

## Sommaire

<b>Chapitre 01 :</b>	<b>RAPPEL</b> .....	<b>5</b>
<i>I</i>	<i>Rappel de mathématiques</i> .....	<b>5</b>
	I-1 Equation du 1 <sup>ier</sup> degré à deux inconnues.....	5
	I-2 Equation du Second degré à deux inconnues.....	5
	I-3 Calcul d'intégrale .....	6
	I-4 Equation différentielle .....	6
	I-5 trigonométrie .....	<b>7</b>
<i>II-</i>	<i>Rappel de statique</i> .....	<b>8</b>
	II-1 notions de vecteur.....	8
	II-2 éléments de réduction.....	8
	II-3 Principe fondamental de la statique(P.F.S) .....	10
	III-4 Les appuis : .....	10
	III-5 Applications .....	12
	III-6 EXERCICES.....	19
<b>Chapitre 02</b>	<b>Théories élémentaires de la RDM</b> .....	<b>21</b>
	<b>_Contraintes-sollicitation</b> .....	
<b>1) Définitions:</b>	.....	<b>21</b>
<b>2) Hypothèses et principes de base de la RDM :</b>	.....	<b>21</b>
<b>3) Etude de la notion de contraintes:</b>	.....	<b>22</b>
	3-1) Mise en place du vecteur-contrainte :.....	22
	3-2) Expression du vecteur-contrainte : .....	23
<b>4 ) Sollicitation dans une section (efforts internes ):</b>	.....	<b>24</b>
	4-1) Notion de coupure : .....	24
	4-2) Définition des sollicitations :.....	25
	4-3) Equations d'équilibre-tracé des diagrammes:.....	26
	4-4) Exemple : sollicitation d'une poutre.....	27
	4-4) Relation entre effort tranchant et moment fléchissant :.....	30
	4-5) Applications :.....	31
	4-6 EXERCICES.....	37
<b>Chapitre 3</b>	<b>Caractéristiques géométriques</b> .....	<b>39</b>
	<b>des sections planes</b> .....	<b>39</b>
<i>I-</i>	<i>Moment statique d'une aire plane</i> : .....	<b>39</b>
<i>II-</i>	<i>Centre de gravité d'une aire plane</i> :.....	<b>39</b>



III-	<i>moment d'inertie d'une aire plane</i>	40
IV-	<i>Principe des axes parallèles : (théorème de Hyghènes)</i>	40
V-	<i>Relation entre les moments d'inertie et le produit d'inertie</i>	41
VI-	<i>Axes principaux</i>	42
VI-1	<i>Moment quadratiques maximum et minimum</i>	42
VI-2	<i>cerce de Mohr d'inertie</i>	43
VII-	<i>Rayon de giration</i>	44
VIII-	<i>Moment d'inertie polaire</i>	45
IX-	<i>Exercice d'applications</i>	45
IX-1	<i>cas d'un rectangle</i>	45
IX-2	<i>cas d'un triangle</i>	46
IX-3	<i>cas d'un cercle : (coordonnées polaires)</i>	48
IX-4	<i>Section en L</i>	49
Chapitre 4 :	<b>TRACTION SIMPLE</b>	53
	<b>COMPRESSION SIMPLE</b>	53
I)-	<i>Définition</i>	53
II)-	<i>Aspect expérimental</i>	53
III)	<i>Etat de Contrainte</i>	55
III.1)	<i>Expression de la contrainte</i>	55
III.2)	<i>Diagramme de la contrainte</i>	56
IV)	<i>Etat de déformations</i>	56
V)	<i>condition de résistance</i>	57
VI)	<i>Applications</i>	57
Chapitre 5 :	<b>Cisaillement Simple</b>	59
I-	<i>Définitions</i>	59
II-	<i>Contrainte tangentielle de cisaillement</i>	59
a)	<i>Essai de cisaillement</i>	59
b)	<i>Contrainte tangentielle</i>	60
III –	<i>Etat de déformations</i>	61
IV-	<i>Condition de résistance</i>	62
V-	<i>Applications</i>	62
V-1)	<i>Assemblage par rivet</i>	62
V-2)	<i>Cisaille à main</i>	63
Chapitre 6 :	<b>Torsion des poutres Circulaires</b>	65
I-	<i>Définition de la torsion</i>	65
II-	<i>Effort extérieurs définissant un état de torsion</i>	65

<i>III-Aspect expérimental</i> : .....	66
<i>IV -Calcul des contraintes de torsion</i> : .....	66
<i>V)- Déformation angulaire unitaire</i> : .....	68
<i>VI-Deuxième expression de la contrainte tangentielle <math>\tau</math></i> : .....	68
<i>VII-Expression du module de torsion d'un tube</i> : .....	69
<i>VIII-Applications</i> : .....	71
<b>Chapitre 7 :</b> <b>FLEXION SIMPLE</b> .....	<b>73</b>
<i>I-Introduction expérimentale</i> : .....	73
<i>II- Etude de la flexion simple</i> : .....	75
II-1 contrainte normale due au moment fléchissant : .....	75
<i>III- Déformations</i> : .....	78
<i>IV-Cisaillement dans les poutres fléchies</i> : .....	83
IV-1 Cisaillement transversal : .....	83
IV-2 Cisaillement longitudinal : .....	83
IV-3 Théorème de réciprocité de CAUCHY : .....	84
IV-4 Expression de la contrainte tangentielle : .....	85
IV-5 Applications à la section rectangulaire d'une poutre fléchie : .....	86
<i>V-Applications</i> : .....	88
<b>Chapitre 8 :</b> <b>FLEXION COMPOSEE</b> .....	<b>91</b>
<i>I) définition</i> : .....	91
<i>II)Etat de contrainte</i> : .....	91
<i>III) Noyau central</i> : .....	93
<i>IV)-Application</i> : .....	96
<b>Chapitre 9 :</b> <b>LE FLAMBEMENT</b> .....	<b>98</b>
<i>I)-Description du phénomène</i> : .....	98
<i>II)- Effort critique de flambement</i> : .....	98
II-1)Contrainte critique d'Euler : .....	100
II-2)Poutres autres que bi-articulée : .....	101
III-3) Sécurité vis à vis du flambement : .....	102
<i>IV)Théorie de Rankine</i> : .....	102
<i>V)Méthode de Dutheil</i> : .....	103
<i>VI APPLICATIONS</i> : .....	103

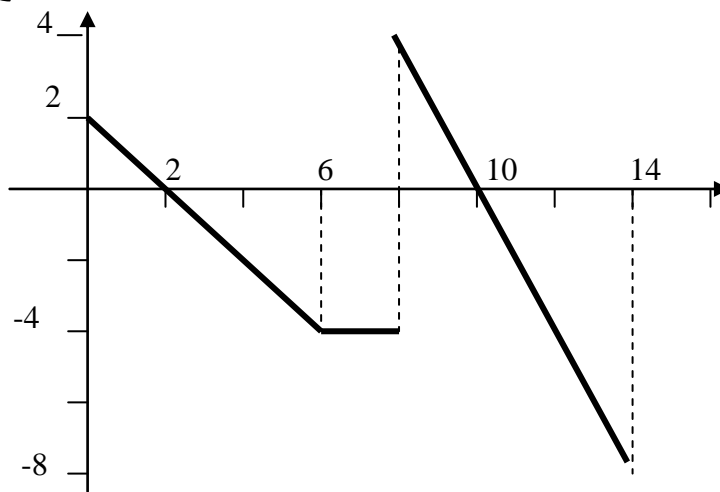


# Chapitre 01 : RAPPEL

## I Rappel de mathématiques

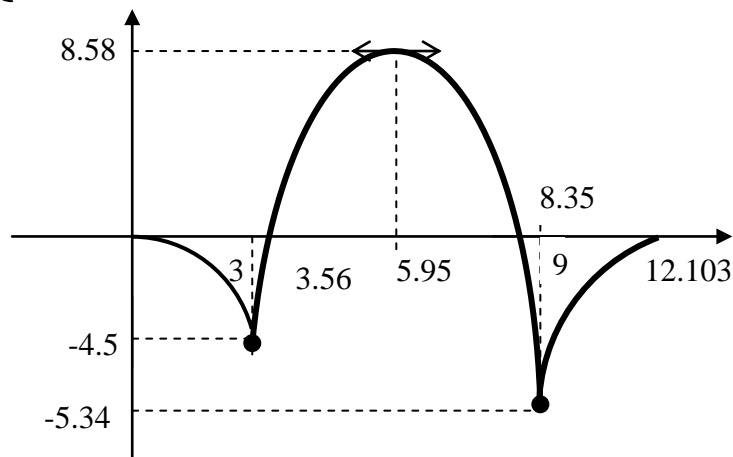
### I-1 Equation du 1<sup>er</sup> degré à deux inconnues

$$\left\{ \begin{array}{ll} y = -x + 2 & \text{pour } 0 \leq x \leq 6 \\ y = -4 & \text{pour } 6 \leq x \leq 8 \\ y = -2x + 20 & \text{pour } 8 \leq x \leq 14 \end{array} \right.$$



### I-2 Equation du Second degré à deux inconnues

$$\left\{ \begin{array}{ll} y = \frac{-x^2}{2} & \text{pour } 0 \leq x \leq 3 \\ y = -\frac{3}{2}x^2 + 17.86x - 44.58 & \text{pour } 3 \leq x \leq 9 \\ y = 0.2x^2 - 2.5x + 0.96 & \text{pour } 9 \leq x \leq 12 \end{array} \right.$$



- Recherche des points où la fonction  $y=f(x)=0$

$$-1.5x^2 + 17.86x - 44.58 = 0$$

$$\Delta = (17.86)^2 - 4(-1.5)(-44.58) = 51.5$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{51.5} = 7.18$$

$$x_1 = \frac{-17.86 - 7.18}{2(-1.5)} = 8.35$$

$$x_2 = \frac{-17.86 + 7.18}{2(-1.5)} = 3.56$$

- Recherche du point où la fonction  $y=f(x)$  est maxi

$y=f(x)$  est maxi pour un point d'abscisse  $x$  telle que la dérivée de  $y=f(x)$  en ce point est nulle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = -1.5 \times 2x + 17.86 = -3x + 17.86$$

$$-3x + 17.86 = 0 \Rightarrow x = \frac{-17.86}{-3} = 5.95$$

Pour  $x=5.95$

$$y_{\max} = f(5.95) = -1.5(5.95)^2 + 17.86(5.95) - 44.58 = 8.58$$

### I-3 Calcul d'intégrale

$$\int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy = \left[ \frac{b}{3} y^3 \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{b}{3} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^3 - \left( -\frac{h}{2} \right)^3 \right] = \frac{b}{3} \left( \frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = \frac{bh^3}{12}$$

### I-4 Equation différentielle

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = -2x^2 + 8x - 5$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \int (-2x^2 + 8x - 5) dx = \frac{-2x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 5x + C_1$$

$$y = \int \frac{dy}{dx} = \int \left( \frac{-2x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 5x + C_1 \right) dx = \frac{-2x^4}{12} + \frac{8x^3}{6} - \frac{5x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont déterminés à partir des conditions aux limites :

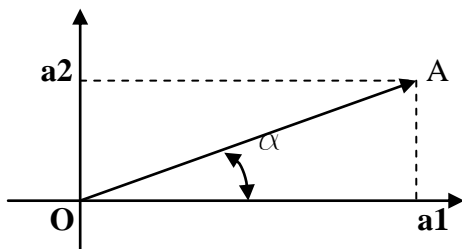
Par exemple : - pour  $x=0$  on a  $y=0$  (1)

- pour  $x=1$   $y$  est **maximum** donc  $y'=0$  (2)

- **Condition (1)**  $C_2 = 0$
- **Condition (2)**  $-\frac{2}{3} + \frac{8}{2} - 5 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{5}{3}$

$$y = \frac{-x^4}{6} + \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + \frac{5}{3}$$

### I-5 trigonométrie



$$\cos \alpha = \frac{Oa_1}{OA}$$

$$\sin \alpha = \frac{Oa_2}{OA}$$

$$\cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cdot \cos \theta - \sin \alpha \cdot \sin \theta$$

$$\sin(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cdot \sin \theta + \sin \alpha \cdot \cos \theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \cdot \sin \theta$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

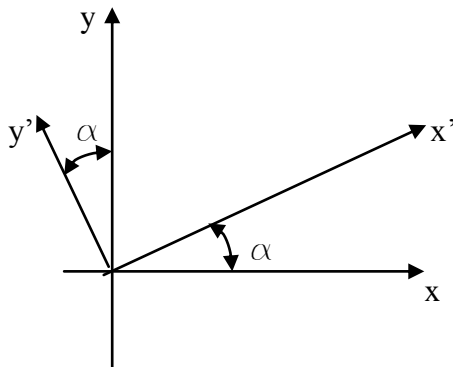
$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\theta))$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\theta))$$

- **Changement de repère**

R1(o,x,y)

R2(o,x',y')



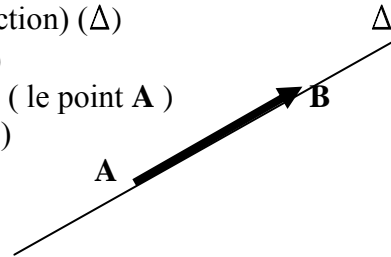
$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha \\ y = x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

$$y = x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha$$

## II- Rappel de statique

### II-1 notions de vecteur

- Le vecteur est caractérisé par :
  - la direction (ligne d'action) ( $\Delta$ )
  - le sens ( de **A** vers **B** )
  - le point d'application ( le point **A** )
  - l'intensité (ou module)



$$\|AB\| = \sqrt{((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2)}$$

- Deux vecteurs sont dits **coplanaires** s'ils agissent dans le **même plan**. De plus si leurs lignes d'action **passent** par le **même point** on dit qu'ils sont **concourants**
- On peut remplacer les vecteurs **concourants** par un seul **vecteur résultant**
- Expression du produit vectoriel

$$\vec{V}_1(x_1, y_1, z_1) \quad \vec{V}_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{Bmatrix} y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2 \\ z_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot z_2 \\ x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2 \end{Bmatrix}$$

### II-2 éléments de réduction

L'ensemble des forces auxquelles est soumise un solide peut être remplacé par le torseur  $\mathcal{T}(\mathcal{R}; \mathcal{M})$  défini comme suit :

- $\mathcal{R}$  est la somme géométrique des forces **Fi** (résultante)

- $\vec{M}$  est le moment résultant de toutes les forces  $\vec{F}_i$  de point d'application  $A_i$  par rapport au point  $O$  du solide

- **Calcul du moment**

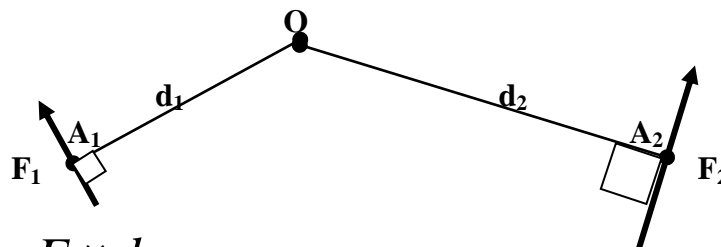
Soit  $\vec{F}$  une force appliquée en  $A$ . Le **moment** de  $F$  par rapport à  $O$  noté  $M_{F/O}$  est le **produit vecteur** de la force  $F$  et du

Vecteur  $\vec{OA}$   $\vec{M}_{F/O} = \vec{OA} \wedge \vec{F}$

➤ Dans l'espace  $\vec{OA} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \vec{F} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$

$\vec{M}_{F/O} \begin{pmatrix} M_x = y_A \cdot F_z - z_A \cdot F_y \\ M_y = z_A \cdot F_x - x_A \cdot F_z \\ M_z = x_A \cdot F_y - y_A \cdot F_x \end{pmatrix}$	<b><math>M_x</math> : / à l'axe <math>OX</math></b>
	dans le plan ( $OY ; OZ$ )
	<b><math>M_y</math> : / à l'axe <math>OY</math></b>
	dans le plan ( $OX ; OZ$ )
	<b><math>M_z</math> : / à l'axe <math>OZ</math></b>
	dans le plan ( $OX ; OY$ )

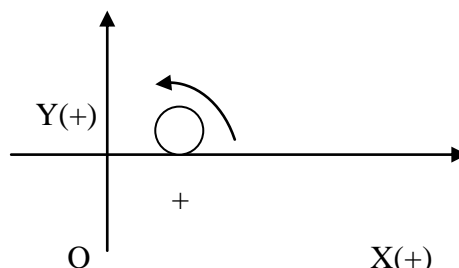
➤ Cas particulier : dans le plan



$$M_{F1/O} = \|F_1\| \times \|OA_1\| = F_1 \times d_1$$

$$M_{F2/O} = \|F_2\| \times \|OA_2\| = F_2 \times d_2$$

Le **sens de rotation** des deux forces par rapport au **point O** est **opposé** Avec le sens conventionnel choisi



On peut écrire

$$M_{F1/O} = - F_1 \times d_1$$

$$M_{F2/O} = + F_2 \times d_2$$

**Remarque :**

La distance **di** étant la distance **perpendiculaire** à la droite d'action de la force **Fi** séparant celle-ci et le **point O** où on veut déterminer le moment

**II-3 Principe fondamental de la statique(P.F.S)**

Pour qu'un solide soit en équilibre, il faut et il suffit que ses éléments de réduction forme un torseur nul

$$\mathcal{T}(\mathcal{R}; \mathcal{M}) = \mathcal{T}(\mathbf{0}; \mathbf{0})$$

$$\rightarrow \mathcal{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \text{équilibre de translation}$$

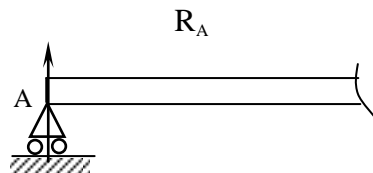
$$\rightarrow \mathcal{M} = \sum_{i=1}^n (OA)_i \wedge \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \text{équilibre de rotation}$$

**III-4 Les appuis :** Les types de liaisons usuelles en Génie Civil :

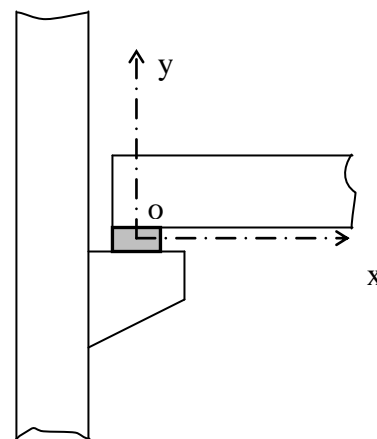
**4-1. L'appui simple :**

L'appui simple est une liaison qui supprime le déplacement relatif suivant une direction entre les solides en contact.

**a\_Symbole :**



**b\_Exemple :** Poutre reposant sur un corbeau solidaire d'un poteau par l'intermédiaire d'un appui néoprène ( le néoprène assurant la possibilité de déplacement horizontal et de rotation autour du centre O de la liaison ).



Le seul effort transmissible dans cette liaison est une force portée par y. Donc, lorsqu'on isolera la poutre par exemple, afin d'étudier son équilibre, il faudra remplacer cette liaison par une « réaction de liaison » inconnue qui sera une force R appliquée en O et dont la direction sera celle de l'axe Oy (perpendiculaire à la direction suivant laquelle l'appui peut se déplacer) Dans le cas de l'exemple précédent, le torseur des efforts transmissibles dans la liaison s'écrit :

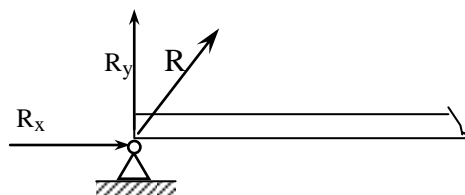
$$\{ \zeta_{\text{ext}} \}_O = \left\{ R \begin{matrix} 0 \\ R_y \\ 0 \end{matrix} \quad M \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

*Note : On supposera toujours que la liaison est « bilatérale », c'est-à-dire que le contact sera toujours maintenu, même en cas de soulèvement de la poutre.*

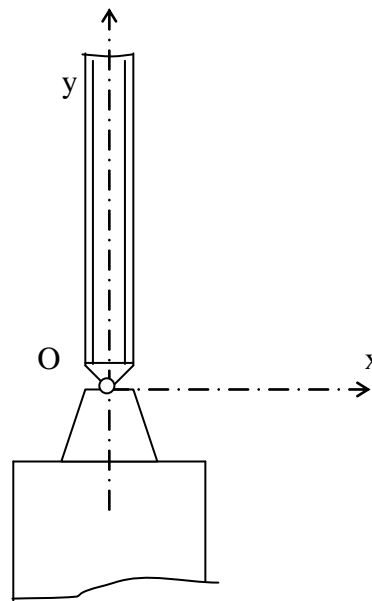
**4-2. L'articulation :**

L'articulation est une liaison qui supprime tout déplacement dans le plan du système. Par contre, elle autorise la rotation entre les deux solides en liaison.

**a\_Symbole :**



**b\_Exemple :** poteau métallique articulé en pied sur un massif en béton :



Les efforts transmissibles dans cette liaison sont des forces portée par x et y .

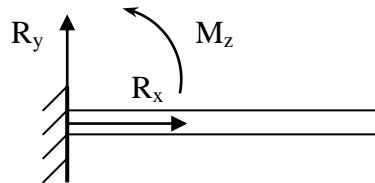
Par conséquent, le torseur des efforts transmissibles dans la liaison s'écrit :

$$\left\{ \zeta_{\text{ext}} \right\}_O = \left\{ R \begin{matrix} R_x \\ R_y \\ 0 \end{matrix} \quad M \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

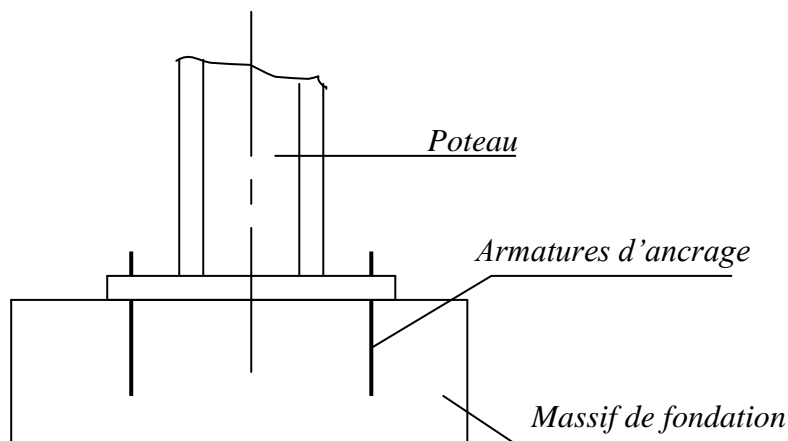
#### 4-4. L'encastrement :

L'encastrement est une liaison qui supprime tout déplacement entre les solides en liaison .

*a\_Symbole :*



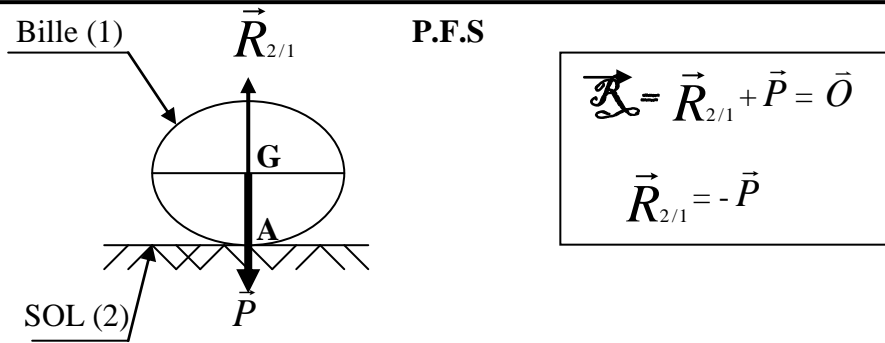
*b\_Exemple :*



### III-5 Applications

#### 5-1 Principe de l'action et réaction

Une bille est en équilibre sur le sol. Elle est soumise à son poids propre  $\vec{P}$  appliqué en G et la réaction du sol sur elle  $\vec{R}_{2/1}$  appliquée en A

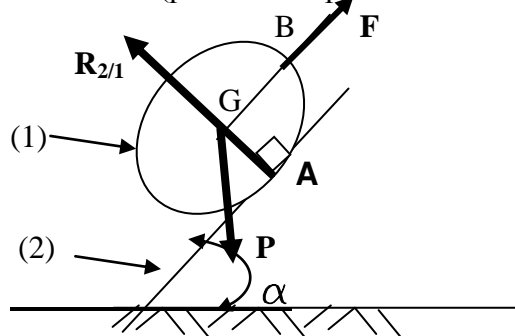


« Solide en équilibre sous l'action de deux forces. Ces dernières sont directement opposées : **même intensité - même direction et sens opposé** »

$$\vec{R}_{2/1} = -\vec{R}_{1/2}$$

### 5-2 Solide soumis à l'action de trois forces

La bille (1) est maintenue en équilibre sur le plan incliné (2) par une force de contact  $\vec{F}$  (parallèle au plan incliné d'un angle  $\alpha$ )



La bille est soumise à trois forces:

- Une force à distance ; son poids propre  $\vec{P}$  appliqué en G
- Une force de contact  $\vec{F}$  appliquée en B
- La réaction  $\vec{R}_{2/1}$  appliquée en A

La bille est en équilibre

$$\text{P.F.S} \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{R}_{2/1} = \vec{0} \quad (1) \\ \vec{M}_{/A} = \vec{AG} \wedge \vec{P} + \vec{AB} \wedge \vec{F} + \vec{AA} \wedge \vec{R}_{2/1} = \vec{0} \quad (2) \end{array} \right.$$

#### 1. Condition (1)

projetons l'équation sur les axes

- sur l'axe ox :  $-R \cdot \sin \alpha + F \cdot \cos \alpha = 0 \quad (1')$

- sur l'axe oy :  $-P + R \cdot \cos\alpha + F \cdot \sin\alpha = 0$  (2')

$$\vec{P} \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} \quad \vec{F} \begin{pmatrix} F \cos\alpha \\ F \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \vec{R}_{2/1} \begin{pmatrix} -R \sin\alpha \\ R \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(1')  $F = R \cdot \operatorname{tg} \alpha$

(2')  $-P + R \cdot \cos\alpha + R \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin\alpha = 0$

$$-P + R \cdot \frac{(\cos\alpha)^2}{\cos\alpha} + R \cdot \frac{(\sin\alpha)^2}{\cos\alpha} = 0$$

$$-P + R \cdot \left( \frac{(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2}{\cos\alpha} \right) = 0$$

(1')

$$\Rightarrow -P + R \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = 0 \Rightarrow R = P \cos\alpha \Rightarrow F = P \sin\alpha$$

### 1. condition (2)

$$\rightarrow AG \wedge \vec{P} = M_{P/A} = P \cdot r \cdot \sin\alpha$$

$$\rightarrow AB \wedge \vec{F} = M_{F/A} = -F \cdot r$$

or  $F = P \cdot \sin\alpha$  donc l'équation (2) est vérifiée

«

Les trois forces auxquelles est soumise un solide en équilibre sont :

- coplanaires
- concourantes ou parallèles dans ce plan

»

**5-3** Calculer les réactions d'appui de la poutre montée ci-après :

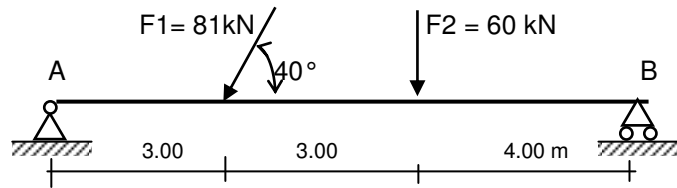


Fig.1

Solution :

On montre sur la figure suivante les composantes suivant x et y des réactions d'appui en A et B, les intensités de la force  $F_2$  et les composantes de la force  $F_1$ .

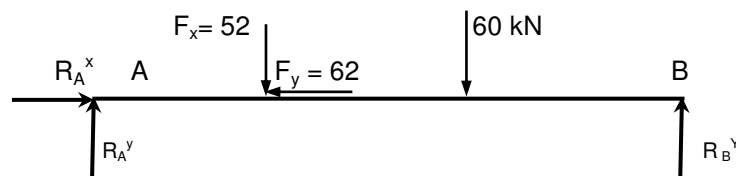


Fig.1a

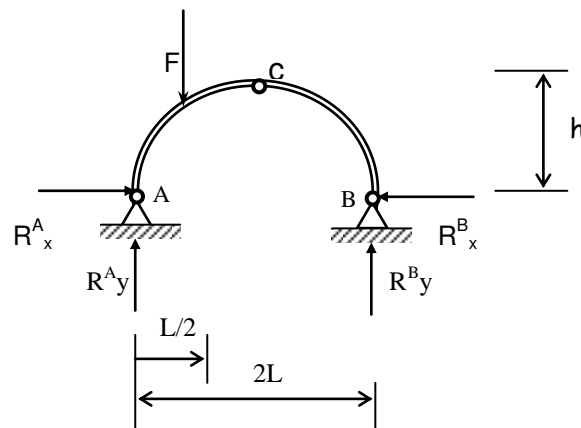
$$\text{On a : } \begin{cases} \Sigma F_x = R_A^x - F_1 \cdot \cos \alpha = 0 & (1) \\ \Sigma F_y = R_A^y + R_B^y - F_1 \cdot \sin \alpha - F_2 = 0 & (2) \\ \Sigma M_A = -10 \cdot R_B^y + 3 \cdot F_1 \cdot \sin \alpha + 6 \cdot F_2 = 0 & (3) \end{cases}$$

de ces trois équations, on trouve que :

$$R_A^y = 60.4 \text{ kN} \quad R_B^y = 51.6 \text{ kN} \quad R_A^x = 62 \text{ kN}$$

Note : les résultats étant positifs, le sens choisi pour les réactions est bon .

**5-4** Calculer les réactions d'appui de l'arc à trois articulations monté ci-après :



Données :

$$F=80 \text{ kN}, L = 40\text{m}, h = 20\text{m}$$

Solution :

On considère les composantes horizontales et verticales  $R_x^A$ ,  $R_x^B$ ,  $R_y^A$  et  $R_y^B$  des réactions d'appui en A et en B. Comme on le constate, on a quatre inconnues et seulement trois équations d'équilibre statique. Cependant la géométrie de l'arc à trois articulations permet d'écrire une équation supplémentaire et ainsi de résoudre le problème. Donc, un arc à trois articulations est une structure isostatique.

A l'articulation C, en considérant l'équilibre du tronçon de gauche, on a :

$$\Sigma M_C = 20 R_y^A - 20 R_x^A - (80 \cdot 10) = 0$$

A l'articulation B, en considérant l'équilibre de la structure, on a :

$$\Sigma M_B = 40 R_y^A - (80 \cdot 30) = 0$$

de ces deux équations, on trouve que :

$$R_y^A = 2400/40 = 60 \text{ kN}$$

Et

$$R_x^A = 400/20 = 20 \text{ kN}$$

On a

$$\Sigma F_x = R_x^A - R_x^B = 0$$

d'où

$$R_x^B = R_x^A = 20 \text{ kN}$$

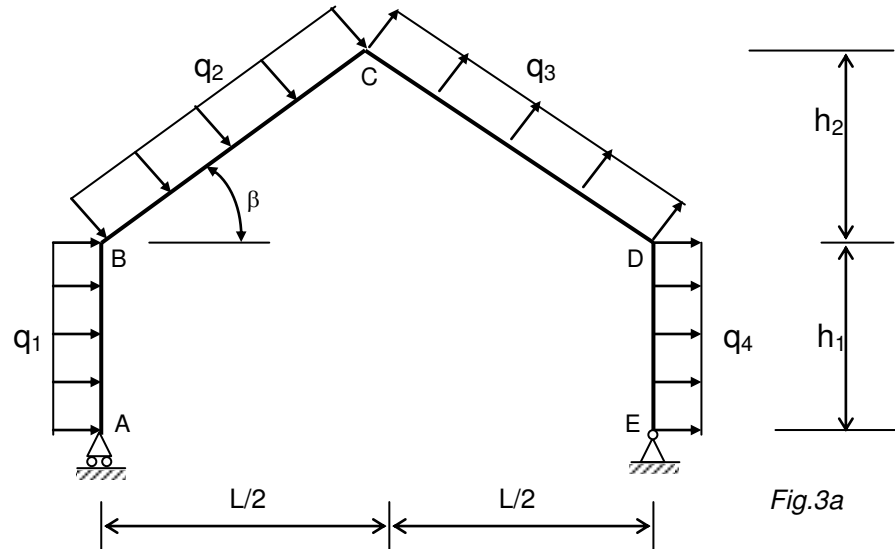
Et

$$\Sigma F_y = R_y^A + R_y^B - 80 = 0$$

d'où

$$R_y^B = 20 \text{ kN}$$

5-5 La structure à trois articulations, représentée ci-après, est soumise aux charges indiquées sur cette figure. Déterminer les réactions aux appuis A et E. Les charges montrées sur la figure sont des charges perpendiculaires aux tronçons ABC et CDE de la structure et elles sont uniformément réparties :



Données :  $L=20\text{m}$  ;  $h_1= h_2=6\text{m}$  ;  $q_1=10\text{ kN}$  ;  $q_2=12\text{ kN}$  ;  $q_3=15\text{ kN}$  ;  $q_4=15\text{ kN}$

*Solution :*

Pour faciliter les réactions le calcul des réactions aux appuis A et E, on peut remplacer les charges montrées sur la figure 3.a par leurs résultantes (voir figure 3.b)

La longueur du tronçon ABC est égal à :

$$BC = CD = \sqrt{8^2 + 10^2} = 12.8\text{ m}$$

Il fait avec l'horizontale un angle  $\beta$  donné par :

$$\text{tang } \beta = 8/10 = 0.8$$

$$\text{d'où } \beta = 38.66^\circ$$

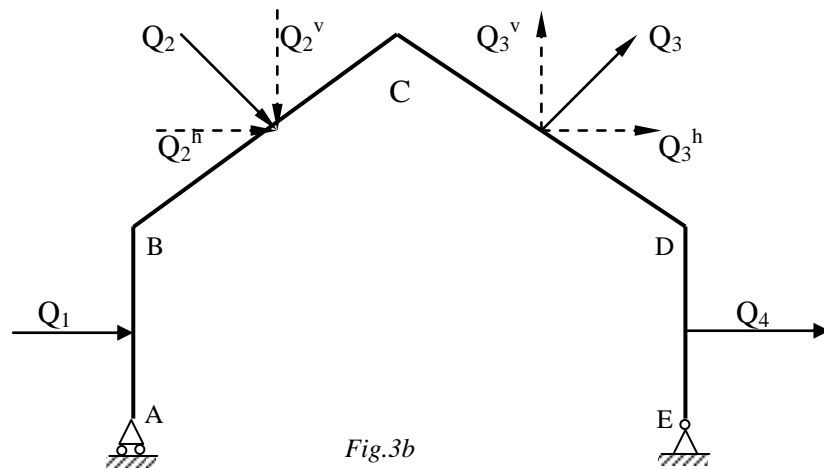


Fig.3b

Sur la partie AB du tronçon ABC, la résultante  $Q_1$  est égale à :

$$Q_1 = 6 \times 10 = 60 \text{ kN}$$

Sur la partie BC, la résultante  $Q_2$  est égale à :

$$Q_2 = 12,8 \times 12 = 153,6 \text{ kN}$$

Les composantes verticale et horizontale de  $Q_2$  sont égales à

$$Q_2^v = Q_2 \cdot \cos \beta = 153,6 \times 0,781 = 120 \text{ kN}$$

$$Q_2^h = Q_2 \cdot \sin \beta = 153,6 \times 0,625 = 96 \text{ kN}$$

Sur la partie CD du tronçon CDE, la résultante  $Q_3$  est égale à

$$Q_3 = 12,8 \times 15 = 192 \text{ kN}$$

Les composantes verticale et horizontale de  $Q_3$  sont égales à

$$Q_3^v = Q_3 \cos \beta = 192 \times 0,781 = 150 \text{ kN}$$

$$Q_3^h = Q_3 \sin \beta = 192 \times 0,625 = 120 \text{ kN}$$

Enfin, sur la partie DE, la résultante  $Q_4$  est égale à

$$Q_4 = 6 \times 15 = 90 \text{ kN}$$

- détermination des réactions aux appuis A et E :

on a

$$\sum M_C = 10 \cdot R_Y^A - 14 \cdot R_X^A + (60 \times 11) + (96 \times 4) + (120 \times 5) = 0$$

$$\sum M_E = 20 \cdot R_Y^A + (120 \times 15) - [(60 + 90) \times 3] - [(96 + 120) \times 10] - (150 \times 5) = 0$$

de cette dernière équation, on trouve que

$$R^A_y = 78 \text{ kN}$$

Et en remplaçant la valeur de  $R^A_y$  dans l'équation donnant  $\Sigma Mc$ , on trouve que

$$R^A_x = 731,1 \text{ kN}$$

De l'équation, on a

$$\Sigma F_x = -R^A_x - R^E_x + 60 + 96 + 120 + 90 = 0$$

d'où

$$R^E_x = 192,9 \text{ kN}$$

On a aussi

$$\Sigma F_y = R^A_y - R^E_y + 120 - 150 = 0$$

d'où

$$R^E_y = 48 \text{ kN}$$

Les résultats étant positives, les sens donnés aux composantes des réactions en A et en E sont exacts. On vérifie les résultats en prenant les moments à l'articulation C en commençant par l'appui E.

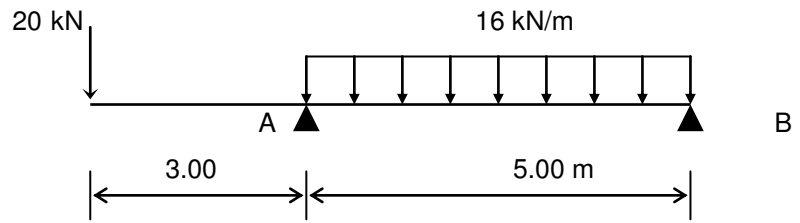
$$\begin{aligned} \Sigma Mc &= (192,9 \times 14) - (48 \times 10) - (90 \times 11) - (120 \times 4) - (150 \times 5) = 0 \\ &2700 - 480 - 990 - 480 - 750 = 0 \end{aligned}$$

*Commentaire* : le remplacement des charges uniformément réparties par leurs résultantes doit être considéré uniquement pour le calcul des réactions aux appuis. Pour le calcul des efforts internes comme les moments fléchissants, les efforts tranchants et les efforts normaux aux différentes sections de la structure, on doit utiliser les charges uniformément réparties. Dans le cas contraire, les résultats des calculs sont inexacts.

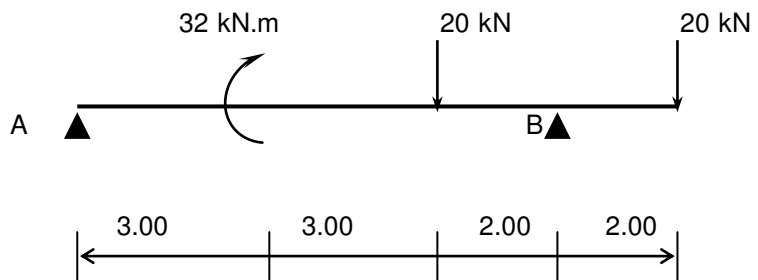
### III-6 EXERCICES

Déterminer les valeurs des composantes horizontales et verticales des réactions d'appui des structures montrées ci-après.

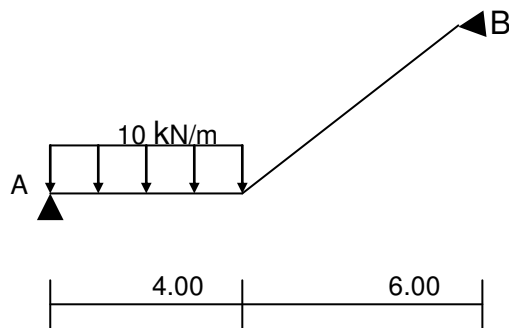
**Exercice 6.1**



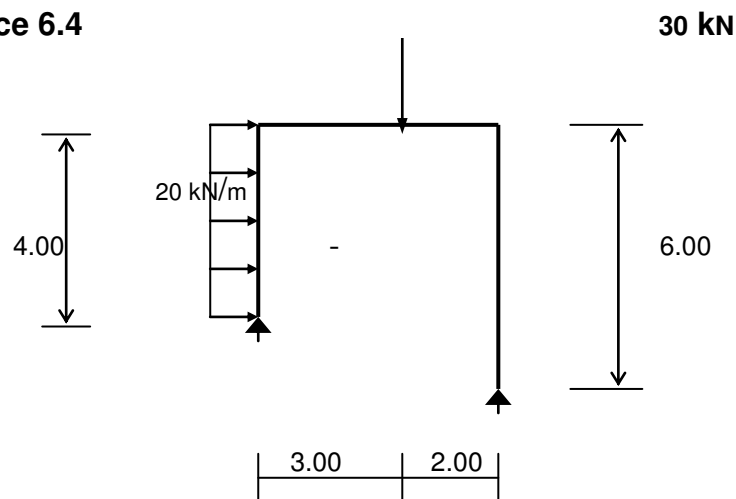
**Exercice 6.2**



**Exercice 6.3**



**Exercice 6.4**



## Chapitre 02 Théories élémentaires de la RDM

### Contraintes-sollicitations

#### 1) Définitions:

La résistance des matériaux a pour objet l'étude de l'équilibre externe et interne des solides constituant les constructions.

Cette étude nécessite, d'une part la vérification de l'équilibre statique, d'autre part la recherche des valeurs des contraintes et des déformations subies par un corps donné, soumis à un système de forces extérieures ; parmi ces forces sont comptées les charges permanentes ( comprenant en particulier, le poids propre du corps), les charges variables dans le temps et les réactions d'appui nécessaires à l'équilibre du corps.

#### 2) Hypothèses et principes de base de la RDM :

- 1) les déformations du corps sont supposées très petites et sans influence sur l'intensité et la direction des forces appliquées, et sur les conditions d'équilibre du corps ( sauf notamment dans l'étude des corps sur appuis élastique et dans l'étude du flambement) ;
- 2) entre deux sections voisines d'une pièce prismatique, les variations de forme et d'étendue de section sont supposées être très progressives ;
- 3) la section droite ( perpendiculaire à la fibre moyenne ) d'une pièce prismatique reste plane après l'application des forces sur la pièce ; c'est l'hypothèse de **Navier-Bernoulli** ;
- 4) dans le domaine de l'élasticité de la matière, les déformations sont proportionnelles aux contraintes ; c'est **La loi de Hooke** ;
- 5) la généralisation de la loi de Hooke conduit au principe de superposition des effets des forces, selon lequel l'effet produit par un ensemble de forces est égal à la somme des effets produits par chaque force considérée isolément.

6) Homogénéité et isotropie : les matériaux étudiés en RDM doivent être homogènes et isotropes (même caractère physique et mécanique en tout point )

- Exemple : - Acier : homogène et isotrope  
 - Bois : anisotrope

### 3) Etude de la notion de contraintes:

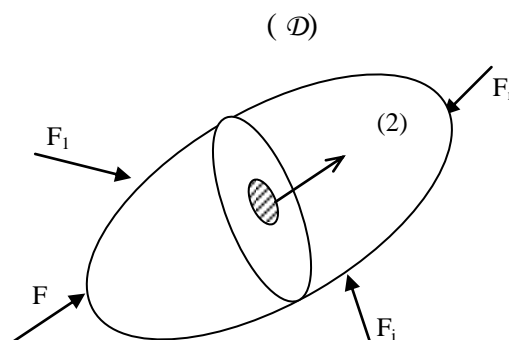
Le but de ce paragraphe est de mettre en place la notion de contraintes autour d'un point, dans le cas le plus général ou l'on va isoler un élément de volume au sein d'un solide ; nous mentionnerons aussi les propriétés essentielles liées à la représentation de l'état de contraintes.

#### 3-1) Mise en place du vecteur-contrainte :

il nous faut pour cela étudier tout d'abord l'équilibre d'un solide isolé : considérons le domaine suivant, désigné par  $(D)$  isolé au sein du volume de la structure à étudier.

Découpons par la pensée  $(D)$  en deux domaines (1) et (2), et traduisons par exemple l'équilibre du domaine (1). Ce domaine est en équilibre, sous l'action :

- des forces extérieures appliquées à (1) ;
- des forces exercées par (2) sur (1) au travers de coupure que l'on a faite.



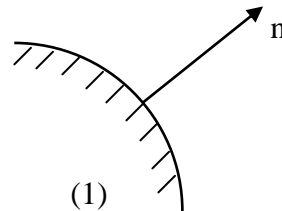
Le domaine (2) exerce sur (1) au travers de l'élément de surface  $ds$  des forces admettant pour résultante  $dF$ , et pour moment résultant  $dc$  ( on néglige ce couple, du second ordre par rapport à  $dF$  ).

On appelle vecteur-contrainte au point  $P$ , relativement au plan orienté par la normale  $n$  le vecteur :

$$\vec{T}(p,n) = \lim_{ds \rightarrow 0} \left( \frac{dF}{ds} \right)$$

$ds \rightarrow$

Remarque : On s'intéresse au domaine ( 1 ) , dont on étudie l'équilibre. Il est important de noter que relativement au milieu étudié, n désigne toujours la normale orientée vers l'extérieur :



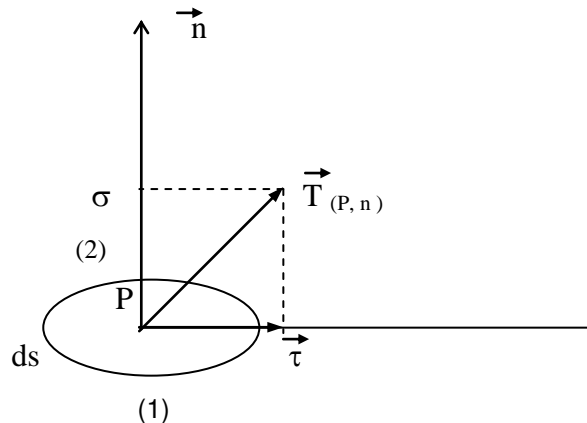
propriété de  $\vec{T}(p,n)$  : on peut aussi étudier l'équilibre de la région (2). La normale extérieure est alors  $n' = -n$ . En appliquant le théorème des actions réciproques, on obtient :

$$\vec{T}_{(P, -n)} = -\vec{T}_{(P, n)}$$

### 3-2) Expression du vecteur-contrainte :

On reprend l'écriture du vecteur  $T_{(P, n)}$  , et on va l'écrire en projection :

- sur le plan de l'élément d'aire  $ds$  ;
- sur l'axe  $n$  :



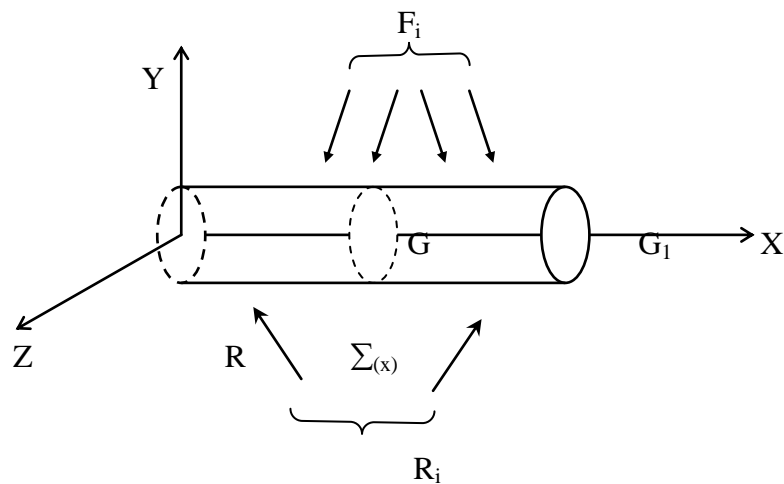
On a :  $\vec{\sigma} = \vec{T}_{(P, n)} \cdot \vec{n}$  Et  $T_{(P, n)} = \sigma \cdot n + \tau$

Avec  $\left\{ \begin{array}{l} \sigma : \text{désigne la contrainte normale ;} \\ \tau : \text{désigne la contrainte tangentielle.} \end{array} \right.$

## 4 ) Sollicitation dans une section (efforts internes ):

### 4-1) Notion de coupure :

Le but de ce paragraphe, déterminer quels sont les efforts qui se développent à l'intérieur de la matière. Pour cela, considérons une poutre droite en équilibre soumise à des efforts extérieurs quelconques  $F_i$  et à des réactions de liaison quelconque  $R_i$ .

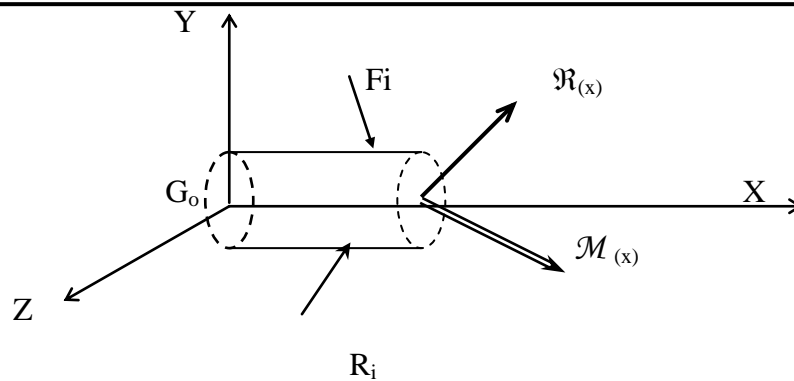


Et effectuons par la pensée une coupure fictive à l'abscisse  $x$  que nous noterons  $\Sigma_{(x)}$ . Isolons à présent le tronçon (1) située à gauche de la section fictive  $\Sigma_{(x)}$ . Isolons à présent le tronçon (1) situé à gauche de la section fictive  $\Sigma_{(x)}$ .

Le tronçon est en équilibre sous l'action :

- des forces extérieures qui lui sont appliquées ;
- des éventuelles actions de liaison ;
- des forces que le tronçon de droite (2) exerce sur (1). ( ces forces se développent à l'intérieure de la matière ).

Nous pouvons exprimer ces « forces intérieures » sous la forme d'un torseur, écrit au centre de gravité de la section  $\Sigma_{(x)}$ . Nous adopterons donc la représentation suivante :



#### 4-2) Définition des sollicitations :

Par définition, on appellera « sollicitation » les projections sur les axes X,Y,Z des vecteurs  $\mathfrak{R}_{(x)}$  et  $\mathfrak{M}_{(x)}$  soit :

$$\mathfrak{R}_{(x)} \left\{ \begin{array}{l} N(x) : \text{effort normal ;} \\ V_y(x) : \text{effort tranchant suivant y ;} \\ V_z(x) : \text{effort tranchant suivant z ;} \end{array} \right.$$

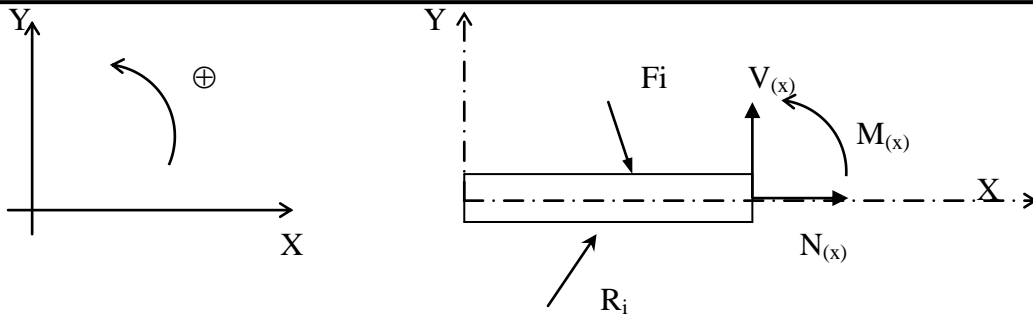
$$\mathfrak{M}_{(x)} \left\{ \begin{array}{l} M_t(x) : \text{moment de torsion ;} \\ M_y(x) : \text{moment fléchissant portée par y ;} \\ M_z(x) : \text{moment fléchissant portée par z ;} \end{array} \right.$$

Dans la suite, nous considérerons essentiellement des problèmes plans, les efforts extérieurs étant situés dans le plan ( o,x ,y). Dans ces conditions, les seules composantes non nulles du torseur des sollicitations sont :

- l'effort normal  $N(x)$  ;
- l'effort tranchant suivant y, que nous noterons  $V(x)$  ;
- le moment fléchissant suivant z , que nous noterons  $M(x)$ .

et nous adopterons la représentation suivante :

a) *cas du tronçon gauche* :

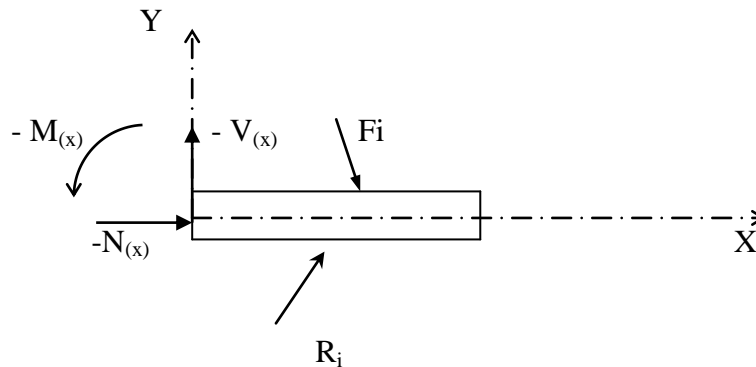


Convention : a ce stade du calcul, les sollicitations  $N, V$  et  $M$  sont inconnues ; c'est pourquoi nous les représentons par convention par un vecteur orienté dans le sens positif des axes .

Cela nous conduit à définir un sens positif pour les couples et le moment fléchissant portés par  $z$ . Nous conviendrons que ce sens positif est le sens trigonométrique direct :

a) **cas du tronçon droite :**

Il peut être plus facile d'appliquer le principe fondamental au tronçon de droite. D'après les conventions que nous avons adoptées et en vertu du théorème des actions réciproques, nous représenterons le système à étudier de la façon suivante :



Connaissant les sollicitations dans une section quelconque , il suffit alors de faire varier  $x$  le long de la poutre pour connaître les sollicitations dans toutes les sections. On obtient alors des diagrammes des sollicitations  $N, V$  et  $M$  en fonction de  $x$ .

**4-3) Equations d'équilibre-tracé des diagrammes:**

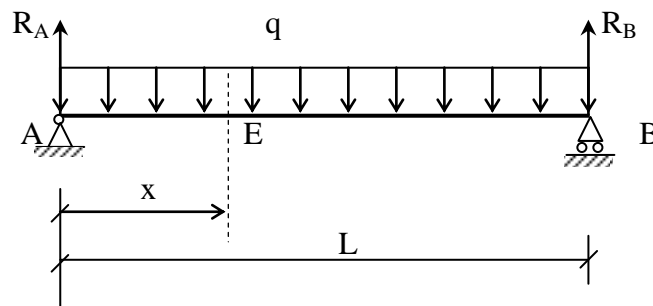
La finalité de la théorie des poutres est de connaître le comportement des particules dans toute section d'une poutre.

Pour étudier la structure on procède comme suit :

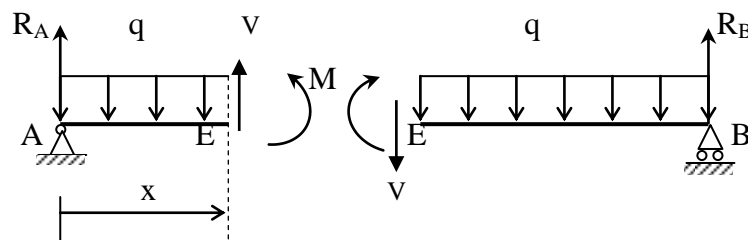
- faire la représentation mécanique de la structure sans oublier de mettre les actions et les réactions (suivant le type d'appui) ;
- appliquer le PFS pour déterminer les réactions d'appuis ;
- faire la coupure pour chaque intervalle ( on appelle intervalle, la zone dans laquelle on a le même chargement), et écrire le torseur à gauche ou à droite des sollicitations.
- tracer les diagrammes des sollicitations en fonction des équations déjà trouvées.

#### 4-4) Exemple : sollicitation d'une poutre

Soit le cas d'une poutre soumise à une charge verticale uniformément répartie :



- Sur une section droite de la poutre, la charge produit un effort tranchant  $V$  et un moment fléchissant  $M$ .
- On peut mettre en évidence ces efforts intérieurs en faisant une coupe à la distance  $x$  de l'appui gauche  $A$  de la poutre et en isolant les deux tronçons  $AE$  et  $EB$  créés par cette coupe.



On considère l'origine des axes de coordonnées à l'appui gauche  $A$ . On fait alors une coupe à la distance  $x$  de  $A$  et l'on considère le tronçon de la poutre à gauche de la coupe, où l'on a mis en évidence l'effort tranchant  $V$  et le moment fléchissant  $M$ .

*Commentaire* : Sur cette même figure, on montre l'effort tranchant  $V$  et le moment fléchissant  $M$  inconnus suivant le sens positif, comme il a déjà été défini pour les efforts entre les extrémités d'une poutre. Les résultats des calculs qui suivent détermineront le sens exact de ces efforts intérieurs. On utilisera le même principe dans les autres exemples. Pour déterminer les efforts intérieurs  $M, V$  et  $N$ , on écrira l'équation d'équilibre des forces agissant sur le tronçon à gauche ou à droite de la coupe. On choisira le tronçon où les équations d'équilibre sont plus simples à écrire.

- **Calcul des réactions :**

De l'équation de la statique  $\Sigma M_B = 0$ , on a :

$$-R_A \cdot L + q \cdot L^2/2 = 0$$

D'où

$$R_A = q \cdot L/2 = R_B \quad (\text{à cause de la symétrie})$$

- **Détermination du diagramme des efforts tranchants :**

L'effort tranchant  $V$  est déterminé en écrivant l'équation d'équilibre statique de toutes les forces verticales agissant sur le tronçon. De l'équation  $\Sigma F_y = 0$ , on a :

$$R_A - q \cdot x + V = 0$$

D'où, pour  $0 \leq x \leq L$ , en remplaçant  $R_A$  par sa valeur, on trouve :

$$V = -R_A + q \cdot x = -q \cdot L/2 + q \cdot x \quad (1)$$

De l'équation (1), on voit que les valeurs de l'effort tranchant varient le long de l'axe de la poutre.

Pour $x = 0$ ,	$V = -q \cdot L/2$
Pour $x = L/4$ ,	$V = -q \cdot L/4$
Pour $x = L/2$ ,	$V = 0$
Pour $x = 3L/4$ ,	$V = q \cdot L/4$
Pour $x = L$ ,	$V = q \cdot L/2$

Avec ces valeurs, on peut tracer le diagramme des efforts tranchants. Dans le cas de cette poutre, la variation de l'effort tranchant est linéaire et l'effort tranchant maximal se trouve aux appuis. Conformément à la convention de signe, il est négatif dans la moitié gauche de la poutre et positif dans la moitié droite.

- **Détermination du diagramme des moments fléchissant :**

Le moment fléchissant  $M$  en une section  $x$  de la poutre est déterminé en écrivant l'équation d'équilibre statique des moments de toutes les forces agissant sur le tronçon à gauche de la section  $x$ . On doit avoir :

$$\sum M_x = 0$$

$$-R_A \cdot x + q \cdot x^2/2 + M = 0$$

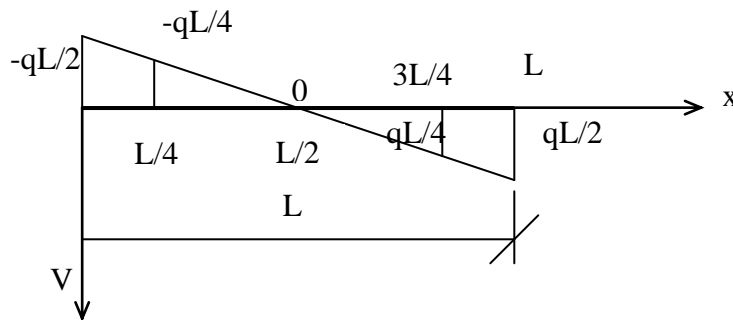
D'où, pour  $0 \leq x \leq L$ ,

$$M = R_A \cdot x - q \cdot x^2/2 = qL \cdot x/2 - q \cdot x^2/2 \quad (2)$$

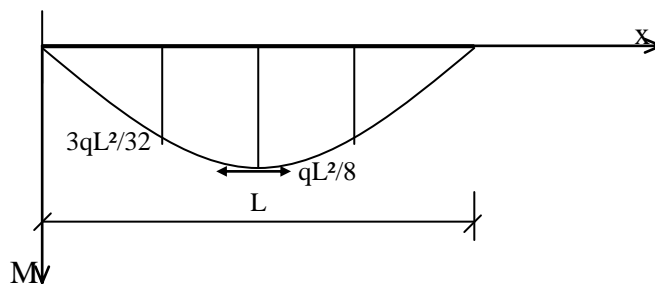
De l'équation (2), on voit que les valeurs du moment fléchissant varient le long de l'axe de la poutre.

Pour $x = 0$ ,	$M = 0$
Pour $x = L/4$ ,	$M = 3qL^2/32$
Pour $x = L/2$ ,	$M = qL^2/8$
Pour $x = 3L/4$ ,	$M = 3qL^2/32$
Pour $x = L$ ,	$M = 0$

Avec ces valeurs, on peut tracer le diagramme des moments fléchissant. Le moment fléchissant est positif et varie d'une façon parabolique. Il est maximal au milieu de la poutre où l'effort tranchant est égal à zéro.



(DET)



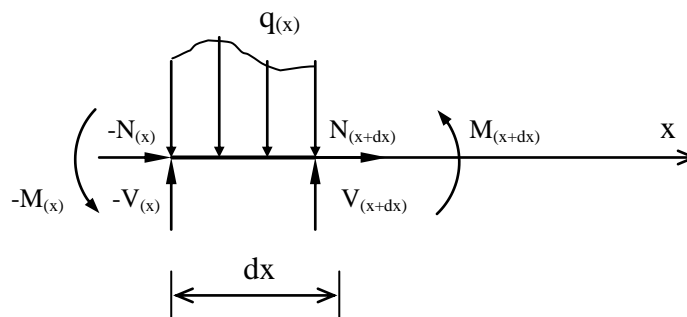
(DMF)

Commentaires :

- La convention de signe dont on s'est servi pour écrire les équations d'équilibre est celle qui est utilisée en statique ;
- Pour l'exemple précédant , on a déterminé les valeurs de l'effort tranchant et du moment fléchissant en plusieurs points, puis on a tracé les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants ;
- Par convention, le diagramme des efforts tranchants est tracé au-dessus ou au-dessous de l'axe de la poutre suivant que l'effort tranchant est positif ou négatif. De même, le diagramme des moments fléchissants est tracé du coté des fibres tendues. Dans cet exemple, il est tracé en dessous de l'axe de la poutre, car le moment fléchissant entre les appuis est positif donc, les fibres inférieures sont tendues

#### 4-4) Relation entre effort tranchant et moment fléchissant :

Considérons une poutre soumise à une charge répartie  $q(x)$  et isolons à l'intérieur de cette poutre un tronçon de longueur «  $dx$  ».



Ecrivons l'équilibre statique de ce tronçon en projetant sur les axes les équations vectorielles du principe fondamental de la statique :

$$\text{Projection sur } x : N(x+dx) - N(x) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Projection sur } y : V(x+dx) - V(x) - q(x).dx = 0 \quad (2)$$

$$\text{Projection sur } z : M(x+dx) - M(x) + q(x).dx^2/2 + V(x).dx = 0 \quad (3)$$

( les moments sont exprimés par rapport à  $G_{x+dx}$  , centre de gravité de la section située à l'abscisse  $x+dx$  ).

Par définition de la dérivée ( voir cours de mathématiques) on peut écrire :

$$V(x+dx) - V(x) = \frac{dV}{dx} \cdot dx$$

L'équation (2),fournit donc la relation :

$$\boxed{dV/dx = q(x)} \quad (4)$$

Transformons l'équation (3) en remarquant que  $(dx)^2/2$  est négligeable devant les autres termes ( infiniment petit du second ordre).

Il vient :  $\boxed{dM/dx = -V(x)}$  (5)

En rassemblant les deux équations (4) et (5) il vient :

$$\boxed{d^2M/dx^2 = -q(x)} \quad (6)$$

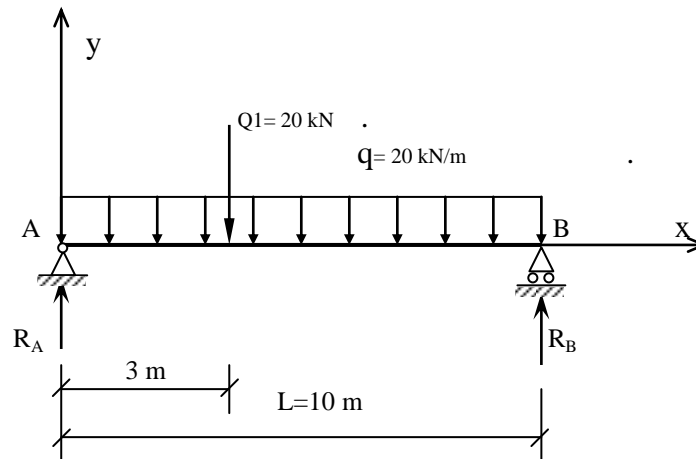
*Commentaires :*

Ces trois relations permettent :

- soit de déterminer V et M dans un tronçon de poutre soumis à une charge répartie ;
- soit de vérifier l'exactitude d'un tracé de diagrammes des sollicitations ;
- soit de déterminer la section la plus sollicitée en flexion ( la section où l'effort tranchant est égal à zéro).

## 4-5) Applications :

- 1) On donne la poutre simplement appuyée qui supporte les charges montrées sur la figure 1. déterminer les réactions de la poutre et les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissant le long de l'axe de la poutre.



**Solution :**

**A - Calcul des réactions :**

On calcule  $R_A$  en prenant

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_A \cdot L + Q_1 \cdot (L-3) + q \cdot L^2/2 = 0$$

D'où

$$R_A \cdot L = Q_1 \cdot (L-3) + q \cdot L^2/2 \quad (1)$$

Dans l'équation (1), en remplaçant  $L, q$  et  $Q_1$  par leurs valeurs, on a

$$10 \cdot R_A = 20 \cdot (10-3) + (20 \cdot 10^2/2) = 1140$$

$$R_A = 1140/10 = 114 \text{ kN}$$

De l'équation  $\sum F_y = 0$ , on a

$$R_A + R_B - 220 = 0$$

D'où

$$R_B = 220 - 114 = 106 \text{ kN}$$

**B - Détermination du diagramme des efforts tranchants :**

de l'équation  $\sum F_y = 0$ , on a, pour  $0 \leq x \leq 3\text{m}$ ,

$$R_A - qx + V(x) = 0$$

D'où  $V(x) = -R_A + qx = -114 + 20 \cdot x$

Pour  $3 \leq x \leq 10$ ,  $R_A - Q_1 - q \cdot x + V(x) = 0$

$$V(x) = -R_A + Q_1 + q \cdot x = -114 + 20 + 20 \cdot x$$

De l'équation ci-dessus, pour  $x = (114 - 20)/20 = 4.7\text{m}$ ,  $V(4.7) = 0$

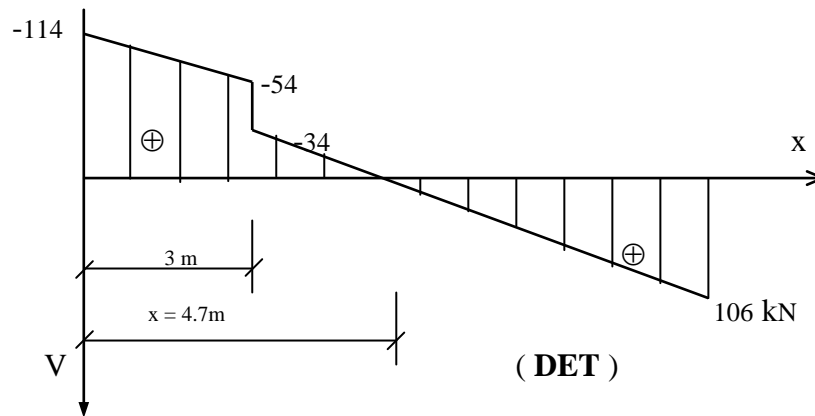
Pour  $x = 0$ ,  $V = -114 \text{ kN}$  ;

Pour  $x = 3\text{m}$ ,  $V_g = -54 \text{ kN}$  ; ( à gauche de la section d'abscisse 3m)

$V_d = -34 \text{ kN}$  ; ( à droite de la section d'abscisse 3m )

Pour  $x = 10\text{ m}$ ,  $V = 106\text{ kN}$ .

Avec ces valeurs, on peut tracer le diagramme des efforts tranchants



**C-Détermination du diagramme des moments fléchissants :**

De l'équation  $\sum Mx = 0$ , pour  $0 \leq x \leq 3\text{m}$ , on a :

$$-R_A \cdot x + q \cdot x^2/2 + M(x) = 0$$

D'où

$$M(x) = R_A \cdot x - q \cdot x^2/2 = 114 \cdot x - 20 \cdot x^2/2$$

pour  $3 \leq x \leq 10\text{m}$ , on a :

$$-R_A \cdot x + Q_1(x-3) + q \cdot x^2/2 + M(x) = 0$$

D'où

$$M(x) = 114 \cdot x - 20(x-3) - 20 \cdot x^2/2$$

On a  $dM/dx = 114 - 20 - 20 \cdot x$

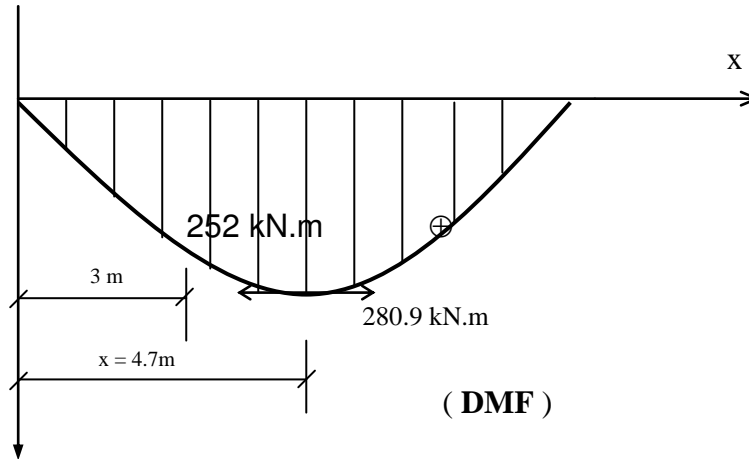
Et  $dM/dx = 0$ , pour

$$x = \frac{114 - 20}{20} = 4.7\text{m}$$

des étapes B et C, on constate donc que pour  $x = 4.7\text{m}$ ,  $v = dM/dx = 0$ . L'effort tranchant est égal à zéro et, par conséquent, la valeur du moment fléchissant est maximale.

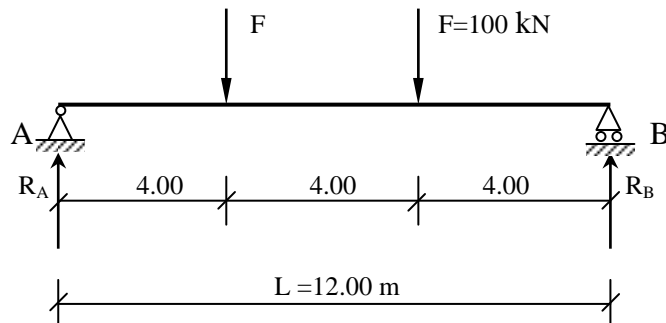
Pour $x = 0$ ,	$M = 0$ ;
Pour $x = 3\text{m}$ ,	$M = 252\text{ kN.m}$ ;
Pour $x = 4.7\text{m}$ ,	$M_{\text{max}} = 280.9\text{ kN.m}$ ;
Pour $x = 10\text{m}$ ,	$M = 0$ ;

Avec ces valeurs, on peut tracer le diagramme des moments fléchissant :



*Commentaire* : en examinant les diagrammes des efforts internes, on constate que la valeur de l'effort tranchant, à la section où la charge concentrée est appliquée, diminue verticalement de la valeur de cette dernière. Cependant, le diagramme des efforts tranchants ne traverse pas l'axe de la poutre et, par conséquent, l'effort tranchant à cette section n'est pas égal à zéro. Comme on l'a établi, il est égal à zéro à la section d'abscisse  $x = 4.7\text{m}$ , et le moment fléchissant est maximal à cette section.

2) On donne la poutre simplement appuyée qui supporte des charges concentrées ( voir figure ci-après). Déterminer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissant le long de la poutre.

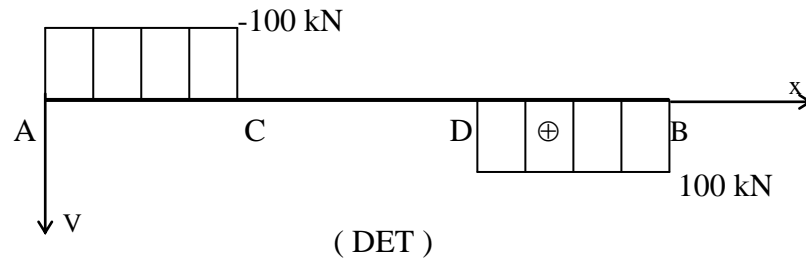


**Solution :**

On a  $R_A = R_B = 100 \text{ kN}$  ( par raison de symétrie ) ;

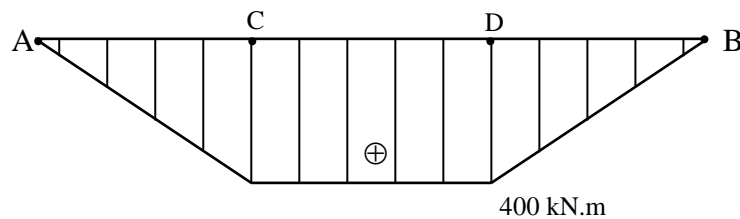
A- détermination du diagramme des efforts tranchants :

pour	$0 \leq x \leq 4\text{m,}$	$V = -R_A = -100 \text{ kN}$
pour	$4 \leq x \leq 8\text{m,}$	$V = -R_A + F = -100 + 100 = 0$
pour	$8 \leq x \leq 12\text{m,}$	$V = -R_A + F + F$ $= -100 + 100 + 100 = 100 \text{ kN}$



B- détermination du diagramme des moments fléchissant :

pour	$0 \leq x \leq 4\text{m,}$	$M = R_A \cdot x = 100 \cdot x$	→	$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \quad M=0 ; \\ x = 4, \quad M = 400 \text{ kN} \end{array} \right.$
pour	$4 \leq x \leq 8\text{m,}$	$M = R_A \cdot x - F \cdot (x-4)$	→	$\left\{ \begin{array}{l} x = 4, \quad M=400\text{kN.m} ; \\ x=6, \quad M=400 \text{ kN.m;} \\ x=8, \quad M=400 \text{ kN.m.} \end{array} \right.$

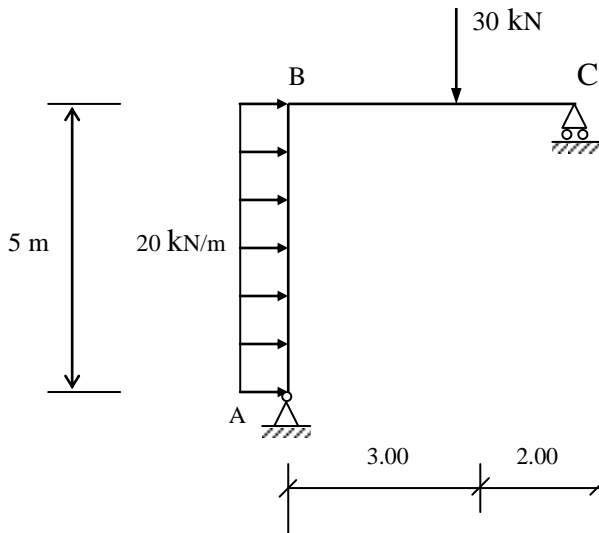


( DMF )

*Commentaire* :En examinant les diagrammes des efforts internes, on constate que les relations fondamentales exprimées par les équations (4) et (5) du paragraphe 4.4 sont justifiées. Ainsi, sur les parties AC et DB de la poutre, comme l'effort tranchant est constant, la pente du moment fléchissant est

constante et le moment fléchissant varie linéairement le long de ces parties. En outre, sur la partie CD de la poutre, comme l'effort tranchant est égal à zéro, le moment fléchissant est constant et on a une flexion pure sur cette partie de la poutre. De plus, sur ces parties, l'effort tranchant étant constant ou égal à zéro, l'équation (6) est justifiée et, par conséquent, la poutre ne supporte pas de charge uniforme.

- 3) On donne le demi-portique, supportant les charges montrées sur la figure ci-après. Déterminer les diagrammes des efforts internes.



*Solution :*

Comme on a que trois inconnues, le portique est donc isostatique et on peut calculer les réactions aux appuis par les équations d'équilibre de la statique.

A- Calcul des réactions :

De l'équation  $\Sigma F_x = 0$ , on a

$$20 \times 5 - R_A^X = 0$$

d'où

$$R_A^X = 100 \text{ kN}$$

De l'équation  $\Sigma F_y = 0$ , on a

$$R_A^Y + R_C - F = 0$$

De l'équation  $\Sigma M_A = 0$ , on a

$$5.R_C - 30 \times 3 - (20 \times 5) \times 2.5 = 0$$

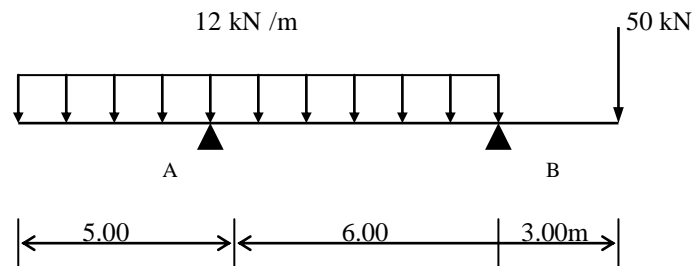
$$R_C = \frac{90+250}{5} = 68 \text{ kN}$$

$$R_A^Y = -R_C + F = -68 + 20 = -48 \text{ KN}$$

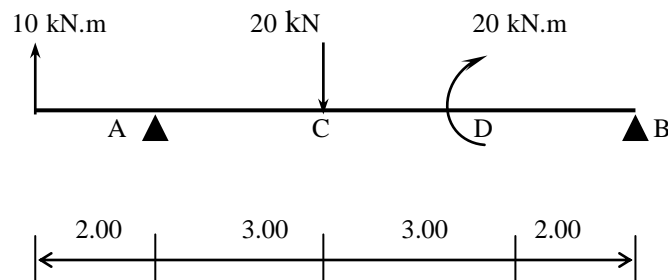
## 4-6 EXERCICES

Tracer les diagrammes des efforts tranchants (DET) et les diagrammes des moments fléchissants ( DMF) des poutres et des portiques montrés pour chacun des exercices ci-après.

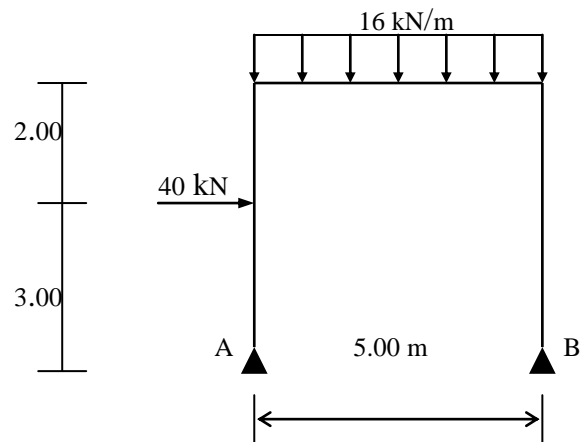
### Exercice II.1



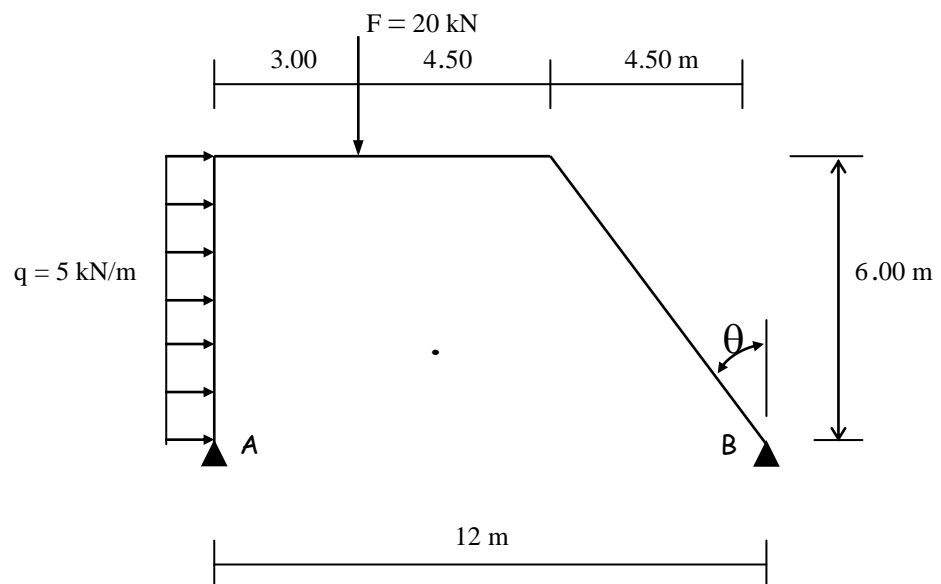
### Exercice II.2



Exercice II.3



Exercice II.4



## Chapitre 3 Caractéristiques géométriques des sections planes

### I- Moment statique d'une aire plane :

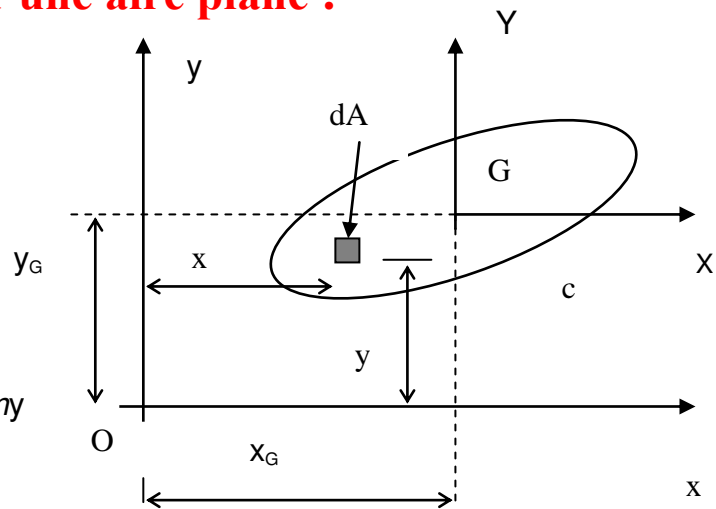
Par rapport aux axes Ox et Oy ,

- l'aire A limitée par le contour c est donnée par :

$$A = \int_c dA = \iint dx dy$$

- les moments statiques  $m_x$  et  $m_y$  de l'aire A par rapport aux axes ox et oy ont pour valeur :

$$\begin{cases} m_x = \int_c y \cdot dA \\ m_y = \int_c x \cdot dA \end{cases}$$



figureI-1

**Unité :** le moment statique a pour dimension la troisième puissance d'une longueur, il s'exprime en  $m^3$ ,  $cm^3$  ou  $mm^3$ .

### II- Centre de gravité d'une aire plane :

Les distances  $x_G$  et  $y_G$  du centre de gravité G aux axes oy et ox de l'aire A sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_G = \frac{m_y}{A} \\ y_G = \frac{m_x}{A} \end{cases}$$

**Remarque :** pour une surface A composée de plusieurs surfaces  $A_i$  de centre de gravité  $G_i$  ( de coordonnées  $x_i$  et  $y_i$  ) :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{\sum A_i}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum A_i}$$

les termes  $A_i$  sont les aires des parties composant la section, et les termes  $x_i, y_i$  sont les distances respectives de leurs centre de gravité .

### III- moment d'inertie d'une aire plane :

Les moments d'inertie  $I_x$  et  $I_y$  de l'aire  $A$  par rapport aux axes  $xx$  et  $yy$  ont pour valeur :

$$\begin{cases} I_x = \int y^2 \cdot dA \\ I_y = \int x^2 \cdot dA \end{cases}$$

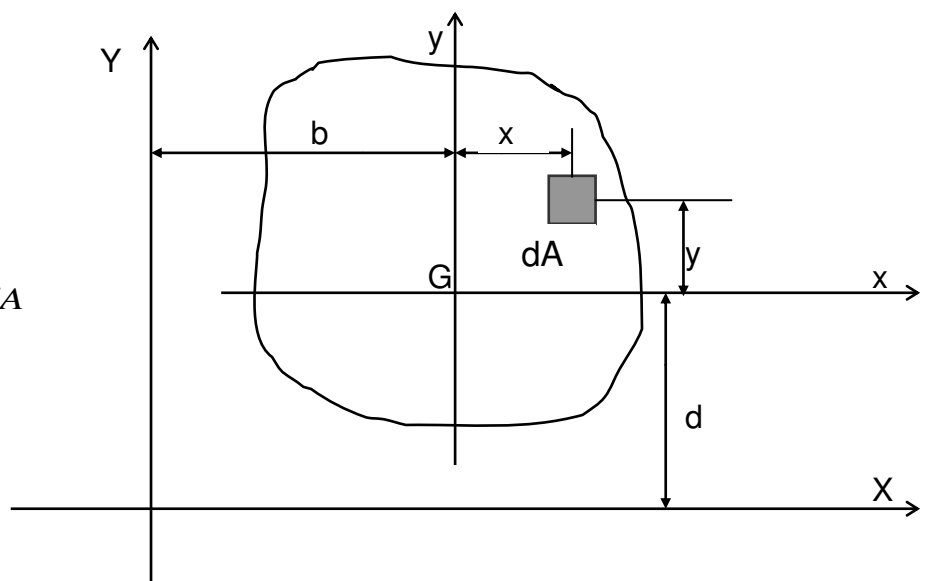
→ Le produit d'inertie  $I_{xy}$  de l'aire  $A$  par rapport aux axes  $xx$  et  $yy$  est défini par :

$$I_{xy} = \int xy \cdot dA$$

**Unités** : Le moment d'inertie a pour dimension la quatrième puissance d'une longueur et s'exprime en  $m^4$  ou  $cm^4$  ou  $mm^4$ .

### IV- Principe des axes parallèles : (théorème de Hyghènes )

$$\begin{aligned} I_X &= \int (y+d)^2 \cdot dA \\ &= \int (y^2 + d^2 + 2dy) \cdot dA \\ &= \int y^2 \cdot dA + \underbrace{2d \cdot \int y \cdot dA}_0 + d^2 \int dA \\ \Rightarrow \boxed{I_X = I_x + A \cdot d^2} \end{aligned}$$



Un raisonnement analogue dans l'autre direction montrerait que :

$$I_Y = I_y + A.b^2$$

On démontre aussi que :

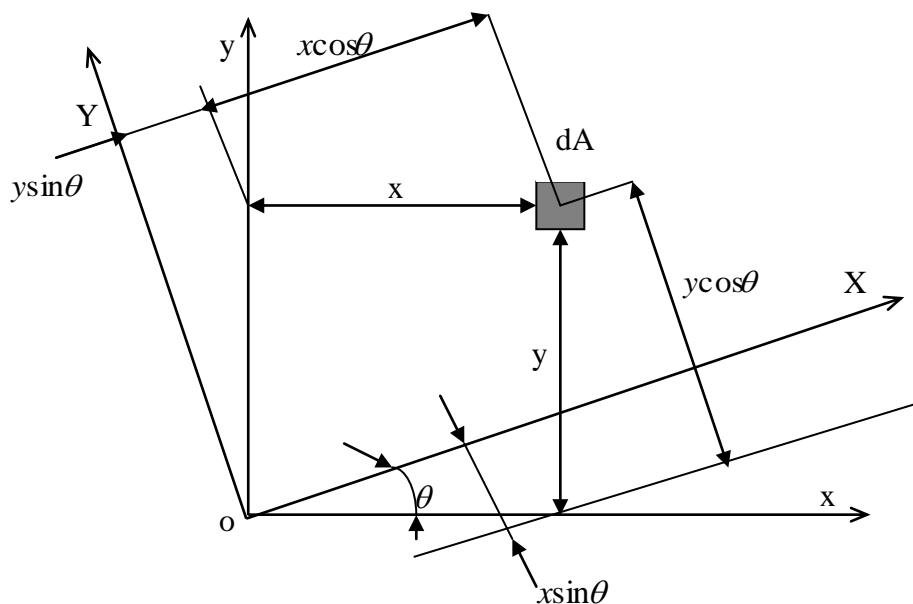
$$I_{XY} = I_{xy} + A.b.d$$

**Remarque** : Lorsqu'on parle de distance, il s'agit de distance perpendiculaire.

## V- Relation entre les moments d'inertie et le produit d'inertie :

Soit l'aire A et le système d'axes ox et oy

→ On donne aussi les axes OX et OY qui font un angle  $\theta$  avec les axes Ox et Oy.



→ Les formules de changement d'axes sont :

$$\begin{cases} X = x \cos \theta + y \sin \theta \\ Y = y \cos \theta - x \sin \theta \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 I_X &= \int Y^2 dA = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA \\
 &= \cos^2 \theta \int y^2 dA + \sin^2 \theta \int x^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy dA \\
 &= I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - I_{xy} \sin 2\theta \\
 &= I_x \left[ \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right] + I_y \left[ \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right] - I_{xy} \sin 2\theta \\
 &= \left( \frac{I_x + I_y}{2} \right) + \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right) \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_Y &= \int X^2 dA = \int (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 dA \\
 &= I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + I_{xy} \sin 2\theta \\
 &= \left( \frac{I_x + I_y}{2} \right) - \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right) \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \int XY dA \\
 &= I_{xy} \cos 2\theta + \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right) \sin 2\theta
 \end{aligned}$$

**Remarque:** on constate que :  $I_x + I_y = I_x (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + I_y (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$

Comme  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

On a donc:  $I_x + I_y = I_x + I_y$

## VI- Axes principaux :

→ Les axes principaux sont deux axes orthogonaux OX et OY qui passent par un point O d'une section et qui sont situés de façon que le produit d'inertie  $I_{XY}$  soit égal à zéro.

$$\text{Comme } I_{XY} = \int XY dA = I_{xy} \cos 2\theta + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta = 0$$

$$\text{On trouve la relation : } \boxed{\text{tg} 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}}$$

qui donne la valeur de l'angle  $\theta$  que les axes principaux OX et OY font par rapport aux axes de référence Ox et Oy.

### VI-1 Moment quadratiques maximum et minimum :

$$\text{On a : } \begin{cases} I_x = \left( \frac{I_x + I_y}{2} \right) + \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right) \cdot \cos 2\theta - I_{xy} \cdot \sin 2\theta \\ I_y = \left( \frac{I_x + I_y}{2} \right) - \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right) \cdot \cos 2\theta + I_{xy} \cdot \sin 2\theta \\ I_{xy} = I_{xy} \cdot \cos 2\theta + \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right) \sin 2\theta \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \frac{dI_x}{d\theta} = - (I_x - I_y) \sin 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = -2I_{xy} \\ \frac{dI_y}{d\theta} = (I_x - I_y) \sin 2\theta + 2I_{xy} \cos 2\theta = 2I_{xy} \end{cases}$$

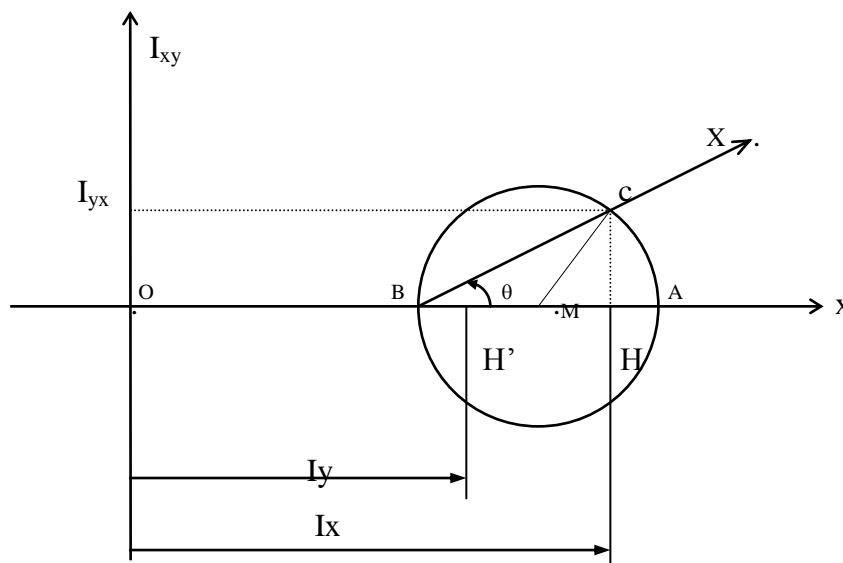
Ces deux dérivées, de signes contraires, s'annulent en changeant de signe pour  $I_{xy} = 0$ , l'une des fonctions présentant un maximum et l'autre un minimum.

⇒ les axes principaux sont les deux axes pour lesquels les moments quadratiques sont respectivement **maximum** et **minimum**.

### VI-2 cercle de Mohr d'inertie :

Le cercle de Mohr permet la détermination graphique des axes principaux et des moments correspondants. On connaît  $I_x$ ,  $I_y$  et  $I_{xy}$  pour un système d'axes privilégié. On se propose de déterminer les axes principaux et les moments quadratiques correspondants.

Sur l'axe  $Ox$  on porte  $OH = I_x$ ,  $OH' = I_y$  ce qui définit  $M$ , centre du cercle de Mohr :



Par ailleurs, on porte  $HC = I_{xy}$  :

- si  $I_{xy} < 0$ , HC est reporté vers le haut,
- si  $I_{xy} > 0$ , HC est reporté vers le bas,

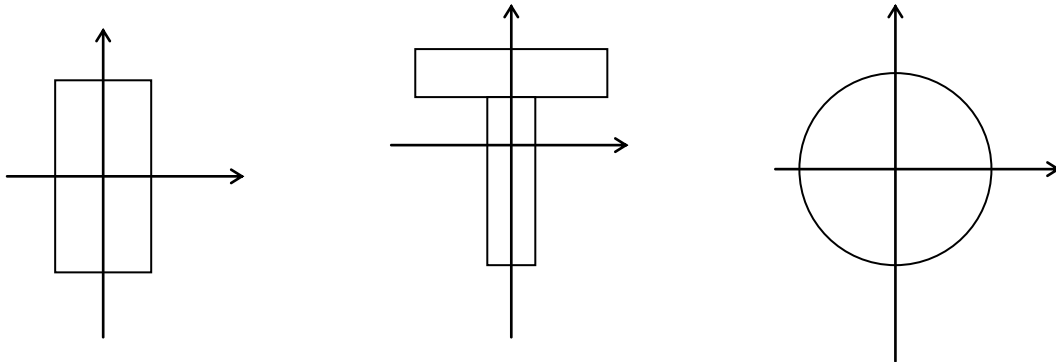
Ceci afin d'obtenir la position exacte de l'axe principal par rapport à  $Ox$ .

C'est un point du cercle de Mohr qui coupe  $Ox$  en A et B. En définitive :

$$(\vec{Ox}, \vec{OX}) = \theta, \quad OA = I_x, \quad OB = I_y$$

**Remarque:** dans le cas d'une section avec un **axe de symétrie**, cet axe est un **axe principal d'inertie**, l'autre lui est perpendiculaire.

□ Exemples :



## VII- Rayon de giration :

Le rayon de giration « r » est une caractéristique géométrique d'une section qui est utilisée dans la détermination de l'élançement d'un élément de structure soumis à un effort de compression ( poteau ).

Il est donné par la relation:

$$r^2 = \frac{I}{A} \quad \text{ou} \quad r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

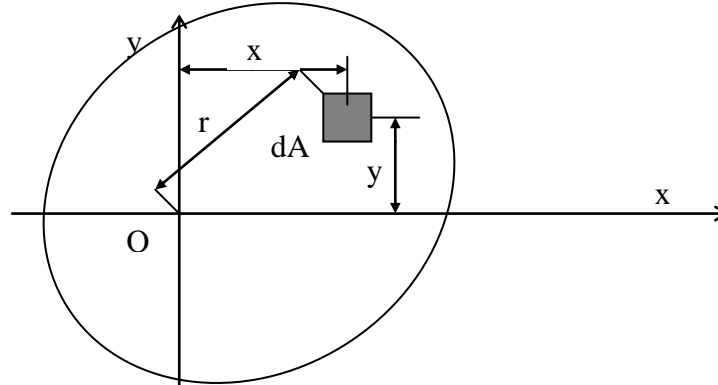
Si l'on considère les axes  $xx$  et  $yy$  on aura:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} ; r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

## VIII- Moment d'inertie polaire :

→ Le moment d'inertie polaire de l'aire A par rapport à un axe perpendiculaire au plan de l'aire, passant par le point O est défini par l'intégrale :

$$I_0 = \int r^2 \cdot dA$$



Si l'on considère l'axe  $xx$  et  $yy$  passant par o,  $r^2 = x^2 + y^2$

d'où

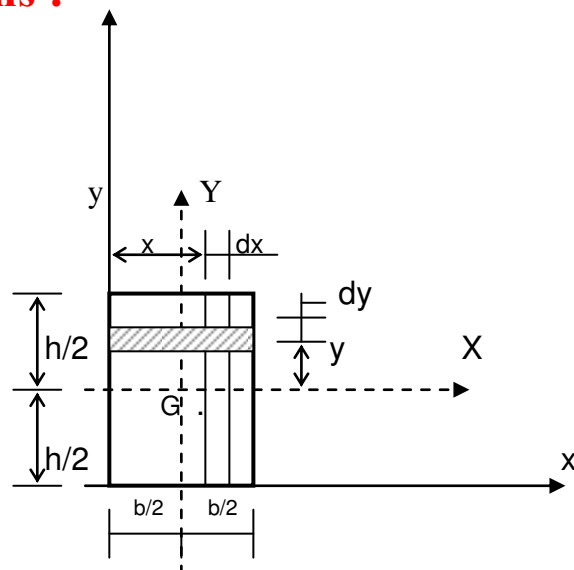
$$I_0 = \int r^2 dA = \int y^2 dA + \int x^2 dA = I_x + I_y$$

⇒ Le moment polaire est invariant par changement de repère.

## IX- Exercice d'applications :

### IX-1 cas d'un rectangle

Soit le rectangle de la figure ci-contre :



Déterminer ces caractéristiques géométriques ;

**a) Surface :**

$$A = \int_c dA = \iint dx dy = \int_0^b dx \int_0^h dy = b \cdot h$$

ou bien

$$dA = b \cdot dy \quad \rightarrow \quad A = \int_0^h b \cdot dy = bh$$

**b) Position de G :**

$$m_x = \int y \cdot dA = \int_0^b y \cdot b \cdot dy \quad \rightarrow \quad m_x = \frac{b \cdot h^2}{2}$$

$$m_y = \int x \cdot dA = \int_0^h x \cdot h \cdot dx \quad \rightarrow \quad m_y = \frac{b^2 \cdot h}{2}$$

$$x_G = \frac{m_y}{A} = \frac{h \cdot b^2 / 2}{h \cdot b} \quad \rightarrow \quad x_G = b/2$$

$$y_G = \frac{m_x}{A} = \frac{b^2 \cdot h / 2}{h \cdot b} \quad \rightarrow \quad y_G = h/2$$

**c) Moment d'inertie :**

$$I_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} b \cdot y^2 \cdot dy \quad \rightarrow \quad I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

or d'après le théorème de Hyghèns :

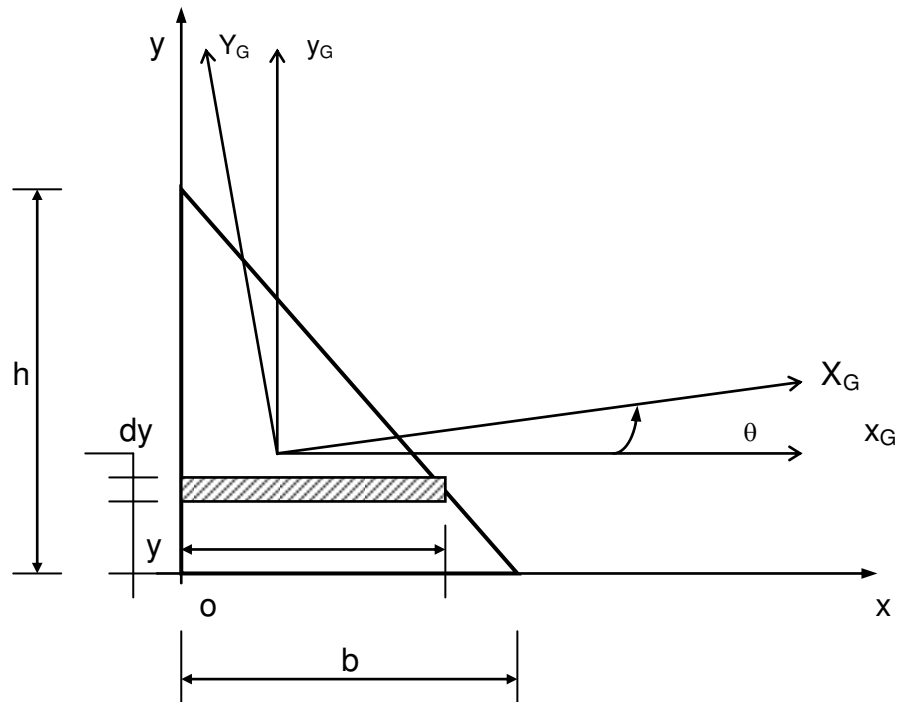
$$I_x = I_x + A \cdot (h/2)^2 \quad \rightarrow \quad I_x = b \cdot h^3 / 3$$

De même on trouve que :

$$I_y = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 \cdot dA = \int_{-b/2}^{b/2} b \cdot x^2 \cdot dx \quad \rightarrow \quad I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}$$

$$I_{xy} = \int xy \cdot dA = \int_0^b x \cdot dx \cdot \int_0^h y \cdot dy \quad \rightarrow \quad I_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$$

**IX-2 cas d'un triangle :**



**a) surface :**

$$A = \int dA \quad \text{avec } dA = x \cdot dy$$

$$\text{Or } \frac{x}{(h-y)} = \frac{b}{h} \rightarrow x = \frac{b(h-y)}{h}$$

$$A = \int_0^h \frac{b(h-y)}{h} dy = \frac{b}{h} \left[ \frac{(h-y)^2}{2} \right]_0^h \Rightarrow \boxed{A = \frac{bh}{2}}$$

**b) centre de gravité :**

$$m_x = \int y dA = \int_0^h \frac{b}{h}(h-y)y \cdot dy \rightarrow \boxed{m_x = \frac{bh^2}{6}}$$

$$m_y = \int x dA = \int_0^b \frac{h}{b}(b-x)x \cdot dx \rightarrow \boxed{m_y = \frac{hb^2}{6}}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} x_G = \frac{m_y}{A} = \frac{\frac{hb^2}{6}}{\frac{bh}{2}} \rightarrow \boxed{x_G = b/3} \\ y_G = \frac{m_x}{A} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{bh}{2}} \rightarrow \boxed{y_G = h/3} \end{cases}$$

**c) moment d'inertie :**

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h-y)dy \quad \rightarrow \quad \boxed{I_x = \frac{bh^3}{12}}$$

$$I_y = \int x^2 dA = \int_0^b x^2 \frac{h}{b}(b-x)dx \quad \rightarrow \quad \boxed{I_y = \frac{bh^3}{12}}$$

$$I_{yx} = \int xy dA \quad \rightarrow \quad \boxed{I_{yx} = \frac{b^2h^2}{24}}$$

**d) Axes principaux en O :**

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2I_{yx}}{I_x - I_y} = \frac{-12 \cdot 2b^2 h^2}{24(bh^3 - hb^3)} = \frac{-bh}{h^2 - b^2}$$

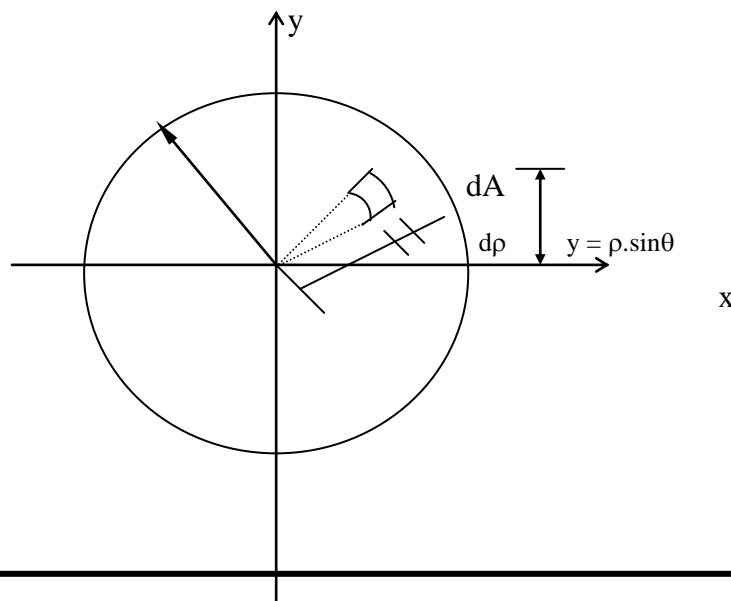
**e) Axes principaux en G :**

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{-2I_{y_G x_G}}{I_{x_G} - I_{y_G}} = \frac{-bh}{h^2 - b^2} \quad \text{avec :}$$

$$I_{x_G} = I_x - (y_G)^2 \cdot S = \frac{bh^3}{36} \quad I_{y_G} = \frac{hb^3}{36}$$

$$I_{x_G y_G} = I_{xy} - y_G \cdot x_G \cdot S = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

**IX-3 cas d'un cercle : (coordonnées polaires)**



**a) surface :**

→ L'élément hachuré est approximativement un rectangle et sa surface a pour expression :

$$dA = \rho \cdot d\theta \cdot d\rho$$

$$A = \iint \rho \cdot d\theta \cdot d\rho$$

$$= \int_0^r \rho \cdot d\rho \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}}$$

**b) moment d'inertie :**

$$I_x = \int y^2 dA$$

Comme :  $y = \rho \cdot \sin\theta$  et  $dA = \rho \cdot d\theta \cdot d\rho$

$$I_x = \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^2 \sin^2 \theta \cdot \rho \cdot d\theta \cdot d\rho$$

$$= \left[ \frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^r \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{I_x = \frac{\pi r^4}{4}}$$

pour  $D=2r \rightarrow \boxed{I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}}$

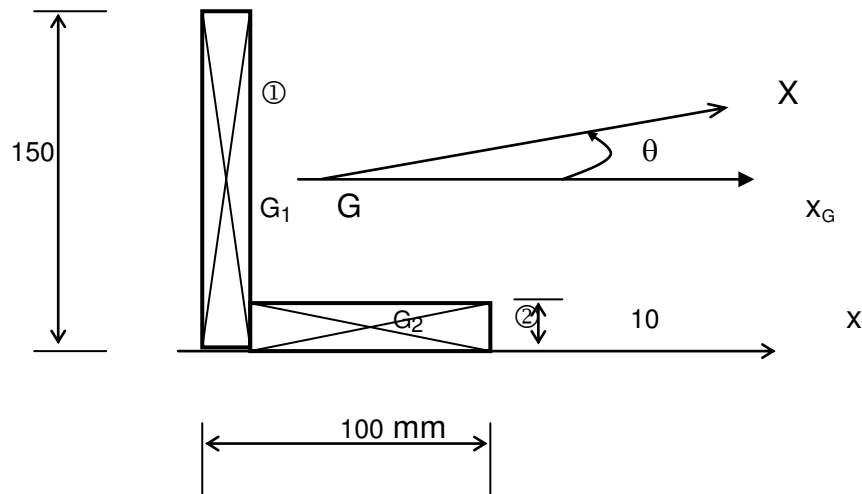
**c) axes principaux :**

il s'agit d'une section qui présente plusieurs axes de symétrie, dont les axes Ox et Oy : sont deux axes principaux d'inertie.

**IX-4 Section en L :**

Déterminer les caractéristiques géométrique de la section en L, représentée ci-après :





**a) détermination de la position du centre de gravité G :**

$$x_G = \frac{\sum A_i x_i}{A}$$

$$x_G = \left( \frac{150 \times 10 \times 75 + (90 \times 10 \times 55)}{(90 \times 10) + (150 \times 10)} \right)$$

$$\Rightarrow x_G = 23.75 \text{ mm}$$

$$y_G = \frac{\sum A_i y_i}{A}$$

$$\Rightarrow y_G = 48.75 \text{ mm}$$

**b) détermination des moments d'inertie  $I_{x_G}$ ,  $I_{y_G}$  et du produit d'inertie  $I_{x_G y_G}$**

$$I_{x_G} = I_x + y_G^2 \cdot A = (I_{x_{G1}} + y_{G1}^2 \cdot A_1) + (I_{x_{G2}} + y_{G2}^2 \cdot A_2)$$

$$I_{x_G} = \left[ \frac{10 \times 150^3}{12} + (75 - 48.75)^2 \cdot (150 \times 10) \right] + \left[ \frac{90 \times 10^3}{12} + (48.75 - 5)^2 \cdot 90 \times 10 \right]$$

$$= 3846093,75 + 1730156,25$$

$$\Rightarrow I_{x_G} = 5,576 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_G} = \left[ \frac{10 \times 150^3}{12} + 18,75^2 \times (10 \times 150) \right] + \left[ \frac{10 \times 50^3}{12} + 31,25^2 \times (10 \times 90) \right]$$

$$\Rightarrow I_{yG} = 2,026.10^6 \text{mm}^4$$

$$I_{xyG} = I_{xy} + x_G y_G \cdot A$$

$$= (-18,75) \cdot (26,25) \cdot (150 \times 10) \cdot (90 \times 10) \times 31,25 \times (-43,75)$$

$$\Rightarrow I_{xyG} = -1,968.10^6 \text{mm}^4$$

**c) détermination de l'angle  $\theta$  qui situe les axes principaux Y, X passant par G.**

$$\text{On a: } \text{tg}2\theta = \frac{2I_{xyG}}{I_{yG} - I_{xG}}$$

$$\text{tg}2\theta = \frac{-2 \cdot 1,968.10^6}{(2,026 - 5,576)10^6} \Rightarrow \text{tg}2\theta = +1,109$$

$$\text{d'où } 2\theta = 48^\circ \text{ et } \theta = 24^\circ$$

**d) Calcul des moments d'inertie par rapport aux axes principaux :**

$$I_x = I_{xG} \cos^2 \theta + I_{yG} \sin^2 \theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_x = 5,576 \cdot \cos^2(24) + 2,026 \sin^2(24) + 1,968 \sin(48)$$

$$\Rightarrow I_x = 6,45.10^6 \text{mm}^4$$

$$I_y = I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$\Rightarrow I_y = 1,151.10^6 \text{mm}^4$$

$$\text{Par ailleurs } \left. \begin{array}{l} I_x + I_y = 7,601.10^6 \text{mm}^4 \\ \text{Et} \\ I_{xG} + I_{yG} = 7,601.10^6 \text{mm}^4 \end{array} \right\} \text{ par conséquent } I_x + I_y = I_{xG} + I_{yG}$$

Commentaire :

On constate que par rapport aux axes principaux GX et GY, la valeur du moment d'inertie

$I_x$  est un **maximum** et celle de  $I_y$  est un **minimum**. On distingue généralement les axes principaux GX et GY comme l'axe **fort** et l'axe **faible** de l'aire.



Pour les pièces fléchies, il est donc préférable que l'axe fort de l'aire d'une section soit un axe de symétrie passant par son centre de gravité et qu'il soit perpendiculaire au plan de flexion pour que la valeur du moment d'inertie soit faible.

# Chapitre 4 : TRACTION SIMPLE COMPRESSION SIMPLE

## I)– Définition :

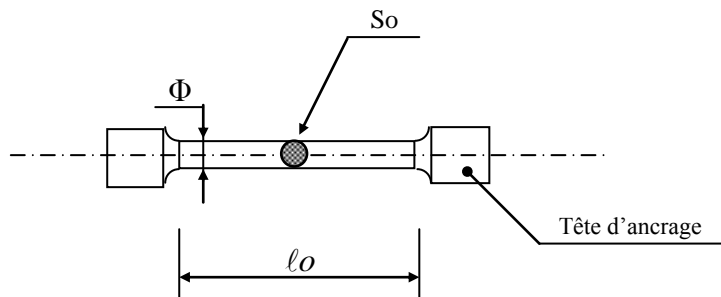
Une pièce est sollicitée à la traction ou à la compression si le torseur associé des efforts extérieurs est représenté par un seul élément de réduction au centre de gravité de chaque section droite qui est l'effort normal  $N$ .

$$\Rightarrow \boxed{N \neq 0 ; V = M = T = 0}$$

## II)– Aspect expérimental :

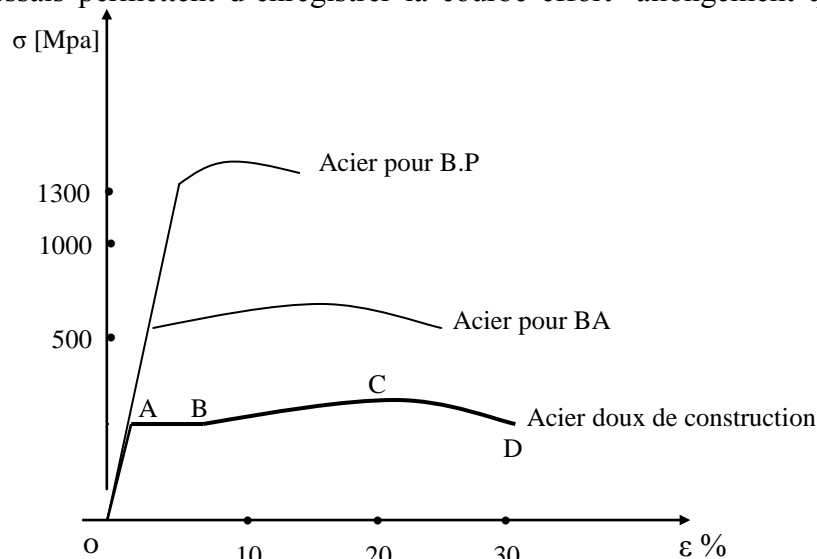
Considérons un essai de traction normalisé, qui consiste à exercer un effort de traction simple sur une éprouvette en acier (FeE 24 par exemple)

Dimensions normalisées de l'éprouvette :



Avec :  $l_o = 100 \text{ mm}$      $S_o = 150 \text{ mm}^2$      $\Phi = 13,8 \text{ mm}$

Les machines d'essais permettent d'enregistrer la courbe effort- allongement qui a l'allure suivante :



Examinons les différentes parties de cette courbe :

- **Partie OA**

C'est la zone de comportement élastique du matériau. « élastique » signifie que :

- les allongements sont proportionnels aux efforts appliqués ;
- si l'on supprime la charge, l'allongement revient à zéro.

Ce comportement élastique nécessite l'introduction d'un coefficient, appelé module d'élasticité- ou module d'Young-, noté E qui est tel que :

$$\frac{N}{S} = E \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

N représentant l'effort appliqué sur l'éprouvette. (Ce coefficient traduit la proportionnalité entre l'effort appliqué et l'allongement relatif).

Cette relation traduit la loi de Hooke.

Ordre de grandeur numérique de E :

<i>Aluminium</i> :	$E \approx 7 \cdot 10^4$ Mpa
<i>Acier</i> :	$E \approx 2 \cdot 10^5$ à $2,2 \cdot 10^5$ Mpa
<i>Cuivre</i> :	$E \approx 1,3 \cdot 10^5$ Mpa

• **Partie AB**

Dans cette zone, où l'allongement progresse à effort appliqué constant, se produisent des glissements à l'intérieur du matériau.

Notons que si l'on supprime l'effort, l'allongement ne s'annule pas entièrement : il subsiste une déformation permanente.

• **Partie BCD**

C'est une zone de grands allongements où l'on voit apparaître le phénomène de striction en C : il s'agit d'une brusque diminution de la section (qui constitue une amorce de rupture).

⇒ La rupture de l'éprouvette se produit en D.

### Coefficient de poisson $\nu$

Lorsqu'un matériau s'allonge dans une direction, son allongement s'accompagne d'un rétrécissement dans des directions perpendiculaires à celle de l'allongement (par exemple, pour une éprouvette cylindrique, on observe une diminution du diamètre).

Cette « contraction » est proportionnelle à l'effort appliqué tant que la contrainte de traction reste inférieure à la limite élastique.

Dans le cas d'une éprouvette cylindrique, de diamètre initial  $D_0$  et de diamètre déformé  $D_1$ , cette contraction relative s'écrit :

$$\varepsilon' = \frac{D_1 - D_0}{D_0}$$

Le coefficient de poisson s'exprime comme suit :

$$\nu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

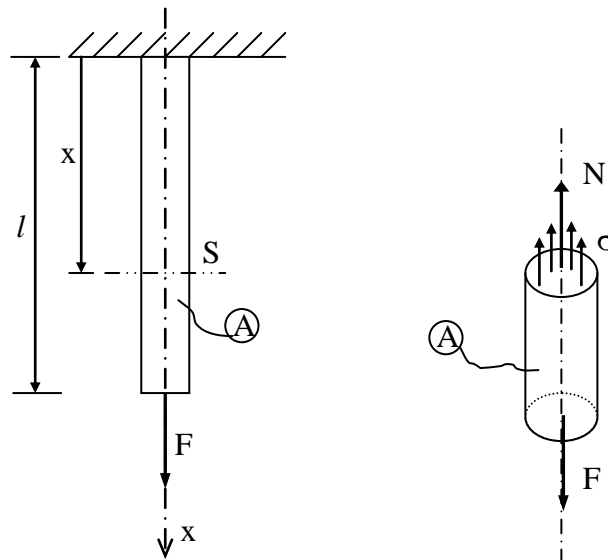
C'est un nombre sans unité, dont la valeur varie entre 0 et 0,5

### III) Etat de Contrainte:

#### III.1) Expression de la contrainte :

On suppose que le poids de la barre est négligé devant  $F$  (cas général).

D'après la définition vue au chapitre précédent, si nous isolons un tronçon de poutre sollicité en traction suivant son axe :



Nous constatons, en écrivant l'équilibre statique du système isolé que l'effort tranchant et le moment fléchissant sont nuls. Seul règne au sein du matériau un effort normal, et nous avons vu que l'effort normal a pour expression :

$$N(x) = \iint_{\Sigma(x)} \sigma \cdot ds$$

Or, sous réserve de l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie du matériau, nous pouvons dire que les efforts dans une section  $\Sigma(x)$  sont uniformément répartis. Cela signifie en outre que la composante  $\sigma$  de la contrainte est identique en tout point de la section  $\Sigma(x)$ .

Donc :

$$N(x) = \sigma \cdot \iint_S ds$$

Soit :

$$N(x) = \sigma \cdot S$$

Or l'équilibre statique permet d'écrire :

$$N(x) = F$$

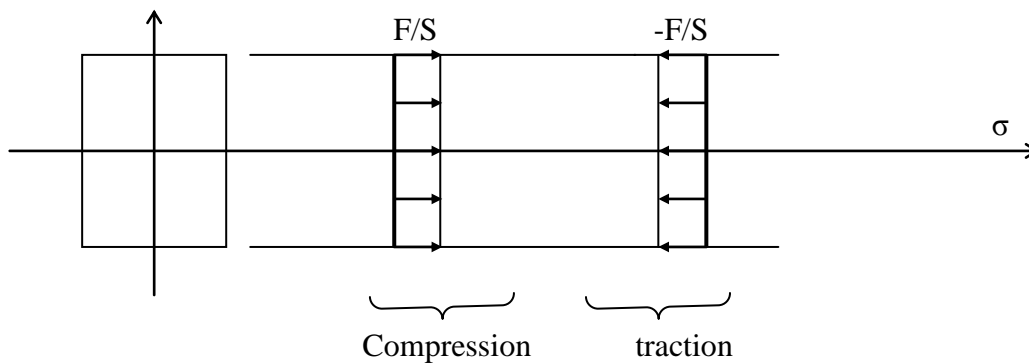
D'où l'expression de la contrainte de traction :

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Nota :

- si F est positif, il s'agit d'une compression ( $\sigma > 0$ ) ;
- si F est négatif, il s'agit d'une traction ( $\sigma < 0$ ).

### III.2) Diagramme de la contrainte :



### IV) Etat de déformations :

Reprenons la barre précédente soumise à une traction F ; il en résulte un allongement  $\Delta l$  (le poids de la barre étant négligé).

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la contrainte  $\sigma$  et l'allongement unitaire  $\varepsilon$  sont liés par la loi de Hooke :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

ce qui conduit à :  $\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$  soit :

$$\Delta l = \frac{F \cdot L}{E \cdot S}$$

avec :

- F en [N]
- L en [mm]
- E en [Mpa]
- S en [mm<sup>2</sup>]

### V ) condition de résistance :

La barre sollicitée à une traction doit pouvoir résister en toute sécurité, ou encore, les déformations doivent rester dans le domaine élastique. Aussi la contrainte normale  $\sigma$  doit-elle être inférieure ou au plus égale à une contrainte admissible ( contrainte limite ) appelée souvent résistance pratique et notée  $\sigma_p$ .

D'après le diagramme de traction , la limite d'élasticité est  $\sigma_e$ , de sorte que, pour des raisons de sécurité provenant surtout des hypothèses sur le matériau ( homogénéité et isotropie) et sur le mode d'application des forces, on doit avoir  $\sigma_p < \sigma_e$ , soit :

$$\sigma_p = \frac{\sigma_e}{s}$$

s, appelé coefficient de sécurité, peut varier de 2 à 5 (aciers) ; son choix dépend du type de la construction et il est en général laissé à l'initiative du constructeur.

La condition de résistance à la traction est alors :

$$\sigma \leq \sigma_p$$

### VI ) Applications :

#### Exemple 1 :

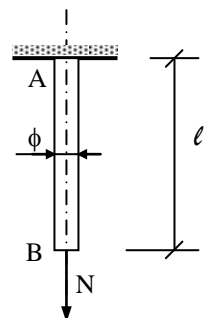
Soit un barreau de section constante 'S' et de longueur 'l', sollicité par un effort de traction N, comme l'indique la figure ci-contre :

On supposant que le poids du barreau est négligeable, déterminer :

- a- la contrainte de traction  $\sigma$  dans le barreau ;
- b- l'allongement de l'extrémité libre B.

On donne :

$$l = 1.50\text{m} , \phi = 30 \text{ mm} , N = 2\text{t} , E = 2.10^5 \text{ MPa}$$



*Solution :*

a- la contrainte  $\sigma = N/S$

$$\text{avec } S = \frac{\pi \cdot \phi^2}{4} = \frac{\pi \cdot 30^2}{4} = 706 \text{ mm}^2$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{2 \cdot 10^4}{706} = 28,32 \text{ Mpa}$$

b- l'allongement  $\Delta \ell = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot S} \Rightarrow \Delta \ell = 0,21 \text{ mm}$

## Chapitre 5 : Cisaillement Simple

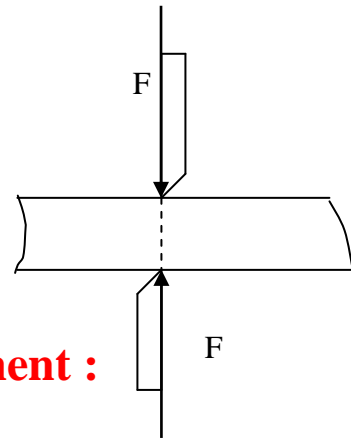
### I-Définitions :

Un corps est sollicité au cisaillement lorsqu'il est soumis à deux forces opposées qui tendent à le séparer en deux tronçons glissant l'un par rapport à l'autre suivant le plan d'une section.

$$\Rightarrow \boxed{N=0, \quad V \neq 0, \quad M_f=0, \quad T=0}$$

Exemple :

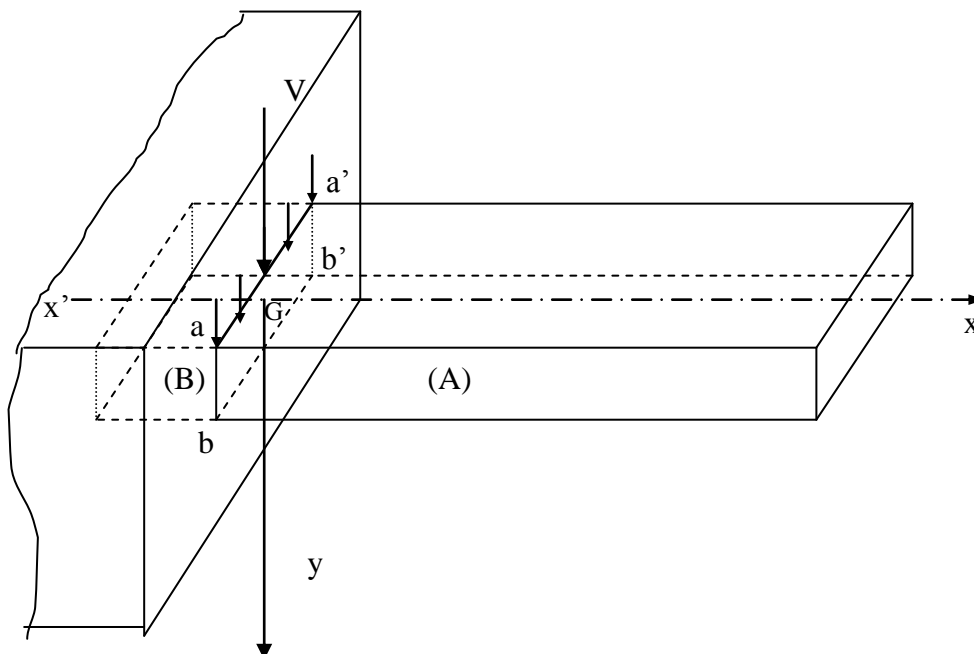
Découpage d'une tôle :



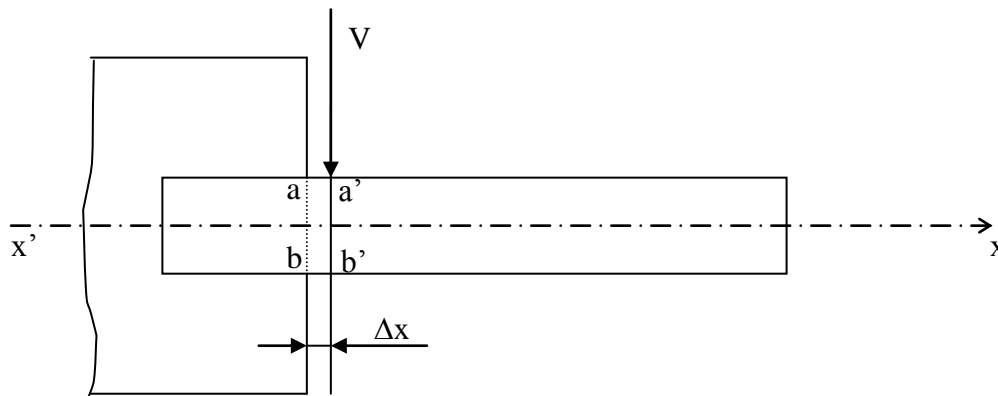
### II- Contrainte tangentielle de cisaillement :

#### a) Essai de cisaillement :

Soit un prisme, encastré à une extrémité, auquel on applique un effort  $V$  perpendiculaire à l'axe longitudinal  $xx'$  :



L'effort  $V$  agit dans le plan de la section droite d'encastrement  $aa'bb'$  et il est supposé uniformément réparti le long de l'arête  $aa'$ . En réalité, la section  $aa'bb'$  est très voisine de  $V$  mais à gauche de son plan d'application, du fait qu'il est impossible que  $V$  s'exerce rigoureusement dans le plan d'encastrement (fig.2). ( $\Delta x$  très petit.)



Remarque : on admet que la répartition des forces intérieures est uniforme, ce qui entraîne la répartition uniforme des contraintes.

### b) Contrainte tangentielle :

Mise en équilibre du tronçon (A) : La section droite  $S$  ( $aa'bb'$ ) sépare le prisme en deux tronçons A et B. Pour la mise en équilibre, négligeons  $\Delta x$  (cas idéal du cisaillement). Le tronçon A est soumis :

- à son poids, négligé devant  $V$ ,
- à  $V$ , l'effort tranchant,
- à l'action du tronçon B (forces intérieures) qui se traduit par :

$$V' = \Sigma (\tau \cdot dS) = \tau \cdot S$$

Par projection sur  $Gy$ , on obtient :  $V - \tau \cdot S = 0$

La valeur moyenne de la contrainte tangentielle de cisaillement est :

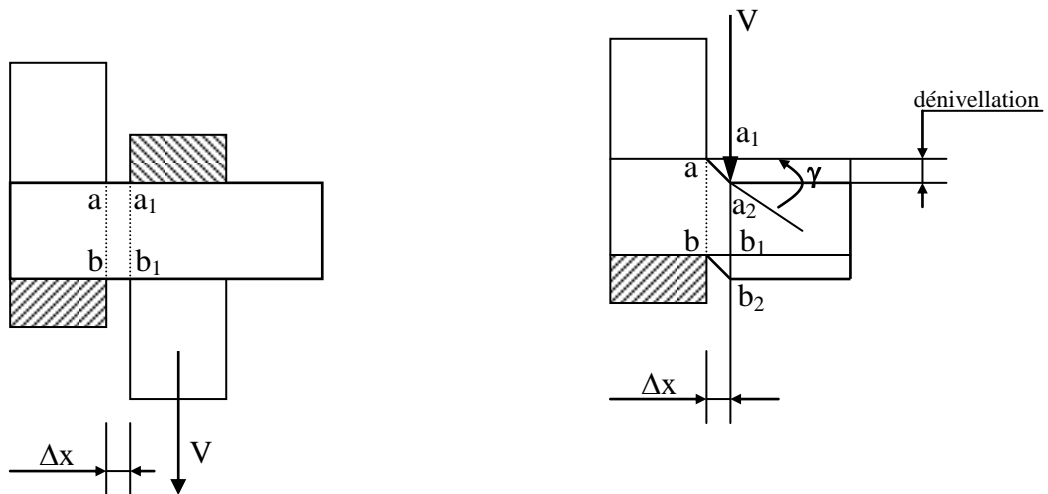
$$\tau = \frac{V}{S}$$

### III – Etat de déformations :

L'essai de cisaillement peut être effectué comme l'indique le montage de la figure (3), l'effort  $V$  s'exerçant lentement.

Rappelons que les sections  $ab$  et  $a_1b_1$  sont très voisines et distantes de  $\Delta x$ .

Après déformation, la section  $a_1b_1$  vient en  $a_2b_2$  et la dénivellation  $a_1a_2$  mesure alors le glissement transversal (fig.4).



Si on admet que  $aa_2$  reste rectiligne, on définit la déformation par le rapport :

$$\boxed{\tan \gamma = \frac{a_1a_2}{\Delta x}} \quad \text{avec } \gamma, \text{ angle de glissement ;}$$

par ailleurs, puisque nous restons dans le domaine élastique, nous avons :

$$\frac{V}{a_1a_2} = C_{te} \quad (\text{ par analogie avec l'essai de traction } ) \text{ et } \tan \gamma \approx \gamma$$

$$\text{soit, } \frac{\frac{V}{a_1a_2}}{\Delta x} = G, \text{ d'où } \boxed{\gamma = \frac{V}{G.S}}$$

avec :

- V en [ N ]
- G en [ N/mm<sup>2</sup> ]
- S en [ mm<sup>2</sup> ]
- γ en [ rd ]

on peut encore écrire  $\tau = G.\gamma$  ( relation analogue à  $\sigma = E .\varepsilon$  )

**G** est appelé **module d'élasticité transversale** ou **module de coulomb**

Exemples :

Pour les métaux courants, on a constaté que  $G = 0.4 E$ , par exemple :

Aciers : $E = 200\ 000\ \text{N/mm}^2$	et $G = 80\ 000\ \text{N/mm}^2$ ;
Fontes : $E = 100\ 000\ \text{N/mm}^2$	et $G = 40\ 000\ \text{N/mm}^2$ .

**IV- Condition de résistance :**

Pour qu'une pièce résiste en toute sécurité au cisaillement, il faut que la contrainte tangentielle soit au plus égale à la résistance pratique au cisaillement  $\tau_p$ .

$$\frac{V}{S} \leq \tau_p$$

d'après les résultats de l'essai de cisaillement, peut s'exprimer en fonction de ( résistance pratique à la traction) ; par exemple :

$\tau_p = \frac{1}{2} \sigma_p$	pour les aciers doux, et mi-doux,
$\tau_p = \sigma_p$	pour les aciers très durs et pour la fonte.

**N.B**

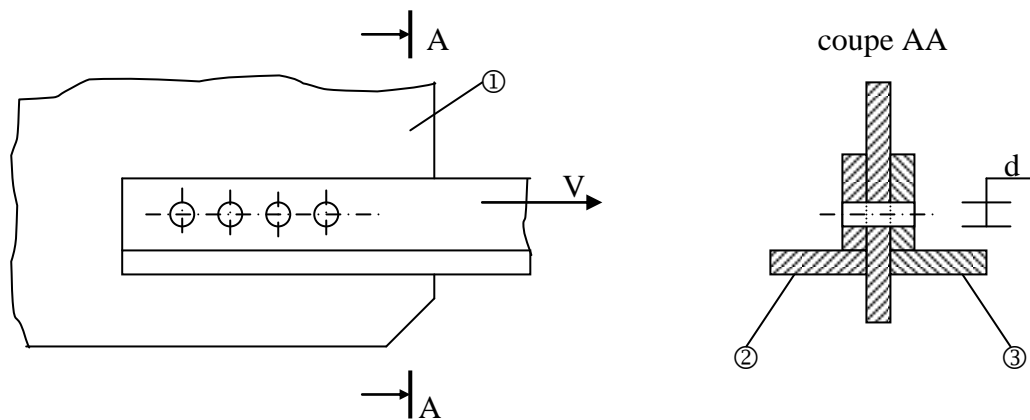
Si une pièce doit céder au cisaillement ( poinçonnage), il faut que la contrainte tangentielle atteigne une valeur au moins égale à la résistance à la rupture par cisaillement  $\tau_r$  :

$$\frac{V}{S} \geq \tau_r \quad \text{ou} \quad V \geq S. \tau_r$$

**V- Applications :**

**V-1) Assemblage par rivet :**

Il s'agit d'assembler les deux cornières (2) et (3) sur le gousset (1), voir figure ci-après :



V est l'effort qui s'exerce sur l'ensemble des cornières ; les rivets en acier doux ont pour diamètre d et pour résistance pratique  $\tau_p$ . Déterminer le nombre de rivets. ( n = ? )

*Solution :*

Chaque rivet a tendance à se cisailer suivant deux sections.

Condition de résistance au cisaillement :  $\frac{V}{S} \leq \tau_p$

avec

$$S = 2.n.S_0$$

et

$$S_0 = \frac{\pi.d^2}{4}$$

Soit

$$n \geq \frac{V}{2.S_0.\tau_p}$$

A.N.:

Pour V = 100 kN, d=16mm et  $\tau_p= 70 \text{ N/mm}^2$

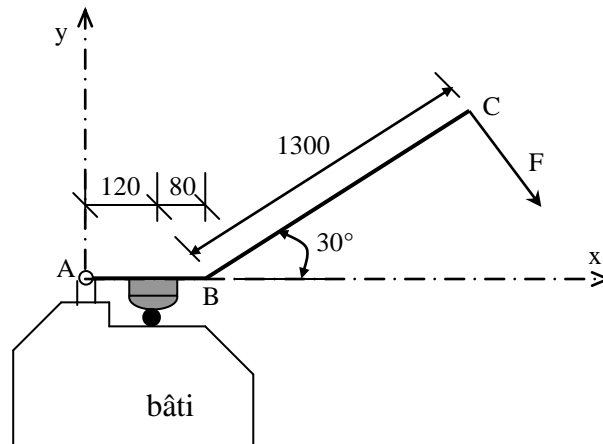
On a

$$n \geq \frac{1.10^5}{2 \left( \frac{\pi.16^2}{4} \right) 70}$$

$$n \geq 3.5 \text{ on prendra donc 4 rivets. } \Rightarrow \boxed{n = 4}$$

## V-2) Cisaille à main :

Soit une cisaille représentée schématiquement par la figure ci-dessous .



L'effort normal  $F=90$  N est appliqué en C au levier coudé ABC articulé autour de l'axe A.

Déterminer la capacité de la cisaille ( possibilité de couper un rond ou fil en acier mi-doux de diamètre  $d$ ).

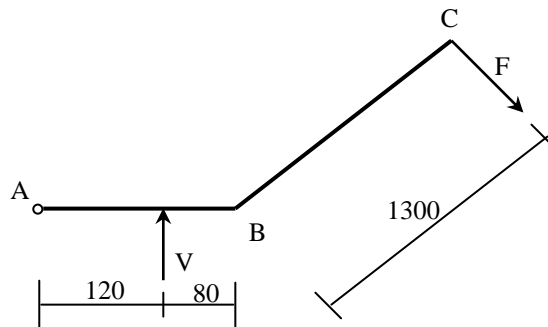
On donne la résistance à la rupture par cisaillement du rond :  $\tau_r = 340$  Mpa

*Solution :*

a-statique :

soit  $V$  l'effort appliqué du levier sur le rond ( qui est égal à l'effort appliqué du bâti sur le rond).

Etudions l'équilibre du levier ABC :



$$120.V - (1300 + 200 \cos 30^\circ) .F = 0 \quad \text{d'où} \quad V = 1105 \text{ N}$$

b- diamètre du rond : le rond doit céder sous l'action de  $V$  :

$$\text{c-a-d : } \frac{V}{S} \geq \tau_r \quad \text{avec} \quad S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad \text{d'où : } \frac{\pi \cdot d^2}{4} \leq \frac{V}{\tau_r}$$

on trouve :  $d \leq 2$

## Chapitre 6 : Torsion des poutres Circulaires

tout ce que nous allons développer dans ce paragraphe n'est valable que pour des sections circulaires et ne saurait être appliqué à des poutres de section quelconque.

### I-Définition de la torsion :

Une poutre est sollicitée à la torsion lorsque le système des forces extérieures crée des efforts internes représentables par un torseur dont le seul élément de réduction au centre de gravité de chaque section droite est le moment de torsion  $\mathbf{T}$ .

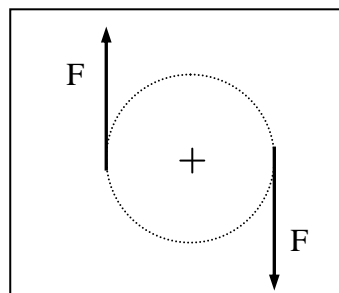
$$\Rightarrow \boxed{N=0 ; V=0 ; M_f = 0 \text{ et } \mathbf{T} \neq 0}$$

### II-Effort extérieurs définissant un état de torsion :

Le fait que le moment de torsion (porté par  $x$ ) ne soit pas nul entraîne que les forces extérieures doivent obligatoirement appartenir au plan  $(O,y,z)$ .

De plus la résultante des sollicitations étant nulle, les efforts extérieurs sont nécessairement deux à deux- de même intensité et de sens opposés.

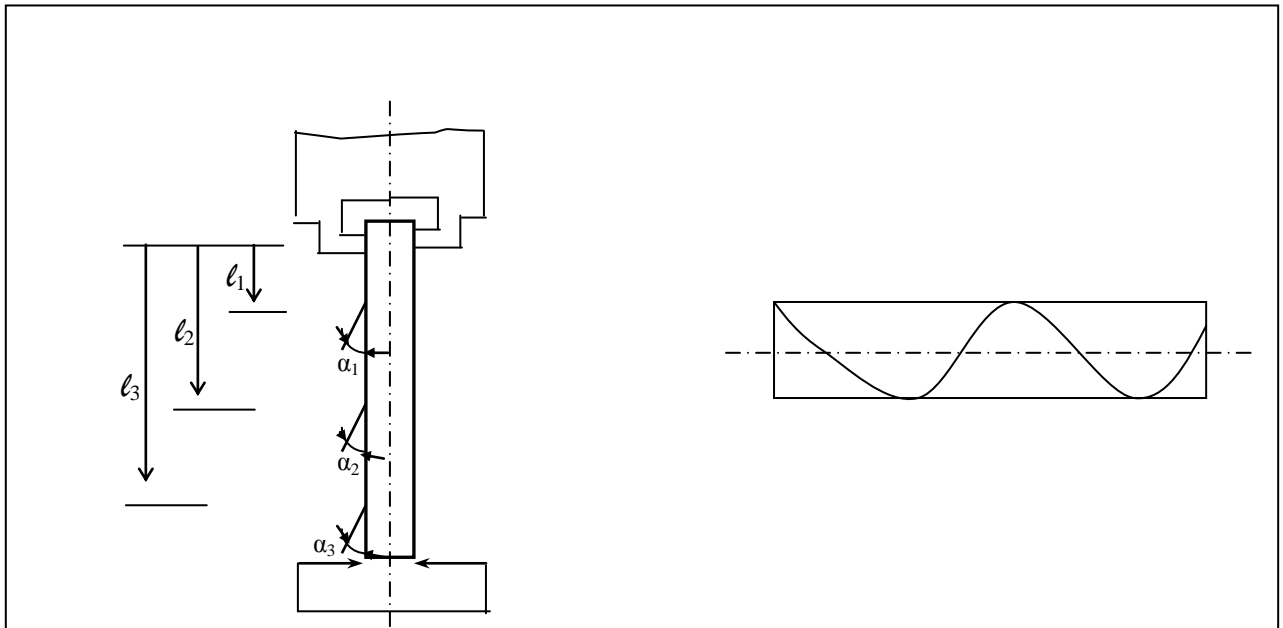
Le système d'efforts le plus élémentaire conduisant à un état de torsion est donc un couple :



### III-Aspect expérimental :

Soit une barre circulaire sollicitée à la torsion, on fixe sur une génératrice droite des tiges témoins.

Ces tiges sont repérées par les distances  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  par rapport à l'extrémité fixe A.



Lorsqu'on sollicite en torsion une poutre circulaire, on constate :

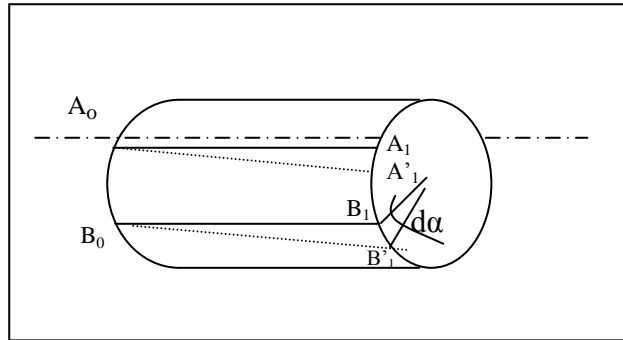
- que toute section droite reste droite et circulaire, sans variation de rayon, au cours de la déformation.
- Que la distance axiale séparant deux sections droites ne varie pas au cours de la déformation.
- Qu'une section quelconque tourne en entier dans son plan d'un angle proportionnel à son abscisse.

### IV -Calcul des contraintes de torsion :

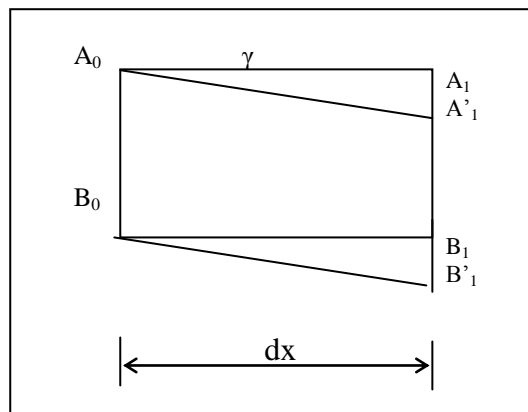
L'effort normal étant nul, les seules contraintes existantes se développent dans les plans de section droite. en outre, elles sont orthogonales au rayon. Enfin, elles sont proportionnelles à la distance au centre de la section.

*a- Expression des contraintes :*

Isolons, à l'intérieur d'une poutre circulaire, un cylindre de matière :



Si on développe en plan le rectangle  $A_0A_1B_1B_0$ , on constate qu'il se déforme en parallélogramme :



L'angle de déformation  $\gamma$  est appelé : distorsion.

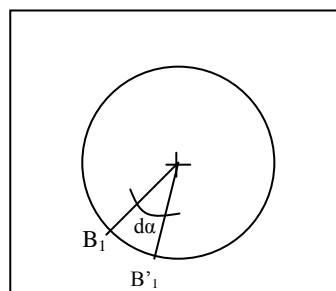
On peut écrire une deuxième expression de la loi de Hooke sous la forme :

$$\tau = \gamma \cdot G$$

où  $G$  est le module d'élasticité transversal ( ou module de Coulomb).

Evaluons le déplacement de  $A_1$ , en tenant compte du fait que l'angle  $\gamma$  est petit ( on assimilera  $\text{tg } \gamma$  à  $\gamma$  ).

$$A_1A'_1 = B_1B'_1 = \gamma \cdot dx$$



D'où l'expression de  $\gamma$  :

$$\gamma = r \cdot \frac{d\alpha}{dx}$$

$\frac{d\alpha}{dx}$  représente l'angle de torsion par unité de longueur. C'est une valeur constante qu'on note  $\theta$ . ( $\theta$  est donc l'angle de rotation de deux sections distantes de l'unité de longueur).

Compte tenu de la loi de Hooke, on peut exprimer la contrainte  $\tau$  sous la forme :

$$\tau = G \cdot \theta \cdot r$$

### V)- Déformation angulaire unitaire :

exprimons la valeur de la sollicitation de torsion en fonction des contraintes  $\tau$  :

$$M_t = \iint_S \tau \cdot r \cdot ds$$

en remplaçant  $\tau$  par sa valeur, il vient :

$$M_t = \iint_S r^2 \cdot G \cdot \theta \cdot ds$$

et  $G$  et  $\theta$  étant constants :

$$M_t = G \cdot \theta \cdot \iint_S r^2 ds$$

On reconnaît dans cette expression le moment quadratique polaire :

$$I_0 = \iint_S r^2 ds$$

Qui vaut :

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

D'où l'expression de la déformation angulaire unitaire :

$$\theta = \frac{M_t}{G I_0}$$

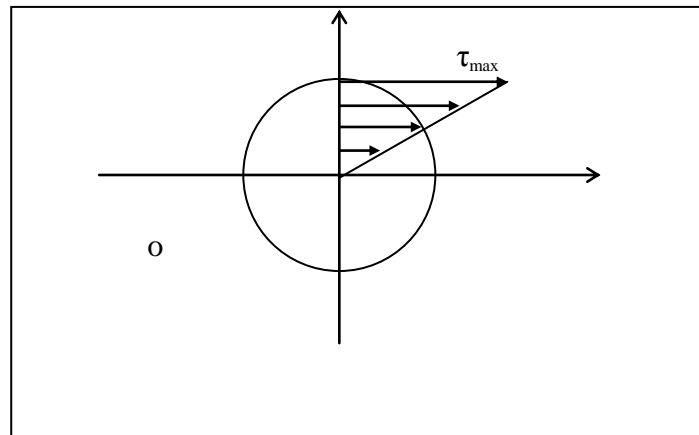
### VI-Deuxième expression de la contrainte tangentielle $\tau$ :

En remplaçant  $\theta$  par sa valeur dans la première expression de  $\tau$ , on obtient :

$$\tau = \frac{M_t}{I_0} \cdot r$$

Ce résultat confirme ce que nous disions au début du paragraphe3 : les contraintes sont proportionnelles à la distance du point considéré au centre de la section.

On peut alors tracer le graphe de répartition de la contrainte dans une section :

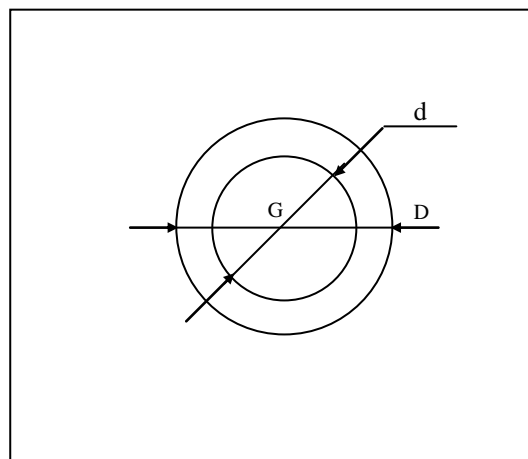


- la contrainte tangentielle est maximale sur les fibres extérieures (c'est à dire pour  $r = R$ ) ;
- la quantité  $\frac{I_0}{R}$  est appelée « module de torsion »

## VII-Expression du module de torsion d'un tube :

### a- Calcul exact :

Considérons un tube de section limitée par les circonférences de diamètres  $d$  et  $D$ .



et calculons le moment polaire de cette section :

$$I_0 = 2 \pi \int_{d/2}^{D/2} r^3 dr = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \left[ 1 - \frac{d^4}{D^4} \right]$$

d'où le module de torsion :

$$\frac{I_0}{R} = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \left[ 1 - \frac{d^4}{D^4} \right]$$

si on avait calculé le module de torsion d'une poutre pleine de diamètre D, on aurait trouvé :

$$\frac{I_0}{R} = \frac{\pi \cdot D^3}{16}$$

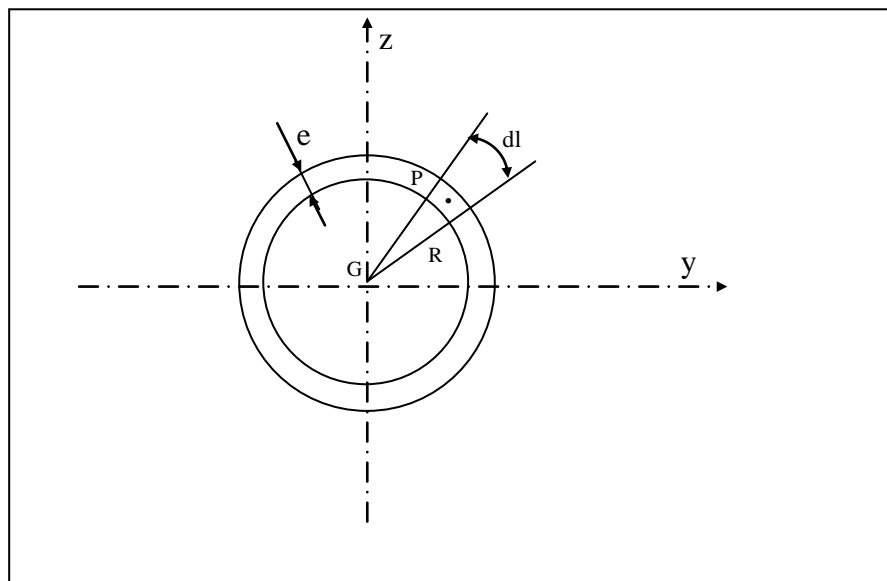
**Conclusion :** Le module de torsion d'un tube est plus faibles que celui d'un cylindre plein de même diamètre ( extérieur) . donc le tube est plus résistant en torsion que le cylindre plein.

**b-Calcul approché :**

L'approximation consiste à dire que si l'épaisseur du tube est faible devant le rayon, on peut considérer que la contrainte  $\tau$  est constante dans l'épaisseur.

$$\tau \cdot e = c^{te} = K$$

on va déterminer cette constante K pour pouvoir exprimer la contrainte.



Par définition du moment de torsion, nous pouvons écrire :

$$\iint_{(S)} \overrightarrow{GP} \wedge \vec{\tau} \, ds = Mt \cdot \vec{x}$$

ou encore :

$$\vec{x} \cdot \iint_{(S)} \overrightarrow{GP} \wedge \vec{\tau} \, ds = Mt$$

or :  $ds = e \cdot dl$  et  $\|\vec{\tau}\| = \frac{K}{e}$

d'où  $Mt = \int_S R \cdot K \cdot dl = K \cdot \int_S R \cdot dl$

de plus,  $\int_S R \cdot dl = 2A$ , où A représente l'aire totale délimitée par la circonférence de rayon R.

on peut donc exprimer la constante K sous la forme :

$$K = \frac{Mt}{2A}$$

D'où l'expression de la contrainte :

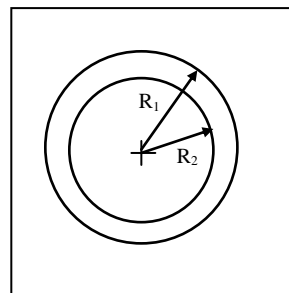
$$\tau = \frac{Mt}{2A \cdot e}$$

### VIII-Applications :

a) Exemple 1 :

b)

un tube circulaire en acier de 400 cm de longueur est encastré à une extrémité et libre à l'autre. Ce tube a un rayon extérieur  $R_1=75$  mm et un rayon intérieur  $R_2 = 60$  mm . Il est soumis à son extrémité libre à un moment de torsion  $Mt = 30$  kN.m ;



déterminer la contrainte de cisaillement.

*Solution :*

On a

$$\tau = \frac{Mt}{2.e.A}$$

où

$$e = 15 \text{ mm}$$

et

$$A = \pi . R^2 = \pi . \left( \frac{75 + 60}{2} \right)^2$$

$$= 14306 \text{ mm}^2$$

et la contrainte de cisaillement  $\tau$  est égale à

$$\tau = \frac{30.10^6}{2.15.14306} = 69.9 \text{ MPa}$$

### b- Exemple 2 :

pour cet exemple, on suppose qu'on a une barre circulaire à la place d'un tube, mais les autres données sont identiques à celles de l'exemple précédent. Déterminer la valeur de la contrainte  $\tau$  et la valeur de l'angle de rotation totale  $\theta$ .

On donne  $G = 80\,000 \text{ Mpa}$ .

*Solution :*

On a

$$\tau = \frac{Mt}{I_o} . r$$

$$\text{avec } I_o = \frac{\pi . d^4}{32} = \frac{\pi . 75^4}{2} = 49.7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

et la contrainte de cisaillement maximale est égale à :

$$\tau = \frac{30 \cdot 10^6 \cdot 75}{49.7 \cdot 10^6} = 45,3 \text{ Mpa}$$

l'angle de rotation totale à l'extrémité libre est égale à

$$\theta = \frac{Mt.l}{I_o.G} = \frac{30 \cdot 10^6 \cdot 4000}{49.7 \cdot 10^6 \cdot 80\,000}$$

$$\theta = 0.0302 \text{ rd} = 1.73^\circ$$

## Chapitre 7 :

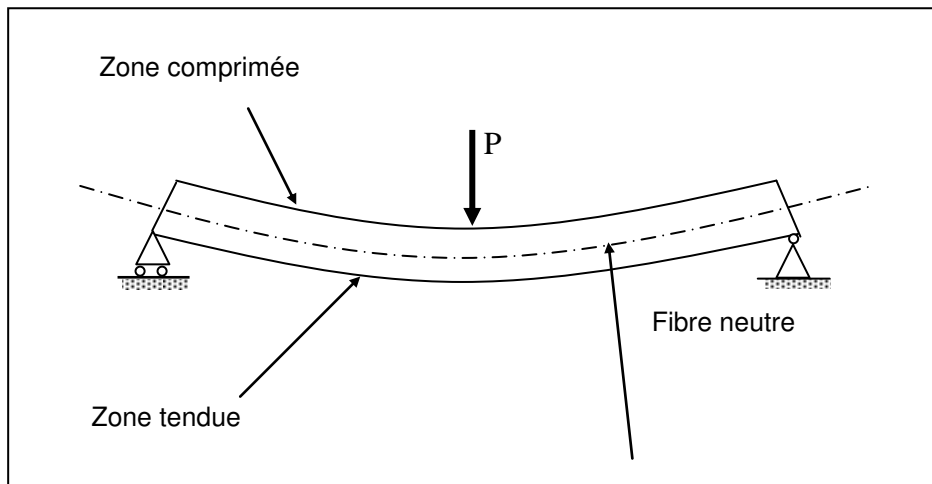
## FLEXION SIMPLE

### I-Introduction expérimentale :

considérons une poutre reposant sur deux appuis soumise à une charge concentrée verticale.

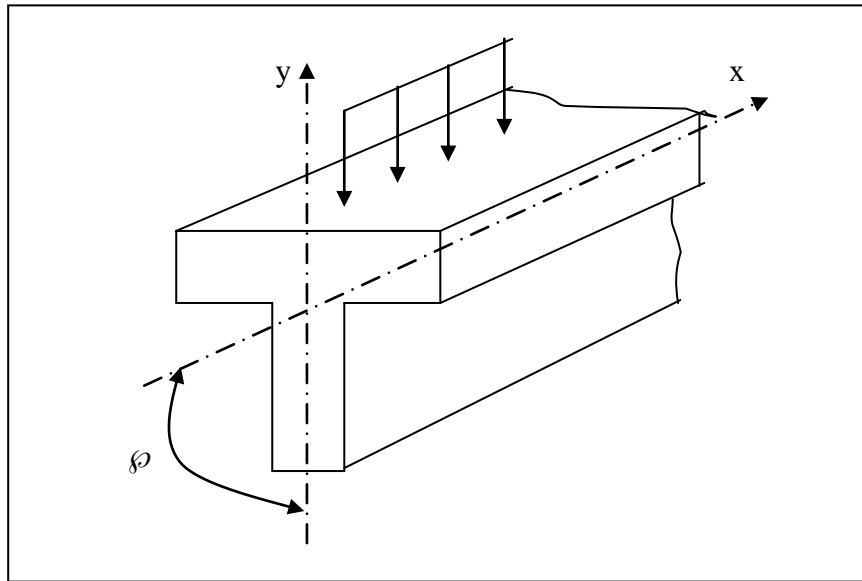
Après déformation, cette poutre accuse un flèche ( déplacement vertical des différents points, d'où le nom de flexion ) et on constate que les fibres situées en partie supérieure sont sollicitées en compression tandis que celles qui sont situées en partie inférieure sont sollicitées en traction.

Entre ces deux régions, il existe une fibre qui n'est ni tendue ni comprimée : c'est la fibre neutre.



### Hypothèses :

On considèrera dans cette étude des poutres à plan moyen, c'est-à-dire pour lesquelles  $y$  est axe de symétrie de la section droite. En outre, toutes les forces sont appliquées dans le plan ( $xoy$ ). ( les couples et moments sont portés par  $z$ ).



Les matériaux sont supposés homogènes. La fibre neutre est donc confondue avec la ligne moyenne ( c'est-à-dire que la fibre neutre passe par le centre de gravité de toutes les sections droites).

### Différents types de flexion plane :

#### A – Flexion pure :

Cette flexion correspond au cas où les sollicitations dans une section quelconque se réduisent au seul moment fléchissant ( pas d'effort tranchant ).

Remarquons que ce cas, bien que très intéressant d'un point de vue théorique car il permet de dissocier les effets du moment fléchissant de ceux de l'effort tranchant, n'apparaît pratiquement jamais dans la réalité.

Expérimentalement, on observe un comportement de flexion pure dans un cas comme celui-ci :

**B- Flexion simple :**

C'est le cas où les sollicitations dans une section s'expriment sous la forme du torseur :

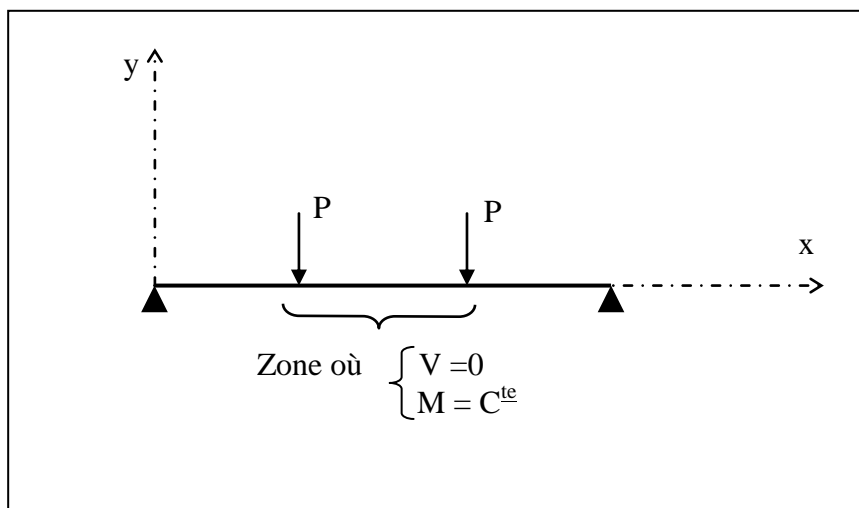
$$\begin{cases} V(x) \\ M(x) \end{cases}$$

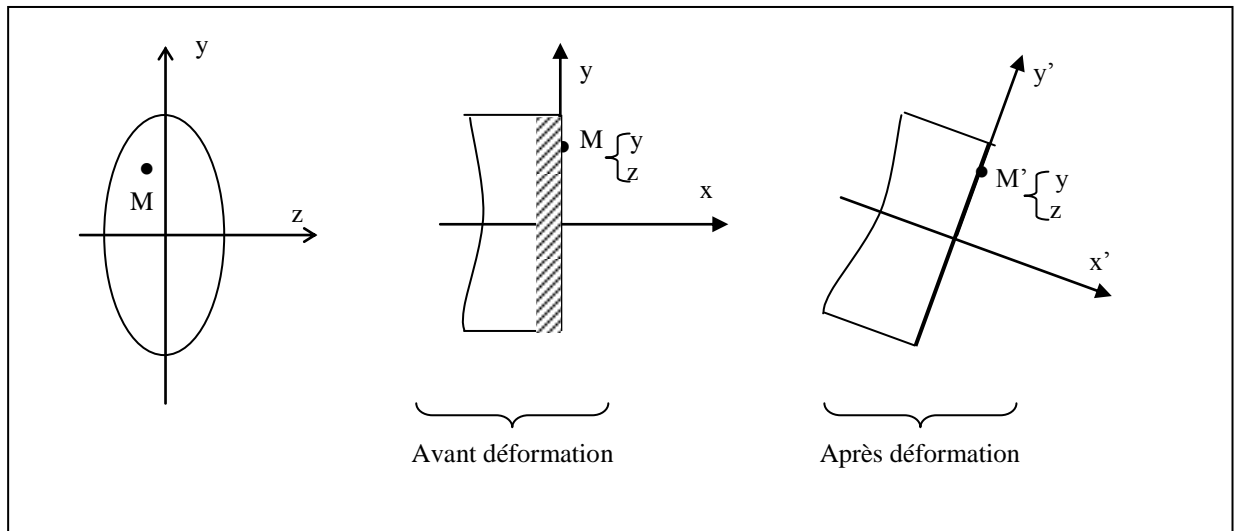
Dans ce cas, on mettra en évidence par le calcul l'effet de l'effort tranchant associé à celui du moment fléchissant.

**II- Etude de la flexion simple :**

**II-1 contrainte normale due au moment fléchissant :**

Considérons une poutre sur deux appuis soumise à une charge quelconque. Nous allons examiner le comportement d'une section  $\Sigma (x_0)$  et reprendre l'hypothèse de Navier-Bernoulli :





Pour que l'hypothèse de Navier-Bernoulli soit vérifiée, il est nécessaire que l'allongement relatif de la fibre sur laquelle est située le point M soit une fonction linéaire des coordonnées du point M dans la section  $\Sigma(x)$ . D'après la loi de Hooke, il en est de même pour la contrainte, que nous écrivons :

$$\sigma = a + b.y + c.z$$

comme nous l'avons vu à la fin du chapitre 3, les sollicitations s'écrivent :

$$N(x_0) = \iint_{\Sigma(x_0)} \sigma(y,z) dS \quad (1)$$

$$M(x_0) = \iint_{\Sigma(x_0)} y \cdot \sigma(y,z) dS \quad (2)$$

Développons l'expression (1) en remarquant que l'effort normal est nul :

$$\iint_{\Sigma(x_0)} a \cdot dS + \iint_{\Sigma(x_0)} b \cdot y \cdot dS + \iint_{\Sigma(x_0)} c \cdot z \cdot dS = 0$$

les axes y et z passant par le centre de gravité G de la section, on a (d'après la définition du centre de gravité) :

$$\iint_{\Sigma(x_0)} y \cdot dS = \iint_{\Sigma(x_0)} z \cdot dS = 0$$

on en déduit donc :

$$a = 0$$

développons de même l'expression (2) :

$$\iint_{\Sigma(x_0)} a.y.dS + \iint_{\Sigma(x_0)} b.y^2.dS + \iint_{\Sigma(x_0)} c.y.z.dS = M(x_0)$$

le troisième terme du premier membre est nul :  $\iint_{\Sigma(x_0)} .y.z.dS$  étant le produit d'inertie d'une section symétrique par rapport à l'axe y.

on reconnaît en outre la quantité  $\iint_{\Sigma(x_0)} y^2.dS$  qu'est le moment quadratique de la section  $\Sigma (x_0)$  par rapport à l'axe z.

on déduit de cette équation l'expression de la constante b :  $b = \frac{M(x_0)}{Iz}$

en exprimant la nullité du moment fléchissant porté par y ( problème plan) on déduit très aisément :

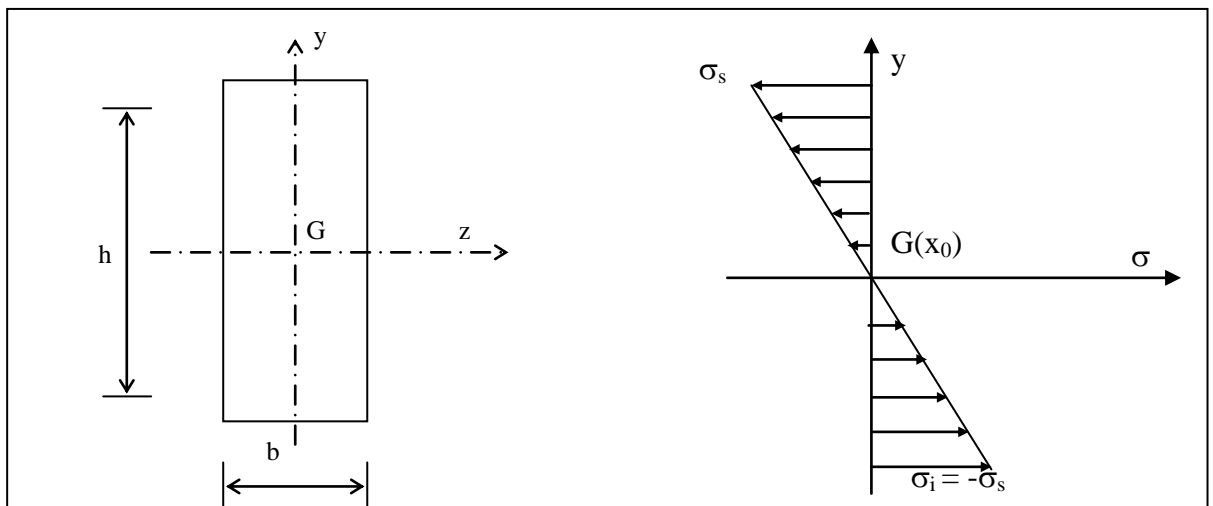
$$c = 0$$

d'où l'expression de la contrainte normale en un point M(y,z) de la section  $\Sigma (x_0)$  :

$$\sigma(x_0,y) = \frac{M(x_0)}{Iz} \cdot y$$

**Exemple :** Variation de la contrainte normale dans une section rectangulaire.

Considérons la section suivante  $\Sigma (x_0)$  d'une poutre droite :



Le moment quadratique par rapport à l'axe z s'écrit :  $Iz = \frac{bh^3}{12}$

faisons varier  $y$  de  $-\frac{h}{2}$  à  $+\frac{h}{2}$ . Les contraintes en fibres supérieure et inférieure s'écrivent :

$$\sigma_s = -\frac{6.M(x_0)}{bh^2} \qquad \sigma_i = +\frac{6.M(x_0)}{bh^2}$$

le diagramme de répartition des contraintes normales dans la section  $\Sigma(x_0)$  est donc : voir ci-dessus

### III- Déformations :

Nous allons dans ce paragraphe établir des relations entre la déformation de la poutre et le moment fléchissant qui la sollicite.

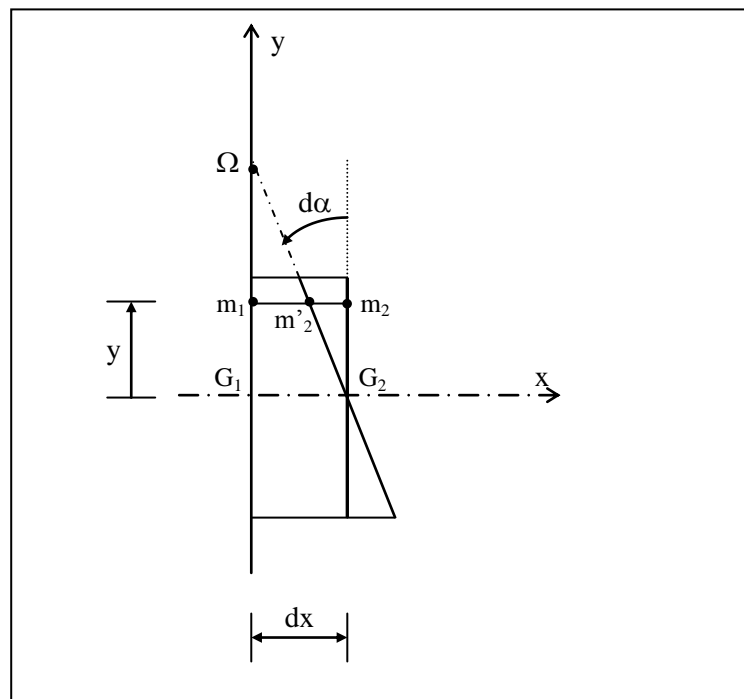
Considérons un tronçon de longueur  $dx$  d'une poutre avant et après déformation.

Considérons une fibre  $m_1m_2$  située à la distance  $y$  de la fibre neutre.

Après déformation cette fibre est représentée par  $m_1m'_2$ .

La déformation relative s'écrit :

$$\varepsilon = \frac{m'_2m_2}{m_1m_2}$$



les déformations étant petites, on peut écrire :

$$m_1 m_2 = y \cdot d\alpha$$

en outre :  $m_1 m_2 = dx$

la déformation s'écrit donc :

$$\varepsilon = y \cdot \frac{d\alpha}{dx}$$

et d'après la loi de Hooke, la contrainte a pour expression :

$$\sigma = E \cdot y \cdot \frac{d\alpha}{dx}$$

exprimons à présent le rayon de courbure de la fibre neutre :

$$R = \Omega \cdot G_2 \approx \frac{dx}{d\alpha}$$

en remplaçant dans l'expression de la contrainte, il vient :  $\sigma = \frac{E}{R} \cdot y$

puis en égalant à la valeur de la contrainte normale en flexion pure, on obtient une relation entre la courbure  $\chi$  ( qui est l'inverse du rayon de courbure) et le moment fléchissant :

$$\chi = \frac{1}{R} = \frac{M(x)}{E \cdot I_z}$$

le terme  $\frac{1}{E \cdot I_z}$  est appelé « flexibilité » de la poutre, inverse de la rigidité en flexion :  $E \cdot I_z$ .

**Nota** : la courbure représente en outre la rotation de la section :

$$\chi = \frac{d\alpha}{dx}$$

détermination de la configuration déformée de la poutre :

on démontre, en géométrie analytique, que le rayon de courbure d'une courbe d'équation  $y = f(x)$  s'écrit :

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

et, les déformations étant faibles,  $y'^2$  est négligeable devant 1 . on peut donc exprimer R sous la forme :

$$R = \frac{1}{y''}$$

Si  $y = f(x)$  est l'équation de l'allure déformée de la poutre, nous pouvons écrire :

$$y'' = \frac{M(x)}{E.I_z}$$

c'est l'équation différentielle de la « déformée ».

• **Processus d'intégration :**

En intégrant une première fois l'équation (1), on obtient la pente ou la rotation de la déformée à l'abscisse  $x$  qui est égale à :

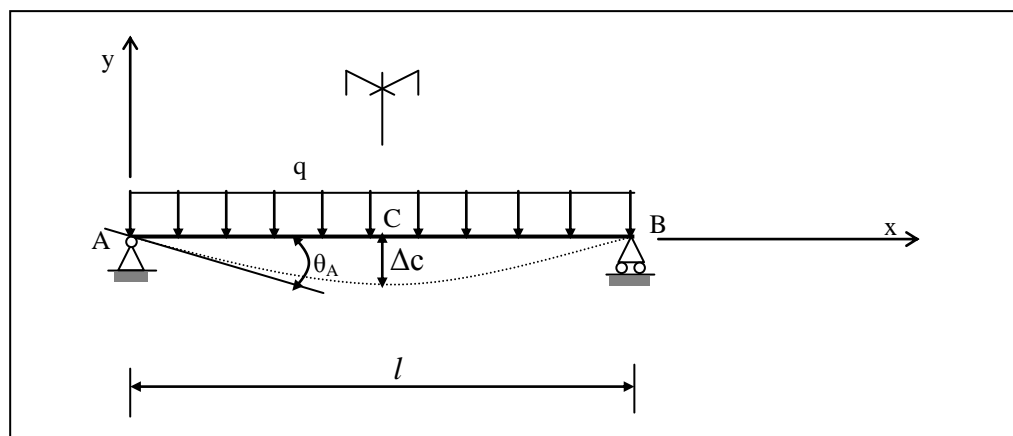
$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta = \theta \text{ [rd]} \quad (2) \quad (\text{car } \theta \text{ est petit})$$

de l'équation (2) on peut écrire :  $\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$  d'où  $d\theta = \frac{M}{EI} .dx$

en intégrant une deuxième fois l'équation (1), on obtient la flèche  $y$  de la déformée à l'abscisse  $x$

**Exemple :**

\* On considère une poutre droite qui repose sur deux appuis simples et soumise à une charge uniformément répartie  $q$  :



\* Déterminer les équations de la déformée et sa pente, puis calculer la rotation  $\theta_A$  de la déformée à l'appui A et la valeur de la flèche  $\Delta_c$  à mi-portée de la poutre . (on suppose que  $EI$  est constante ).

**Solution :**

On a

$$R_A = R_B = ql/2$$

Et

$$M_f(x) = (ql/2).x - (ql/2).x^2$$

De l'équation (1) on a :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{q.l}{2}.x - \frac{q}{2}.x^2 \right)$$

En intégrant une première fois, on a :  $EI \cdot \frac{dy}{dx} = EI \cdot \theta = \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C_1$

En intégrant une deuxième fois, on aura :  $EI \cdot y = \frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} + C_1 \cdot x + C_2$

On détermine les constantes d'intégration par les conditions aux limites ( C.A.L), aux appuis A et B.

- en A , pour  $x = 0$ ,  $y_A = y(0) = 0$  donc,  $C_2 = 0$

- en B, pour  $x = l$ ,  $y_B = y(l) = 0$ , d'où, en remplaçant ces valeurs dans l'équation (1),

on aura  $\frac{ql^4}{12} - \frac{ql^4}{24} + C_1 \cdot l = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{ql^3}{24}$

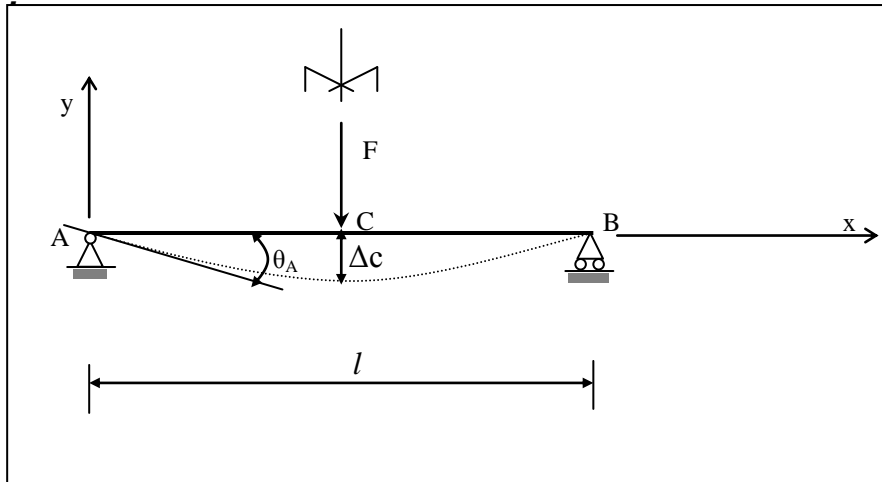
d'où on trouve :

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{q.l.x^2}{4EI} - \frac{q.x^3}{6EI} - \frac{q.l^3}{24EI}$$

$$y(x) = \frac{q.l.x^3}{12EI} - \frac{q.x^4}{24EI} - \frac{q.l^3.x}{24EI}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{pour } x = 0 & \rightarrow \theta_A = -\frac{q.l^3}{24EI} \\ \text{pour } x = l/2 & \rightarrow \Delta c = y(l/2) = -\frac{5q.l^4}{384EI} \end{cases}$$

**Exemple 2 :**



\* Déterminer les équations de la déformée et sa pente, puis calculer la rotation  $\theta_A$  de la déformée à l'appui A et la valeur de la flèche  $\Delta c$  à mi-portée de la poutre . (on suppose que  $EI$  est constante ).

**Solution :**

On a

$$R_A = R_B = F/2$$

Et

$$\text{Pour } 0 \leq x \leq l/2 : M_f(x) = R_A \cdot x = (F/2) \cdot x \quad (1)$$

$$\text{Pour } l/2 \leq x \leq l : M_f(x) = R_B \cdot (l-x) = (F/2) \cdot (l-x)$$

De l'équation (1) on a :

Pour  $0 \leq x \leq l/2$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{F}{2} \cdot x \right)$$

En intégrant une première fois, on a :  $EI \cdot \frac{dy}{dx} = EI \cdot \theta = \frac{F \cdot x^2}{4} + C_1 \quad (1)$

En intégrant une deuxième fois, on aura :  $EI \cdot y = \frac{F \cdot x^3}{12} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (2)$

On détermine les constantes d'intégration par les conditions aux limites ( C.A.L), aux appuis A et B.

- en A , pour  $x = 0$ ,  $y_A = y(0) = 0$  donc,  $C_2 = 0$
- en C, pour  $x = l/2$ ,  $\theta_B = \theta(l/2) = 0$ , d'où, en remplaçant ces valeurs dans l'équation (1), on aura

$$\frac{F(l)^2}{4} + C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{F.l^2}{16}$$

d'où on trouve :

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left( \frac{F}{4}x^2 - \frac{F.l^2}{16} \right)$$

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{F}{12}x^3 - \frac{F.l^2}{16}x \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{pour } x = 0 & \rightarrow \theta_A = -\frac{F.l^2}{16.EI} \\ \text{pour } x = l/2 & \rightarrow \Delta c = y(l/2) = -\frac{F.l^3}{48.EI} \end{cases}$$

## IV-Cisaillement dans les poutres fléchies :

### IV-1 Cisaillement transversal :

Nous avons défini à la fin du chapitre 3, une relation entre l'effort tranchant dans une section et la composante  $\tau$  de la contrainte située dans le plan de section sous la forme :

$$v(x) = \iint_{\Sigma} \tau \cdot ds$$

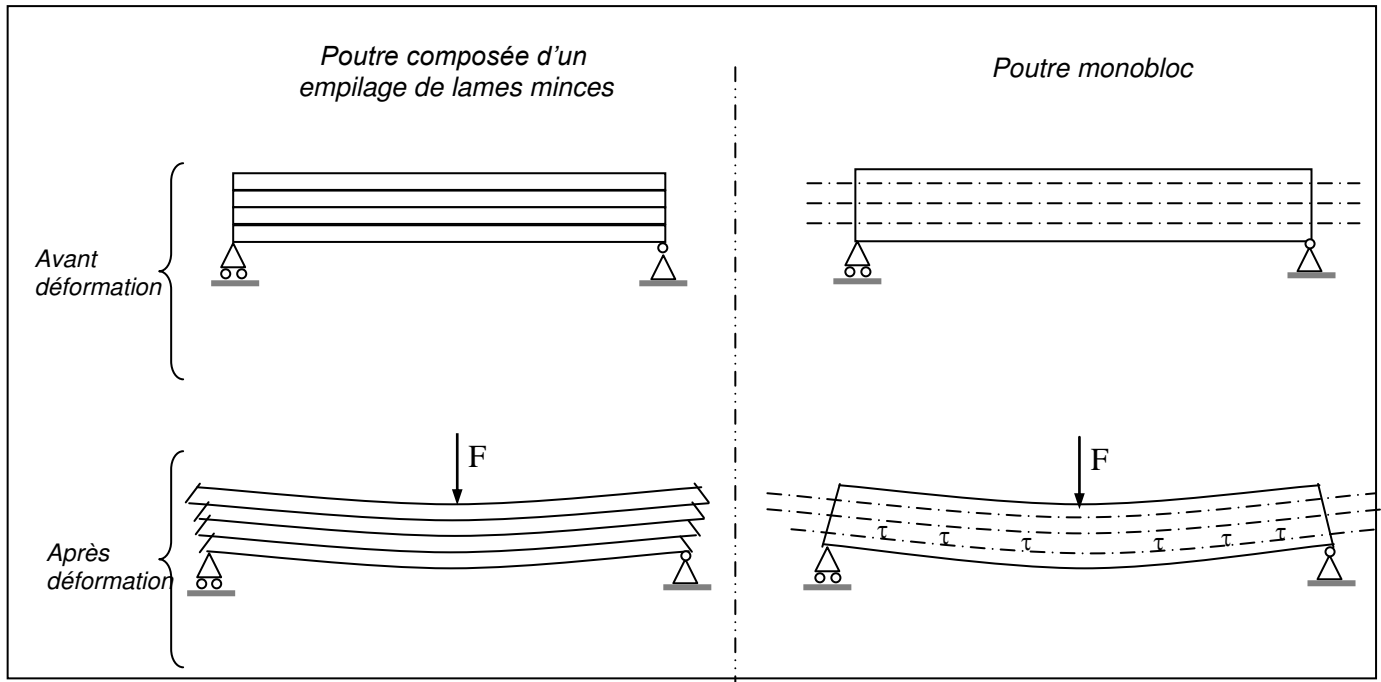
il s'agit donc d'une contrainte de cisaillement qui se développe dans toute section transversale.

Nous ferons pour l'instant l'hypothèse de répartition uniforme de la contrainte  $\tau$  dans la section, ce qui permet d'écrire :

$$\tau = \frac{V(x)}{S} \quad (\text{nous reviendrons plus loin sur cette hypothèse}).$$

### IV-2 Cisaillement longitudinal :

Mise en évidence de ce type de cisaillement :



Lorsqu'on applique l'effort, on constate un glissement des lames les unes sur les autres. Dans une poutre pleine, ce glissement est empêché par la cohésion de la matière, ce qui entraîne le développement de contraintes de cisaillement ( ou de glissement).

Ces contraintes sont dites longitudinales car elles se développent dans l'axe de la poutre.

Nous allons établir une relation entre les contraintes de cisaillement transversales et longitudinales.

### IV-3 Théorème de réciprocité de CAUCHY :

Dans ce qui suit, nous appellerons  $\vec{\tau}$  la contrainte de cisaillement transversal et  $\vec{\tau}'$  la contrainte de cisaillement longitudinal.

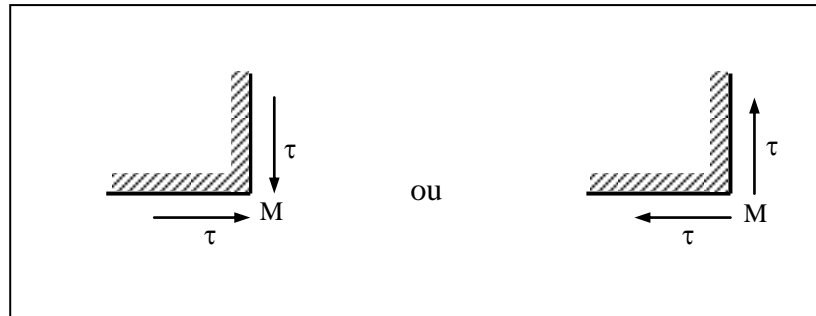
Isolons à l'intérieur d'une poutre un parallélépipède de matière d'arêtes infiniment petites  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  et faisons le bilan des efforts s'exerçant sur chacune des faces :

Remarquons qu'il ne peut y avoir de cisaillement dans un plan parallèle au plan des forces, ce qui explique que deux des faces ne sont soumises à aucun effort.

La première équation vectorielle du principe fondamental de la statique montre que les intensités des contraintes  $\vec{\tau}$  et  $\vec{\tau}'$  sont égales.

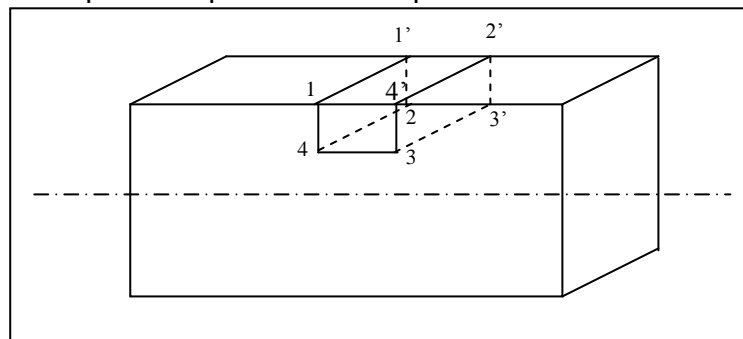
De plus, l'équation de moments, en projection sur z, montre que les contraintes  $\vec{\tau}$  et  $\vec{\tau}'$  engendrent des moments de signes contraires.

Il y a donc deux configurations possibles en un point M.



#### IV-4 Expression de la contrainte tangentielle :

Considérons une poutre droite dans laquelle nous allons isoler un parallélépipède, pris en partie supérieure de la poutre :



Bilan des efforts sur toutes les faces :

- face 121'2' : pas d'efforts ( bord libre de la poutre )
- face 343'4' : contrainte longitudinale  $\vec{\tau}$ , s'appliquant sur une surface  $b \cdot dx$
- face 141'4' : \* contrainte normale  $\sigma_1 = \frac{M(x)}{I_z} \cdot y_0$  donnant lieu à une résultante

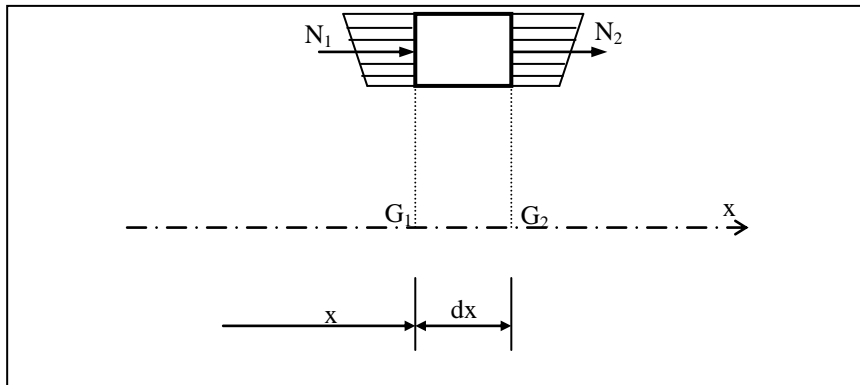
$$N_1 = \frac{M}{I_z} \iint_S y_0 \cdot ds$$

\* contrainte tangentielle  $\tau$  dont on ne connaît pas la répartition.

- face 232'3' : \* contrainte normale  $\sigma_2 = \frac{M(x+dx)}{I_Z} \cdot y_0$  donnant lieu à une résultante

$$N_2 = \frac{M(x+dx)}{I_Z} \iint_S y_0 \cdot ds$$

- \* constante tangentielle dont on ne connaît pas la répartition.



Ecrivons l'équation d'équilibre en projection sur l'axe x du parallélépipède :

$$b \cdot dx \cdot \tau - \frac{M(x)}{I_Z} \iint_S y_0 \cdot ds + \frac{M(x+dx)}{I_Z} \iint_S y_0 \cdot ds = 0$$

la quantité  $\iint_S y_0 \cdot ds$  n'est autre que le moment statique de la face 141'4' soit  $m(S_0)$ .

Donc :

$$\tau = - \frac{m(S_0)}{b \cdot I_Z} \cdot \left( \frac{M(x+dx) - M(x)}{dx} \right)$$

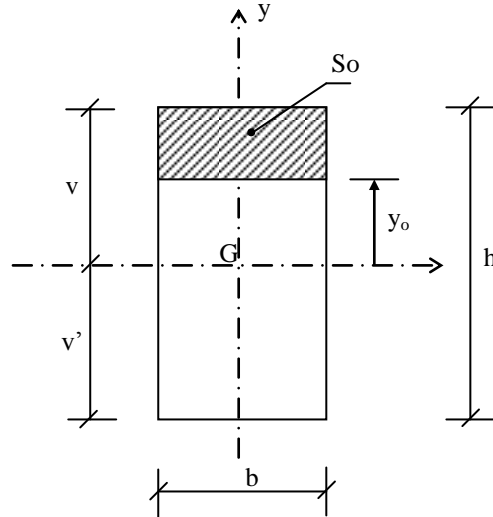
La quantité entre parenthèses est la dérivée du moment fléchissant par rapport à x, soit encore l'inverse de l'effort tranchant.

Il vient donc :

$$\tau = \frac{V \cdot m(S_0)}{b \cdot I_Z}$$

## IV-5 Applications à la section rectangulaire d'une poutre fléchie :

Considérons la section rectangulaire suivante :



Exprimons la contrainte  $\tau$  à l'aide de la formule que nous venons d'établir :

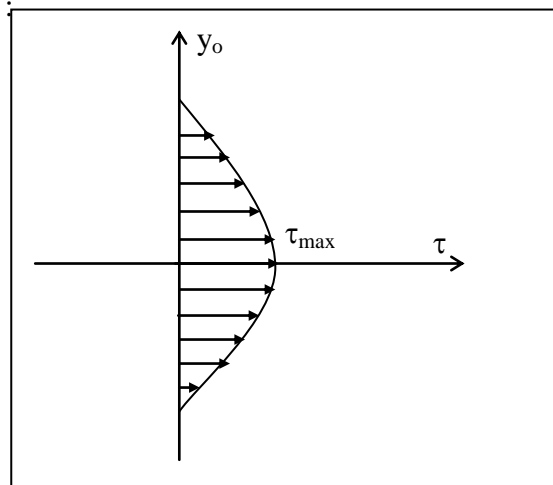
$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$m(S_o) = y_{G_o} \cdot S_o = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y_o\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y_o\right)$$

$$\text{d'où } \tau = \frac{6V}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y_o^2\right)$$

on constate que la variation de  $\tau$  en fonction de  $y_o$  est parabolique.

Cette variation a pour allure :

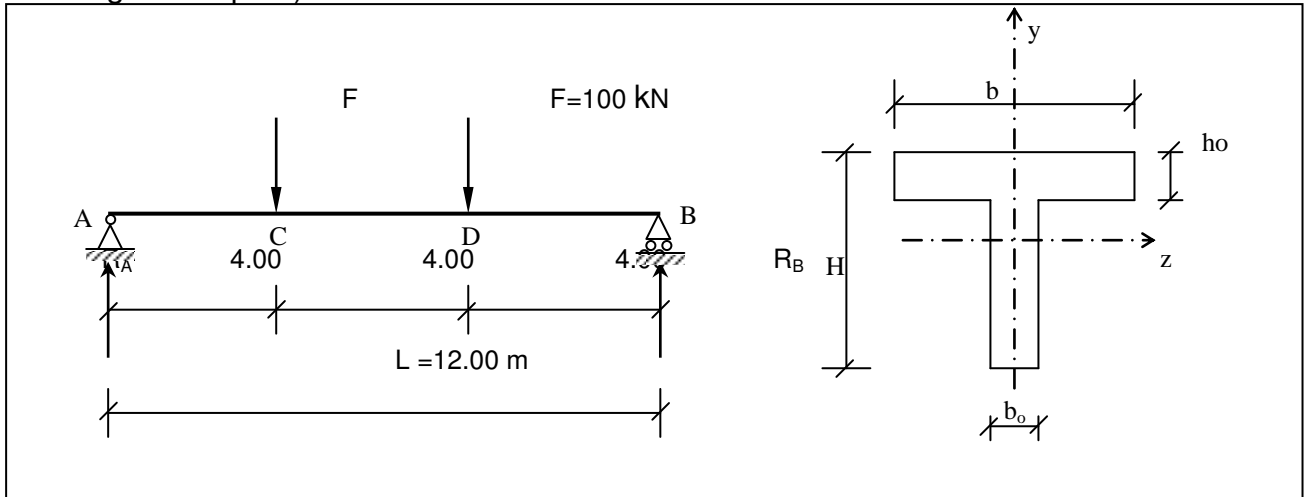


Remarquons que la contrainte maximale a pour expression :

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{bh}$$

### V-Applications :

On donne la poutre simplement appuyée qui supporte des charges concentrées ( voir figure ci-après).



- Déterminer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissant le long de la poutre ;
- Tracer le diagramme de la contrainte normale  $\sigma$ , au niveau de la section la plus sollicitée ;
- Tracer l'allure du diagramme de la contrainte tangentielle au niveau de la section C et calculer  $\tau_{\max}$ .

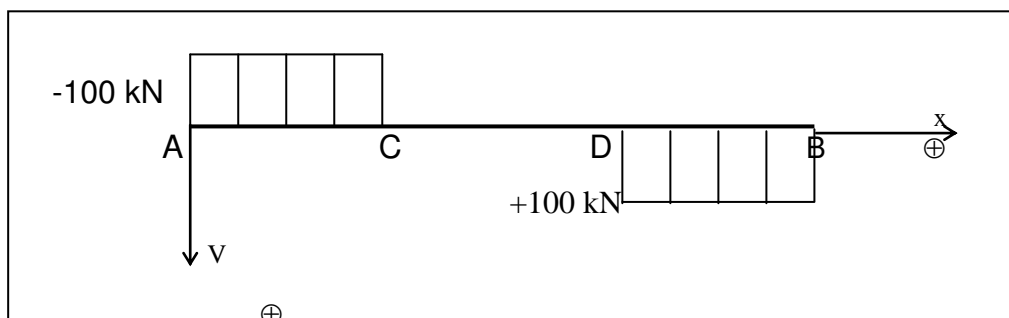
On donne :  $H=80$  cm,  $b=100$  cm,  $h_0=20$  cm et  $b_0=30$  cm

**Solution :**

On a  $R_A = R_B = 100$  kN ( par raison de symétrie ) ;

**a-1) détermination du diagramme des efforts tranchants :**

- pour  $0 \leq x \leq 4$  m,  $V = -R_A = -100$  kN  
 pour  $4 \leq x \leq 8$  m,  $V = -R_A + F = -100 + 100 = 0$   
 pour  $8 \leq x \leq 12$  m,  $V = -R_A + F + F = -100 + 100 + 100 = +100$  kN

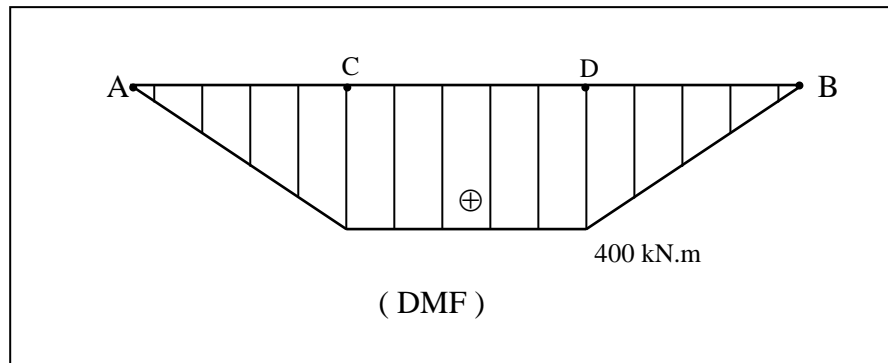


( DET )

**a-2) détermination du diagramme des moments fléchissant :**

pour  $0 \leq x \leq 4\text{m}$ ,  $M = R_A \cdot x = 100 \cdot x \rightarrow \begin{cases} x = 0, & M = 0 ; \\ x = 4, & M = 400 \text{ kN.m} \end{cases}$

pour  $4 \leq x \leq 8\text{m}$ ,  $M = R_A \cdot x - F \cdot (x-4) \rightarrow \begin{cases} x = 4, & M = 400 \text{ kN.m} ; \\ x = 6, & M = 400 \text{ kN.m} ; \\ x = 8, & M = 400 \text{ kN.m} . \end{cases}$



**b-1) Caractéristiques géométriques de la section :**

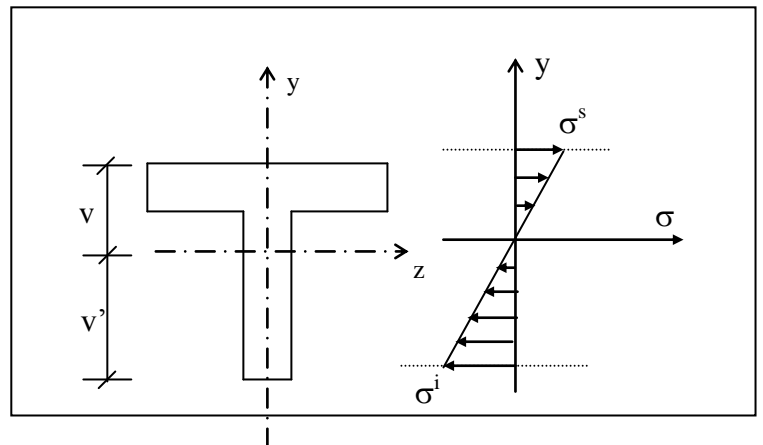
- surface :  $S = 3800 \text{ cm}^2$
- position de G :  $v = 28.95 \text{ cm}$  ;  
 $v' = 51.05 \text{ cm}$ .

\* inertie :  $I_{GZ} = 2122456.17 \text{ cm}^4$

**b-2) contrainte normale :**  $\sigma = \frac{M_{fz} \cdot y}{I_{GZ}}$

avec  $M_{fz} = 400 \text{ kN.m}$   
( la section la plus sollicitée )

d'où  $\sigma = \frac{400 \cdot 10^6}{2122456,17 \cdot 10^4} \cdot y = 0.019 \cdot y$



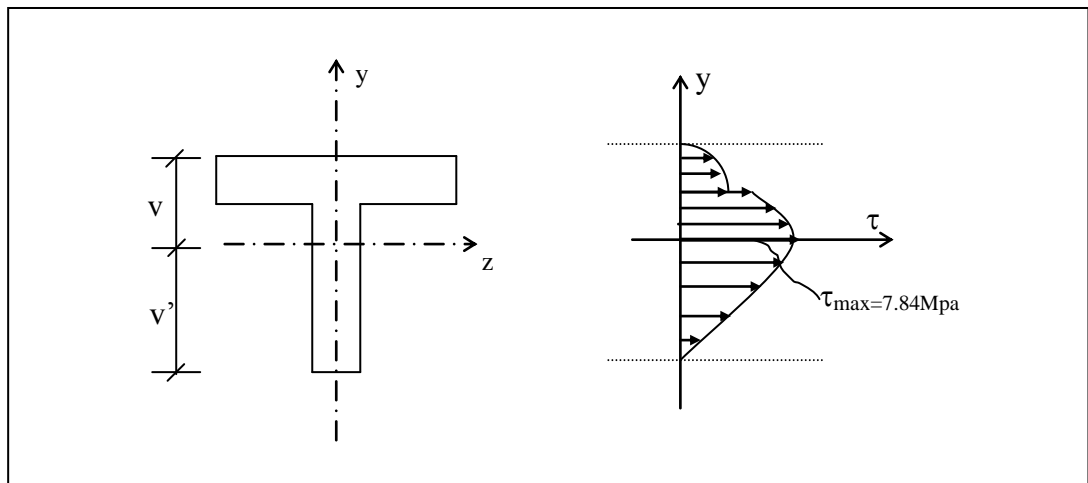
$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma(v) = \sigma^s = \sigma(289.5) = 5.5 \text{ Mpa} \\ \text{et } \sigma(-v') = \sigma^i = \sigma(-510.5) = -9.7 \text{ Mpa} \end{cases}$$

**c) contrainte tangentielle :**  $\tau = \frac{V.m(s_o)}{b.Iz}$

en C, l'effort tranchant  $V = 100 \text{ kN}$

pour	$y_o = v = 289.5 \text{ mm}$	$\rightarrow m_{s_o} = 0$	$\rightarrow \tau(289.5) = 0$
	$y_o = 89.5 \text{ mm}$	$\rightarrow m_{s_o} = 379.10^6 \text{ mm}^3$	$\rightarrow \tau(89.5) = 5.95 \text{ Mpa}$ (pour $b = 300 \text{ mm}$ ) $\rightarrow \tau(89.5) = 1.785 \text{ Mpa}$ (pour $b = 1000 \text{ mm}$ )
	$y_o = 0$	$\rightarrow m_{s_o} = 499.10^6 \text{ mm}^3$	$\rightarrow \tau(0) = 7.84 \text{ Mpa}$

d'où l'allure suivant du diagramme de la contrainte tangentielle :



## Chapitre 8 : FLEXION COMPOSEE

Après avoir étudié les diverses sollicitations simples et leurs effet dans les poutres, examinons comment superposer ces résultats lorsque le chargement de la poutre est quelconque.

Avant de passer au cas général, voyons le cas particulier de la flexion composée ( superposition d'un effort normal à un moment de flexion).

### I) définition :

On dit qu'un élément de structure est sollicité en flexion composée lorsqu'il est soumis à la fois à un moment fléchissant  $M_f$  ( $M_{fz}$  ou  $M_{fy}$ ) et un effort normal  $N$  passant par le centre de gravité de la section.

$$\Rightarrow \boxed{M_f \neq 0 ; N \neq 0 ; V \neq 0 ; M_t = 0}$$

### N.B

Dans le cas d'un effort de compression excentré  $N$  agissant sur une section à une distance «  $e_y$  » sur l'axe  $y$ , on peut le remplacer par un effort de compression équivalent  $N$  passant par le c.d.g de la section, plus un moment fléchissant  $M_f$  égal à :  $M_f = N.e_y$  ( voir Fig.1 )

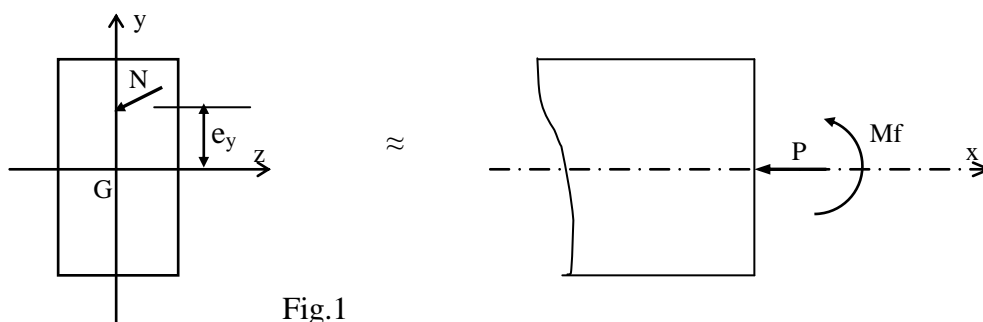


Fig.1

### II)Etat de contrainte :

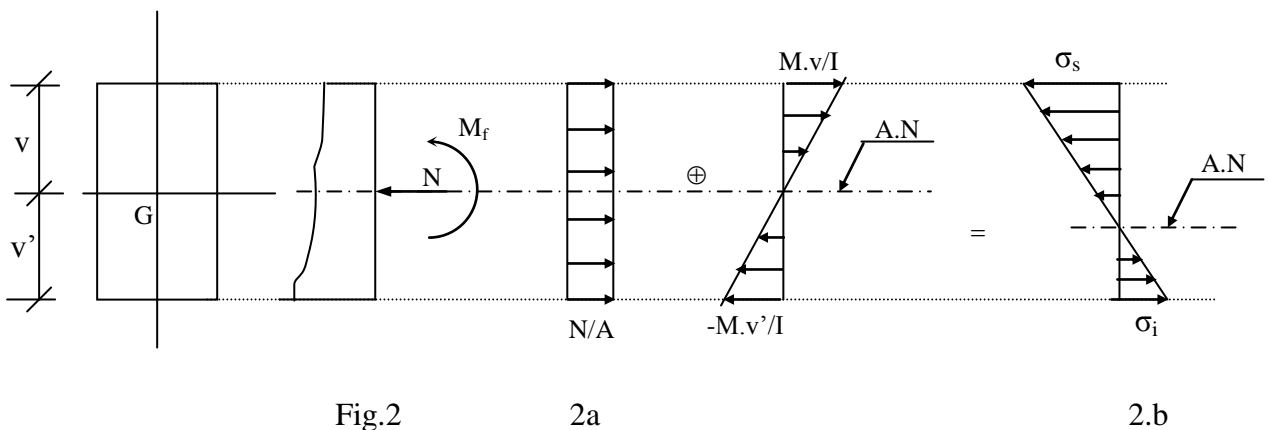
L'équation générale donnant la valeur de la contrainte à une fibre se trouvant à une distance  $y$  est donné par :

$$\sigma_{(y)} = \pm \frac{N}{A} + \frac{M_f \cdot y}{I} \quad (1)$$

avec  $\left\{ \begin{array}{l} N : \text{traction} \\ N : \text{compression} \end{array} \right. \Rightarrow \sigma_{(y)} = -\frac{N}{A} + \frac{M_f \cdot y}{I}$

$$\sigma_{(y)} = \frac{N}{A} + \frac{M_f \cdot y}{I}$$

Cette équation découle de la superposition des résultats obtenus dans l'étude de la compression ( ou de la traction ) et de la flexion simple :



Sur la figure 2.a, on montre les contraintes uniformes dues à un effort normal N de compression qui s'ajoutent algébriquement aux contraintes dues au moment fléchissant Mz agissant sur la section de l'élément.

**II-a) Constataion :**

Comme on le voit sur la figure 2.b, l'axe neutre ( où  $\sigma = 0$  ) est déplacé. Il est parallèle à la position de l'axe neutre lorsqu'il n'y a qu'une flexion simple, mais il ne passe pas par le centre de gravité de la section comme dans le cas de la flexion simple.

**II-b) Position de l'axe neutre : ( $y_0$ )**

- **Cas d'une compression :**

soit N un effort normal de compression, on cherche à déterminer la position de l'axe neutre (A.N), on désigne par  $y_0$  la distance qui sépare l'A.N par rapport à l'axe passant par G ( le c.d.g de la section).

On a  $\sigma(y_0) = 0$

Avec  $\sigma(y_0) = \frac{N}{A} + \frac{M_f \cdot y_0}{I} = 0$

$$\Rightarrow y_0 = - \frac{N.I}{M_f.A}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_0 = - \frac{N}{M_f} \cdot i^2} \text{ (avec } i, \text{ le rayon de giration )}$$

**- Cas d'une traction :**

dans le cas ou N est un effort de traction :

$$\sigma(y_0) = - \frac{N}{A} + \frac{M_f.y_0}{I} = 0$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{N}{M_f} \cdot i^2$$

**III) Noyau central :**

**III-a) Définition :**

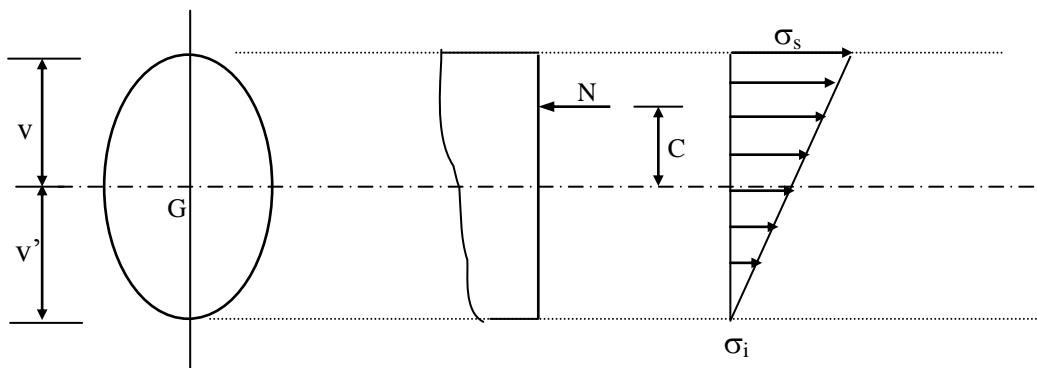
c'est la zone d'une section droite, lorsqu'on applique dans laquelle un effort normal, toutes les fibres seront tendues ( ou comprimées).

**III-b) Détermination du noyau central d'une section :**

**Soit N un effort de compression :**

On cherche à déterminer les limites du noyau central ( N.C), qu'on les désigne par c et c' :

La figure 3.a, nous donne la répartition des contraintes, lorsque N est appliqué au-dessus de la fibre moyenne.



v et v' désignent les positions des fibres extrêmes ( inférieur et supérieur ) par rapport au centre de gravité G de la section .

On a  $\sigma(-v') = \sigma_t$

et  $\sigma(v) = \sigma_s$

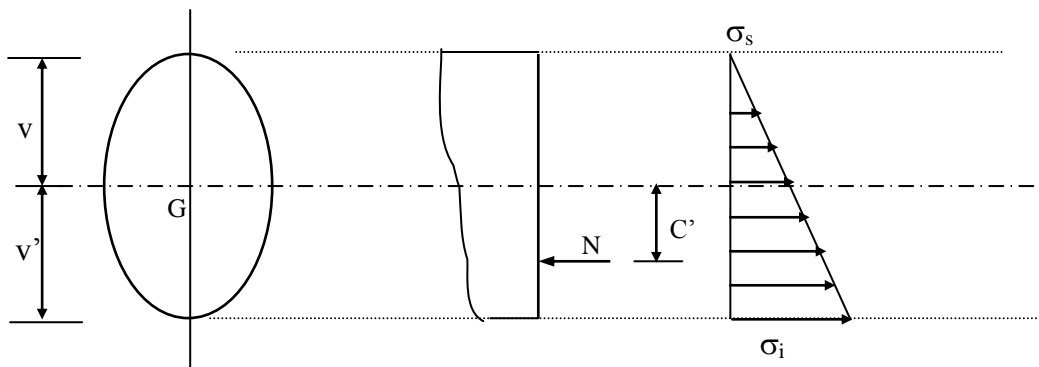
$$\text{d'où } \sigma_i = 0 \Rightarrow \frac{N}{A} + \frac{(+N.C).(-v')}{I} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A} + \frac{(+C).(-v')}{I} = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{I}{A.v'} = \underbrace{\left(\frac{I}{A.v'.v}\right)}_{\rho} . v$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \rho . v}$$

Dans le cas où N est appliqué au dessous de la fibre moyenne :



$$\sigma_s = 0 \Rightarrow \frac{N}{A} + \frac{(-N.C').(v)}{I} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A} + \frac{(-C').(v)}{I} = 0$$

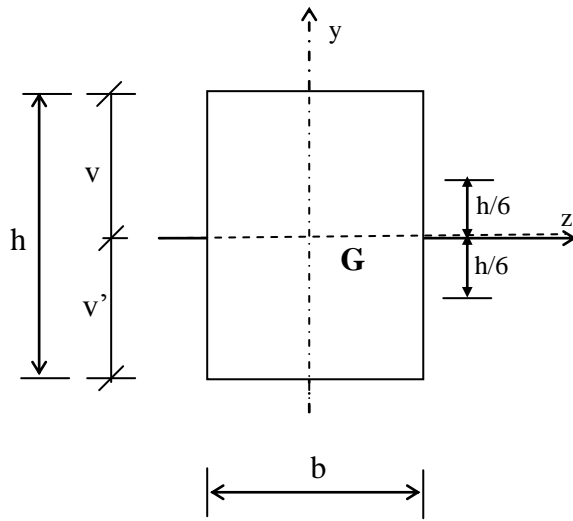
$$\Rightarrow C' = \frac{I}{A.v} = \underbrace{\left(\frac{I}{A.v'.v}\right)}_{\rho} . v'$$

$$\Rightarrow \boxed{C' = \rho . v'}$$

le noyau central est tel que :  $-c' \leq y \leq c$

### III-c) Exemples :

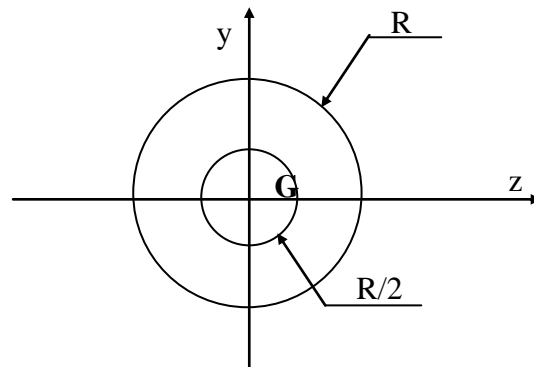
- cas d'une section rectangulaire :



$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$\rho = \frac{I}{A \cdot v \cdot v'} = \frac{b \cdot h^3}{12 (bh \cdot \frac{h^2}{4})} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{6} \\ c' = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{6} \end{cases}$$

- Cas d'une section circulaire :



On a  $I = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$

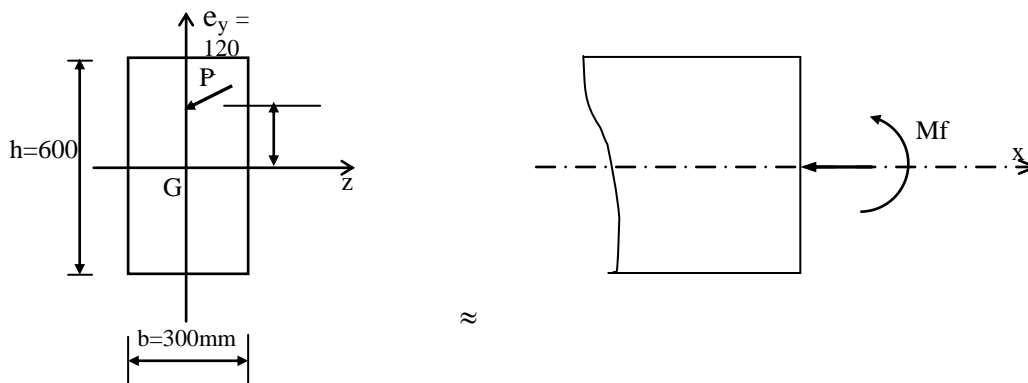
$$v = v' = D/2 = R$$

$$\Rightarrow c = \rho.v = \frac{\pi \cdot \frac{D^4}{64}}{\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \frac{D^2}{4}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{D}{8} = \frac{R}{4}$$

$$\Rightarrow c' = \rho.v' = \frac{R}{4}$$

#### IV)-Application :

La section de la poutre rectangulaire montrée sur la figure ci après est soumise à un effort de compression excentré  $P = 2500 \text{ kN}$  appliqué en un point de l'axe  $y$  à une distance  $e_y = 120 \text{ mm}$  de l'axe  $z$ .



- a- déterminer les contraintes dans les fibres extrêmes supérieures et inférieures ;
- b- déterminer la valeur minimale de  $e_y$  pour qu'il n'y ait pas de contraintes de traction agissant sur la section.

Solution :

a- de l'équation (1), dans la fibre supérieure extrême, on a une contrainte totale de compression  $\sigma_s$  égale à :

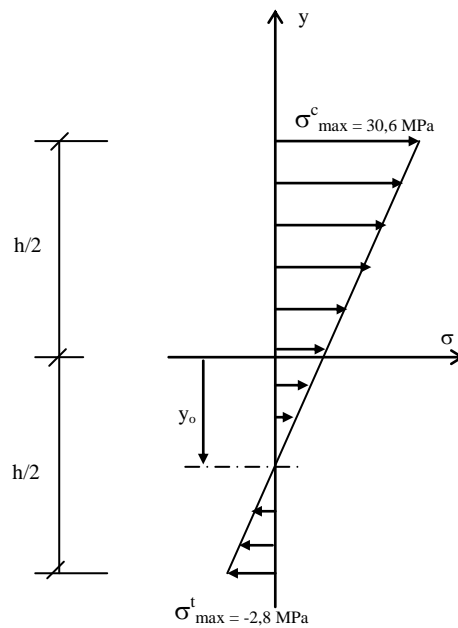
$$\sigma_s = \sigma_{(\frac{h}{2})} = \frac{P}{A} + \frac{(P \cdot e_y) \cdot \frac{h}{2}}{I}$$

$$\sigma_s = \left[ \left( \frac{2500 \cdot 10^3}{300 \cdot 600} \right) \cdot \left[ 1 + \frac{6 \cdot 120}{600} \right] \right] = 30,6 \text{ MPa} \quad (\sigma_{\max} \text{ compression})$$

et sur la fibre inférieure extrême  $\sigma_i$  égale à

$$\sigma_i = \sigma_{(-\frac{h}{2})} = \frac{P}{A} - \frac{P \cdot e_y \cdot \frac{h}{2}}{I}$$

$$\sigma_i = \left[ \left( \frac{2500 \cdot 10^3}{300 \cdot 600} \right) \cdot \left[ 1 - \frac{6 \cdot 120}{600} \right] \right] = -2,8 \text{ MPa} \quad (\sigma_{\max} \text{ traction})$$



- fibre neutre :  $\sigma(y_0) = 0 \rightarrow y_0 = \frac{-\frac{P}{A}}{\frac{P \cdot e_y}{I}} = \frac{-13,89}{\frac{3 \cdot 10^8}{54 \cdot 10^8}} = -250,02 \text{ mm}$

b- pour que la section ne soit pas soumise à des contraintes de traction, il faut que

$$\sigma_i = 0$$

et, par conséquent :

$$e_y = \frac{h}{6} = \frac{600}{6} = 100 \text{ mm}$$

→ il faut que l'excentricité de l'effort P ne dépasse pas 100 mm

## Chapitre 9 : LE FLAMBEMENT

### I)-Description du phénomène :

Un élément élancé, c'est à dire ayant une grande dimension par rapport à au moins une des deux autres, soumis à un effort de compression axial, peut se déplacer transversalement de façon importante sous de faibles charges.

On peut se rendre compte facilement de ce phénomène avec une lame de scie à métaux

tenue verticalement et chargée avec la main appuyée en tête.

On constate qu'à partir d'une charge de l'ordre de 20 N ( $\approx 2$  Kg), le déplacement latéral commence et que pour 25 N, on transforme la lame de scie en boucle en se faisant rejoindre les deux extrémités.

Ce phénomène d'instabilité est appelé *flambement* ou, quelquefois, *flambage*.

On distingue :

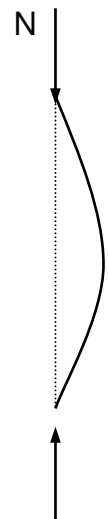
- le flambement simple qui affecte les barres simplement comprimées ;
- le flambement-flexion qui affecte les barres comprimées et fléchies.

### II)- Effort critique de flambement :

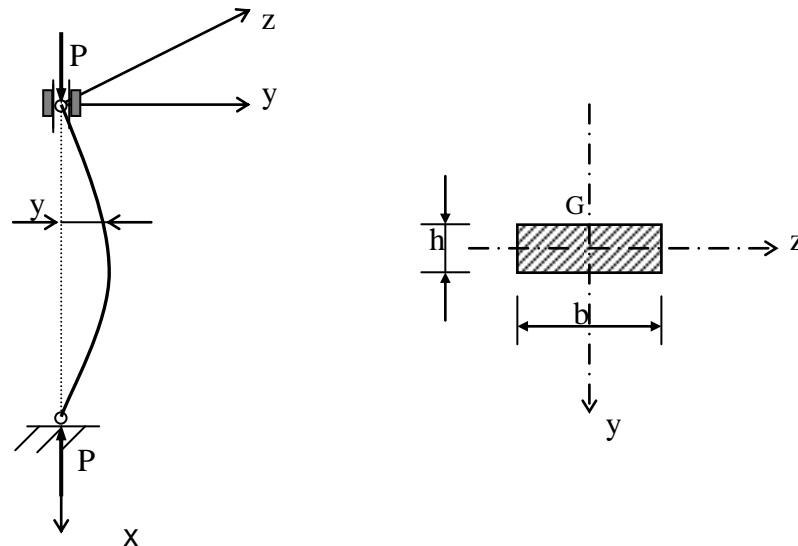
L'effort limite à partir duquel se manifeste les grandes déformations allant jusqu'à l'instabilité est appelé effort critique de flambement, noté  $P_c$ .

L'étude du flambement est due à EULER. La théorie d'EULER est fondée :

- sur une poutre droite, bi-articulée à ses extrémités ;
- soumis à un effort normal de compression centré P ( suivant  $G_x$ ).



N



Lorsque P croît, à partir de zéro, l'état d'équilibre rectiligne initial évolue vers un état curviligne fléchi.

D'après la loi fondamentale de la flexion on a :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E.I}$$

or  $M = -P.y$

donc  $EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + P.y = 0$

$$\Rightarrow y'' + \frac{P}{EI} \cdot y = 0$$

en posant :  $\omega = \sqrt{\frac{P}{EI}}$  ,

on obtient :  $y'' + \omega^2 \cdot y = 0$

C'est une équation différentielle du second ordre, dont la solution générale est de la forme :

$$y(x) = A \cdot \cos(\omega x) + B \sin(\omega y)$$

la résolution de cette équation s'opère grâce aux conditions aux limites :

- pour  $x = 0$ ,  $y(0) = 0 \Rightarrow A=0$  ;

- pour  $x = l_0$ ,  $y(l_0) = 0 \Rightarrow B \cdot \sin \omega l_0 = 0$

deux cas sont alors possibles :

- si  $\sin(\omega l_0) \neq 0 \rightarrow B = 0$  et  $y(x) = 0, \forall x$  ( pas de flambement dans ce cas ) ;

- si  $\sin(\omega l_0) = 0 \rightarrow \omega \cdot l_0 = k \cdot \pi$

soit  $\omega = \frac{k\pi}{l_0} = \sqrt{\frac{P}{EI}}$  d'où  $P = \frac{k^2 \cdot \pi^2 \cdot EI}{l_0^2}$

pour  $k=0 \rightarrow P = 0$  : la poutre est rectiligne

pour que la poutre reste fléchie, il faut que  $k$  soit au moins égal à 1, ce qui conduit à la valeur minimale de  $P$  qui vaut :

$$P = \frac{\pi^2 \cdot EI}{l_0^2}$$

$P_c$  est appelé force critique d'Euler.

### II-1) Contrainte critique d'Euler :

A la force critique d'Euler  $P_c$  correspond une contrainte critique :  $\sigma_c = \frac{P_c}{A}$

avec  $A$  : la section droite de la poutre ;

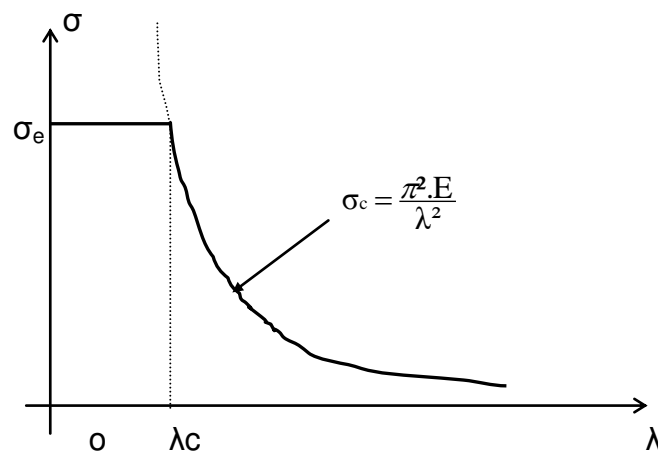
$$\Rightarrow \sigma_c = \frac{\pi^2 \cdot EI}{l_0^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 E}{l_0^2} \cdot i^2$$

avec  $i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$  ; rayon de giration minimal, correspond à l'inertie  $I$  minimale.

Soit  $\lambda = \frac{l_0}{i}$  : l'élancement

D'où

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$



lorsque  $\sigma_c > \sigma_e$  , aucun risque de flambement n'est à craindre ( on vérifie la compression simple ) ;

lorsque  $\sigma_c < \sigma_e$ , il y a ruine par flambement dès lors que  $\sigma = \sigma_c$ .

Remarque : pour  $\sigma_c = \sigma_e$  (limite), correspond un élancement critique  $\lambda_c$

$$\lambda_c = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}}$$

→ la théorie d'Euler n'est applicable que lorsque  $\lambda \geq \lambda_c$

quelques valeurs de  $\lambda_c$  : acier :  $\lambda_c \approx 105$

bois :  $\lambda_c \approx 70$

fonte :  $\lambda_c \approx 60$

## II-2) Poutres autres que bi-articulée :

D'une manière générale, selon les conditions aux appuis, la force critique d'Euler vaut :

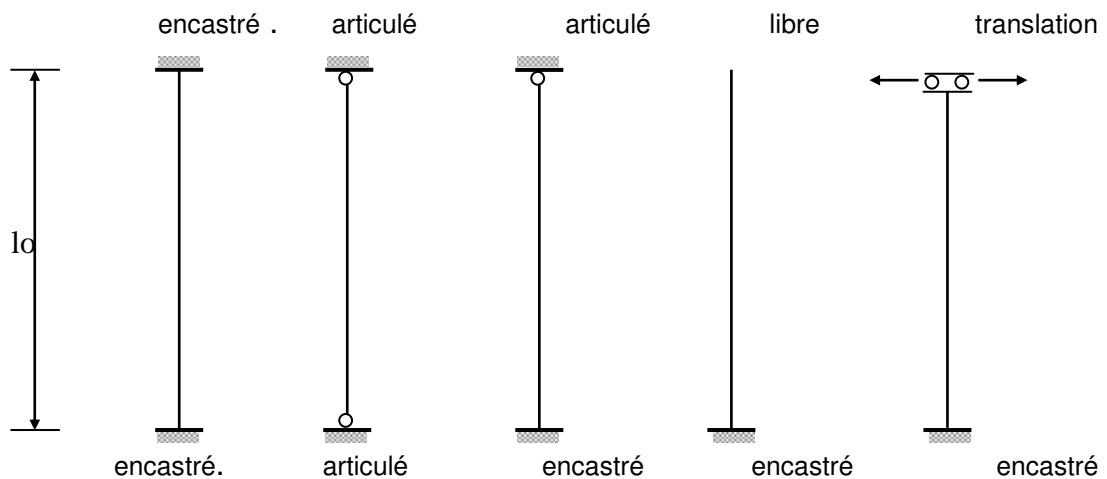
$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(\alpha \cdot l_0)^2}$$

avec  $l_0$  = la longueur réelle de l'élément

soit  $l_f = \alpha \cdot l_0$  : la longueur de flambement

$$\Rightarrow \boxed{P_c = \frac{\pi^2 EI}{(l_f)^2}}$$

avec  $\alpha$  un coefficient qui dépend des conditions aux extrémités (types d'ancrage) :



### III-3) Sécurité vis à vis du flambement :

Causes des imperfections :

- défauts d'homogénéité ;
- défauts de centrage ;
- défauts de rectitudes, ...

Coefficients de sécurité :  $\sigma \leq \frac{\sigma_c}{2.s}$  avec

}

2 : superposition de la compression et la flexion ;

s : coefficient de sécurité ( $s = \sigma_e / \sigma_p$ )

comme  $\sigma_c = \frac{\pi^2.E}{\lambda^2} \Rightarrow \sigma \leq \frac{\pi^2.E}{2.\lambda^2.s}$

$$\sigma \leq \frac{\pi^2.E.\sigma_p}{2.\lambda^2.\sigma_e} = \underbrace{\frac{\pi^2.E}{\sigma_e}}_{\lambda_c^2} \cdot \frac{\sigma_p}{2\lambda^2}$$

soit  $\beta = 1 / \lambda_c^2 \Rightarrow \sigma \leq \frac{\sigma_p}{2\beta\lambda^2}$

### IV) Théorie de Rankine :

Si  $\lambda \nearrow \Rightarrow P_c$  : flambement d'Euler ;

Si  $\lambda \searrow \Rightarrow N$  : compression ;

Pour les valeurs intermédiaires ( pièces moyennement courte )  $\Rightarrow$  Le modèle de

Rankine Dans ce cas :  $\sigma \leq \frac{\sigma_p}{1 + \beta\lambda^2}$

#### Résumé :

Pour  $\lambda \leq 20$

$\Rightarrow$  compression simple  
on vérifie que :

Pour  $20 \leq \lambda \leq \lambda_c$

$\Rightarrow$  modèle de Rankine  
on vérifie que :

Pour  $\lambda \geq \lambda_c$

$\Rightarrow$  théorie d'Euler  
on vérifie que :

$$\sigma \leq \sigma_p$$

$$\sigma \leq \frac{\sigma_p}{1 + \beta \lambda^2}$$

$$\sigma \leq \frac{\sigma_p}{2\beta \lambda^2}$$

## V) Méthode de Dutheil :

Insuffisance de :

- Euler : n'est pas applicable pour des élancement faibles ;
- Rankine : tient compte d'un coefficient de sécurité important ;

Dutheil tient compte de la flexion et de la compression. La méthode de Dutheil est applicable quelque soit la valeur de l'élancement :

$$\sigma = -\frac{P}{A} \pm \frac{M_f \cdot y}{I}$$

*méthode de vérification :*

on cherche tout d'abord à déterminer la contrainte d'affaissement :  $\sigma_s$

les étapes de calcul sont les suivantes :

1- calcul de  $P_c$  d'Euler : 
$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(\alpha \cdot l_0)^2}$$

2- calcul de : 
$$\sigma_c = \frac{P_c}{A}$$

3- calcul de  $\sigma_{comp}$  (compression simple) : 
$$\sigma_{comp} = \frac{P}{A}$$

vérifier que  $\sigma_{comp} \leq \sigma_c$  (sinon changer la section ou bien diminuer la charge)

4- calcul de la contrainte intermédiaire : 
$$\sigma_I = \frac{1}{2} (\sigma_c + 1.3 \sigma_e)$$

5- la contrainte d'affaissement : 
$$\sigma_s = \sigma_I - \sqrt{\sigma_I^2 - \sigma_c \cdot \sigma_e}$$

$\Rightarrow$  la condition de résistance : 
$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A} \leq \frac{\sigma_s}{s}}$$

## VI APPLICATIONS :

### EXEMPLE I :

Vérifier un poteau constitué par une poutrelle HEB200, hauteur 8.00m, articulé aux deux extrémités. Il est sollicité par un effort pondéré de 44 kN.

Caractéristiques du profilé :

$S = 78.1 \text{ cm}^2$ ,  $I_{\min} = 2003 \text{ cm}^4$ ,  $E = 2,1.10^5 \text{ MPa}$  ,  $\sigma_e = 240 \text{ MPa}$  et  $s = 2.5$

*Solution :*

- l'élancement du poteau :  $\lambda = lf/i_{\min}$   
 $= 8.10^3 / 5.07 = 159.2$

- l'élancement critique :  $\lambda_c = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} = \pi \sqrt{\frac{2,1.10^5}{240}} = 92,93$

On constate que  $\lambda > \lambda_c \rightarrow$  Théorie d'Euler

On vérifie que  $\sigma \leq \frac{\sigma_c}{2.s}$

Avec la contrainte critique d'Euler :

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{2,53} = 79,3 \text{ MPa}$$

soit  $\sigma = \frac{44.10^3}{7810} = 5.63 \leq \frac{79.3}{2.2,5} = 15.86 \text{ ok}$

$\Rightarrow$  le poteau est stable vis à vis au flambement.

**EXEMPLE 2 :**

Vérifier la stabilité du poteau représenté ci-après :

*Données :*  $F = 350 \text{ kN}$ ,  $H = 6.00 \text{ m}$   
 $b = 150 \text{ mm}$ ,  $h = 200 \text{ mm}$  et  $e = 25 \text{ mm}$   
 $\lambda_c = 80$ ,  $\sigma_e = 30 \text{ MPa}$  et  $s = 2$  (coef. de sécurité)

*Solution :*

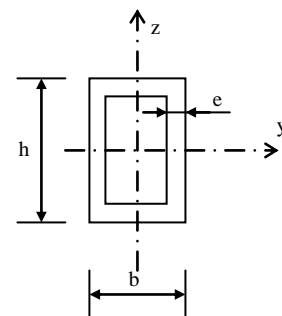
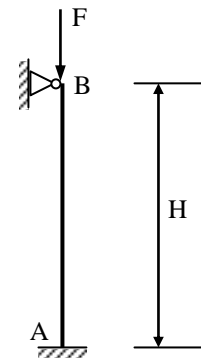
- l'élancement du poteau :  $\lambda = lf/i_{\min}$

avec  $\left\{ \begin{array}{l} l_f = 0,707 \cdot 6,00 = 4,24 \text{ m} \\ I_{\min} = \frac{200 \cdot 150^3}{12} - \frac{150 \cdot 100^3}{12} = 43,7510^6 \text{ mm}^4 \\ i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{43,75 \cdot 10^6}{15 \cdot 10^3}} = 54 \text{ mm} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \lambda = \frac{4,24 \cdot 10^3}{54} = 78,52$

- l'élancement critique :  $\lambda_c = 80$

On constate que  $\lambda < \lambda_c \rightarrow$  Théorie de Rankine



On vérifie que  $\sigma \leq \frac{\sigma_p}{1+\beta \cdot \lambda^2}$

$$\text{Avec } \begin{cases} \beta = \frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{1}{80^2} \\ \sigma_p = \frac{\sigma_e}{s} = \frac{30}{2} = 15 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\text{soit } \sigma = \frac{350 \cdot 10^3}{15000} = 23,33 \geq \frac{15}{1 + \left(\frac{78,52}{80}\right)^2} = 7,64 \text{ MPa}$$

$\Rightarrow$  le poteau est instable vis à vis au flambement.

