangentielle: $\tau = G \cdot \theta \cdot \rho$
- Moment de torsion et I_0 : $M_T = G \cdot \theta \cdot I_0$
- Contrainte tangentielle et M_T : $\tau = \frac{M_T}{I_0} \cdot \rho$
- Condition de Résistance:
 $\tau = \frac{M_T}{I_0} \cdot \rho \leq R_{ps} = \frac{R_{ps}}{\lambda}$

Flexion:

- Module de Young: E
- Module de Coulomb: $G = 0,4 E$

① Flexion Simple:



- Effort tranchant: $T = \sum \text{forces à gauche} = T(x)$
- Moment fléchissant: $M_f = \sum \text{Moments à gauche} = M_f(x)$
- Contrainte Normale: $\sigma = \frac{M_f \cdot y}{I_z} = f(x,y)$
- Contrainte tangentielle: $\tau = \frac{T \cdot \varphi}{b \cdot I_z}$
- Relation T et M_f : $T = -\frac{dM_f}{dx}$
- Calcul de la flèche: $y''(x) = -\frac{M_f(x)}{E \cdot I_z}$

② Flexion Pure:



- Fibres comprimées
- - - Fibres tendues

- Moment fléchissant: $M_f = M$
- Contrainte Normale: $\sigma = \frac{M_f \cdot y}{I_z}$

- Limite d'élasticité: R_e
- Limite d'élasticité en Cisaillement: $R_{eg} = R_{ey} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$
- Résistance prat. par traction: $\frac{R_e}{\gamma}$
- Résistance prat. en cisaillement: $\frac{R_{eg}}{\gamma}$
- Coefficient de Sécurité: $R_{ps} = \frac{R_{eg}}{\gamma}$