

RECUEIL D'EXERCICES DE MATHEMATIQUES

CLASSE DE 2^{nde} S

TOME 1

Compilé par :

Mouhamadou KA

Professeur au Lycée Cheikh Oumar Foutiou TALL de Saint-Louis

Saint-Louis, Février 2008

Dédicace

**A mon doyen,
L'éminent professeur Abdou SOW,
Que j'ai eu la chance de côtoyer au Lycée Cheikh Oumar
Foutiyou TALL,
Et qui par son don inné pour les mathématiques,
Sa riche expérience,
Sa capacité d'écoute,
Et son dévouement indéfectible pour la cause de
l'enseignement des Maths,
M'a beaucoup appris.**

Cet ouvrage lui doit beaucoup.

AVANT-PROPOS

L'objectif que je vise en publiant ce recueil est de proposer à l'élève de Seconde S un instrument de travail efficace et utilisable tout au long de l'année scolaire. Je suis parti du constat qu'il n'existe pas à l'heure actuelle, du moins à ma connaissance, de manuel d'exercices conforme en tout point au programme sénégalais de mathématiques.

D'autre part, l'activité principale en mathématiques étant la résolution de problèmes, il m'a paru opportun de fournir à l'élève un réservoir d'exercices où il pourra puiser à loisir pour vérifier ses connaissances, ainsi qu'une sélection de devoirs qui lui permettra de savoir quelles sont les compétences qui sont attendues de lui .

L'origine des exercices est diverse : Séries d'exercices que j'ai proposées à mes élèves, ou que d'autres collègues ont réalisées, exercices extraits de manuels (trop nombreux pour que je puisse les citer tous) , sujets de devoirs recopiés textuellement, thèmes que j'ai reformulés à partir de plusieurs autres exercices, etc.

Nous espérons que cet humble travail intéressera les collègues et les élèves. Nous remercions par avance toute personne qui voudra bien nous signaler des erreurs matérielles (inévitables !) qui se seraient glissées dans le texte ou formuler des suggestions.

L'Auteur

(contact : serigneka@yahoo.co.uk)

TABLE DES MATIERES

CALCUL DANS $\mathbb{R}$. ORDRE DANS $\mathbb{R}$	6
VALEUR ABSOLUE. CALCULS APPROCHES.....	13
VECTEURS DU PLAN.....	16
BARYCENTRES.....	19
SECOND DEGRE (1).....	24
SECOND DEGRE (2).....	28
REPERES ET DROITES DU PLAN (1).....	30
REPERES ET DROITES DU PLAN (2).....	32
REPERES ET DROITES DU PLAN (3).....	34
GEOMETRIE DANS L'ESPACE.....	36
DEVOIRS.....	40

EXERCICES

CALCUL DANS $\mathbb{R}$. ORDRE DANS $\mathbb{R}$

EXERCICE 1

1°) Effectuez les calculs suivants:

(1) : $(a + b)(x - y) - (a - b)(x + y) - b(x - y)$

(2) : $x(a - by) - y(b - ax) - xy(x - y)$

(3) : $4\left[\frac{1}{10}(5(2a + 3) + 5) - a + 7\right]$

(4) : $3[5(x - a) - 2(b - y)] - 6(a - b) + 15(x + y)$

(5) : $x - y - [z - y - (t - x)] - [y + t - (x + z)] - [x - (y - z + t)]$

2°) Développer à l'aide des égalités remarquables :

(6) : $(a^2b + c)^2$ (7) : $\left(\frac{2a}{3} + \frac{b}{4}\right)^2$ (8) : $\left(\frac{a^2}{2} - b\right)^3$

3°) Calculer (9) : $\left(-\frac{1}{4}\right)\left[5\left\{\frac{9}{10} - \frac{3}{20}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\right\} - \left(\frac{2}{3} + 5 - \frac{1}{7}\right)\right]$

4°) Factoriser les expressions suivantes :

(10) $a^2xy + aby^2 + b^2xy + abx^2$ (11) $3a^2 + 3b^2 - 12c^2 - 6ab$

(12) $y^2 - x^2 + 2x - 1$ (13) $a^2b^2 - 1 + a^2 - b^2$ (14) $(ab - 1)^2 - (a - b)^2$

(15) $(2a^2 - 3a - 5)^2 - (2a^2 + 3a + 4)^2$

(16) $8a^4b + 36a^3b^2 + 54a^2b^3 + 27ab^4$

(17) $a^3 + 8 - 2a^2 + 4a$

(18) $(a + b)^2 - (c + d)^2 + (a + c)^2 - (b + d)^2$

(19) $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 2abc$

EXERCICE 2

Démontrer que (a, b, c, x, y réel)

(1) $(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$

(2) $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2 = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$

(3) $(a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a) = a^3 + b^3 + c^3$

(4) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = a^3 + b^3 + c^3$

(5) $(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (aa' + bb')^2 + (ab' - ba')^2$

(6) $(a + b + c)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

EXERCICE 3

1) Ecrire sous la forme $2^m \times 3^n \times 5^p$ (avec m, n et p entiers relatifs) les réels suivants:

$$X = \frac{(0,009)^{-3} \times (0,016)^2 \times 250}{(0,00075)^{-1} \times 810^3 \times 30} ; Y = \frac{(-6)^4 \times 30^{-2} \times (-10)^{-3} \times 15^4}{(-25)^2 \times (36)^{-5} \times (-12)^3}$$

2) Ecrire sous la forme $a^m b^n c^p$ (avec m, n, p entiers relatifs)

$$Q = \frac{(a^2b)^{-3} \times (bc^3) \times (a^{-2}b^5)^3}{(b^2c^2a)^{-4} \times (a^{-1}b^6)^2} ; R = \frac{(a^{-2}c)^{-4} \times (-b^2c)^5 \times (a^3bc^{-1})^{-2}}{(-a^2b^{-3}c)^3 \times (-b^4) \times (a^{-5}c)^2}$$

3) Calculer AB ; A^2B^2 et A^3B^4 où $A = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \times 3^2$ et $B = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} \times 5$

EXERCICE 4

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{(-a)^7 (b^3 c^2)^4}{-b^3 c (-a)^4}; B = \frac{91^{-1} \times (-39)^3 \times 25}{26^2 \times 45 \times (-21)^{-2} \times 7^2}; C = \frac{(28 \times 12^{-2})^3 \times 105^{-3}}{7^{-2} \times (-60)^{-4} \times 63^4} : \left(\frac{5}{3}\right)^5;$$
$$D = \frac{\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^2\right]^6 \times \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right]^3 \times \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^{-3}}{\left(\frac{-4}{9}\right)^6}; E = \frac{(a^2 b^3 c)^2 \times a^3 c}{(ab)^4 (c^2 a)^2 bc}$$

EXERCICE 5

m et n étant deux entiers positifs ou nuls, donner les différentes valeurs possibles de

l'expression : $f(m, n) = \frac{5(-1)^m + 7(-1)^{n+1} + 8(-1)^{m+n}}{2(-1)^{m-n}}$

EXERCICE 6

Factoriser les expressions suivantes :

1) $(4a^2 + b^2 - 9)^2 - 16a^2 b^2$ 3) $(a^2 + b^2 - 5)^2 - 4(ab + 2)^2$ 5) $(a^2 + b^2 - 9)^2 - 4a^2 b^2$
2) $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2$ 4) $(ax + by)^2 + (ay - bx)^2$ 6) $(9x^2 - 12x + 4) + (x - 3)^2 - (2x + 1)^2$
3) $a^4 - b^4 + 2ab(a^2 - b^2) - (a^3 - b^3) + ab^2 - a^2 b$ 8) $(x + y)^3 - x^3 - y^3$
9) $a^5 + b^5 - ab^4 - a^4 b$ 10) $25a^4 - (9b^2 - 4a^2)^2$ 12) $(a^2 + ab + b^2)^2 - (a^2 - ab + b^2)^2$

EXERCICE 7

Factoriser les expressions suivantes :

$A = x^2 y - xy^2 + yz^2 - xz^2 + x^2 z - xyz + y^2 z - xyz$ (on trouvera trois facteurs)

$B = (xy^2 z^3)^4 \times (x^2 y^3 z^4) \times (x^3 y^5 z^2) \times (x^4 yz^2)^3$

(on exprimera B sous forme de puissance d'un seul réel)

$C = 25[4x^3(y^2 z)^2]^2 - 2[10x^4(yz)^3]^2 - [10(xyz)^2]^3$

EXERCICE 8

1) Développer $(a + b + c)^2$.

2) Montrer que si $a + b + c = 0$ alors $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$.

3) On suppose a, b et c non nuls. Montrer que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

EXERCICE 9

Soit a, b, c trois réels :

1) Développer $(a + b + c)(ab + bc + ca)$ puis $(a + b + c)^3$

2) Démontrer que si : $a + b + c = 0$ alors $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

3) En déduire que, pour tous réels x, y, z on a :

$$(x - y)^3 - (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$$

EXERCICE 10

Soit a, b, c trois réels non nul tels que $ab + bc + ca = 0$

Calculer la somme $S = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$

EXERCICE 11

Soient 4 entiers naturels consécutifs $n, n + 1, n + 2, n + 3, (n > 0)$

1°) a) Démontrer que $(n + 1)(n + 2) = n(n + 3) + 2$

b) On pose $(n + 1)(n + 2) = a$. Exprimer en fonction de a le produit $p = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$

c) En déduire que $p + 1$ est le carré d'un entier (on dit carré parfait)

2°) Déterminer n sachant que $p = 5040$.

EXERCICE 12

a) Calculer , pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $A = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

b) Calculer $B = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right)$

c) Calculer en fonction de n : $X_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

EXERCICE 13

Simplifier les expressions suivantes (on suppose que tous les dénominateurs sont non nuls).

$$A = \frac{1}{(a+b)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{2}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

$$B = \left[\frac{(x^2 + y^2)a + (x^2 - y^2)b}{2xy} \right]^2 - \left[\frac{(x^2 - y^2)a + (x^2 + y^2)b}{2xy} \right]^2.$$

$$C = \frac{\frac{x+y}{1-xy} + \frac{x-y}{1+xy}}{1 - \frac{x^2-y^2}{1-x^2y^2}} ; \quad D = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}} \times \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a+c}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a+c}} \quad H = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} : \frac{a+b+c}{a-b-c}$$

$$I = \frac{x^2 - yz + xy - xz}{x^2 + yz - xy - xz} \quad J = \frac{\frac{x+t}{x-t} + \frac{x-t}{x+t}}{\frac{1}{(x+t)^2} + \frac{1}{(x-t)^2}} \quad K = \frac{\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}}$$

$$L = \frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}} \quad M = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} : \frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2} \quad N = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \times \frac{a^2 - b^2}{a^3 - b^3}$$

EXERCICE 14

On donne les expressions : $A = \frac{x}{t+z}$; $B = \frac{t}{z+x}$; $C = \frac{z}{x+t}$.

Calculer les expressions : $X = \frac{x^2}{A(1-BC)}$; $Y = \frac{t^2}{B(1-CA)}$; $Z = \frac{z^2}{C(1-AB)}$.

EXERCICE 15

On donne les expressions : $A = \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$; $B = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$; $C = \frac{\frac{2}{a}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$

Calculer la somme $A + B + C$.

EXERCICE 16

On donne les expressions : $A = \frac{1}{1 + \frac{a}{b+c}}$; $B = \frac{1}{1 + \frac{b}{c+a}}$; $C = \frac{1}{1 + \frac{c}{a+b}}$

Calculer la somme $A + B + C$.

EXERCICE 17

Vérifier les identités suivantes :

a) $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1 + \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$

b) $\frac{x^2}{(x-t)(x-z)} + \frac{t^2}{(t-z)(t-x)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-t)} = 1$

EXERCICE 18

a) Vérifier l'identité : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)$

b) En déduire une simplification de l'expression :

$$\frac{\frac{x^2 - yz}{1 + \frac{y+z}{x}}}{1 + \frac{y+z}{x}} + \frac{\frac{y^2 - zx}{1 + \frac{z+x}{y}}}{1 + \frac{z+x}{y}} + \frac{\frac{z^2 - xy}{1 + \frac{x+y}{z}}}{1 + \frac{x+y}{z}}$$

EXERCICE 19

a) Calculer $A = (a^2 + b^2 + c^2)^2$

b) Démontrer que : $(a + b + c = 0) \Rightarrow [(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(ab + bc + ca)^2]$

EXERCICE 20

a, b et c étant trois réels non nuls, simplifier l'expression :

$$A = \frac{a+b}{ab} (a^2 + b^2 - c^2) + \frac{b+c}{bc} (b^2 + c^2 - a^2) + \frac{c+a}{ca} (c^2 + a^2 - b^2)$$

EXERCICE 21

Soit x, y et z trois réels tels que: $xyz = 1$.

Montrer que : $\frac{x}{xy + x + 1} + \frac{y}{yz + y + 1} + \frac{z}{zx + z + 1} = 1$

EXERCICE 22

Démontrer que, a, b et c désignant trois nombres réels non nuls, on ne peut avoir :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \text{ que si deux de ces nombres sont opposés}$$

(c'est-à-dire qu'on a : $a = -b$ ou $b = -c$ ou $c = -a$).

EXERCICE 23

Montrer que l'expression

$$E = \frac{4a^2 - 1}{(a-b)(a-c)} + \frac{4b^2 - 1}{(b-c)(b-a)} + \frac{4c^2 - 1}{(c-a)(c-b)} \text{ est égale à } 4.$$

EXERCICE 24

Soient a, b et c trois nombres réels non nuls, distincts deux à deux et tels que : $a + b + c = 0$.

Démontrer que : $\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right) = 9$

EXERCICE 25

On considère les quatre expressions :

$X = a + b + c + d$; $Y = a + b - c - d$; $Z = a - b + c - d$; $T = a - b - c - d$.

1°) Calculer XY , puis $X^2 + Y^2$ et montrer que :

$$XY(X^2 + Y^2) = 2[(a+b)^4 - (c+d)^4].$$

2°) Par quelle transformation passe-t-on de X à Z et de Y à T ?

En déduire, sans nouveau calcul, que :

$$ZT(Z^2 + T^2) = 2[(a-b)^4 - (c-d)^4].$$

3°) Démontrer que si on a : $ab(a^2 + b^2) = cd(c^2 + d^2)$, on a aussi :

$$XY(X^2 + Y^2) = ZT(Z^2 + T^2)$$

EXERCICE 26

Soient a, b et c trois nombres réels deux à deux inégaux.

1°) Démontrer l'identité :

$$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}\right) = \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2}.$$

2°) Montrer que : $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}$ est non nul quels que soient a, b et c distincts deux à deux. En déduire l'équivalence :

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

EXERCICE 27

1°) Démontrer que, a, b, c et d étant des réels tels que : $bc(ac + bd) \neq 0$, on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si et seulement si : } \frac{a^2 + b^2}{ac + bd} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}$$

2°) Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que : $bd(3a + b)(3c + d) \neq 0$.

Montrer que l'égalité (1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ implique l'égalité (2) $\frac{2a-b}{3a+b} = \frac{2c-d}{3c+d}$.

La réciproque est-elle vraie ?

EXERCICE 28

Calculer et simplifier :

$$A = (1 + \sqrt{3})^2 (2 + \sqrt{3}); B = \frac{\sqrt{2}-2}{(\sqrt{2}-1)^2 - 1}; C = \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-2)}$$

$$X = \frac{1-5\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}} + \frac{1+5\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}; Y = \sqrt{\frac{4+\sqrt{6}}{4-\sqrt{6}}} + \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}}{4+\sqrt{6}}};$$

$$Z = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}; T = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{3}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{3}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$$

EXERCICE 29

Rendre rationnel le dénominateur du nombre :

$$A = \frac{6}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}}$$

EXERCICE 30

On considère le nombre $A = (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2)\sqrt{(\sqrt{3} - 2)}$.
Calculer A^2 et en déduire la valeur de A .

EXERCICE 31

1°) Montrer que : $5 - 2\sqrt{5} = \sqrt{45 - 20\sqrt{5}}$

2°) Déterminer le nombre positif x tel que : $x^2 = (5 + 2\sqrt{5})(85 - 38\sqrt{5})$

EXERCICE 32

On considère les réels : $A = \sqrt{\frac{5\sqrt{2} - \sqrt{7}}{5\sqrt{2} + \sqrt{7}}}$ et $B = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}}}$

Simplifier A , B , puis $2A + 5B$, $3A + 7B$, $A \times B$ et $\frac{A}{B}$.

EXERCICE 33

Mettre les nombres $\sqrt{11 + 2\sqrt{30}}$; $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$; $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$ sous la forme $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$, x et y étant des entiers naturels.

En déduire la valeur de $Y = \frac{1}{\sqrt{11 - 2\sqrt{30}}} - \frac{3}{\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}} - \frac{4}{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}}$.

EXERCICE 34

On donne les quatre expressions :

$$A = \sqrt{a + \sqrt{b}} \quad , \quad B = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

$$C = \sqrt{a - \sqrt{b}} \quad , \quad D = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

1°) Vérifier que: $A = B$ et $C = D$.

2°) On suppose que a et b sont des rationnels et que $a^2 - b = c^2$, où c^2 est un rationnel positif.
Montrer que les expressions A et c peuvent alors s'écrire sous la forme

$$A = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \text{et} \quad C = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

3°) Application numérique: Simplifier $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

EXERCICE 35

Montrer que si a , a' , b , b' , c et c' sont positifs tels que :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad \text{alors} \quad \sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = \sqrt{(a + b + c)(a' + b' + c')}.$$

EXERCICE 36

Soit n un entier naturel, écrire sans radical au dénominateur $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

En déduire une expression simple de $\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{99}}$.

EXERCICE 37

1°) Rendre rationnel le dénominateur de la fraction : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$,

puis la mettre sous la forme d'une différence de deux fractions ayant toutes deux le nombre 1 pour numérateur.

2°) Application : Calculer la somme :

$$S = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}$$

EXERCICE 38

Les lettres désignant des réels choisis de façon que les expressions écrites aient un sens, calculer et simplifier les expressions suivantes :

$$X = \left[\sqrt{\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 4})} + \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 - 4}) \right]^2 ; Y = \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{a - \sqrt{a^2 - 1}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}};$$

$$C = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

EXERCICE 39

Calculer la valeur de l'expression : $y = \frac{(x-1)\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ pour :

a) $x = 2 - \sqrt{3}$

b) $x = 2 + \sqrt{3}$

EXERCICE 40

Soient a et b deux réels de même signe et non nuls. Calculer la valeur

de $\sqrt{1+x^2}$ pour $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$.

EXERCICE 41

Calculer la valeur de l'expression $y = \frac{a}{x} + \frac{x}{b} + 2\sqrt{\frac{a}{b}}$ pour $x = \sqrt{ab}$.

(On distinguera deux cas : $a > 0$ et $b > 0$, puis $a < 0$ et $b < 0$).

EXERCICE 42

Soient a et b deux réels strictement positifs. On désigne par : $\alpha = \sqrt{\frac{a}{b}}$ et $\beta = \frac{1}{\alpha}$.

1) Soit $f(x) = \frac{2b\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}$. Calculer $f\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

2) Soit $g(x) = \frac{2b\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}-x}$. Calculer $g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

ORDRE DANS R

EXERCICE 44

Comparer les nombres réels suivants :

- a) $\frac{23}{99}$ et $\frac{231}{990}$; b) $\frac{99}{23}$ et $\frac{990}{231}$; c) $\frac{23}{99}$ et $\frac{239}{999}$;
d) 3^{11} et 9^5 ; e) $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$ f) $(\sqrt{5})^7$ et 5^4 ;
g) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ et $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ h) $\sqrt{13} + \sqrt{8}$ et $\sqrt{14} + \sqrt{2}$;
i) $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ et $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ j) $7 - 3\sqrt{5}$ et $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

EXERCICE 45

Comparer les réels suivants :

- 1) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}$ et $\frac{\sqrt{6}}{2} + 1$ 2) $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$ et $\sqrt{5} - 3$ 3) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ et $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ 4) $\sqrt{17} + 3\sqrt{2}$ et $4 + \sqrt{19}$
5) $\frac{1}{11\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{19}$ 6) $\sqrt{4\sqrt{2} - 5}$ et $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 7) $2\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 8) $2\sqrt{2} - \sqrt{7}$ et $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ 9) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{5}$

EXERCICE 46

Comparer les réels suivants :

- 1°) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ et $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$ 2°) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ et $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
3°) $\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$ et $\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$

EXERCICE 47

Dans chacun des cas suivants, des encadrements de a et b sont donnés.

On demande d'encadrer $a + b$, $a - b$, ab et $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

- 1°) $17,3 \leq a \leq 17,4$ et $21,9 \leq b \leq 22$ 2°) $-3,4 \leq a \leq -3,3$ et $37,5 \leq b \leq 37,6$
3°) $-0,6 \leq a \leq -0,5$ et $-39,4 \leq b \leq -39,3$
4°) $-6 \cdot 10^{-5} \leq a \leq -5 \cdot 10^{-5}$ et $3 \cdot 10^{-3} \leq b \leq 4 \cdot 10^{-3}$.

EXERCICE 48 Pratique des inégalités

Les différentes questions sont indépendantes.

Compléter les expressions suivantes où les lettres x, y... désignent des nombres réels.

- 1°) Si $x \leq 1$, alors $2x \dots$; si $x \geq -1$, alors $2x \dots$
2°) Si $x \leq 4$, alors $-\frac{x}{2} \dots$; si $x \geq -4$, alors $-\frac{x}{2} \dots$
3°) Si $x \leq \sqrt{2}$, alors $x + 1 \dots$; si $x \geq -\sqrt{2}$, alors $x - 1 \dots$

- 4°) Si $-1 \leq x \leq 2$, alors $\dots 3x \dots$; si $\sqrt{2} \leq x \leq 1$, alors $\dots x - 1 \dots$
 5°) Si $-1 \leq x \leq 0$, alors $\dots x + 1 \dots$, si $-\sqrt{2} \leq x \leq 1$, alors $\dots x - 1 \dots$
 6°) Si $x \leq 1$, alors $-2x + 1 \dots$, si $x \geq -1$, alors $-\frac{x}{2} + 3 \dots$
 7°) Si $-1 \leq x$ et $2 \leq y$, alors $x + y \dots$; si $1 \geq x$ et $-1 \leq y$, alors $x - y \dots$
 8°) Si $x \geq 1$, alors $\frac{1}{x} \dots$; si $x \leq -2$, alors $\frac{3}{x} \dots$
 9°) Si $x \geq \sqrt{2}$, alors $-\frac{\sqrt{2}}{x} \dots$; si $x \leq -1$, alors $-\frac{\sqrt{3}}{x} \dots$
 10°) Si $x \geq 1$ et $y \geq 2$, alors $\frac{1}{x+y} \dots$; si $x \leq -1$ et $y \leq -\sqrt{2}$, alors $\frac{-2}{x+y} \dots$
 11°) Si $x \geq 4$ et $y \geq \sqrt{2}$, alors $xy \dots$, si $x \leq -$ et $y \leq -3$, alors $xy \dots$
 12°) Si $x > 1$, alors $x^2 > x$. Justifier.
 13°) Si a et b sont deux réels tels que $-1 \leq a \leq 1$ et $-1 \leq b \leq 1$, on a $-1 \leq ab \leq 1$. Justifier.
 14°) Etant donné un réel a , montrer que : $-1 \leq a \leq 1$ si, et seulement si, $a^2 \leq 1$.

EXERCICE 49

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1°) On suppose que $0 < a < 1$. Comparer a et a^2 ; a et $\sqrt{a}$; a et $\frac{1}{a}$.

Ranger dans l'ordre croissant : 1 ; a ; $\sqrt{a}$; a^2 et $\frac{1}{a}$.

2°) On suppose $a > 1$. Ranger dans l'ordre croissant : 1 ; a ; $\sqrt{a}$; a^2 et $\frac{1}{a}$.

EXERCICE 50

1) Montrer que $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

2) En déduire que

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \text{ puis que : } \forall a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \geq ab.$$

3) Soient a et b des réels non nuls tels que $ab > 0$, montrer que :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2. \text{ En déduire que } a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a > 0.$$

EXERCICE 51

Soient $x > 0$ et $y > 0$.

1) Démontrer que : $\frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2xy}$.

2)a) En déduire que : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$.

b) En utilisant des inégalités semblables, démontrer que pour tous réels $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$, on a :

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} + \frac{y+z}{y^2+z^2} + \frac{z+x}{z^2+x^2} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

EXERCICE 52

1) Développer $(a+b)^3$.

2) On suppose a et b positifs. Démontrer que $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}$.

EXERCICE 53

1) Soient a et b des réels quelconques, comparer $\frac{a+b}{2}$ et $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

2) Soient a et b des réels tels que $a > b > 1$. Comparer $A = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ et $B = \sqrt{a-1} - \sqrt{b-1}$.

EXERCICE 54

Soient a, b, c trois nombres réels.

1) Montrer que $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.

2) Calculer $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ et en déduire que $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0$. Quels sont les triplets (a,b,c) pour lesquels l'inégalité précédente devient une égalité ?

3) Montrer que $\frac{|a+b+c|}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

4) a, b, c sont maintenant 3 réels positifs.

Montrer que : $\frac{1}{3}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \leq \sqrt{\frac{a+b+c}{3}}$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

EXERCICE 55

1) Soient trois réels a, b, c de l'intervalle $]0; 1]$.

a) Démontrer que $(ab-1)(bc-1)(ca-1) \leq 0$.

b) En déduire que $a + b + c + \frac{1}{abc} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + abc$.

2) Soient x, y, z, t tels que $0 < x \leq y \leq z \leq t$.

Démontrer que : $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} \geq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{t}{z} + \frac{x}{t}$ de deux façons différentes.

a) En utilisant les résultats de la question 1)

b) En démontrant que : $(z-x)(t-z)(y-t-xz) > 0$.

EXERCICE 56

1) Soient x et y des réels strictement positifs. Prouver que : $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

2) Soient x, y et z trois réels strictement positifs.

Démontrer que $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$. (Ind : $x+y \geq 2\sqrt{xy}$).

EXERCICE 57

NB : Les questions sont indépendantes.

1) Démontrer que : $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \dots + \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbb{R}^*$).

2) Démontrer que si $2x + 4y = 1$ alors $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$.

3) Montrer que si x et y sont deux réels positifs alors $\frac{x+y}{1+x^2+y^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4) Montrer que si x et y sont deux réels tels que : $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$ alors $\frac{1}{4+x+y+xy} \leq \frac{1}{3}$.

5) On considère 4 réels a, b, c , et d tels que : $a < b < c < d$.

Comparer les réels $X = (a+b)(c+d)$; $Y = (a+c)(b+d)$ et $Z = (a+d)(b+c)$.

EXERCICE 58

1) Montrer que : $a^2 + b^2 \geq 2ab, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que pour a, b, c , 3 réels strictement positifs $(a^2+b^2)c + (b^2+c^2)a + (c^2+a^2)b \geq 6abc$.

EXERCICE 59

1) Montrer que : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad \forall a > 0, \forall b > 0$.

2) Soient a, b, c trois réels strictement positifs, montrer que : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

EXERCICE 60

Montrer que quels que soient les réels strictement positifs a, b, c et d on a :

$$\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \geq 16 \quad (\text{Indication : Comparer } x^2+1 \text{ et } 2x, x \in \mathbb{R})$$

EXERCICE 61

Soient a, b et c des réels quelconques.

1) En développant $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$, montrer que $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

2) On suppose $a^2+b^2+c^2=1$. Démontrer que : $-\frac{1}{2} \leq ab+bc+ca \leq 1$.

EXERCICE 62

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Démontrer que : $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

2) Démontrer que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

3) Comparer $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ et $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

4) Pour quelles valeurs de n a-t-on : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 10^{-1}$?

EXERCICE 63

Soit n un entier naturel non nul.

1) Prouver que $\sqrt{2n-1} \times \sqrt{2n+1} < 2n$.

2) En déduire que : $\frac{2n-1}{2n} < \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}$.

3) Démontrer que : $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

EXERCICE 64

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs tels que $x \leq y$.

$$a = \frac{x+y}{2} \quad (\text{moyenne arithmétique de } x \text{ et } y)$$

On pose : $g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique ou moyenne proportionnelle de x et y)

$$h = \frac{2xy}{x+y} \quad \left(\text{moyenne harmonique de } x \text{ et } y ; \text{ remarquer que } \frac{1}{h} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2} \right) \text{ et}$$

$$q = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

$$\left(\text{moyenne Harmonique de } x \text{ et } y ; \text{ remarquer que : } q^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} \right)$$

Le but de l'exercice est de comparer ces différentes moyennes.

- 1) Démontrer que $x \leq h$ et $q \leq y$
- 2) Démontrer que $g \leq a$
- 3) Démontrer que $g^2 = ah$. En déduire que $h \leq g$
- 4) Démontrer que $a \leq q$
- 5) Ranger par ordre croissant les nombres $x ; y ; a ; g ; h$ et q
- 6) Utiliser les résultats ci-dessus pour prouver que ,quels que soient les réels strictement positifs $x ; y$ et z on a :
 - a) $8xyz \leq (x+y)(y+z)(z+x)$
 - b) $xyz(x+y+z) \leq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \leq x^4 + y^4 + z^4$

EXERCICE 65

1) Montrer que : pour tout réels positifs a et b , $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Quand a t-on l'égalité ?

2) on pose $T = \frac{c+de^2}{e}$ où c, d et e sont des réels positifs avec $e \neq 0$

Déterminer la valeur minimale de T ?

Pour quelle valeur de e obtient-on cette valeur minimale ?

EXERCICE 66

1°) Vérifier par le calcul que, quels que soient les nombres x, y et z , on a l'égalité :

$$(x+y+z)^3 - 27xyz = \left(\frac{x+y+z}{2} \right) [(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] + 3[x(y-z)^2 + y(x-z)^2 + z(x-y)^2].$$

2°) En déduire que SI $x \geq 0, y \geq 0$, et $z \geq 0$, ALORS $(x+y+z)^3 \geq 27xyz$, l'égalité n'ayant lieu que si $x = y = z$.

3°) Dans cette question, on se propose de déterminer parmi tous les parallélépipèdes rectangles de volume V fixé égal à 1, celui qui possède la plus petite surface S .

a) Soient a, b et c les longueurs des arêtes d'un parallélépipède rectangle de volume $V = 1$.

On pose $x = bc, y = ac$ et $z = ab$.

Vérifier que : $1 = V^2 = xyz$ et que $S = 2(x+y+z)$.

b) En utilisant 2°, établir que $\left(\frac{S}{2}\right)^3 \geq 27$, donc que $S \geq 6$, l'égalité n'ayant lieu que si

$x = y = z$.

c) En déduire la solution du problème posé au début de cette question.

VALEUR ABSOLUE. CALCULS APPROCHES

EXERCICE 1

Comparer les nombres

1°) $|-a|, |a|, -|a|, ||-a||$. 2°) $|a^2|, |a|^2, |-a^2|, -|a^2|, ||a^2||, -a^2, a^2$.

EXERCICE 2

Pour tout réel x , on pose : $f(x) = |x| - |x+2| + |x-3|$.

1°) Calculer $f(-2)$; $f(3)$; $f(-3)$; $f(1)$ et $f(5)$.

2°) Exprimer $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue (on distinguera plusieurs cas et on fera, au besoin, un tableau).

3°) Résoudre $f(x) = 0$ et $f(x) \leq 2x + 3$.

EXERCICE 3

Etablir que, pour tous réels a et b , on a : $||a| - |b|| \leq |a + b|$.

(Indication : on montrera que $|a| - |b| \leq |a + b|$ et $|b| - |a| \leq |a + b|$, et pour cela, on utilisera la relation : $a = (a + b) - b$.)

EXERCICE 4

Montrer que, pour tous réels a , b et c , on a l'équivalence suivante :

$$(|a| < c \text{ et } |b| < c) \Leftrightarrow \left(\frac{|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} < c \right).$$

EXERCICE 5

Soient a et b deux réels non nuls. Montrer que : $\left| \frac{a}{b} \right| + \left| \frac{b}{a} \right| \geq 2$.

EXERCICE 6

Déterminer le centre et le rayon de chacun des intervalles suivants :

$[-3, 3]$; $[1, 8]$; $[-0.3, -0.1]$; $[-\sqrt{2}, +1]$; $[\sqrt{2}, +1]$; $[-5, -7]$

EXERCICE 7

Voici 5 façons de décrire une même propriété :

* $x \in [1, 3]$: en terme d'intervalle

* $1 \leq x \leq 3$: en terme d'encadrement

* $|x - 2| \leq 1$: en terme de valeur absolue

* $d(x, 2) \leq 1$: en terme de distance

* Par une représentation graphique

Traduire pour chaque façon les propriétés suivantes :

a) $x \in [3, 7]$ b) $-6 \leq x \leq -2$ c) $|x + 2| < 2$

d) $|3 - x| < 4$ e) $-5 < 2x < 5$ f) $x \in [1; 5]$

g) $d(x, 4) \leq 0,5$ h) $x \in [-7, 1]$ i) $d(x, -1) \leq 2$

EXERCICE 8

Représenter géométriquement et écrire sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles l'ensemble des nombres réels x vérifiant :

- a) $|x - 1| \leq 3$ b) $|2x - 1| \leq 2$ c) $|x + 2| < 2$
d) $|x| > 1$ e) $|x - 2| \geq \frac{1}{2}$ f) $1 < |3x - 1| \leq 3$
g) $|5x - 8| \geq 1$ h) $\left|\frac{1}{x} - 1\right| \leq 0,12$ i) $\left|\frac{-5}{x} + 8\right| < 0,4$

EXERCICE 9

Caractériser par une inégalité du type

$|x - a| \leq r$ ou $|x - a| \geq r$; $|x - a| < r$ ou $|x - a| > r$ chacun des ensembles suivants:

$$I_1 = [-1, 3] \quad I_2 =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[\quad I_3 =]-5, -2[\quad I_4 =]-\infty, -5] \cup [-2, +\infty[$$

EXERCICE 10

Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

- 1) $|x - 4| = 0,2$ 2) $|x+3| = x+3$ 3) $|x - 2,5| = 2,5 - x$ 4) $|2x + 3| \leq 7$
5) $|x^2 - 4| = 4 - x^2$ 6) $\sqrt{|x+1|^2} = 1 - x$ 7) $|x - 3,1| \geq 2,3$ 8) $|2a - 3| = \pi$
9) $|3x + 5| \leq 3$ 10) $|3x - 1| + |x + 1| = 1$ 11) $|x + 6| + |x - 10| \leq 16$
12) $\frac{|2x - 5|}{|x - 4|} \leq 1$ 13) $|3 - x| \geq |3 + x| - 2|x|$ 14) $|x| = x$ 15) $|x| \geq -x$

EXERCICE 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants à l'aide d'un schéma :

- 1°) $\begin{cases} |x - 4| \leq 3 \\ |x - 2| \leq 4 \end{cases}$ 2°) $\begin{cases} |x - 1| \geq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$ 3°) $\begin{cases} |x| < 5 \\ |x - 2,5| \leq 3 \end{cases}$ 4°) $\begin{cases} |x + 1| \leq 3 \\ |x - 3| > 1,5 \end{cases}$

EXERCICE 12 *Le problème des 3 villes*

Trois villes A, B et C sont situées le long d'une route rectiligne : A et B sont distantes de 900 m ; B est entre A et C ; B et C sont distantes de 1200 m.

Une personne compte faire quotidiennement 2 allers et retours entre sa maison et A, un entre sa maison et B, trois entre sa maison et C.

Où doit-elle construire sa maison pour que son trajet journalier soit minimal ?

EXERCICE 13

a et b sont des réels positifs non nuls .

1) Démontrer que si : $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{5}$, alors $\left| \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right| = 1$

2) Démontrer que si : $|x - 2| < \frac{1}{4}$ alors $|x^2 - 4| < \frac{17}{16}$

EXERCICE 14

1) Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient simultanément :

$$|x - 1| < \frac{3}{2} \text{ et } |x + 1| < 2,8$$

2) Comment choisir $a > 0$ pour qu'il n'existe pas de réel x vérifiant :

$$|x - 1| < \frac{3}{2} \text{ et } |x + 1| < a$$

EXERCICE 15

1) Déterminer $d(1,111; \frac{10}{9})$

2) Résoudre dans $\mathbf{R}$: $d(x, 3) = 2 d(x, -1)$

3) a et b sont des réels donnés. Résoudre dans $\mathbf{R}$: $d(x, a) = 2 d(x, b)$

EXERCICE 16 Valeur absolue et relation d'ordre

1°) On donne $a = 2$, $b = 4$, et un nombre x tel que $d(x, 3) = |x - 3| = 1,2$.

x est-il dans l'intervalle $]a, b[$?

2°) Dans chacun des cas suivants, encadrer avec le plus de précision l'aire A et le volume V du solide donnés.

a) Pavé droit de coté a , b , c . On appelle que : $A = 2(ab + ac + bc)$ et $V = abc$

Données : * 3,15 est une valeur approchée de a à 5×10^{-2} près

* 2,35 est une valeur approchée de b à 5×10^{-2} près

* 4,25 est une valeur approchée de c à 5×10^{-2} près

b) Cylindre de rayon R et de hauteur h . On rappelle que $A = 2\pi R(R + h)$ et $V = \pi R^2 h$

Données : $R \approx 4$ à 2×10^{-2} près.

c) Sphère de rayon R . On rappelle que : $A = 4\pi R^2$ et $V = \frac{4\pi R^3}{3}$

a) $7 < R < 7,3$

2° cas : $R \approx 6$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 17

1°) Sachant que 1,27 est une valeur approchée de x à 10^{-4} près, donner une approximation de $A = -2x + 4$ à 10^{-3} près.

2°) Que peut-on dire de cette approximation si 1,27 est une approximation par défaut de x à 10^{-4} près ?

EXERCICE 18

A tout réel x , on associe le réel $g(x) = x^2 - 6x + 2$.

1°) Vérifier que $g(x) = (x - 3)^2 - 7$.

2°) Sachant que : $2 \leq x \leq 4$,

a) donner un encadrement de x^2 , puis de $-6x$. En déduire un encadrement de $g(x)$.

b) donner un encadrement de $(x - 3)$, puis de $(x - 3)^2$. En déduire un encadrement de $g(x)$.

c) Quel est le meilleur parmi ces encadrements de $g(x)$?

VECTEURS DU PLAN

EXERCICE 1

A , B , C et D sont quatre points quelconques du plan.

1°) Construire les points R et S tels que $\vec{AR} = \vec{AB} + \vec{CD}$ et $\vec{AS} = \vec{AD} + \vec{CB}$.

Quelle remarque peut-on faire ?

2°) Démontrer que $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$.

EXERCICE 2

ABCD est un parallélogramme de centre O.

1°) Calculer la somme vectorielle $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$.

2°) M étant un point quelconque du plan, placer les points E, F, G et H tels que :

$\vec{ME} = \vec{AB}$; $\vec{MF} = \vec{BC}$; $\vec{MG} = \vec{CD}$ et $\vec{MH} = \vec{DA}$.

Démontrer que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.

EXERCICE 3

OAB est un triangle, D et C les points tels que : $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB}$ et $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{O}$.

1) Démontrer que O est le milieu de [CD].

2) E et F sont les points tels que : $\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{OC}$ et $\vec{OF} = \vec{OB} + \vec{OC}$. Démontrer que ABFE est un parallélogramme.

EXERCICE 4

A,B,C,D sont quatre points

1) Construire les points E,F tels que $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{AC} - \vec{BC}$ et $\vec{AF} = \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{AD}$.

2) Montrer que $\vec{FE} = \vec{AC} + \vec{DB}$

EXERCICE 5

Simplifier au maximum l'écriture des vecteurs suivants en utilisant la relation de Chasles :

1°) $\vec{u} = \vec{AB} - \vec{AC} - \vec{CB}$; $\vec{v} = \vec{BC} - \vec{BA} - \vec{BD} - \vec{BC}$;

$\vec{w} = \vec{AB} - \vec{AC} - \vec{CB}$; $\vec{t} = \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{AB}$

2°) $\vec{u} = \vec{DA} + \vec{BC} + \vec{CD}$; $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{BC} - \vec{CD} + \vec{AD}$;

$\vec{w} = \vec{AC} + 2\vec{CB} + \vec{BA}$; $\vec{t} = 2\vec{AB} - \vec{BC} - \vec{CA}$

3°) en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

$\vec{u} = 2\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} + \vec{BC}$; $\vec{v} = \vec{BA} + 3\vec{CA} - 2\vec{BC}$

$\vec{w} = \frac{2}{5}(\vec{AB} - 5\vec{BC}) + \vec{CA}$; $\vec{t} = 2(\vec{MB} - \vec{AC}) + \vec{MB} - 3\vec{MC}$.

EXERCICE 6

ABC est un triangle. Exprimer le vecteur $\vec{AM}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ et construire le point M dans chacun des cas suivants :

- a) $\vec{AM} + \vec{BC} = \vec{AB}$; b) $2\vec{MA} + \vec{AC} = \vec{AB}$; c) $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{AC}$
d) $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$.

EXERCICE 7

$ABCD$ est un parallélogramme, I et J les points tels que :

$$\vec{AI} = \frac{1}{2} \vec{AB} ; \vec{AJ} = \frac{1}{3} \vec{AD}. \text{ Soit G le point tels que : } \vec{IG} = \frac{3}{5} \vec{IJ}.$$

Construire la figure et montrer que les points A, C, G sont alignés.

EXERCICE 8

Dans un triangle ABC, on considère par M le milieu de [AB], par I celui de [MC]

et K le point tel que $\vec{CK} = \frac{1}{3} \vec{CB}$

1) Montrer que $\vec{AI} = \frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}$ et $\vec{AK} = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{2}{3} \vec{AC}$.

2) En déduire que les points A, I, K sont alignés.

EXERCICE 9

ABC un triangle, O un point quelconque, G et P les points tels que:

$$\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AB} \text{ et } \vec{OP} = \vec{OA} + 2\vec{OB} - 3\vec{OC}$$

1) Montrer que $3\vec{OG} = \vec{OA} + 2\vec{OB}$.

2) Montrer que les droites (OP) et (CG) sont parallèles.

EXERCICE 10

Soit ABC un triangle. Placer les points D et E tels que :

$$\vec{EB} = \vec{BA} \text{ et } \vec{ED} = 2\vec{BC}$$

Montrer que le point C est le milieu du segment [AD].

EXERCICE 11

Soit ABCD un parallélogramme, E le milieu de [BC] et F le milieu de [DC].

1°) Démontrer que $\vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{BC}$

2°) Démontrer que $\vec{AE} + \vec{AF} = \frac{3}{2} \vec{AC}$.

EXERCICE 12 Caractérisation du milieu d'un segment

1°) Soit [AB] un segment et I son milieu. Démontrer que :

si M est un point quelconque du plan, alors : $2\vec{MI} = \vec{MA} + \vec{MB}$

2°) Soit [AB] un segment et M t un point quelconque du plan. Démontrer que, si le point I est défini par la relation vectorielle : $2\vec{MI} = \vec{MA} + \vec{MB}$, alors I est le milieu du segment [AB].

EXERCICE 13

1°) Soit ABC un triangle, I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC].

Montrer que $\vec{IJ} = \frac{1}{2} \vec{BC}$.

2°) Soit $ABDC$ un quadrilatère quelconque, I, J, K et L les milieux respectifs de $[AB]$, de $[AC]$, de $[DB]$ et de $[DC]$.

Démontrer que $IJKL$ est un parallélogramme (on pourra utiliser la question 1°).

Quelle condition faut-il rajouter sur $ABDC$ pour que $IJKL$ soit un losange? un rectangle? un carré ?

EXERCICE 14

$ABCD$ un parallélogramme de centre O , E est le milieu de $[AB]$, F celui de $[CD]$. Les droites (DE) et (BF) coupent la droite (AC) en L et M respectivement.

1) Montrer que L est centre de gravité du triangle ABD . En déduire que $\vec{OL} = \frac{1}{3} \vec{OA}$.

2) Prouver que $\vec{OM} = \frac{1}{3} \vec{OC}$ et que O est le milieu de $[ML]$.

EXERCICE 15

$ABCD$ est un trapèze tel $\vec{BC} = 2\vec{AD}$, k est un nombre réel et M le point défini par $\vec{AM} = k\vec{AB}$ se projette en K sur (AC) parallèlement à (BC) et en N sur (CD) parallèlement à (BC) .

1) Montrer que $\vec{MK} = 2k\vec{AD}$ et $\vec{NK} = (k-1)\vec{AD}$.

2) Déterminer le réel k pour que K soit le milieu de $[MN]$, puis pour que $\vec{MN} = \frac{3}{2} \vec{AD}$.

EXERCICE 16

Soit $ABCD$ un carré. On construit sur $[DC]$ et à l'intérieur du carré le triangle équilatéral DCE .

On construit sur $[BC]$ et à l'extérieur du carré le triangle équilatéral BCF .

1) Exprimer les vecteurs $\vec{AE}$ et $\vec{AF}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.

2) En déduire que les points A, E, F sont alignés.

EXERCICE 17

Soit un triangle ABC ; D et E les symétriques de B par rapport à A et C ; F et G les milieux des segments $[DC]$ et $[AE]$.

1) On désigne par M le point d'intersection de (BF) et (AC) , N celui de (BG) et (AC) .

Montrer que l'on a $\vec{AM} = \vec{MN} = \vec{NC}$.

2) On désigne par I et J les milieux de $[AD]$ et $[CE]$. Montrer que les points I, F, G, J sont alignés et que $\vec{IF} = \vec{FG} = \vec{GJ}$.

3) On désigne par K le milieu de $[BF]$. Montrer que les points K, N , et J sont alignés.

4) On désigne par P le point d'intersection de (DC) et (AE) . Montrer que (MN) est parallèle à (BC) .

5) Déterminer le réel α tel que $\vec{BK} = \alpha \vec{BM}$.

EXERCICE 18

Soit $ABCD$ un parallélogramme et les points I et J milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

1°) Démontrer que les droites (ID) et (JB) sont parallèles.

2°) Construire les points M et N tels que : $\vec{AM} = \frac{1}{3} \vec{AC}$ et $\vec{AN} = \frac{2}{3} \vec{AC}$.

3°) Exprimer $\vec{IM}$ et $\vec{ID}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
En déduire que M appartient à la droite (ID).

4°) Exprimer $\vec{BJ}$ et $\vec{BN}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
En déduire que N appartient à la droite (JB).

5°) Démontrer que MINJ est un parallélogramme.

6°) Soit E le point d'intersection des droites (ID) et (BC).
Démontrer que B est le milieu du segment [CE].

EXERCICE 19

Soit ABC un triangle non rectangle ; O le centre et r le rayon de son cercle circonscrit C.

1°) On considère le point H défini par : $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.

a) Montrer que : $\vec{AH} = 2 \vec{OA'}$; $\vec{BH} = 2 \vec{OB'}$ et $\vec{CH} = 2 \vec{OC'}$, avec A', B', C' milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].

b) En déduire que : (AH) $\perp$ (BC) et (BH) $\perp$ (CA).
Que représente alors le point H ?

2°) On désigne par I, J, K les milieux de [AH], [BH], [CH]. Montrer que les segments [OH], [IA'], [JB'], [KC'] ont le même milieu Ω .

3°) Montrer que : $\vec{\Omega I} = \frac{1}{2} \vec{OA}$, $\vec{\Omega J} = \frac{1}{2} \vec{OB}$ et $\vec{\Omega K} = \frac{1}{2} \vec{OC}$.

En déduire que les points I, J, K appartiennent au cercle C' de centre Ω et de rayon $\frac{1}{2} r$.

4°) Montrer que : $\vec{\Omega A'} = -\frac{1}{2} \vec{OA}$, $\vec{\Omega B'} = -\frac{1}{2} \vec{OB}$ et $\vec{\Omega C'} = -\frac{1}{2} \vec{OC}$.

En déduire que les points A', B', C' appartiennent au cercle C'.

5°) On désigne par A₁, B₁, C₁ les pieds sur (BC), (CA), (AB) des hauteurs du triangle ABC.
Montrer que les points A₁, B₁ et C₁ sont éléments du cercle C'.

6°) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que les points O, G et H sont alignés.

7°) Les résultats précédents sont-ils vérifiés lorsque le triangle ABC est rectangle ? Faire par exemple une figure avec le triangle ABC rectangle en A.

Que dire des points O, G, H, Ω , lorsque le triangle ABC est équilatéral ?

Notes :

- C' est appelé **cercle d'Euler** du triangle ABC.
 - Lorsque le triangle ABC n'est pas équilatéral, la droite (OH) est appelée **droite d'Euler** de ABC.
-

EXERCICE 20

Soit un cercle C de centre O , D un de ses diamètres, M un point intérieur à C . Construire les points A de D et B de C tels que :

$$\begin{array}{ll} 1^\circ) \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OM} & 2^\circ) \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OM} \\ 3^\circ) \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{OM} & 4^\circ) \vec{AO} + \vec{BO} = \vec{OM} . \end{array}$$

EXERCICE 21

Soit ABC un triangle . Soient D et E les points définis par :

$$\vec{DA} = k \vec{DB} \quad \text{et} \quad \vec{EC} = k \vec{EA} \quad . (\text{où } k \text{ est un réel donné distinct de } 1) .$$

Soit E' le projeté de D sur la droite (AC) parallèlement à la droite (BC) .

1°) Démontrer que $[AC]$ et $[EE']$ ont même milieu .

2°) Démontrer que les milieux des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[DE]$ sont alignés .

BARYCENTRES

EXERCICE 1 (Construction de barycentres)

Soient A et B deux points distincts et G le barycentre de (A, 3) et (B, 2).

1°) La méthode du parallélogramme

Soit M un point n'appartenant pas à (AB). Construire les points A₁, B₁ et S tels que :

$$\vec{MA_1} = 3 \vec{MA} ; \vec{MB_1} = 2 \vec{MB} \text{ et } \vec{MS} = \vec{MA_1} + \vec{MB_1} .$$

Montrer alors que les droites (MS) et (AB) sont sécantes en G .

2°) La méthode des parallèles

Soit $\vec{u}$ un vecteur non colinéaire à $\vec{MA}$. Construire les points A' et B' tels que :

$$\vec{AA'} = 2 \vec{u} \text{ et } \vec{BB'} = -3 \vec{u} \text{ (on permute les coefficients en changeant le signe de l'un) .}$$

Montrer que les droites (A' B') et (AB) sont sécantes en G .

EXERCICE 2

ABCD est un parallélogramme de centre O .

1°) Définir vectoriellement et placer les points I, J, et K définis par :

I est le barycentre de (A, 5) et (B, -2) ; J le barycentre de (B, 1) et (C, -2) ; K le barycentre de (C, -5) et (D, 2) et L est le barycentre de (D, -1) et (A, 2) .

2°) Démontrer que IJKL est un parallélogramme de centre O .

EXERCICE 3

Soient A et B deux points tels que AB = 10 cm .

1°) Construire le barycentre C de (A, 2) et (B, 3) et le barycentre D de (A, 3) et (B, 2) .

2°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\| 2 \vec{MA} + 3 \vec{MB} \| = \| 3 \vec{MA} + 2 \vec{MB} \| .$$

EXERCICE 4

Soit ABC un triangle, A' le barycentre des points pondérés (B, -1) et (C, 2) ; B' le barycentre de (A, 3) et (C, 2) et C' le barycentre de (A, 3) et (B, -1) .

1°) Placer A', B' et C' .

2°) Soit G le barycentre de (A, 3) (B, -1) et (C, 2) . Montrer que : $3 \vec{GA} + \vec{GA'} = \vec{0}$.

En déduire que G est un point de (AA') .

3°) Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes

EXERCICE 5

Soit ABC un triangle . Soient I et J les points définis par : $\vec{AI} = \frac{3}{4} \vec{AB}$ et $\vec{AJ} = \frac{2}{3} \vec{AC}$.

Les droites (BJ) et (CI) se coupent en G . La droite (AG) coupe (BC) en K .

1°) Faire une figure .

2°) Trouver les réels a, b et c tels que I soit le barycentre de {(A, a) (B, b)} et J le barycentre du système {(A, a) (C, c)} .

3°) Montrer que le barycentre du système {(A, a) ; (B, b) ; (C, c)} est le point G .

En déduire que K est le barycentre de (B, b) et (C, c) et donner la position de K sur la droite (BC) .

EXERCICE 6 (Barycentre de quatre points)

Soit ABCD un rectangle. On note I le milieu de [AB] et E le centre de gravité du triangle ABC.

1°) Construire le barycentre F de (C, 1) et (D, 3).

2°) Démontrer que le milieu G de [ED] est le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1) et (D, 3).

3°) Démontrer que G appartient à la droite (IF).

4°) Soit K le point défini par : $\vec{AK} = \frac{3}{4} \vec{AD}$.

Montrer que le milieu de [BC] appartient à la droite (GK).

EXERCICE 7

Soit ABC un triangle quelconque.

1°) Construire :

- le barycentre G de (A, 3) et (B, 3)
- le barycentre E de (B, 3) et (C, 3)
- le barycentre F de (A, 3) et (C, 1)

2°) Soit I le barycentre de (A, 3), (B, 3) et (C, 1). Démontrer que :

- les points A, I et E sont alignés.
- les points B, I et F sont alignés, ainsi que C, I et G.

Que peut-on en déduire pour les droites (AE), (BF) et (CG) ?

3°) Construire le barycentre E' de (B, 3) et (C, -1).

Exprimer les vecteurs $\vec{E'I}$ et $\vec{GF}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

En déduire que E', F et G sont alignés.

4°) Montrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

Soit H le symétrique de A par rapport à B et K le point d'intersection des droites (E'H) et

(EF). Montrer que $\vec{E'K} = \frac{3}{2} \vec{E'H}$.

EXERCICE 8

1°) Soit ABC un triangle, construire les points I, J et K définis par :

- I est le barycentre de (A, 2) et (C, 1)
- J est le barycentre de (A, 1) et (B, 2)
- K est le barycentre de (C, 1) et (B, -4).

2°) Exprimer B comme barycentre de (K, α) et (C, 1) (α étant un réel à déterminer.)

3°) Quel est le barycentre de (A, 2), (K, 3) et (C, 1) ?

4°) Déduire du 3°) que I, J, K sont alignés. Que représente J pour le segment [IK] ?

5°) L étant le milieu de [CI] et E celui de [KC], démontrer que IJEL est un parallélogramme dont le centre G est l'isobarycentre de A, B et C.

EXERCICE 9

Soit ABC un triangle. On effectue les constructions suivantes : on symétrise A par rapport à B, B par rapport à C et C par rapport à A ; on obtient respectivement les points K, I, J (donc un triangle IJK).

1°) Faire une figure.

2°) Exprimer chacun des points A, B, C comme barycentre des points I, J, K

(*indication* : pour A par exemple $\vec{AJ} + \vec{AC} = \dots$? puis exprimer $\vec{AC}$ en fonction de $\vec{AI}$ et $\vec{AB}$; et $\vec{AB}$ en fonction de $\vec{AK}$, etc ...).

3°) On définit les points P, Q, R par : $\vec{KP} = \frac{1}{3} \vec{KJ}$; $\vec{IQ} = \frac{1}{3} \vec{IK}$; $\vec{JR} = \frac{1}{3} \vec{JI}$.

Montrer que les points P, Q, R sont respectivement les points d'intersection des droites (BC) et (KJ), (AB) et (JI), (AC) et (KI).

EXERCICE 10

Soit ABC un triangle et k un réel non nul. Soient D et E définis par : $\vec{AD} = k \vec{AB}$ et

$$\vec{CE} = k \vec{CA}$$

1°) Faire une figure illustrant ces données pour $k = \frac{1}{3}$, puis pour $k = -1$.

2°) Montrer que D est le barycentre de (A, $1 - k$) et (B, k) et E le barycentre de (C, $1 - k$) et (A, k).

3°) En déduire que, pour tout point M du plan, on a :

$$\vec{MD} + \vec{ME} = \vec{MA} + \vec{MC} + k \vec{CB} = 2 (\vec{MB'} + k \vec{B'C'}) \text{ où } B' \text{ et } C' \text{ sont les milieux respectifs de } [AC] \text{ et } [AB].$$

4°) Montrer que [DE], [AC] et [AB] ont leurs milieux alignés.

EXERCICE 11

Soient A, B, C trois points distincts ; a, b, c des réels tels que $a + b + c \neq 0$. Soit G le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c).

1°) Démontrer que les points pondérés (A, $2a + 1$), (B, $2b - 2$) et (C, $2c + 1$) admettent un barycentre qu'on appellera K.

2°) a) Donner une relation vectorielle définissant K et en déduire que :

$$a \vec{KA} + b \vec{KB} + k \vec{KC} = \frac{\vec{AB} + \vec{CB}}{2}$$

b) En déduire que G et K sont confondus si et seulement si B est le milieu du segment [AC].

3°) On suppose que A, B et C ne sont pas alignés. Soit E le point vérifiant que ABCE est un parallélogramme.

a) Démontrer que $\vec{GK} = \frac{\vec{BE}}{2(a + b + c)}$ en utilisant la question 2°.

b) On pose $a = c = \frac{1}{2}$ et $b = 2$. Construire les points G et K.

EXERCICE 12

Soit ABC un triangle équilatéral de côté $a = 4$ cm.

Soit D le point défini par : $3 \vec{DA} - \vec{AB} + 2 \vec{AC} = \vec{0}$.

1°) Exprimer D comme barycentre de A, B, et C affectés de coefficients à préciser.

2°) Soit I le milieu de [AC]. Montrer que D est barycentre de B et I affectés de coefficients à préciser. En déduire que D est le symétrique de G par rapport à I (G étant le centre de gravité du triangle ABC).

3°) Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que : $\| 2 \vec{MA} - \vec{MB} + 2 \vec{MC} \| = 4\sqrt{3}$.

a) Déterminer (E).

b) Vérifier que G appartient à (E) et construire (E).

EXERCICE 13

1°) Construire un triangle ABC tel que $AC = 12$, $BA = 10$, et $CB = 8$ puis placer le barycentre G de $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, 1)$.

2°) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\| \vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} \| = AC.$$

3°) Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\| \vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} \| = \| \vec{BA} + \vec{BC} \|.$$

a) Montrer que B appartient à (E) .

b) Déterminer et représenter l'ensemble (E) .

4°) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\| \vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} \| = \| 3\vec{MA} + \vec{MC} \|.$$

EXERCICE 14

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $AC = 6$.

1°) Placer le point G tel que $\vec{AG} = \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}$.

2°) Démontrer que G est le barycentre de A, B et C affectés de coefficients que l'on précisera

3°) Déterminer et représenter l'ensemble (C) des points M du plan tels que :

$$\| \vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} \| = 10.$$

4°) Montrer que (C) passe par les points C et A.

EXERCICE 15

On considère trois points A, B, C non alignés affectés des coefficients respectifs 1, 2, et -3 .

1°) Ces points pondérés ont-ils un barycentre ?

2°) Montrer que lorsque M se déplace dans le plan, le vecteur $\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}$ reste

constant. On note $\vec{u}$ ce vecteur constant. Construire le point D tel que $\vec{AD} = \vec{u}$.

3°) Construire les barycentres :

- A' de $(B, 2)$ et $(C, -3)$
- B' de $(C, -3)$ et $(A, 1)$
- C' de $(A, 1)$ et $(B, 2)$

a) Démontrer que $\vec{u} = -A\vec{A}' = -2B\vec{B}' = 3C\vec{C}'$.

b) Que peut-on en déduire pour les droites (AA') , (BB') et (CC') ?

EXERCICE 16

Dans chacun des cas suivants, trouver des réels α et β tels que A soit barycentre de $\{(B; \alpha), (C; \beta)\}$

1) $\vec{AB} - 2\vec{CA} = \vec{0}$

2°) $\vec{BA} = 3\vec{AC}$

3°) $2\vec{BC} + \vec{AC} = \vec{0}$

4°) $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC} = 2\vec{BA}$

EXERCICE 17

Soit A et B deux points tels que $AB = 4$. L'unité de longueur est le centimètre.

- 1°) Construire la barycentre C des points pondérés (A, 1) et (B, 3)
- 2°) Construire la barycentre D des points pondérés (A, -1) et (B, 3)
- 3°) Démontrer que C est le milieu de [AD]
- 4°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 12$$

EXERCICE 18

Construire chacun des cas suivants le barycentre des points A, B, C et D.

- a) (A, 1) ; (B, 1) ; (C, 2)
- b) (A, -1) ; (B, 2) ; (C, 3)
- c) (A, -2) ; (B, -4) ; (C, -1)
- d) (A, $\frac{1}{2}$) ; (B, $\frac{1}{3}$) ; (C, $\frac{1}{4}$)

EXERCICE 19

Soit A et B deux points tels que AB = 10. (L'unité de longueur est le centimètre.)

- 1°) Construire la barycentre C des points pondérés (A, 2) et (B, 3)
- 2°) Démontrer que [AB] et [CD] ont milieu .
- 3°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MB}\|$$

EXERCICE 20

On se donne un triangle ABC .Pour tout point M du plan , on pose :

$$\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} .$$

- 1- P désignant un point quelconque du plan , prouver que $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(P)}$ (f constante)
- 2- Construire G1 barycentre (B ; -3) et (C ; 1). Montrer que $\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{G_1A}$
- 3- Construire G2 barycentre (A ; 2) et (C ; 1). $\overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{BG_2}$
- 4- On désigne par G3 le barycentre de (B ; -3) et (A ; 2). Montre que les droites (AG1) , (BG2) et (CG3) sont parallèles.
- 5- En déduire une construction de G3.

EXERCICE 21

Soit un triangle ABC rectangle en A et tel que AB=4, AC=6.

- 1) Placer le point G tel que : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Calculer AG.

- 2) Démontrer que G est le barycentre de A ,B ,C affectés de coefficients que l'on précisera.
- 3) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 10$. Montrer que (Γ) passe par C et A.

SECOND DEGRE (1^{er} Niveau)

EXERCICE 1

Factoriser, si possible, les trinômes incomplets suivants :

$$\begin{aligned} A &= x^2 + 8x & B &= 2x^2 - 5x & C &= -x^2 + 9x & D &= x^2 - 9 & E &= x^2 - 5 \\ F &= -3x^2 + 7 & G &= -5x^2 + 17 & H &= -x^2 - 8x & I &= 7x^2 + 7 \\ J &= (m-3)x^2 - 9x & K &= (m+3)x^2 - 2m - 3 & L &= (m+2)x^2 + (2m-1)x \\ N &= (a+b)^2x^2 - (a-b)^2 \end{aligned}$$

EXERCICE 1

Mettre sous forme canonique les trinômes suivants :

$$\begin{aligned} A &= x^2 + 2x - 3 & B &= 5x^2 - 8x + 3 & C &= x^2 - 6x + 8 & D &= x^2 - x + \frac{1}{4} \\ E &= x^2 + 8x + 9 & F &= x^2 - 4x - 7 & G &= 7x^2 - 11x + 13 & H &= 2x^2 + 9x + 1 \\ I &= -x^2 + 4x - 3 & J &= x^2 + 6x - 27 & K &= -x^2 + 5x - 23 & L &= -9x^2 + 6x - 1 \\ M &= x^2 + 2mx - 3m^2 & N &= mx^2 - (m^2 - 1)x - m & O &= (m-2)x^2 + (5m-14)x - 20 \end{aligned}$$

EXERCICE 2

Factoriser, si possible, chacun des trinômes suivants :

$$\begin{aligned} A &= 14x^2 - 9x + 1 & B &= -4x^2 + 15x - 9 & C &= -15x^2 + 11x - 2 \\ D &= 4x^2 - 4x\sqrt{3} + 3 & E &= x^2 - 4x + 1 & F &= 4x^2 + 4x - 4 & G &= -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \\ H &= 5x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{6} & J &= -12x^2 + 60x - 75 & K &= x^2 + 2(\sqrt{2} - 2)x + 5 - 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

EXERCICE 1 (Résolution d'équations du second degré)

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \text{a)} & x^2 - 3x = 0 & \text{b)} & 3x^2 + 7x = 0 & \text{c)} & -4x^2 + 11x = 0 & \text{d)} & x^2 - 16 = 0 & \text{e)} & 2x^2 - 7 = 0 \\ \text{f)} & 4x^2 + 9 = 0 & \text{g)} & (x+5)^2 - 9 = 0 & \text{h)} & (2x-3)^2 - 7 = 0 & \text{i)} & (2x-7)^2 - (5x-1)^2 = 0 \\ \text{j)} & (x+3)^2 = 3(2x+1)^2 & \text{k)} & (4x^2 - 25) + (10-4x)(7x-3) = 0 \end{aligned}$$

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \text{a)} & x^2 - 12x + 36 = 0 & \text{b)} & 4x^2 + 12x = -9 & \text{c)} & 2x^2 - 5x - 7 = 0 & \text{d)} & x^2 - 5x + 6 = 0 \\ \text{e)} & 3x^2 - x = 4 & \text{f)} & 3x^2 - 10x + 3 = 0 & \text{g)} & -x^2 - 6x + 16 = 0 & \text{h)} & 2x^2 + 5x + 12 = 0 \\ \text{i)} & -x^2 + 3x + 4 = 0 & \text{j)} & x^2 - 22x + 105 = 0 & \text{k)} & 5x^2 + 7x - 34 = 0 & \text{l)} & 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ \text{m)} & \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{5}{2} = 0 & \text{n)} & \frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2} = 0 & \text{o)} & -\frac{x^2}{5} + 2 = \frac{9}{5}x & \text{p)} & -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1 = 0 \\ \text{e)} & x^2 + x\sqrt{2} = 4 & \text{e)} & x^2 + 3 = 2x\sqrt{3} & \text{e)} & x^2 + 2x\sqrt{2} + 1 = 0 & \text{e)} & 4x^2 + 5 = 4x\sqrt{5} \end{aligned}$$

EXERCICE 3 Equations paramétriques

On considère l'équation suivante : $(m-1)x^2 + 2mx + m-2 = 0$ (m paramètre réel).

1°) Déterminer l'ensemble E des valeurs de m pour lesquelles cette équation est du second degré.

2°) On suppose, pour la suite, que m appartient à E . Déterminer alors m pour que l'équation :

- n'admette aucune solution.
- admette une solution double (qu'on déterminera).
- admette deux solutions distinctes (qu'on calculera en fonction de m).

3°) Reprendre les questions 1°) et 2°) pour les équations suivantes :

- a) $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0$ b) $x^2 - 2(m+1)x - 2m - 3 = 0$
 c) $mx^2 + 2(m-1)x + 2 - 3m = 0$ d) $(m+1)^2 x^2 - 2(m+1)x + 1 - m = 0$
 e) $m^2 x^2 - 2m(m+1)x + 2m + 1 = 0$

EXERCICE 4 (Equations dont la résolution se ramène à celle d'équations du second degré)

1°) Equations avec des valeurs absolues

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ b) $x^2 - 3x - 15 = |4x - 5|$ c) $2x|x-1| + |x+4| = 0$.

2°) Equations fractionnaires

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)^2 + 2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) - 3 = 0$ b) $\frac{x}{x+2} - \frac{5}{x^2-x-6} = \frac{5-2x}{x-3}$
 c) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-3} = \frac{9}{x^2(x-3)}$ d) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{33}{11x-26}$

3°) Equations bicarrées

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$ b) $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$ c) $2x^4 + 11x^2 + 5 = 0$
 d) $x^4 + x^2 - 6 = 0$ e) $14x^4 - 9x^2 + 1 = 0$ f) $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$

EXERCICE 5

Déterminer, s'ils existent, les nombres x et y dont on connaît la somme S et le produit P :

- a) $S = 26$ et $P = 165$ b) $S = -46$ et $P = 529$ c) $S = 2$ et $P = -1$ d) $S = -3$ et $P = 9$
 e) $S = \frac{31}{35}$ et $P = \frac{6}{35}$ f) $S = -1$ et $P = \frac{20}{81}$

EXERCICE 6

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

- a) $\begin{cases} x+y = -7 \\ xy = \frac{49}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y = 2\sqrt{2} \\ xy = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x+y = -2 \end{cases}$
 d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{2} \\ x-y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y = 49 \\ x^2 + y^2 = 1225 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ xy = -5 \end{cases}$
 g) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ xy = \frac{1}{6} \end{cases}$ h) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ (2x-3)(2y-3) = -11 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 98 \\ xy = -15 \end{cases}$
 j) $\begin{cases} x+y = 1 \\ x^3 + y^3 = 7 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ xy + 2 = 0 \end{cases}$ l) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 64 \\ x+y = 0 \end{cases}$

EXERCICE 7

Etudier, suivant les valeurs de m , l'existence et le signe des solutions pour chacune des équations suivantes :

- a) $(m+1)x^2 - 2mx + m - 3 = 0$ b) $(m-3)x^2 - 2(m-3)x + m - 2 = 0$
c) $(m-6)x^2 + (2m+3)x + m + 4 = 0$ d) $(m+3)x^2 - (3m+1)x + 2m - 1 = 0$
e) $(m^2 - 4)x^2 - 2(m-2)x + 1 = 0$

EXERCICE 8

1°) Trouver m pour qu'on ait deux solutions de signes contraires dans chacun des cas suivants

- a) $x^2 + 2mx + m - 3 = 0$ b) $(2m-5)x^2 + mx + 7 = 0$
c) $(m-5)x^2 + (7m-1)x - 4m + 1 = 0$

2°) Déterminer m pour qu'on ait deux solutions strictement positives dans chacun des cas suivants :

- a) $(m-3)x^2 + (2m-1)x + m + 1 = 0$ b) $(m-1)x^2 + 2(m+6)x + m + 4 = 0$
c) $(3m-1)x^2 + (m+6)x - m - 9 = 0$.

3°) Reprendre la question 2°) dans le cas où les deux solutions sont strictement négatives .

EXERCICE 9

On considère l'équation suivante : $(m+3)x^2 + 2mx + m - 5 = 0$

1°) Etudier, suivant les valeurs du paramètre m , l'existence et le signe des solutions .

2°) Déterminer m tel qu'on ait deux solutions x' et x'' vérifiant : $(2x' - 1)(2x'' - 1) = 6$

3°) Lorsque l'équation admet deux solutions x' et x'' , montrer qu'il existe une relation indépendante de m entre elles .

4°) Former une équation du second degré ayant pour solutions :

$$X' = 3x' - 2 \quad \text{et} \quad X'' = 3x'' - 2 .$$

EXERCICE 10

On considère l'équation (E) suivante : $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$.

1°) Résoudre (E) pour $m = 0$; $m = 2$;

2°) Pour quelles valeurs de m (E) a-t-elle des racines ?

3°) Déterminer m pour que (E) ait deux racines x' et x'' de même signe .

EXERCICE 11

On considère l'équation : $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + 2m - 1 = 0$.

1°) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation admet des solutions doubles .
Pour chacune de ces valeurs, trouver la solution double correspondante .

2°) Etudier, suivant les valeurs de m , l'existence et le signe des solutions .

3°) Lorsque l'équation admet deux solutions x' et x'' , montrer qu'il existe une relation indépendante de m entre elles .

4°) Résoudre l'équation pour $m \in \left\{ \frac{1}{4} ; \frac{3}{4} ; 2 \right\}$.

EXERCICE 12

Soit l'équation : $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$.

1°) Etudier, suivant les valeurs de m , l'existence des racines .

2°) Déterminer m pour que l'une des racines soit le triple de l'autre . Montrer qu'alors les racines vérifient la relation : $3(x' + x'')^2 = 16x'x''$.

La réciproque est-elle vraie ?

EXERCICE 13 (Application du théorème donnant le signe d'un trinôme)1°) Etudier, suivant les valeurs de x , le signe des trinômes suivants :

$$A = (2x - 3)(x + 4) \quad B = (x + 1)(7 - x) \quad C = x^2 - 11x + 10 \quad D = -3x^2 + 4x + 4$$

$$E = -3x^2 + x - 2 \quad F = 2x^2 - x + 1 \quad G = -9x^2 + 12x - 4$$

2°) Etudier, suivant les valeurs de x , le signe des fractions rationnelles suivantes :

$$H = \frac{3x - 1}{2 - x} \quad I = \frac{x^2 + 4x - 21}{-2x^2 + 9x + 5} \quad J = \frac{-5x + 3}{2x^2 + 5x - 3} \quad K = \frac{3x^2 + 5x - 2}{6x^2 - 23x + 7}$$

EXERCICE 14Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :1°) inéquations du second degré

$$a) -3x^2 + 4x - \frac{4}{3} \geq 0 \quad b) -x^2 - x - \frac{1}{4} < 0 \quad c) -4x^2 - 3x + 1 \leq 0$$

$$d) -x^2 - 4x - 5 > 0 \quad e) -2x^2 + 3x + 1 > 3x^2 + 5x - 1 \quad f) -5x^2 + 4x - 12 < 0$$

2°) inéquations dont la résolution se ramène à celle d'inéquations du second degré

$$a) (2x - 3)^2 - (2x - 3)(x^2 + x + 1) \leq 0 \quad b) (-9x^2 + 12x - 4)(2x^2 + x - 6) > 0$$

$$c) (2x^2 - 2x\sqrt{5} + 1)(-2x^2 - 9x + 5) \geq 0 \quad d) (3x + 2)^2 < (x^2 + 5x + 2)^2$$

$$e) (3x^2 - x + 1)^2 \geq (2x^2 + 9x - 4)^2$$

3°) cas où l'inconnue apparaît au dénominateur

$$a) \frac{x + 3}{2(x - 1)} < \frac{3(x - 8)}{x - 5} \quad b) \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 6} \geq -1 \quad c) \frac{3x^2 - 6x + 4}{2x^2 - x - 1} > 2$$

$$d) \frac{x + 5}{3 - x} - \frac{2x + 1}{x + 2} \geq \frac{23}{4} \quad e) \frac{x - 4}{x - 1} - \frac{x}{3 - x} \leq 1 \quad f) \frac{2x - 3}{x - 2} - \frac{4x - 1}{3x^2 - 2x - 8} \leq \frac{65}{32}$$

$$g) \frac{1}{x} + \frac{2}{2x - 1} \geq \frac{10}{10x - 9} \quad h) \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{2x - 3} \leq \frac{6}{6x - 7}$$

$$i) \frac{(x - 1)(3x^2 + x - 10)}{1 - 2x} \geq 0 \quad j) \frac{(x + 1)(2x^2 + x - 1)}{-x^2 + 3x + 10} \leq 0$$

EXERCICE 15 (Systèmes d'inéquations)Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'inéquations suivants :

$$a) \begin{cases} x^2 + x - 20 < 0 \\ 2x^2 + 7x + 3 \geq 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} -5x^2 + 3x + 1 \leq 0 \\ -5x^2 + 3x + 2 < 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} > 0 \\ \frac{2x - 7}{x + 4} \leq 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{x - 5}{1 - 2x} \geq 1 \\ \frac{1}{2x - 3} \leq \frac{5}{x + 2} \end{cases} \quad e) \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 > 0 \\ -x^2 - 3x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 2x + 1 > 0 \end{cases} \quad f) 2 < (2x - 3)^2 < \frac{25}{4}$$

$$g) \frac{1}{x + 1} < \frac{1}{(x - 1)(x - 3)} < \frac{1}{x + 3}$$

EXERCICE 16L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est supposée avoir deux racines x' et x'' . Calculer en fonction de la somme et du produit des racines les expressions suivantes :

$$\frac{1}{x'^2} + \frac{1}{x''^2} \quad ; \quad \frac{1}{x'^3} + \frac{1}{x''^3} \quad ; \quad \frac{x' + 3}{x'' + 1} + \frac{x'' + 3}{x' + 1} \quad ; \quad (x' - 3)^3 + (x'' - 3)^3$$

EXERCICE 17 (Problèmes du second degré)

Les différentes questions sont indépendantes .

- 1°) Déterminer deux nombres entiers consécutifs sachant que la somme de leurs carrés est 2813 .
- 2°) Trouver les dimensions d'un rectangle de périmètre 140 m et de diagonale 50 m .
- 3°) La somme des deux chiffres d'un nombre est 13 . Si à leur produit on ajoute 34, on trouve pour total le nombre renversé . Quel est ce nombre ?
- 4°) Quelle est l'aire maximale d'un champ rectangulaire que l'on peut entourer avec 200 m de clôture ?
- 5°) La somme de 720000 F doit être partagée entre un certain nombre de personnes . Si y avait 5 personnes de moins, la part de chacune se trouverait augmentée de 2000 F . Combien de personnes participent au partage ?
- 6°) Deux villes A et B sont distantes de 75 kilomètres . Un cycliste va de A en B et revient en A . La durée totale du trajet aller et retour est égale à cinq heures et trente minutes . Sachant que la vitesse moyenne à l'aller dépasse de cinq kilomètres par heure la vitesse moyenne au retour, calculer les vitesses moyennes à l'aller et au retour .
- 7°) Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC , d'hypothénuse $BC = a$, sachant que : a) $AB + AC = \frac{5a}{4}$; b) l'aire du triangle est égale à $\frac{3a^2}{4}$.
- 8°) Soit un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$. Un point M du demi-cercle se projette orthogonalement en H sur la droite (AB) . Déterminer le point M dans les cas suivants :
a) $2AM - 3AH = \frac{4}{5}R$. b) $AH^2 + 2HM^2 = 2R^2$. c) $AM + HB = \frac{19}{8}R$.
- 9°) La somme d'un nombre et de sa racine carrée est égale à $\frac{195}{4}$. Trouver ce nombre.

SECOND DEGRE (2^e NIVEAU)

EXERCICE 1

Résoudre l'équation : $x^2 - (3 - 2\sqrt{2})x + 4 - 3\sqrt{2} = 0$

EXERCICE 2

Résoudre l'équation : $2(x + 1)^2 - 3(x - 1)^2 + 4(x^2 + 1) = 0$

EXERCICE 3

Résoudre et discuter l'équation : $x^2 + \sqrt{x - 3} = mx + \sqrt{x - 3}$

EXERCICE 4

Résoudre et discuter l'équation : $m^2 x^2 - m(5m + 1)x - (5m + 2) = 0$

EXERCICE 5

Résoudre l'équation : $a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$

EXERCICE 6

Résoudre l'équation : $(a + b)^2 x^2 - (a - b)(a^2 - b^2)x - 2ab(a^2 + b^2) = 0$

EXERCICE 7

Démontrer que, si α et β sont les racines de l'équation : $(x - a)(x - b) - k = 0$, alors a et b sont les racines de l'équation : $(x - \alpha)(x - \beta) + k = 0$

EXERCICE 8

On considère l'équation : $(b^2 + c^2)x^2 - 2acx + a^2 - b^2 = 0$ **(1)**, dans laquelle a , b , et c désignent trois nombres strictement positifs et x un réel.

1°) A quelle condition doivent satisfaire a , b et c pour que l'équation **(1)** admette des racines ?

Donner une interprétation géométrique de cette condition, en supposant que a , b et c sont des mesures des côtés d'un triangle.

2°) En supposant que l'équation ait des racines, montrer, en utilisant un groupement judicieux des termes du premier membre, que ces racines sont comprises entre -1 et $+1$.

EXERCICE 9

On considère l'équation : $(1 - \lambda)x^2 - 2(1 + \lambda)x + 3(1 + \lambda) = 0$, dans laquelle λ est un paramètre variable.

Etudier l'existence et le signe des racines de cette équation. Indiquer, en particulier, pour quelles valeurs λ_1 et λ_2 de λ l'équation a une racine double.

EXERCICE 10

Etudier, suivant les valeurs du paramètre m , l'existence et le signe des racines de l'équation : $(m + 1)x^2 + 2(m - 3)x + m + 3 = 0$.

EXERCICE 11

On considère l'équation : $ax^2 + b|x| + c = 0$ **(1)**, dans laquelle x est l'inconnue et a , b , c des coefficients dont le premier n'est pas nul. On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$.

1°) Montrer que l'équation **(1)** a deux racines opposées lorsque $ac < 0$.

2°) Discuter le nombre de racines de l'équation **(1)** a deux lorsque $ac > 0$ et $\Delta > 0$.

3°) Etudier les cas particuliers suivants :

a) $c = 0$ b) $\Delta = 0$.

EXERCICE 12

Etant donné l'équation : $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$, dont les racines sont x' et x'' , calculer, sans résoudre l'équation, l'expression $A = \frac{3x'^2 + 5x'x'' + 3x''^2}{4x'x''^3 + 4x''x'^3}$

EXERCICE 13

x' et x'' désignent les deux racines de l'équation : $5x^2 - 3x - 1 = 0$.

Calculer la valeur de chacune des expressions suivantes :

$$y_1 = 4x'x''^3 + 4x''^2x'^3 - 3x'^2x'' + 2x''^3 - 3x'x'^2.$$

$$y_2 = \frac{x'}{x''} + \frac{x'}{x'' + 1} + \frac{x''}{x'} + \frac{x''}{x' + 1} - \left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} \right)^2$$

EXERCICE 14

On considère l'équation : $2x^2 - x - 2 = 0$, dont les racines sont désignées par x' et x'' .

Calculer, sans résoudre l'équation, l'expression $A = \frac{x'^2}{x'' + 1} + \frac{x''^2}{x' + 1}$.

EXERCICE 15

On considère l'équation : $3x^2 + 5x - 6 = 0$, dont les racines sont désignées par x' et x'' .

Sans calculer x' et x'' , former l'équation du second degré en y qui admet pour racines les

nombre : $y' = x' + \frac{1}{x''}$ et $y'' = x'' + \frac{1}{x'}$.

EXERCICE 16

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation :

$$(m - 2)x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$$

admet des racines x' et x'' , et former la relation indépendante de m qui existe entre ces racines.

EXERCICE 17

On considère l'équation : $8x^2 - 4(m - 2)x + m(m - 4) = 0$, dans laquelle m est un paramètre.

1°) Pour quelles valeurs de m cette équation admet-elle des racines x' et x'' ?

2°) Former la relation indépendante de m qui existe entre x' et x'' et en déduire la position de ces racines par rapport aux nombres -1 et 1 .

REPERES ET DROITES DU PLAN (1)

Mesures algébriques (Exercices 1 à 6)

EXERCICE 1

Les points A, B, C et D sont situés sur un axe de telle sorte que : $\overline{AB} = -8$; $\overline{BC} = 12$ et $\overline{CD} = -6$. Calculer $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BA}$, $\overline{BD}$, $\overline{DA}$ et $\overline{DB}$.

EXERCICE 2

Sur un axe (D), on donne trois points A, B et C tels que $\overline{AB} = -9$ et $\overline{BC} = 16$. Où faut-il placer l'origine O pour que $\overline{OA} + 3 \overline{OB} + 5 \overline{OC} = 0$?

EXERCICE 3

Soient A et B deux points d'un axe, I milieu de [AB] . Montrer que pour tout point M de l'axe, on a :

$$\text{a) } \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2 \overline{MI}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{2} \quad \text{b) } \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MI}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4} .$$

EXERCICE 4

Une droite est munie d'un repère (O , $\vec{i}$) . On place les points A, B, C, D de cette droite d'abscisses respectives 4, $\frac{15}{2}$, - 1 , et $-\frac{11}{3}$.

1°) Calculer $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{CA}$.

2°) Déterminer l'abscisse x des points M dans chacun des cas suivants :

a) $\overline{AM} = 3$ b) $2 \overline{CM} + \overline{MA} = 1$ c) $2 \overline{OB} = 3 \overline{AM}$ d) $0 \leq \overline{CM} \leq 2$

e) $3 \overline{AM} = AC$ f) $AM^2 = 4$.

EXERCICE 5

Sur un axe (D), on considère deux points A et B d'abscisses respectives - 1 et 2 .

1°) Placer le point C tel que $\overline{CA} = 2 \overline{CB}$.

2°) Montrer qu'il existe un point M tel que : $\overline{MA} + 2 \overline{MB} = 0$.

3°) Quels sont les points M de (D) tels que $MA^2 - 4 MB^2 = 0$?

EXERCICE 6

Soient A, B, C et D quatre points d'une même droite (Δ) muni d'un repère (O , I) .

1°) a) Etablir, à l'aide des abscisses des points la relation suivante :

$$\overline{DA} \cdot \overline{BC} + \overline{DB} \cdot \overline{CA} + \overline{DC} \cdot \overline{AB} = 0 . \text{ (relation dite d'Euler) .}$$

2°) Etablir, en utilisant la relation de Chasles, la relation d'Euler .

3°) Former l'expression $\overline{DA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{DB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{DC}^2 \cdot \overline{AB}$ et en déduire la relation suivante :

$$\overline{DA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{DB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{DC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0$$

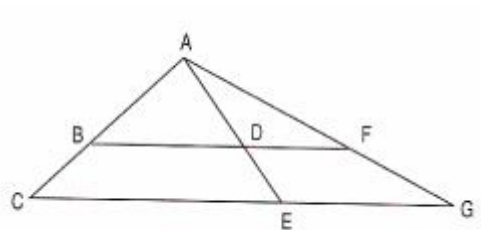
(relation dite de Stewart) .

EXERCICE 7 (Applications du théorème de Thales et de sa réciproque)

Les différentes questions sont complètement indépendantes .

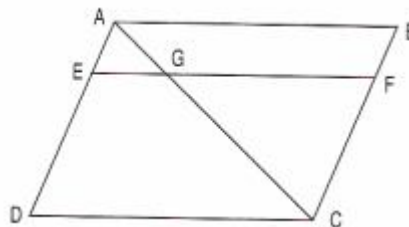
1°) ACG est un triangle . B est un point du segment [AC] , E un point du segment [CG] . La parallèle à (CG) passant par B coupe (AE) en D .

Montrer que : $\frac{\overline{EG}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BD}}$.



2°) ABCD est un parallélogramme . E est un point du segment [AD] . La parallèle à (AB) passant par E coupe (AC) en G et (BC) en F .

Montrer que : $\frac{\overline{EG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{FC}}$.

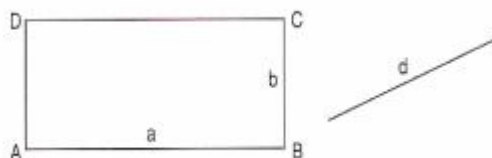


3°) RST est un triangle. L appartient à [RS] et M appartient à [RT] .

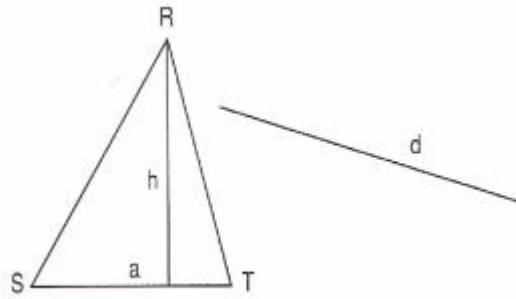
Indiquer si (LM) est parallèle à (ST) dans chacun des cas suivants :

- a) RS = 7 ; RT = 14 ; RL = 1,5 ; RM = 3.
- b) RS = 8 ; RT = 9 ; RL = 5 ; RM = 5,5.
- c) RS = 7 ; RT = 9 ; SL = 3 ; RM = 5.
- d) RS = 12 ; RT = 18 ; SL = 18 ; MT = 4,5 .

4°) Soit ABCD un rectangle donné de cotés a et b. Construire exactement un rectangle de même aire et dont un côté a pour longueur d (d longueur donnée) .



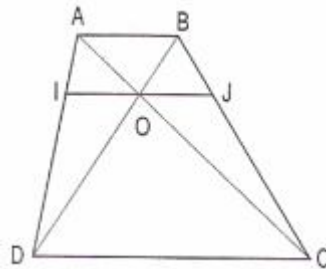
5°) Soit RST un triangle donné de cotés a = ST donné et de hauteur h. Construire un rectangle de même aire et dont un côté a pour longueur d (d longueur donnée).



6°) Placer exactement les points L, M, N d'abscisses respectives $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{11}$ sur la droite (D) de repère (A,B) .

7°) Placer exactement les points S, T, U d'abscisses respectives $-\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{7}$, $-\frac{7}{11}$ sur la droite (D) de repère (A,B) .

8°) ABCD est un trapèze . Les diagonales (AC) et (BD) se coupent en O .Par O, on trace une parallèle à (AB) qui coupe (AD) en I et (BC) en J .

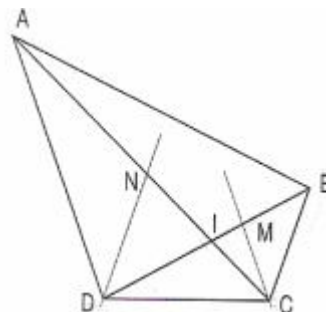


Démontrer que $\frac{\overline{IO}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{AB}}$. Que peut-on en déduire pour I, O, et J ?

9°) ABCD est un quadrilatère . La parallèle à (AD) passant par C coupe (BD) en M . La parallèle à (BC) passant par D coupe (AC) en N .
On appelle I le point de rencontre de (AC) et (BD) .

Calculer $\frac{\overline{IN}}{\overline{IC}}$ et $\frac{\overline{IM}}{\overline{ID}}$.

Démontrer que (MN) est une droite parallèle à (AB).



REPERES ET DROITES DU PLAN (2)

EXERCICE 8

Soit ABCD un parallélogramme non aplati . On pose $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$.

1°) Les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

2°) On pose $\vec{i} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{j} = \vec{u} - \vec{v}$.

Donner les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

3°) Donner les coordonnées de A, B, C et D dans le repère $(B, \vec{i}, \vec{j})$.

4°) Existe-t-il des points qui ont les mêmes coordonnées relativement aux repères $(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $(B, \vec{i}, \vec{j})$. ?

EXERCICE 9

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dont les coordonnées relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont respectivement $(1, 2)$ et $(-1, -3)$.

1°) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de l'ensemble des vecteurs du plan .

2°) Exprimer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ à l'aide de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3°) Soit $\vec{w}_1, \vec{w}_2$, et $\vec{w}_3$, trois vecteurs dont les coordonnées dans $(\vec{i}, \vec{j})$ sont respectivement $(1, 2)$, $(6, -4)$ et $(-3, 2)$.

Quelles sont les coordonnées de $\vec{w}_1, \vec{w}_2$, et $\vec{w}_3$ dans $(\vec{u}, \vec{v})$?

4°) Calculer les déterminants des couples de vecteurs suivants dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, puis dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$:

$$(\vec{w}_1, \vec{w}_2), \quad (\vec{w}_2, \vec{w}_3) \text{ et } (\vec{w}_1, \vec{w}_3).$$

EXERCICE 10

Soit ABC un triangle et α un réel . On définit trois points P, Q, R par :

$$\vec{CR} = -\alpha \vec{CB}, \quad \vec{CQ} = \alpha \vec{CA} \quad \text{et} \quad \vec{AP} = \alpha \vec{AB}.$$

1°) Faire une figure pour $\alpha = -2$.

2°) Déterminer dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ les coordonnées des points P, Q et R en fonction de α .

3°) Exprimer dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$ les coordonnées des vecteurs $\vec{PQ}$ et $\vec{PR}$ à l'aide de α .

4°) Déterminer α pour que P, Q, R soient alignés et distincts .

5°) Faire la figure dans ce cas et montrer que Q est alors le milieu de [PR] .

EXERCICE 11

Dans chacun des cas suivants, on demande :

- a) de donner une représentation paramétrique de la droite **(D)** .
- b) de déterminer les points d'intersection de **(D)** avec les axes .
- c) de tracer **(D)** .
- 1°) **(D)** passe par A(1, 2) et B(- 2 , 4) .
- 2°) **(D)** passe par A(1, 2) et a pour vecteur directeur $\vec{u}$ (3, 1) .
- 3°) **(D)** passe par A(1, 2) et a pour coefficient directeur - 2 .
- 4°) **(D)** a pour équation : $x + 2y - 3 = 0$.

EXERCICE 12

Soit **(D)** la droite d'équation $3x - 2y + 2 = 0$ et **(D')** la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

- 1°) Pour chacune des droites, donner deux vecteurs directeurs .
- 2°) Les points suivants appartiennent-ils à **(D)** ou **(D')** :
A(2, 4) , B(3 , - 1) , C (- 1 , 1) et D(4, 7) ?

EXERCICE 13

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

On considère l'ensemble **(D_m)** des points M du plan dont les coordonnées (x , y) vérifient l'équation : $(2m - 1) x + (3 - m) y - 7m + 6 = 0$.

- 1°) Montrer que, quel que soit $m \in \mathbb{R}$, **(D_m)** est une droite .
- 2°) Dans chacun des cas suivants, trouver m pour que :
 - a) **(D_m)** passe par A(1, 1) .
 - b) **(D_m)** passe par l'origine du repère .
 - c) **(D_m)** soit parallèle à l'axe des abscisses .
 - d) **(D_m)** soit parallèle à l'axe des ordonnées .
 - e) **(D_m)** ait pour coefficient directeur - 1 .
 - f) **(D_m)** soit parallèle à la droite d'équation $x - 3y - 5 = 0$.
- 3°) Existe-t-il un point commun à toutes les droites **(D_m)** ?

EXERCICE 15

Soient ABC un triangle et O un point de la droite (BC) tel que $O \neq B$ et $O \neq C$. Par B et C, on trace deux droites Δ_1 et Δ_2 parallèles . La parallèle à (AC) passant par O coupe Δ_1 en I et la parallèle à (AB) passant par O coupe Δ_2 en J .

Le but du problème est de montrer que A, I, J sont alignés .

On choisit le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

- 1°) Faire une figure soignée .
- 2°) Soient (α, β) les coordonnées de B dans le repère $\mathcal{R}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{JB}$.
- 3°) Déterminer les coefficients directeurs des droites (OB) , (BJ) et (CI) .
- 4°) Déterminer les équations réduites des droites (BC) et (CI) et en déduire l'abscisse de C.
- 5°) Quelles sont les coordonnées du point A ?
- 6°) Prouver que A, I et J sont alignés .

EXERCICE 18

ABCD est un parallélogramme, a et b sont deux réels non nuls. E et F sont les points tels que :

$$\vec{AE} = a \vec{AB} \text{ et } \vec{AF} = b \vec{AD} .$$

La droite parallèle à (AD) passant par E coupe (CD) en G et la droite parallèle à (AB) passant par F coupe (BC) en H . On note K le point d'intersection des droites (EG) et (FH) .

On considère le repère $\mathbf{R} = (A, \vec{AB}, \vec{AD})$.

N.B. On fera une figure illustrant les données avec $a = \frac{3}{2}$; $b = 2$; $AB = 4 \text{ cm}$ et $AD = 2,5 \text{ cm}$.

1°) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H et K dans le repère $\mathbf{R}$.

2°) Déterminer une condition sur a et b pour que les droites (FG) et (EH) soient parallèles, puis montrer qu'avec cette condition, on a : (FG) // (AC) et (EH) // (AC) .

3°) Montrer que si $a + b = 1$, alors $K \in (BD)$.

4°) Déterminer une condition sur a et b pour que les droites (EF) et (GH) soient parallèles, puis montrer que, dans ce cas, on a : (EF) // (DB) et (GH) // (DB) .

5°) Montrer alors que $K \in (AC)$.

6°) Montrer que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme si, et seulement si :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a = b . \end{cases}$$

7°) Montrer qu'alors E et G sont les milieux respectifs de [AB] et [CD] et que les parallélogrammes ABCD et EFGH ont même centre .

ANGLES ET TRIGONOMETRIE

EXERCICE 1

Donner la longueur d'un demi-cercle de rayon 2 cm, et d'un quart de cercle de rayon 4 cm.

EXERCICE 2

1°) Compléter le tableau suivant, où l désigne la longueur de l'arc de cercle de rayon R , intercepté par l'angle α mesuré en degrés :

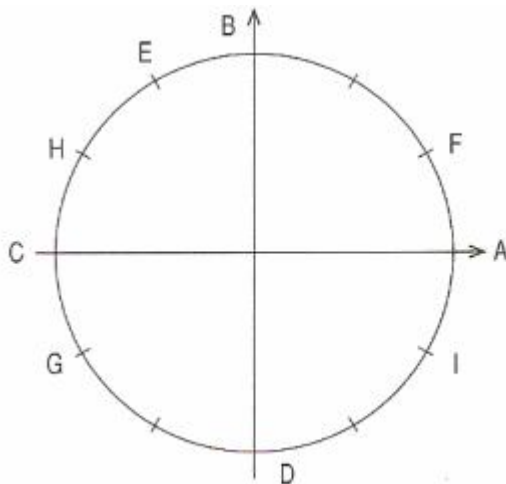
l			$\frac{\pi}{4} R$		$\frac{2\pi}{5} R$
α	60	120		30	

2°) Compléter le tableau suivant, où l désigne la longueur de l'arc de cercle de rayon R , intercepté par l'angle α mesuré en radians :

l			$\frac{\pi}{6} R$		$\frac{5\pi}{8} R$
α	2π	1		$\frac{2\pi}{3}$	

EXERCICE 3

On considère la figure suivante :



1°) Parmi les réels suivants, quels sont ceux qui sont une abscisse curviligne du point E ?

$$\frac{4\pi}{12}, \frac{4\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

2°) Quels sont les points du cercle trigonométrique qui ont pour abscisse curviligne les réels

$$\text{suivants : } \frac{3\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

EXERCICE 4

Donner un moyen géométrique de placer sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses

$$\text{curvilignes : } \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

EXERCICE 5

Placer sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses curvilignes :

a) $\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{6} + k\pi$ c) $-\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ k entier relatif.

EXERCICE 6

Placer sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses curvilignes :

a) 100π b) 71π c) $-\frac{37\pi}{2}$ d) $\frac{18\pi}{4}$

EXERCICE 7

Compléter le tableau suivant :

°	45	30	60	15	18	75	135				
rad								$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{8}$
°	120	150	180	90							225
rad					$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	

EXERCICE 8

Pour chacune des mesures suivantes, on demande :

— la mesure principale (en degré ou en radian, selon le cas) ;

— la mesure dans $[0 ; 2\pi[$ (ou dans $[0^\circ ; 360^\circ[$) ;

— la mesure dans $] - 2\pi ; 0[$ (ou dans $] - 360^\circ ; 0^\circ[$) .

1°) $\frac{2008\pi}{3}$; 2°) $\frac{28\pi}{5}$; 3°) $\frac{27\pi}{4}$; 4°) $-\frac{19\pi}{3}$; 5°) -270° ; 6°) -18π ; 7°) 1440° ;

8°) -2530° ; 9°) $-\frac{\pi}{4}$; 10°) $\frac{5\pi}{6}$; 11°) $\frac{12\pi}{5}$; 12°) $-\frac{23\pi}{6}$; 13°) 210° ; 14°) -375° ;

15°) -4512° ; 16°) 17π .

EXERCICE 9

On considère un triangle ABC rectangle en C et tel que $(\vec{AB}, \vec{AC}) = 35^\circ$.

Soit O et A' les milieux respectifs des côtés [AB] et [BC]. Trouver la mesure principale des angles orientés : $(\vec{OB}, \vec{OA'})$, $(\vec{OC}, \vec{OA'})$, $(\vec{OA'}, \vec{OC})$, $(\vec{OB}, \vec{OC})$.

EXERCICE 10

ABC est un triangle équilatéral direct. On construit à l'extérieur le carré ABED. Quelles sont les mesures principales en radians des angles orientés suivants :

$(\vec{AB}, \vec{AC})$, $(\vec{AB}, \vec{AD})$, $(\vec{BC}, \vec{BE})$, $(\vec{CB}, \vec{CE})$, $(\vec{EC}, \vec{EB})$, $(\vec{BC}, \vec{BD})$, $(\vec{CB}, \vec{CD})$, $(\vec{EC}, \vec{EA})$?

EXERCICE 11

On considère un losange ABCD dont les diagonales se coupent en O et tel que

$(\vec{BA}, \vec{BD}) = -54^\circ$. Quelles sont les mesures principales en radians des angles orientés suivants :

$(\vec{BA}, \vec{BD}), (\vec{BC}, \vec{BD}), (\vec{BD}, \vec{BC}), (\vec{BA}, \vec{BC}), (\vec{DA}, \vec{DC}), (\vec{OC}, \vec{OB}), (\vec{OA}, \vec{OC})$?

EXERCICE 12

ABC est un triangle rectangle isocèle de sens indirect. On construit le triangle équilatéral BCE de manière que E appartienne au demi-plan de frontière (BC) contenant A.

Quelles sont les mesures principales en radians des angles orientés suivants :

$(\vec{AB}, \vec{AC}), (\vec{CB}, \vec{CE}), (\vec{CA}, \vec{CB}), (\vec{BA}, \vec{BC}), (\vec{EA}, \vec{EC}), (\vec{CA}, \vec{CE}), (\vec{EA}, \vec{EB}),$
 $(\vec{AE}, \vec{AB})$?

EXERCICE 13

On donne dans le plan orienté $\mathbf{P}$, une demi-droite Ox.

1°) Construire les demi-droites Oy, Oz, Ot telles que :

$$(Ox, Oy) = \frac{2\pi}{3}, \quad (Ox, Oz) = -\frac{5\pi}{6}, \quad (Ox, Ot) = \frac{\pi}{4}.$$

2°) Calculer la mesure principale en radians des angles orientés (Oy, Oz), (Oz, Ot), (Ot, Oy).

EXERCICE 14

On considère un carré ABCD tel que $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

1°) Construire les demi-droites Ax, Cy et Cz telles que :

$$(\vec{AB}, Ax) = \frac{\pi}{6}, \quad (\vec{CB}, Cy) = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad (\vec{CB}, Cz) = -\frac{\pi}{6}.$$

2°) Ax et Cy se coupent en E. Démontrer que (Ax) et (Cy) sont orthogonales.

En déduire que le quadrilatère ABCE est inscriptible dans un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3°) Ax et Cz se coupent en R. Démontrer que R est équidistant des points A et C. En déduire que les points B, R, D sont alignés.

EXERCICE 15

On considère un rectangle ABCD tel que $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On note α la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{AB}, \vec{AC})$.

1°) Construire les demi-droites Dx et Dy telles que : $(\vec{DA}, Dx) = \alpha$ et $(\vec{DA}, Dy) = -\alpha$.

2°) Démontrer que les droites (Dx) et (AC) sont orthogonales, et qu'il en est de même des droites (Dy) et (DB).

3°) Les demi-droites Dx et Dy coupent respectivement (AC) en E et F.

Démontrer que la droite (BD) est tangente au cercle passant par les points D, E, F. Démontrer de même que la droite (DF) est tangente au cercle circonscrit au rectangle ABCD.

4°) Exprimer en fonction de α la mesure des angles non orientés EDF, DFE, et DAE.

EXERCICE 16

1°) Soit $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $\sin t < 0$. Calculer $\sin t$ et $\tan t$.

2°) Soit $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$ et $\sin t = \frac{4}{5}$. Calculer $\cos t$ et $\tan t$

3°) Sachant que $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$ et que $\tan t = -\sqrt{3}$, calculer $\cos t$ et $\sin t$.

4°) Sachant que $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, calculer $\sin \left(-\frac{\pi}{12} \right)$ et $\sin \left(\frac{23\pi}{12} \right)$.

5°) Sachant que $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$, calculer $\cos \left(-\frac{\pi}{8} \right)$ et $\cos \left(\frac{15\pi}{8} \right)$.

EXERCICE 17 : Calcul de $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\cos \frac{2\pi}{5}$

On considère un triangle ABC, isocèle en A, tel que $BC = a$, et $B = \frac{2\pi}{5}$ rad. La bissectrice de l'angle B coupe [AC] en D.

1°) Démontrer que les triangles ABD et BCD sont isocèles. En déduire que :

$$DA = DB = a.$$

2°) Démontrer que : $AB = 2a \cos \frac{\pi}{5}$ et $CD = 2a \cos \frac{2\pi}{5}$. En déduire que :

$$\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}.$$

3°) Démontrer que : $BC = BD \cos \frac{\pi}{5} + CD \cos \frac{2\pi}{5}$. En déduire que :

$$\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}.$$

4°) On pose : $x = \cos \frac{\pi}{5}$ et $y = \cos \frac{2\pi}{5}$. On sait que $x - y = \frac{1}{2}$ et $xy = \frac{1}{4}$.

En utilisant $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$, calculer $x + y$, et en déduire x et y .

(On trouvera que : $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$ et $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$).

EXERCICE 18

Démontrer que, pour tout réel t :

$$1^\circ) (\cos t + \sin t)^2 = 1 + 2 \cos t \sin t$$

$$2^\circ) (\cos t - \sin t)^2 = 1 - 2 \cos t \sin t$$

$$3^\circ) (\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 = 2$$

$$4^\circ) (\cos t + \sin t)^2 - (\cos t - \sin t)^2 = 4 \sin t \cos t$$

$$5^\circ) \sin^4 t - \cos^4 t = \sin^2 t - \cos^2 t$$

$$6^\circ) \sin^4 t - \cos^4 t + 2 \cos^2 t = 1.$$

EXERCICE 19

Exprimer en fonction de $\sin t$ et $\cos t$ les expressions suivantes :

$$A = \cos(t + \pi) + \cos(t + 2\pi) + \cos(t - \pi) + \cos(t - 3\pi).$$

$$B = \sin(t + \pi) + \sin(t + 2\pi) + \sin(t - \pi) + \sin(t - 3\pi).$$

$$C = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(t - \pi) + \sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(t + \pi).$$

$$D = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) + \cos\left(\frac{27\pi}{2} - t\right) + \sin(3\pi + t) - \cos(7\pi - t)$$

EXERCICE 20

Soit ABC un triangle isocèle à angles aigus ($AB = AC = a$; $A = 2\alpha$).

1°) Calculer BC.

2°) Calculer la hauteur BH de deux façons différentes et en déduire la relation :

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

3°) Calculer AH et CH et en déduire la relation : $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$.

EXERCICE 21

Exprimer à l'aide de $\tan t$ les expressions :

$$X = \frac{\sin^3 t - \cos^3 t}{\sin t - \cos t} ; \quad Y = \cos^2 t - \sin t \cos t ; \quad Z = \frac{\sin^2 t + \sin t \cos t}{\sin^2 t - \cos^2 t}$$

PRODUIT SCALAIRE

EXERCICE 1

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 4$. Représenter les points M du plan qui vérifient $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = 1$; $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = 8$; $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = -1$; $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = 0$; $\vec{AB} \cdot \vec{AM} > 0$.

EXERCICE 2

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 2$. Représenter les points M du plan qui vérifient $\vec{AB} \cdot \vec{BM} = 1$; $\vec{AB} \cdot \vec{BM} = -6$; $\vec{AB} \cdot \vec{BM} \leq 0$.

EXERCICE 3

Soit ABC un triangle et O le milieu du côté [BC].

1°) Montrer que pour tout point M du plan

$$\vec{AB} \cdot \vec{AM} - \vec{AC} \cdot \vec{AM} = \vec{CB} \cdot \vec{AM}$$

Trouver l'ensemble des points M du plan tels que

$$\vec{AB} \cdot \vec{AM} = \vec{AC} \cdot \vec{AM}.$$

2°) Montrer que $\vec{AB} \cdot \vec{AM} + \vec{AC} \cdot \vec{AM} = 2 \vec{AO} \cdot \vec{AM}$. Trouver l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AM} + \vec{AC} \cdot \vec{AM} = 0$$

EXERCICE 4

Soit ABCD un carré de côté 1 et un nombre réel m . On considère les points A', B', C', D' définis par $\vec{DA'} = m\vec{DA}$; $\vec{AB'} = m\vec{AB}$; $\vec{BC'} = m\vec{BC}$; $\vec{CD'} = m\vec{CD}$.

1°) Construire les figures obtenues en prenant 1 unité = 3 cm et $m = -\frac{1}{3}$, $m = \frac{1}{2}$, $m = \frac{4}{3}$.

2°) Calculer $\vec{BB'}$, $\vec{CC'}$, $\vec{DD'}$, $\vec{AA'}$ en fonction de m et de $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$.

3°) Montrer que le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un carré et calculer son aire.

EXERCICE 5 Relations métriques dans le triangle rectangle

1°) Etant donné un triangle ABC montrer que $\vec{BC}^2 = \vec{BA}^2 + 2 \vec{BA} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2$.

En déduire : (théorème de Pythagore) une condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle ABC soit rectangle en A est que $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

2°) Etant donné un triangle ABC et O le milieu de [BC] montrer que

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AO}^2 - \vec{OB}^2$. En déduire qu'un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si il est inscrit dans un demi-cercle de diamètre [BC].

3°) Etant donné un triangle ABC et H le pied de la hauteur issue de A, montrer que

$\vec{BC} \cdot \vec{BH} = \vec{BA}^2 + \vec{AC} \cdot \vec{BA}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\vec{BC} \cdot \vec{BH} = BA^2$.

4°) Etant donné un triangle ABC et H le pied de la hauteur issue de A, montrer que

$\overrightarrow{AH}^2 = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AH}^2 = -\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$.

EXERCICE 6

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A, montrer en utilisant les relations obtenues dans l'exercice précédent que :

$$1^\circ) \frac{\overrightarrow{HB}}{\overrightarrow{HC}} = -\frac{AB^2}{AC^2} \quad 2^\circ) \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}.$$

EXERCICE 7

Soit ABC un triangle rectangle en A et soit P un point de l'hypoténuse (côté [BC]). On désigne par Q et R les projections orthogonales de P respectivement sur [AB] et [AC].

Démontrer que : $1^\circ) \left(\frac{QB}{PB}\right)^2 + \left(\frac{RC}{PC}\right)^2 = 1$ $2^\circ) \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{RC}$.

EXERCICE 8

Soit ABCD un parallélogramme. Montrer que $2(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2) = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2$. En déduire que :

— dans un parallélogramme, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales ;

— dans un triangle ABD, si l'on appelle O le milieu du côté [BD], on a :

$$AB^2 + AD^2 = 2AO^2 + \frac{BD^2}{2}.$$

EXERCICE 9

On considère un triangle ABC isocèle en A et M un point de [BC]. Montrer que :

$$AM^2 - AB^2 = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}.$$

EXERCICE 10

Soit A et B deux points du plan et O le milieu de [AB] ; soit k un réel donné.

$1^\circ)$ M étant un point du plan, calculer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ en fonction de MO et AB.

$2^\circ)$ Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$?

Discuter selon les valeurs de k en examinant en particulier les valeurs $k = -\frac{AB^2}{4}$ et $k = 0$.

EXERCICE 11

Soit A et B deux points donnés et k un nombre réel donné.

$1^\circ)$ Trouver l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = k$.

$2^\circ)$ Trouver l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = k$.

EXERCICE 12 Puissance d'un point par rapport à un cercle

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r.

$1^\circ)$ Soit P un point du plan et [AB] un diamètre du cercle $\mathcal{C}$. Calculer $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ en fonction de OP et de r.

En déduire que si $[A'B']$ est un autre diamètre de $\mathbf{C}$: $\overrightarrow{PA'} \cdot \overrightarrow{PB'} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$.

2°) Soit P un point du plan et Δ une droite passant par P qui coupe le cercle $\mathbf{C}$ en A et A'.
Montrer que si B est le point diamétralement opposé au point A sur le cercle,

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}.$$

(on pourra remarquer que le triangle $AA'B$ est rectangle, cf. exercice 5).

En déduire que quel que soit Δ passant par P et coupant le cercle $\mathbf{C}$, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PA'}$ est constant et déterminer sa valeur.

Par définition, cette quantité s'appelle la **puissance** de P par rapport au cercle.

EXERCICE 13 Utilisation du résultat de l'exercice 12

Soit un triangle ABC. On appelle A', B' et C' les points où les hauteurs issues de A, B et C coupent les côtés (BC), (CA) et (AB). Ces hauteurs se coupent en un point h appelé orthocentre du triangle ABC.

1°) Montrer que les points A, A', B, B' sont situés sur un même cercle de diamètre [AB].

En déduire que $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HB'} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HA'}$ (cf. exercice 12).

2°) Montrer que $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HB'} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HC'}$.

3°) Montrer que $\overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{A'A} \cdot \overrightarrow{A'H}$. En déduire que $-\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{A'A} \cdot \overrightarrow{A'H}$.

4°) On appelle H' le point où la droite (AA') recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC.

Montrer que $\overrightarrow{A'A} \cdot \overrightarrow{A'H'} = -\overrightarrow{A'A} \cdot \overrightarrow{A'H}$.

En déduire que les symétriques de l'orthocentre H par rapport aux côtés (AB), (BC) et (CD) sont sur le cercle circonscrit à ABC.

EXERCICE 14 Utilisation du résultat de l'exercice 12

Soit A, B et C trois points alignés dans cet ordre.

De A, on mène les tangentes (AT) et (AT') à chaque cercle passant par B et C. Quel est l'ensemble des points T et T' ?

LE PRODUIT SCALAIRE EN GEOMETRIE ANALYTIQUE

PRODUIT SCALAIRE ET REPERE ORTHONORME

EXERCICE 1

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans les cas suivants :

a) $\vec{u} (2, -1), \vec{v} (1, 4).$

b) $\vec{u} (-1, 3), \vec{v} (3, 1).$

c) $\vec{u} (a, b), \vec{v} (-b, a).$

d) $\vec{u} (\sqrt{2}-1, \sqrt{3}+2), \vec{v} (\sqrt{2}+1, \sqrt{3}-2).$

EXERCICE 1

On donne les vecteurs $\vec{u} (3, m)$ et $\vec{v} (-2, 1).$

Déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

EXERCICE 1

On donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'angle α radians. Calculer $\cos \alpha$, puis α , dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u} (2, -6), \vec{v} (-3, -4).$

a) $\vec{u} (3, 4), \vec{v} (-1, 1).$

a) $\vec{u} (1, 0), \vec{v} (2\sqrt{3}, 2).$

a) $\vec{u} (0, -1), \vec{v} (-1, 1).$

DISTANCE DE DEUX POINTS

EXERCICE 1

Calculer les longueurs des côtés du triangle dont les sommets ont pour coordonnées : $A(-1, 2), B(-2, 1), C(2, -1).$

En déduire que le triangle ABC est rectangle.

Retrouver ce résultat en calculant le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}.$

EXERCICE 1

On donne les points $A(-1, 2), B(-2, -2), C(1, 3).$

1°) Calculer les longueurs des côtés du triangle.

2°) Calculer les cosinus et les mesures en degrés des angles du triangle ABC.

EXERCICE 1

On donne les points $A(1, 2), B(0, 3), C(5, t).$

1°) Déterminer le réel t , pour que les droites (AB) et (AC) soient perpendiculaires.

2°) Déterminer le réel t , pour que $\cos BAC = \frac{1}{2}.$

EXERCICE 1

On donne les points $B(-2, 3)$ et $C(6, 9).$

1°) Déterminer les points A de l'axe des ordonnées tels que le triangle ABC soit rectangle en A. (On obtient deux solutions A' et A'' et on désigne par A' celui des deux points qui a la plus grande ordonnée).

2°) Calculer $A'B$, $A'C$, $\cos A'BC$, $\cos A'CB$, et les mesures en degrés des angles B et C du triangle $BA'C$.

DROITE DEFINIE PAR UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL

EXERCICE 1

Dans un repère orthonormal, on donne les points $A(-2, 3)$, $B(0, 1)$ et $C(2, 5)$.

1°) Trouver des équations cartésiennes des trois médiatrices du triangle ABC.

Vérifier que ces trois droites sont concourantes en un point Ω équidistant des trois sommets A, B, C.

2°) Trouver des équations cartésiennes des trois hauteurs du triangle ABC.

Vérifier que ces trois droites sont concourantes en un point H dont on donnera les coordonnées.

EXERCICE 1

Donner une équation cartésienne de la droite D' passant par le point $A(3, 2)$, et perpendiculaire à la droite D d'équation $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$.

(On remarquera qu'un vecteur directeur de D est un vecteur normal de D' .)

EXERCICE 1

Dire si les droites D et D' sont perpendiculaires dans chacun des cas suivants :

a) D et D' ont pour équations: $2x + 3y - 5 = 0$ et $6x - 4y + 5 = 0$.

b) D et D' ont pour équations: $x - y + 3 = 0$ et $2x + y = 0$.

EXERCICE 1

Soit a et b deux réels distincts strictement positifs. On considère les points $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $A'(0, a')$, $B'(0, b')$.

1°) Déterminer une équation de la droite (AB') et une équation de la droite D passant par O, origine du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et passant par le milieu I de $[A'B]$.

2°) Démontrer que ces deux droites sont perpendiculaires.

EXERCICE 14

ABC est un triangle rectangle en A. On pose $AB = l$ et $AC = L$. A' est le milieu de $[BC]$. H est le pied de la hauteur issue de A. H se projette orthogonalement en M sur (AB) et en N sur (AC) . On choisit un repère orthonormal d'origine A dont l'axe des abscisses est (AB) et celui des ordonnées (AC) .

1°) Quelles sont alors les coordonnées des points B, C et A' ?

2°) a) Trouver une équation de (BC) .

b) Trouver une équation cartésienne de la droite (AH) .

c) En déduire les coordonnées de H.

3°) Trouver les coordonnées des points M et N.

4°) Démontrer que $\vec{MN}$ et $\vec{AA'}$ sont orthogonaux.

Que peut-on dire des droites (MN) et (AA') ?

EXERCICE 16

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les droites (D_1) , (D_2) et (D_3) définies par : $D_1 : y = -5$ $D_2 : \begin{cases} x = -8 + t \\ y = -3 + t \end{cases}$ $D_3 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$

1°) Donner une équation cartésienne de chacune des droites D_1 , D_2 et D_3 et construire les 3 droites .

2°) Ces droites déterminent un triangle ABC avec $\{A\} = D_2 \cap D_3$, $\{B\} = D_1 \cap D_3$ et $\{C\} = D_1 \cap D_2$. Déterminer les coordonnées des points A, B et C .

3°) Montrer que les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{OB}$ sont orthogonaux .

En déduire que O est l'orthocentre du triangle ABC .

4°) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit au triangle ABC (On précisera son rayon et les coordonnées de son centre I) .

5°) On désigne par A', B' et C' les milieux de [BC], [AC] et [AB] et par M, N, P les symétriques de O par rapport aux points A', B' et C' .

Déterminer les coordonnées de M, N et P . Vérifier que ces trois points sont sur (C) .

EXERCICE 17

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 3 et soit A le point de coordonnées (0, 6) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan .

1°) Déterminer une équation du cercle (C) .

2°) Soit $m \in \mathbb{R}$ et (D_m) la droite passant par A de coefficient directeur m .

Donner une équation de (D_m) .

3°) Démontrer que les abscisses x des points communs à (C) et (D_m) sont les solutions de l'équation : $(1 + m^2)x^2 + 12mx + 27 = 0$ (équation (E)) .

4°) a) Calculer le discriminant Δ_m de (E) .

b) Pour quelles valeurs de m l'intersection de (C) et (D_m) ne contient-elle qu'un seul point ?

c) En déduire les équations des tangentes à (C) passant par A ?

GENERALITES SUR LES FONCTIONS

EXERCICE 45

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

$$\begin{aligned}
1^\circ) f(x) &= \sqrt{-x} & 2^\circ) f(x) &= \frac{1}{\sqrt{|x|}} & 3^\circ) f(x) &= \sqrt{1-x} & 4^\circ) f(x) &= \frac{2x}{\sqrt{3x+7}} \\
5^\circ) f(x) &= \frac{\sqrt{2x-5}}{x-3} & 6^\circ) f(x) &= \sqrt{|-x|} & 7^\circ) f(x) &= \frac{2x+1}{\sqrt{-x}} \\
8^\circ) f(x) &= \frac{\sqrt{-x}}{2x+1} & 9^\circ) f(x) &= \frac{1-\sqrt{-x}}{1+\sqrt{-x}} & 10^\circ) f(x) &= \frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \\
11^\circ) f(x) &= \frac{1+\sqrt{|-x|}}{1-\sqrt{|-x|}} & 12^\circ) f(x) &= \frac{2x-3}{6x^2-13x-5} & 13^\circ) f(x) &= \frac{2x-3}{6x^2-|13x-5|} \\
14^\circ) f(x) &= \frac{1}{\sqrt{6x^2-13x-5}} & 16^\circ) & \frac{3x-6}{|x+1|-|x-5|} & 17^\circ) f(x) &= \frac{\sqrt{-6x^2+13x+5}}{2x-3} \\
18^\circ) f(x) &= \frac{\sqrt{-6x^2+13x+5}}{\sqrt{2x-3}} & 19^\circ) f(x) &= \sqrt{\frac{-6x^2+13x+5}{2x-3}}
\end{aligned}$$

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

EXERCICE 1

Démontrer que trois droites, deux à deux sécantes, et non coplanaires ont un point commun.
Application : Soit un tétraèdre ABCD, A', B', C' et D' les centres de gravité des triangles BCD, CDA, DAB, ABC.

1°) Soit β le milieu de [DC]. Démontrer que (AA'), (BB') sont dans le plan (AB β).

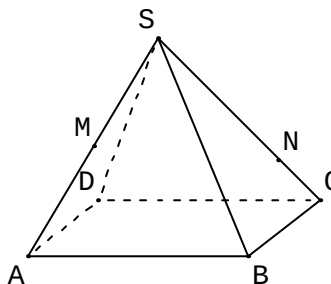
2°) En déduire que (AA') et (BB') sont concourantes en un point G.

3°) Démontrer que (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes en G.

Exercice 1 : SABCD est une pyramide régulière à base carrée. M est le milieu de [SA],

N est le point de [SC] tel que $SN = \frac{3}{4} SC$.

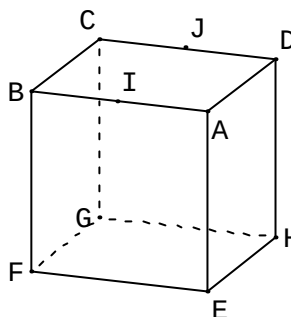
- Démontrer que les droites (MN) et (AC) sont sécantes.
- Placer le point d'intersection de (MN) et (AC).



Exercice 2 : ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB]. J est le milieu de [CD].

Quelle est dans chacun des cas suivants, l'intersection des deux plans ? Justifier chaque réponse.

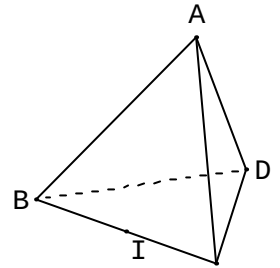
- Le plan (AIE) et le plan (BIG).
- Le plan (ADI) et le plan (BJC).
- Le plan (HEF) et le plan (BJC).



Exercice 3 : Dans un tétraèdre ABCD, I est un point de l'arête [AB], J un point de l'arête [CD].

Le but de l'exercice est de trouver l'intersection des plans (AJB) et (CID).

1. Prouver que chacun des points I et J appartient à la fois aux plans (AJB) et (CID).
2. Quelle est alors l'intersection de ces deux plans.

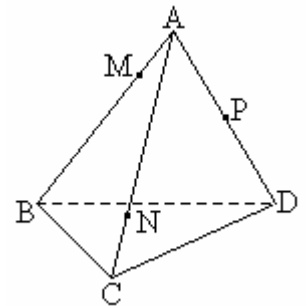


Exercice 4 : Intersection de deux plans

ABCD est un tétraèdre. M est le point de [AB] tel que

$AM = \frac{1}{4} AB$, N est le point de [AC] tel que $AN = \frac{3}{4} AC$ et P le milieu de [AD].

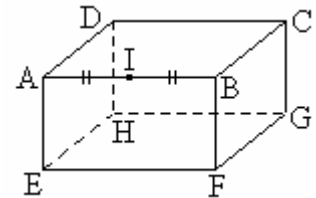
1. Démontrer que (MN) coupe (BC), que (NP) coupe (CD) et que (MP) coupe (BD).
2. On note I, J, K, ces points d'intersection. Démontrer que ces trois points sont alignés.



Exercice 5 : Dans ce pavé, I est le milieu de l'arête [AB].

Construire la trace du plan (IEG) sur le pavé.

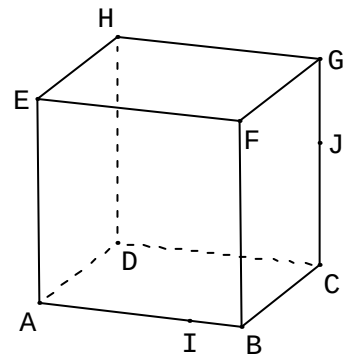
Quelle est nature du polygone obtenu ?



Exercice 6 : On considère un cube ABCDEFGH,

I est un point de l'arête [AB], J un point de l'arête [CG].

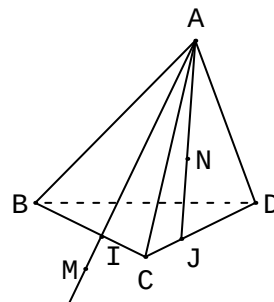
1. Montrer que les points I et J appartiennent à la fois aux plans (ABJ) et (CGI).
2. Quelle est l'intersection des plans (ABJ) et (CGI) ?



Exercice 7 : ABCD est un tétraèdre, I est un point de l'arête [BC] et J un point de l'arête [CD].

N est un point du segment [AJ] et M un point de la demi-droite [AI] extérieur au segment [AI].

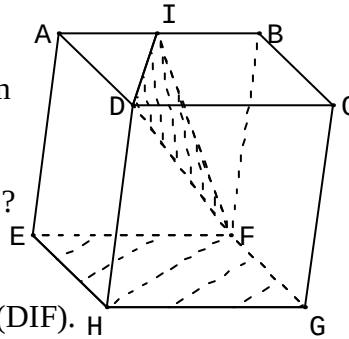
1. Quelle est l'intersection des plans (AIJ) et (BCD) ?
2. a) Démontrer que les points M, N, I et J sont dans un même plan.
b) On note P le point d'intersection de la droite (MN) et du plan (BCD). Prouver que P est sur (IJ).



Exercice 8 : ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB].

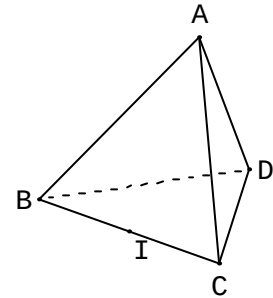
On se propose de représenter la droite Δ d'intersection des plans (DFI) et (EFG).

1. Pourquoi F appartient-il à Δ ?
2. Quelle est l'intersection des plans (DIF) et (ABC) ?
3. Que sait-on sur les plans (ABC) et (EFG) ?
En déduire la droite Δ .
4. Tracer Δ puis tracer la section du cube par le plan (DIF).



Exercice 9 : Soit ABCD un tétraèdre, I est le milieu de [BC] et J un point de la face ACD (autre que A).

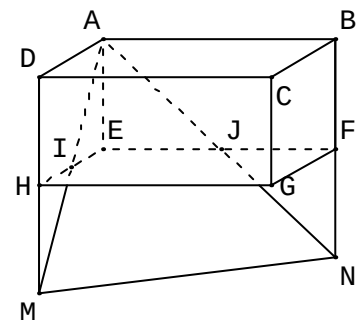
1. Construire l'intersection du plan (AIJ) avec le plan (BCD).
En déduire l'intersection Δ des plans (AIJ) et (BCD)
2. Le plan (AIJ) est-il toujours sécant au plan (ABD) ?
Construire l'intersection des plans (AIJ) et (ABD).



Exercice 10 : Soit ABCD un tétraèdre, I est le milieu de [AB], J le milieu de [AC] et K le point du segment [AD] tel que $AK = \frac{3}{4} AD$.

1. Faire une figure.
2. Les droites (CI) et (BJ) se coupent en S. Que représente le point S pour le triangle ABC ?
3. Construire l'intersection des plans (ASD) et (BDC).
4. Déterminer l'intersection de la droite (IK) avec le plan (BCD).

Exercice 11 : I et J sont les milieux des arêtes [EH] et [EF] du parallélépipède rectangle ABCDEFGH. Les droites (AI) et (DH) se coupent en M. Les droites (AJ) et (BF) se coupent en N. Démontrer que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.

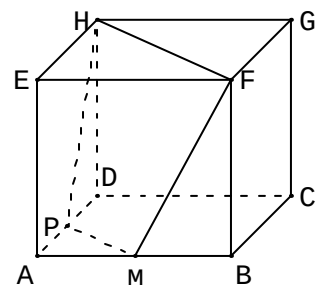


Exercice 12 : ABCD est un tétraèdre. I est le milieu

de [AB], J celui de [BC], K celui de [CD], L celui de [AD].

1. Démontrer que les droites (IL) et (JK) sont parallèles et que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.
2. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?

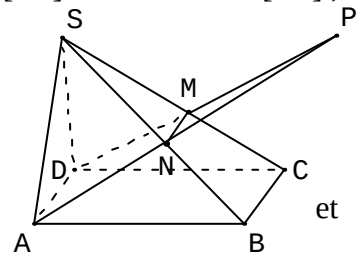
Exercice 13 : ABCDEFGH est un cube. M est un point de l'arête [AB]. Le plan (FHM) coupe (DA) en P. Démontrer que les droites (FH) et (MP) sont parallèles.



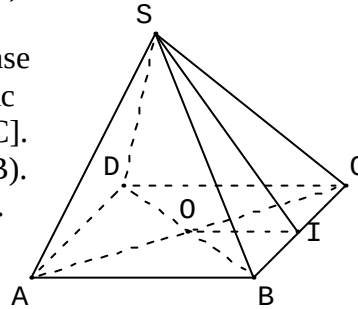
Exercice 14 : SABCD est une pyramide de sommet

S ; la base ABCD est un parallélogramme. M est un point de l'arête [SC] et N de l'arête [SB] ; de plus (MN) est parallèle à (BC).

1. Démontrer que les droites (AD) et (MN) sont parallèles.
2. Dans le plan (ADMN), les droites (AN) et (DM) se coupent en un point noté P.
 - a) Démontrer que le point P appartient à chacun des plans (SAB) (SDC).
 - b) Pourquoi la droite d'intersection des plans (SAB) et (SDC) est-elle la droite (SP) ?
 - c) En déduire que (SP) est parallèle à (AB) et à (CD).

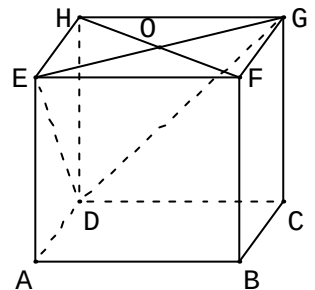


- Exercice 15 :** SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD ; O est le centre de ABCD. (SO) est donc la hauteur de la pyramide. I est le milieu de l'arête [BC].
1. Démontrer que (SO) est orthogonale à la droite (CB).
 2. En déduire que (CB) est orthogonale au plan (SOI).

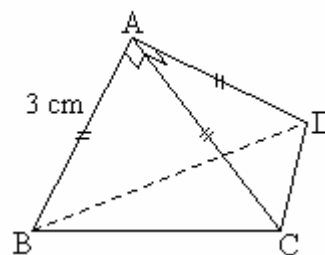


Exercice 16 : ABCDEFGH est un cube, $AB = 4$ cm. O est le centre du carré EFGH.

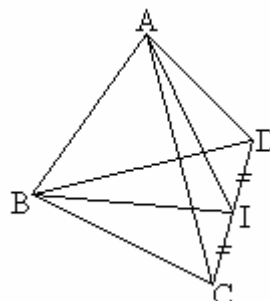
1. Prouver que la droite (OD) est l'intersection des plans (EDG) et (HDBF).
2. a) Dessiner en vraie grandeur le rectangle HFBD, placer O.
- b) En calculant $\widehat{HDO}$ et $\widehat{DBH}$, prouver que (HB) et (OD) sont perpendiculaires.
3. a) Démontrer que (HD) est orthogonale à (EG).
- b) En déduire que (EG) est orthogonale au plan (HFBD), puis à (HB).
4. Démontrer que (HB) est orthogonale au plan (DEG).



Exercice 17 : Les faces ABC, ACD et ABD de cette pyramide sont des triangles rectangles et isocèles en A et $AB = 3$ cm. Calculer le volume V de cette pyramide .



Exercice 18 : ABCD est un tétraèdre régulier, I est le milieu de [CD]. On trace les segments [AI] et [BI]. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.



DEVOIRS

DEVOIR N° 1

EXERCICE 1

a, b et c sont des réels non nuls .

1°) Si $a - b = ab$, que vaut $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$? 2°) Si $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, que vaut c ?

3°) Simplifier le quotient $A = \frac{a^8 b^6 c^4 - a^3 b^2 c}{a^{10} b^8 c^6 - a^5 b^4 c^3}$, en précisant quand il est défini .

4°) Montrer que si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, alors $\frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2} = \frac{a}{c}$ et $\frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2} + \frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2} = 0$.

EXERCICE 2

1°) Factoriser les expressions suivantes :

$$E = (a + b)^2 - (c + d)^2 + (a + c)^2 - (b + d)^2$$

$$F = a^4 - b^4 + 2ab(a^2 - b^2) - (a^3 - b^3) + ab^2 - a^2b .$$

$$G = ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 2abc .$$

2°) Vérifier, pour tout réel x, l'identité : $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

En déduire l'ensemble de définition de la fraction $Q = \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1}$, puis simplifier Q .

EXERCICE 3

1°) a et b sont des réels non nuls . Démontrer les identités :

$$a) \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b})} + \sqrt{\frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b})}$$

$$b) \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b})} - \sqrt{\frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b})}$$

2°) En déduire une écriture sous la forme $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ou $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ de chacun des réels :
 $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$; $\sqrt{3 - \sqrt{5}}$; $\sqrt{4 + \sqrt{15}}$

Puis simplifier la somme : $S = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2}{\sqrt{3 - \sqrt{5}}} - \frac{1}{\sqrt{4 + \sqrt{15}}}$.

EXERCICE 1

a, b et c sont des réels tels que $a + b + c = 1$.

On admettra dans tout ce qui suit l'identité :

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc .$$

1°) Montrer que : $a^3 + b^3 + c^3 = 1 + 3(a - 1)(b - 1)(c - 1)$.

2°) Calculer a, b, c sachant que : $a^3 + b^3 + c^3 = -11$ et que a, b et c sont des entiers rationnels .

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x $(2x + 3)^3 + (3x - 4)^3 + (-5x + 2)^3 = 1$.

DUREE : 2h30

DEVOIR N°2

EXERCICE 1

1°) Simplifier les expressions suivantes lorsqu'elles sont définies :

$$A = \frac{3x^2}{2x^3 + 3x^2y} - \frac{2y^2}{2xy^2 - 3y^3} + \frac{12xy^2}{4x^3y - 9xy^3}$$

$$B = \left(\frac{(-a)^3b}{c} \right)^3 \cdot \frac{[(-a^2)^5b^{-2}(-c^{-3})^2]^{-2}}{[a^2(-b)(-c^{-2})^3]^{-1}}$$

2°) Calculer la valeur de l'expression : $C = (8^{n-1} + 8^n)^2 : (4^n - 4^{n-1})^3$ pour $n = 0, 1, 2$.
Montrer que, lorsque n est un entier relatif quelconque, C a une valeur fixe.

EXERCICE 1

a, b, c, a', b', c' , sont des nombres réels tels que : $a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$.

Montrer que les réels

$x = (aa' + bb' + cc')^2$ et $y = 1 - (ab' - ba')^2 - (bc' - cb')^2 - (ca' - ac')^2$
sont égaux.

EXERCICE 1

x et y sont deux réels quelconques.

1°) Factoriser (totalement) l'expression : $E = (x^2 + 3xy + y^2)^2 - y^4$.

2°) En déduire une factorisation de $(a - \frac{3}{2})(a - \frac{1}{2})(a + \frac{1}{2})(a + \frac{3}{2}) + 1$, puis calculer a lorsque

$$(a - \frac{3}{2})(a - \frac{1}{2})(a + \frac{1}{2})(a + \frac{3}{2}) = 25.$$

EXERCICE 1

1°) Comparer les réels $\frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a + b + \sqrt{ab}}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ où a et b sont des réels strictement positifs.

2°) En déduire l'égalité : $\frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{5 + \sqrt{6}} + \frac{5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{8 + \sqrt{15}} = \frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{7 + \sqrt{10}}$.

DUREE : 2h

DEVOIR N° 3

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle quelconque .

1°) Construire les points M et N tels que : $\vec{AM} = -\frac{2}{3} \vec{AB}$ et $\vec{AN} = -\frac{2}{3} \vec{AC}$.

2°) Démontrer que (MN) et (BC) sont parallèles .

3°) Soient S et T les milieux respectifs de [BC] et [MN] .

Démontrer que les points A, S et T sont alignés .

EXERCICE 2

On considère un parallélogramme ABCD . Les points M et N sont tels que :

$$\vec{AM} = \frac{2}{3} \vec{AB} \quad \text{et} \quad \vec{CN} = \frac{2}{3} \vec{CD} .$$

1°) Faire une figure .

2°) Montrer que BMDN est un parallélogramme .

3°) Soit E le point commun aux droites (DM) et (AC) .

Soit F le point commun aux droites (BN) et (AC) .

Déterminer les réels a et b tels que : $\vec{AE} = a \vec{AC}$ et $\vec{AF} = b \vec{AC}$.

EXERCICE 3

Soit ABC un triangle et un nombre x . A chaque valeur de x, on associe les points E et F tels que :

$$\vec{AE} = \frac{1}{3} \vec{AB} + x \vec{AC} \quad \text{et} \quad \vec{AF} = x \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC} .$$

1°) Faire une figure lorsque $x = -\frac{1}{2}$.

2°) Démontrer que, quel que soit le nombre x, les vecteurs $\vec{EF}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires.

3°) Pour quelles valeurs de x a-t-on :

- E et F confondus ?
- BCFE est un parallélogramme ?

EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$\text{a) } |7 - 5x| > 3 \quad \text{b) } |2x - 3| \leq \frac{5}{2} \quad \text{c) } |3 - \frac{x}{2}| = \frac{x}{3} + 6 \quad \text{d) } |x - 3| \leq -2x + 1 .$$

EXERCICE 5 (*)

1°) a) Vérifier que pour tous réels strictement positifs a et x tels que : $a > x$, on a l'égalité :

$$\frac{x}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{2} .$$

b) En déduire que pour tous réels strictement positifs a, m et p tels que : $a > m > p$, on a :

$$\frac{m}{\sqrt{a+m} - \sqrt{a-m}} < \frac{p}{\sqrt{a+p} - \sqrt{a-p}}$$

2°) Simplifier l'expression : $\frac{1}{(a+b)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{2}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

N.B. Traiter au choix les exercices 4 ou 5.

DUREE : 2h

DEVOIR N° 4

I. ALGEBRE

EXERCICE 1

1°) Après avoir précisé la condition de son existence, simplifier l'expression suivante :

$$A = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

2°) Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Montrer que : $f\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right] = \frac{a+b}{a-b}$

(on supposera a et b positifs et distincts).

3°) Factoriser les expressions suivantes :

$$A = 3a^2 + 3b^2 - 6ab - 12c^2 \quad B = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + (x^2 - 1)(2 - x)$$

$$C = a^3 + 8 - 2a^2 - 4a \quad D = (a+b)^2 - (c+d)^2 + (a+c)^2 - (b+d)^2.$$

EXERCICE 2

1°) Sachant que 12,53 est une valeur approchée de x à $2 \cdot 10^{-3}$ près, et 7,8 une valeur approchée de y à $3 \cdot 10^{-2}$ près, encadrer : $x + y$, $x - y$, $\frac{x^2 - 1}{2y}$.

2°) Donner des valeurs approchées de $x + y$ et $x - y$ en précisant l'incertitude sur chacune de ces deux expressions.

EXERCICE 3

1°) Démontrer que, quels que soient les réels x et y, on a : $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$.

2°) On pose : $a = xy$, $b = yz$ et $c = zx$.

En appliquant l'inégalité de la première question à a, b et c, montrer que, quels que soient les réels x, y et z on a : $xyz(x + y + z) \leq x^2 + y^2 + z^2$.

EXERCICE 4(*)

1°) Encadrer les réels : $(x+2)^2$, $(x+2)^3$ et $(x-3)^2$ sachant que : $-1 \leq x \leq 2$.

2°) Vérifier les égalités :

$$a) (x+2)^3 + (x+2)^2 + (x+2) + 1 = x^3 + 7x^2 + 17x + 15.$$

$$b) -2x^2 + 13x - 20 = -2(x-3)^2 + (x-3) + 1.$$

3°) En déduire un encadrement du quotient :

$$Q(x) = \frac{x^3 + 7x^2 + 17x + 15}{-2x^2 + 13x - 20} \quad \text{lorsque } -1 \leq x \leq 2.$$

II. GEOMETRIE

EXERCICE 5

1°) Construire les points I, J et K définis par :

$$\vec{AI} = \frac{3}{8} \vec{AD}, \quad \vec{BJ} = \frac{3}{4} \vec{BC} \quad \text{et} \quad \vec{CK} = \frac{2}{3} \vec{CD}.$$

2°) Exprimer les vecteurs $\vec{IB}$ et $\vec{KJ}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.

3°) En déduire que les droites (BI) et (JK) sont parallèles.

- 4°) Soit H le symétrique de K par rapport à C.
Montrer que I, J et H sont alignés.

EXERCICE 6

Soit ABCD un parallélogramme. On considère le point E défini par : $\vec{CE} = \vec{DA} - \frac{1}{2} \vec{AB}$

et le point F symétrique de D par rapport à E .

1°) Démontrer que E est le milieu de [AB] et B le milieu de [CF].

2°) Démontrer que ADBF est un parallélogramme.

EXERCICE 7

On définit sur les côtés d'un triangle ABC les points A' , B' et C' définis par les égalités

vectérielles : $\vec{A'B} + k \vec{A'C} = \vec{0}$; $\vec{B'C} + k \vec{B'A} = \vec{0}$; et $\vec{C'A} + k \vec{C'B} = \vec{0}$.

où k est un réel différent de (- 1) .

1°) M étant un point quelconque du plan, démontrer que :

$\vec{MB} + k \vec{MC} = (1 + k) \vec{MA'}$; $\vec{MC} + k \vec{MA} = (1 + k) \vec{MB'}$; et $\vec{MA} + k \vec{MB} = (1 + k) \vec{MC'}$

2°) Soit G le centre de gravité du triangle ABC . En prenant M = G et en utilisant les trois

égalités précédentes, démontrer que : $\vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'} = \vec{0}$.

EXERCICE 8

Soit un parallélogramme ABCD de centre O. On considère les points I, J, K et L définis par :

$$x \vec{AI} + (1 - x) \vec{BI} = \vec{0} ; \quad y \vec{BJ} + (1 - y) \vec{CJ} = \vec{0} ;$$

$$x \vec{CK} + (1 - x) \vec{DK} = \vec{0} ; \quad y \vec{DL} + (1 - y) \vec{AL} = \vec{0} .$$

1°) Sur deux figures différentes, construire ABCD ainsi que les point I, J, K et L dans les cas

suivants : a) $x = 2$ et $y = -1$ b) $x = \frac{1}{3}$ et $y = \frac{2}{3}$.

2°) Calculer en fonction de $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, x et y chacun des vecteurs $\vec{OI}$, $\vec{OJ}$, $\vec{OK}$, $\vec{OL}$.

3°) En déduire que IJKL est un parallélogramme de centre O.

N.B. Ceci était un sujet de composition pour plusieurs classes. On peut soit traiter les exercices 1, 2, 5 , 6 et 7 , soit traiter les exercices 1,3, 5, 6, et 8 .

DUREE : 4h

DEVOIR N° 5

EXERCICE 1

1°) Ecrire sous la forme $2^m 3^n 5^p$ (m, n, p entiers relatifs) l'expression suivante :

$$A = \frac{(0,09)^{-3} \times (0,16)^2 \times 25}{(0,0075)^{-1} \times 810^3}.$$

2°) Simplifier l'expression suivante : $B = \frac{a^8 \times (b^2 c^3 d^{-1})^5}{-b^4 c^2 (a d^{-2})^3}.$

EXERCICE 2

Soient 4 entiers consécutifs $n-1, n, n+1, n+2$ ($n > 0$).

1°) a) Démontrer que : $n(n+1) = (n-1)(n+2) + 2$.

b) On pose : $n(n+1) = a$.

Exprimer en fonction de a le produit $p = (n-1)n(n+1)(n+2)$.

c) En déduire que $(p+1)$ est le carré d'un entier.

2°) Déterminer n sachant que $p = 12\,430$.

EXERCICE 3

On donne les expressions $A = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ et $B = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

1°) Calculer $A \times B$.

2°) On pose $X = A + B$ et $Y = A - B$.

a) Vérifier que : $X > 0$ et $Y > 0$.

b) Calculer X^2 et Y^2 .

c) En déduire les valeurs de X et Y .

d) en déduire une écriture simple de A et B .

EXERCICE 4

1°) a et b sont deux réels tels que : $a > b \geq 0$.

a) Montrer que : $\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}.$

b) Montrer que : $(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}} - \sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}})^2 = 2(a-b).$

EXERCICE 5

Montrer que si a, a', b, b', c et c' sont positifs et tels que : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$, alors :

$$\sqrt{a a'} + \sqrt{b b'} + \sqrt{c c'} = \sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}.$$

EXERCICE 6

1°) Factoriser les expressions suivantes :

$$A = a^4 - b^4 + 2ab(a^2 - b^2) - (a^3 - b^3) + ab^2 - a^2b.$$

$$B = 9x^2 - 12x + 4 + (x-3)^2 - (2x+1)^2$$

$$C = 4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2.$$

2°) Simplifier l'expression suivante :

$$D = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

DUREE : 2h30

DEVOIR N°6

EXERCICE 1

Soit $f(x) = |2x - 4| - |x - 1|$

1°) Résoudre l'équation : $f(x) = 0$.

2°) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue.

3°) En déduire les solutions des équations :

a) $f(x) = 3$ b) $f(x) = x + 1$ c) $f(x) \leq x + 4$.

EXERCICE 2

1°) Traduire la double inégalité : $2 \leq x \leq 5$ à l'aide de la valeur absolue.

2°) Trouver a et b tels que l'intervalle $[a ; b]$ ait pour centre 5 et pour rayon 2.

3°) Traduire l'inégalité $|x - 7,3| \leq 0,001$ en langage de valeur approchée et d'incertitude.

EXERCICE 4

1°) a) Calculer $A = (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2$ et $B = (5\sqrt{3} - 3\sqrt{5})^2$.

b) En déduire une écriture simplifiée de $C = \sqrt{30} - 12\sqrt{6}$ et $D = \sqrt{120} - 30\sqrt{15}$.

2°) Montrer que $\frac{2\sqrt{3} - 5}{2\sqrt{3} + 5} + \frac{2\sqrt{3} + 5}{2\sqrt{3} - 5}$ est un nombre rationnel.

3°) Soient a et b deux réels tels que $a > b > 1$. On pose :

$$A = \sqrt{a} - \sqrt{a-1} \quad \text{et} \quad B = \sqrt{b} - \sqrt{b-1}$$

a) Montrer que A et B sont tous positifs.

b) Comparer $\frac{1}{A}$ et $\frac{1}{B}$ (on pourra introduire les expressions conjuguées de A et B).

c) En déduire une comparaison de A et B .

EXERCICE 4

A, B, C, D sont quatre points du plan.

1°) Construire le point M tel que : $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC} - \vec{BC}$.

2°) Construire le point N tel que : $\vec{AN} = \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{AD}$.

2°) Démontrer que : $\vec{NM} = \vec{AC} + \vec{DB}$.

EXERCICE 5

EFGH est un parallélogramme de centre O .

1°) Construire les points S et T tels que : $\vec{OT} = \vec{OE} + \vec{OF}$ et $\vec{OS} = \vec{OG} + \vec{OH}$.

2°) a) Prouver que : $\vec{OT} + \vec{OS} = \vec{0}$.

b) Qu'en déduit-on pour le point O ?

DUREE : 2h

DEVOIR N°7

EXERCICE 1

Sachant que : $-1,5 < x < -0,75$ et $0,53 < y < 1,27$, encadrer $x + y$, $y - x$, xy et $\frac{x}{y}$.

EXERCICE 2

Soit $A = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}}$. Calculer A^2 . En déduire une expression simple de A .

EXERCICE 3

Comparer : $\frac{3}{1 + 10\sqrt{7}}$ et $\frac{3}{1 + 8\sqrt{11}}$.

EXERCICE 4

Simplifier : $\sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}}$.

EXERCICE 5

Montrer que, pour tous réels positifs x, y, z , on a : $\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

En déduire que : $(x + y)(y + z)(x + z) \geq 8xyz$.

DUREE : 2h

DEVOIR N°8

EXERCICE 1

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : a) $|x + 1| + |-x + 3|$ b) $\frac{2x + 1}{x + 2} = \frac{2x - 3}{x - 1}$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : a) $|-2x + 7| \leq 5$ b) $(x^2 - 4) + (x + 2) \geq 0$.

EXERCICE 2

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul : $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}$.

2°) En déduire une expression simple du produit :

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{19^2}\right) \left(1 - \frac{1}{20^2}\right).$$

EXERCICE 3

Les différentes questions sont indépendantes.

1°) ABCD et AB'CD' deux parallélogrammes ($B' \neq B$ et $D' \neq D$).

Comparer les vecteurs $\vec{BB'}$ et $\vec{DD'}$.

2°) ABCD est un parallélogramme, E et F sont tels que : $\vec{AD} = \vec{DF}$ et $\vec{AB} = \vec{BE}$

Démontrer que E, C, F sont alignés.

3°) ABCD est un quadrilatère. A', B', C', D' sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [AD]. Démontrer que A'B'C'D' est un parallélogramme.

EXERCICE 4

Les deux questions sont totalement indépendantes.

ABCD est un quadrilatère.

1°) I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [CD].

Démontrer que $2 \vec{IJ} = \vec{AD} + \vec{BC}$.

2°) P et Q sont tels que : $\vec{AP} = \vec{PQ} = \vec{QD}$.

R et V sont tels que : $\vec{BR} = \vec{RV} = \vec{VC}$.

P et Q sont tels que : $\vec{IS} = \vec{SK} = \vec{KJ}$.

Démontrer que S est le milieu de [PR] et K celui de [QV].

EXERCICE 5

Soient a et b deux nombres réels de $]0;1[$.

1°) Quel est le signe de $(1 - a)(1 - b)$?

2°) Comparer $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ et $1 + \frac{1}{ab}$.

DUREE : 2h

DEVOIR N°9

EXERCICE 1

Dans un triangle ABC , on désigne par M le milieu de [AB] , par celui de [MC] et K le point tel que $\vec{CK} = \frac{1}{3} \vec{CB}$.

1°) Montrer que $\vec{AI} = \frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}$ et $\vec{AK} = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{2}{3} \vec{AC}$.

2°) En déduire que les points A, I, K sont alignés.

EXERCICE 2

Soit un triangle ABC et un point M quelconque. On désigne par B' et C' les milieux des côtés [CA] et [AB] .

1°) Construire les points P et Q définis par : $\vec{MP} = 2 \vec{MB'}$ et $\vec{MQ} = 2 \vec{MC'}$.

2°) Montrer que BCPQ est un parallélogramme.

EXERCICE 3

On considère un parallélogramme ABCD. Les points M et N sont tels que :

$$\vec{AM} = \frac{2}{3} \vec{AB} \quad \text{et} \quad \vec{CN} = \frac{2}{3} \vec{CD} .$$

1°) Faire une figure.

2°) Montrer que BMDN est un parallélogramme.

3°) Soit E le point commun aux droites (DM) et (AC)
et F le point commun aux droites (BN) et (AC) .

Déterminer les réels α et β tels que : $\vec{AE} = \alpha \vec{AC}$ et $\vec{EF} = \beta \vec{AC}$.

EXERCICE 4

Résoudre les inéquations suivantes :

1°) $|2x + 7| > 7$ 2°) $|5 - 2x| \leq 4$.

DUREE : 2h

DEVOIR N°10

I. ALGEBRE

EXERCICE 1

1°) Etudier le signe, puis calculer les carrés des réels suivants :

$$X = \sqrt{5} - \sqrt{6} ; Y = \sqrt{5} - \sqrt{2} ; Z = \sqrt{6} + \sqrt{2} .$$

2°) En déduire une écriture simplifiée des nombres :

$$A = \sqrt{11 - 2\sqrt{30}} , B = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} , c = \sqrt{2 + \sqrt{3}} .$$

3°) Trouver trois nombres réels non nuls tels que :

$$\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} = 0 .$$

EXERCICE 2

x, y et z sont des réels proportionnels aux réels a, b, c . On suppose que x, y, z, a, b, c sont tous strictement positifs. Montrer que :

$$\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{bz} = \sqrt{(x+y+z)(a+b+c)} .$$

EXERCICE 3

1°) Vérifier l'égalité : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ pour tout entier naturel non nul x .

2°) En déduire la valeur de la somme :

$$S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{1998 \times 1999} + \frac{1}{1999 \times 2000} .$$

EXERCICE 4

Simplifier les produits : $(1 + \sqrt{2})^{20} (1 - \sqrt{2})^{20}$ et $(2 + \sqrt{3})^{20} (2 - \sqrt{3})^{20}$.

II. GEOMETRIE

EXERCICE 5

Soit un triangle ABC . On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soit I un point quelconque du plan.

1°) Construire les points E et F définis par : $\vec{IE} = \vec{CC'}$ et $\vec{IF} = \vec{B'B}$.

Exprimer en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ les vecteurs $\vec{IE}, \vec{IF}$ et $\vec{EF}$.

En déduire que : $(EF) \parallel (AA')$.

2°) Soit J le milieu de $[EF]$. Démontrer qu'il existe un réel k tel que : $\vec{IJ} = k \vec{BC}$.
Que peut-on dire de (IJ) et (BC) ?

EXERCICE 6

Soit ABC un triangle, E et D sont les points définis par : $\vec{BA} + \vec{BC} - \vec{BD} = \vec{0}$ et

$$\vec{EA} + \vec{EB} + 5 \vec{EC} + \vec{ED} = \vec{0} .$$

1°) Quelle est la nature de $ABCD$?

Démontrer que les points A, E, C sont alignés.

2°) Construire le point F tel que $3 \vec{FB} - 4 \vec{FE} = 3 \vec{FD}$.

Démontrer que les points A, D, F sont alignés.

3°) La droite (AB) coupe la droite (EF) en G . Montrer que E est le milieu de $[FG]$.

Quelle position occupe le milieu O de $[AC]$ dans le triangle AFG ?

En déduire que (OF) et (OG) passent par les milieux de $[AG]$ et $[AF]$.

DUREE : 4h

DEVOIR N°11

EXERCICE 1

1°) Factoriser les expressions suivantes :

$$A = (a^2 + b^2 + c^2 - d^2 - 2ab)^2 - 4c^2(a - b).$$

$$B = a^4 + b^4 + a^2b^2.$$

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $|-2x + 3| \leq 6$ b) $|3x + 2| > 4$ c) $|-x + 9| < x + 2$ d) $|x + 1| + |-x + 2| = 5.$

3°) Calculer sous forme scientifique le réel :

$$X = \frac{2 \times 10^4 \times 3 \times 10^5 \times 7 \times 10^8 \times 0,3 \times 10^{-4}}{6,3 \times 10^5 \times 25 \times 10^{-4} \times 21 \times 10^3}.$$

EXERCICE 2

1°) a) Démontrer que, quels que soient les réels x et y strictement positifs, on a :

$$\frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2xy} \quad \text{et} \quad \frac{x+y}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

b) En déduire que, quels que soient les réels a et b strictement positifs, on a :

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a + b} + \frac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{b + c} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{c}}{a + c} \leq \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

2°) Sachant que 17,31 est une valeur approchée de x à 5×10^{-3} près et que 123,2 est une valeur approchée de y à 2×10^{-1} près, encadrer x et y , puis $x + y$ et $x - y$. Préciser une incertitude sur $x + y$ et $x - y$.

EXERCICE 3

Soit ABCD un parallélogramme. Construire les points E, F et G définis par :

$$\vec{AE} = \frac{3}{8} \vec{AD}; \quad \vec{BF} = \frac{3}{4} \vec{BC}; \quad \text{et} \quad \vec{CG} = \frac{2}{3} \vec{CD}.$$

1°) Exprimer les vecteurs $\vec{EB}$ et $\vec{GF}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.

En déduire que les droites (BE) et (FG) sont parallèles.

2°) Soit H le symétrique de G par rapport à C.

Montrer que les points E, F et H sont alignés.

EXERCICE 4

ABC est un triangle, A' est le milieu de [BC], B' le milieu de [AC] et C' le milieu de [AB].

1°) Montrer que $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \vec{0}$.

2°) I est un point quelconque, J est le point tel que $\vec{IJ} = \vec{CC'}$, et K le point tel que $\vec{IK} = \vec{B'B}$.

Montrer que les droites (JK) et (AA') sont parallèles.

DUREE : 3h

DEVOIR N°12

EXERCICE 1

On donne les encadrements : $-2,7 \leq a \leq -2,6$ et $-0,3 \leq b \leq -0,2$

Encadrer $a + b$, $a - b$, ab , $\frac{a}{b}$ et $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

EXERCICE 2

Soient deux réels x, y strictement positifs.

1°) Démontrer que : $\frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2xy}$ et que : $\frac{x+y}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$.

2°) Soient trois réels a, b, c strictement positifs. Démontrer que :

$$\frac{a+b}{a^2 + b^2} + \frac{b+c}{b^2 + c^2} + \frac{c+a}{c^2 + a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

EXERCICE 3

Comparer : $1989(1 + 2 + 3 + \dots + 1990)$ et $1990(1 + 2 + 3 + \dots + 1989)$.

EXERCICE 4

Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$ et a et b deux réels strictement positifs.

Démontrer que : $\frac{x}{y} < \frac{ax + by}{bx + ay} < \frac{y}{x}$.

EXERCICE 1

Soient trois réels non nuls a, b, c tels que : $ab + bc + ca = 0$.

Calculer la somme $S = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$.

DUREE : 2h

DEVOIR N°13

EXERCICE 1

a, b, c, d sont des réels non nuls tels que : $4a + 3b \neq 0$ et $4c + 3d \neq 0$.

Montrer que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors :

$$1^\circ) \frac{3a - 2b}{4a + 3b} = \frac{3c - 2d}{4c + 3d} \quad 2^\circ) \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{c^2 + d^2}{cd} \quad 3^\circ) \frac{a}{b} =$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}}$$

EXERCICE 2

On donne $A = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ et $B = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

1°) Calculer $A \times B$.

2°) On pose $X = A + B$ et $Y = A - B$. Vérifier que $X > 0$ et $Y > 0$.

Calculer X^2 et Y^2 . En déduire X et Y.

EXERCICE 3

On considère dans un plan P un parallélogramme ABCD et à l'extérieur de P un point O.

1°) Déterminer l'intersection des plans (OAD) et (OBC) ; des plans (OAC) et (OBD).

2°) Soit Q un plan parallèle à P. Q coupe (OA), (OB), (OC) et (OD) en A', B', C' et D' respectivement. Montrer que A' B' C' D' est un parallélogramme.

EXERCICE 4

ABCD est un parallélogramme et S un point de l'espace extérieur au plan (ABC). Soit Δ une droite strictement parallèle à (AB) et incluse dans (ABC).

A' est un point de [SA] distinct de S et A.

Etudier la position relative du plan Q défini par A' et Δ avec les plans (SAB) ; (SBC) ; (SAD) et (SDC). Construire les intersections éventuelles de ces plans avec le plan Q.

DUREE : 2h

DEVOIR N°14

GEOMETRIE

EXERCICE

Soit ABC un triangle quelconque .

1°) Construire les points D et E tels que : ABCD soit un parallélogramme et E soit le symétrique de A par rapport à D .

2°) On désigne par O le centre de ABCD et par I le milieu de [DC] ;(AI) coupe (BD) en J et la parallèle à (BC) passant par J coupe (AB) en K . On note H le milieu de [JK] .

a) Que représente J pour le triangle ADC ? Justifier la réponse .

b) Exprimer $\vec{AJ}$ en fonction de $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$.

c) Montrer que $\vec{AK} = \frac{1}{3} \vec{AB}$ (on pourra, en le justifiant, utiliser l'égalité $3 \vec{MJ} = \vec{MC}$, où M désigne le milieu de [AD]) .

d) Des questions précédentes, déduire l'expression de $\vec{AH}$. Que peut-on en conclure ?

PROBLEME

Soit un triangle quelconque ABC. P,Q, et R sont les points définis par :

$$a \vec{RA} + (1 - a) \vec{RB} = \vec{0} ; b \vec{QA} + (1 - b) \vec{QC} = \vec{0} ; b(1 - a) \vec{PB} - a(1 - b) \vec{PC} = \vec{0}$$

où a, b sont des réels distincts de 0 et 1 .

1°) a) Construire les points P, Q et R dans le cas où $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{3}$.

b) Sur une autre figure, construire P, Q , R dans le cas où $a = \frac{3}{4}$ et $b = \frac{1}{2}$.

c) Qu'observe-t-on dans les deux cas ?

2°) Dans le cas du 1.a , exprimer en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ les vecteurs $\vec{AR}$, $\vec{AP}$ et $\vec{AQ}$.

En déduire $\vec{RQ}$ et $\vec{RP}$.Que peut-on en conclure sur les points P, Q et R ?

3°) a) Dans le cas du 1.a , construire les points A ' B ' et C ' tels que AR A ' Q , QCP C ' et RBP B ' soient des parallélogrammes .

b) Montrer que $\vec{A'C'} = \vec{RA} + \vec{CP}$ et $\vec{A'B'} = \vec{QA} + \vec{BP}$.

c) En déduire que : $4 \vec{A'C'} = 3 \vec{A'B'}$. Que peut-on en conclure ?

ALGEBRE

EXERCICE 1

Soit a un réel distinct de $-\sqrt{3}$, 0 , $\sqrt{3}$.

$$\text{Simplifier l'expression } A = \left(\frac{\sqrt{3} + a}{\sqrt{3} - a} + \frac{\sqrt{3} - a}{\sqrt{3} + a} \right) : \left[1 + 2 : \left(\frac{3}{a^2} - 1 \right) \right]$$

EXERCICE 1

Soient a, b, c trois réels non nuls et distincts deux à deux tels que $a + b + c = 0$.

1°) Montrer que $\frac{a}{b-c} \left(\frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} \right) = \frac{2a^2}{bc}$

2°) On pose $E = \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right) \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} \right)$.

Déduire du 1° que $E = 3 + 2 \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$

3°) Mettre sous forme de produit de facteurs l'expression $a^3 + b^3 + c^3$
(on observera que $a + b + c = 0$).

4°) En utilisant les questions précédentes, montrer que $E = 9$.

EXERCICE 1

1°) a) Démontrer que pour tous réels x et y , on a : $x^2 + y^2 \geq 2xy$ et $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$.

b) On suppose que $x^2 + y^2 = 1$. Démontrer que $-\frac{1}{2} \leq xy \leq \frac{1}{2}$.

2°) x, y, z sont trois réels quelconques.

a) Démontrer que $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

b) On suppose que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Démontrer que $-\frac{1}{2} \leq xy + yz + zx \leq \frac{1}{2}$.

3°) Démontrer que $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

EXERCICE 1

a, b, c, d sont des réels quelconques. Montrer que $ab + cd \leq \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}$.
(On distinguera les cas $ab + cd \geq 0$ et $ab + cd \leq 0$).

DUREE : 4h

DEVOIR N°15

ALGEBRE (11 Points)

EXERCICE 1 (1pts) On donne $a = -0,0007$; $b = 2 \times 10^2$ et $c = 6 \times 10^3$
Ecrire le nombre A sous la forme $2^n 3^m 5^p 7^q$

$$A = \frac{(x^2 y^{-2})^{-5}}{(z^{-2} y^{-3})^{-2}}$$

EXERCICE 2 : (2,5points)

Les dénominateurs étant supposés non nuls, écrire plus simplement possible les nombres suivants :

$$A = \frac{1}{2a(2a-1)} + \frac{2a-1}{2a} - \frac{2a}{2a-1} ; \quad B = \frac{3a^2+3ax}{a^2-x^2} + \frac{a^2-ax}{a^2-2ax+x^2}$$

$$C = \frac{b+c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c+a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a+b}{(c-a)(c-b)} ;$$

EXERCICE 3:

P1 (4points) On pose $A = \sqrt{46+6\sqrt{5}}$ et $B = \sqrt{46-6\sqrt{5}}$

$$X = A+B ; \quad Y = A-B$$

1) Montrer que X et Y sont des réels positifs.

2) a) Calculer $A \times B$; X^2 et Y^2 .

b) En déduire X et Y.

3) a) Démontrer que $A = \frac{X+Y}{2}$ et en déduire B en fonction de X et Y.

b) Ecrire A et B sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec a, b, c trois nombres relatifs.

c) Calculer $\frac{1}{A} + \frac{1}{B}$ et $\frac{1}{A} - \frac{1}{B}$.

P2 (1,5points) Les lettres désignant des réels choisis de façon que les expressions écrites aient un sens.

1) Démontrer l'identité $\sqrt{x+\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2-y})} + \sqrt{\frac{1}{2}(x-\sqrt{x^2-y})}$.

2) En utilisant la question 1) montrer que : $\sqrt{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$

P3 (2 points) 1) Soit x et y des réels strictement positifs .Prouver que $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

2) En déduire les inégalités suivantes :

a) $8xyz \leq (x+y)(y+z)(z+x)$

b) $xyz(x+y+z) \leq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \leq x^4 + y^4 + z^4$

GEOMETRIE PLANE 9 Points)

EXERCICE 5 :(3points)

ABC un triangle.

On définit les points E, F et I tels

que : $5\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{AE} = \vec{0}$; $3\overrightarrow{BF} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ et I milieu de [EF].

- 1) Construire les point E, F et I.
- 2) Démontrer que les droites (BI) et (AC) sont parallèles.
- 3) Soit K le point défini par $\overrightarrow{CK} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Démontrer que les points E, F et K sont alignés.

EXERCICE 6 : (6 points)

Soit IJK un triangle .On note A le symétrique de K par rapport à J ; B le symétrique de I par rapport à K et enfin C le symétrique de J par rapport à I.

- 1) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ puis $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AK}$.
c) En déduire des résultats précédents que : $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{7}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

- 2) Soit P le point défini par : $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Placer le point C et

exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

- 3) Déduire des questions 1) et 2) que les points A, K ,J,P sont alignés.

- 4) Soit Q le point défini $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BQ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ puis $\overrightarrow{BK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BI}$.

- b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

c) En déduire des résultats précédents que : $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{7}(2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC})$. En déduire de même que les points B,K ,I, Q sont alignés.

GEOMETRIE DE L'ESPACE (9 Points)

EXERCICE 5 : (4 points) ABCDEFGH est un cube. M milieu de [EF] , N milieu de [HG] , L milieu de [AB]. (P) le plan (CMN) (figure1)

- 1) a) Montrer que les points M, N, C,B sont coplanaires.
b) Montrer que les points H, N, B, L sont coplanaires.
- 2) Montrer que la droite (HL) est parallèle au plan (P).
- 3) Déterminer et construire les intersections de (P) avec les faces du cube.

EXERCICE 6 :(5points) ABCDEFGH est un prisme à base rectangulaire. Sur le segment [BF], on construit les points M et N distincts de B et F et dans l'ordre B, M, N, F. (figure 2)

- 1) a) Montre que (AE) perce le plan (NAG).
b) Montrer (GC)) perce le plan (MAD).
- 2) Montrer que le plan (NHG) et (MAD) sont sécants suivant une droite (Δ) que l'on précisera.
- 3) Construire le point où (Δ) perce le plan (ABF).

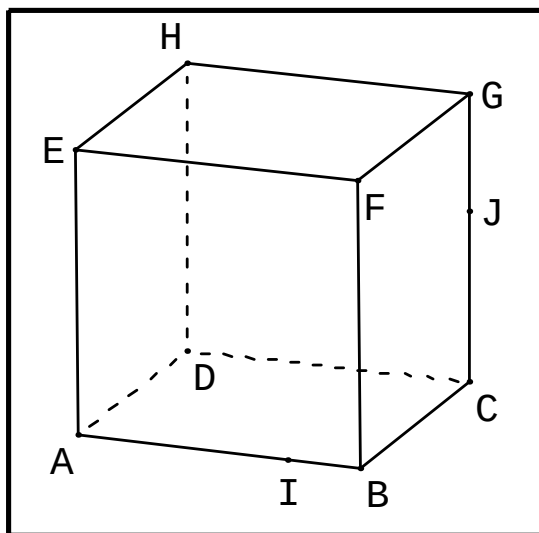


Figure 1

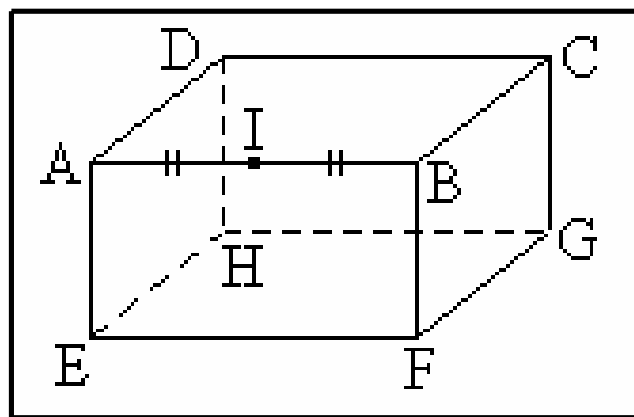


Figure 2

N.B. Ceci était un sujet de composition pour plusieurs classes .La partie algèbre était commune à toutes ces classes. Pour la partie géométrie, on peut traiter au choix les deux exercices de géométrie plane ou les deux exercices de géométrie dans l'espace .

DUREE : 4h

DEVOIR N°16

EXERCICE 1

Soient A, B et C trois points non alignés tels que $AB = 6 \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$; I le barycentre du système $\{(A, 1)(B, 2)\}$, J le barycentre de $\{(A, 1)(B, 2)(C, 3)\}$.

1°) Construire I et J.

2°) Montrer que J est le milieu de [IC].

3°) Trouver l'ensemble des points M vérifiant :

a) $\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}$ est colinéaire à $\vec{AB}$.

b) $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}\| = \|2\vec{MA} + 4\vec{MB}\|$

c) $\|\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$

EXERCICE 2

Soit ABC un triangle. A' est le barycentre de $\{(A, 1)(B, 2)(C, 3)\}$, B' est le barycentre de $\{(A, 2)(B, 3)(C, 1)\}$, C' est le barycentre de $\{(A, 3)(B, 1)(C, 2)\}$.
Démontrer que les triangles ABC et A'B'C' ont même centre de gravité.

EXERCICE 3

Soit un triangle ABC. D est le barycentre de $\{(B, 2)(C, 1)\}$. La parallèle à (AB) passant par D coupe (AC) en M et la parallèle à (AC) passant par D coupe (AB) en N.

1°) Exprimer $\vec{BD}$ en fonction de $\vec{BC}$, puis $\vec{MA}$ et $\vec{AN}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

2°) Démontrer que (MN) est parallèle à la médiane (BI) de ABC.

Indication : pour la première question, on pourra utiliser la forme vectorielle du théorème de THALES.

EXERCICE 4

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(3x^2 + 5x - 1)^2 = (2x^2 - 3x - 1)^2$ b) $5x^4 - 3x^2 - 14 = 0$.

2°) Soit l'équation : $(m - 4)x^2 - 2(m - 2)x + m - 1 = 0$.

a) Etudier, suivant les valeurs de m, l'existence et le signe des solutions de cette équation.

b) Calculer m pour que l'une des solutions soit égale à 2.

En déduire alors l'autre solution.

3°) Pour quelle valeur de m l'équation : $(m + 7)x^2 - 2(m - 9)x - 7m + 15 = 0$ admet-elle une solution double ?

DUREE : 2h

DEVOIR N°17

EXERCICE 1

1°) Etant donné un triangle ABC, construire les points I, J et K définis par :

- I est barycentre de $\{(A, 2)(C, 1)\}$;
- I est barycentre de $\{(A, 1)(B, 2)\}$;
- K est barycentre de $\{(C, 1)(B, -4)\}$.

2°) Démontrer que B est barycentre de $\{(K, 3)(C, 1)\}$.

3°) Quel est le barycentre de $\{(A, 2)(K, 3)(C, 1)\}$?

4°) Dédurre du 3° que I, J, K sont alignés et que J est le milieu de [IK] .

3°) L étant le milieu de [CI] et M celui de [KC], démontrer que IJML est un parallélogramme dont le centre G est l'isobarycentre de ABC .

EXERCICE 2

1°) Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $(4x^2 - 11x + 31)^2 = (x^2 + x + 19)^2$

b) $(x^2 + 3x + 1)^2 = 3(x^2 + 3x + 1) - 2$ (Indication : on pourra poser $X = x^2 + 3x + 1$.)

c) $\frac{(x^2 + x - 2)(-x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 36} \geq 0$.

2°) Soit l'équation $(m - 2)x^2 - 2(m - 5)x + m - 15 = 0$.

Déterminer m pour que l'équation :

a) n'ait pas de solution . b) ait deux solutions strictement négatives .

c) ait deux solutions strictement positives . d) ait deux solutions de signes contraires .

EXERCICE 3

Soit un triangle ABC et le point D barycentre de $\{(A, -2)(B, 1)(C, 4)\}$.

1°) Faire un schéma et placer le point D .

2°) Soit M un point quelconque du plan .

Exprimer $-2\vec{MA} + \vec{MB} + 4\vec{MC}$ en fonction de $\vec{MD}$.

3°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\| -2\vec{MA} + \vec{MB} + 4\vec{MC} \| = \| \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \| .$$

Indication : on pourra utiliser le centre de gravité G du triangle ABC .

EXERCICE 4

Soit un trapèze convexe ABCD de bases [AB] et [CD] . Les diagonales se coupent en I . on projette I sur (AB) en A' parallèlement à (AD) , en B' parallèlement à (BC) .

1°) Démontrer que I a la même abscisse dans les repères (D, B) et (C, A) .

2°) Démontrer que A' et B' ont la même abscisse respectivement dans les repères (A, B) et (B, A) .

3°) En déduire que (A, B) et (A', B') ont même milieu .

Indication : on utilisera le fait que si un point M a pour abscisse t dans un repère (P, Q) ,

$$(M, P, Q \text{ alignés}) \text{ alors } t = \frac{PM}{PQ} .$$

DUREE : 2h

DEVOIR N°18

EXERCICE 1

On donne un triangle ABC . pour tout point m du plan, on pose

$$f(\vec{M}) = 2 \vec{MA} - 3 \vec{MB} + \vec{MC} .$$

1°) N désignant un point quelconque du plan, prouver que : $f(\vec{M}) = f(\vec{N})$.

2°) Construire G_1 barycentre de $\{(B, -3) (C, 1)\}$. Montrer que : $f(\vec{M}) = 2 \vec{G_1A}$.

3°) Construire G_2 barycentre de $\{(A, 2) (C, 1)\}$. Montrer que : $f(\vec{M}) = 3 \vec{BG_2}$.

4°) On désigne par G_3 le barycentre de $\{(B, -3) (A, 2)\}$.

Montrer que les droites (AG_1) , (BG_2) , (CG_3) sont parallèles . En déduire une construction de G_3 .

EXERCICE 2

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $(m - 3)x^2 + 3x + 11 = 0$.(on discutera suivant les valeurs de m) .

b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ c) $\left(\frac{3x-2}{x-1}\right)^2 - 3\left(\frac{3x-2}{x-1}\right) - 4 = 0$

d) $\frac{(2x^2 + 3x - 5)(1 - 4x^2)}{-x^2 + 5x - 6} \leq 0$.

2°) a) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

b) En déduire les solutions du système :
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \\ (x-1)(y-2) = 2 \end{cases}$$

EXERCICE 3

1°) Soient, dans le plan muni d'un repère orthonormé, les points K(- 8, 9) et L(7 , - 2) .

a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par K et perpendiculaire à la droite (KL) .

b) Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de [KL] .

2°) ABCD est un parallélogramme . On considère le repère (A, $\vec{AB}$, $\vec{AD}$).

Soit E le point tel que $\vec{AE} = \frac{1}{3} \vec{AC}$.

a) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E .

b) Déterminer une équation des droites : (DB) , (AC) et (DE) .

DUREE : 2h

DEVOIR N°19

EXERCICE 1

1°) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 20x + 64 = 0$.

b) En déduire les solutions de chacune des équations suivantes :

• $x^2 - 20x + 64 = 0$

• $(5x - x^2)^2 - 20(5x - x^2) + 64 = 0$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $|3x^2 + 3x - 3| = |x^2 + x + 1|$ b) $\frac{2x^2 + 3x - 5}{-2x^2 - 10x - 12} \leq 0$.

EXERCICE 2

On dispose de 400 m de grillage pour délimiter un enclos ABCD de forme rectangulaire.

1°) Soit x sa longueur, calculer en fonction de x l'aire de l'enclos.

2°) Trouver x de façon que cette aire soit égale à 1900 m^2 .

EXERCICE 3

Soient A, B, C trois points du plan non alignés, G barycentre du système $\{(A, 2)(B, 1)(C, 3)\}$.
et E barycentre de $\{(A, 2)(B, 1)\}$.

1°) a) Construire E.

b) Montrer que G est le milieu de [EC], puis construire G.

2°) Soit $\vec{u} = 2\vec{MA} + \vec{MB} + 3\vec{MC}$.

a) Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{MG}$.

b) Trouver l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{u}$ soit colinéaire au vecteur $\vec{BC}$.

c) Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M du plan tels que $\|2\vec{MA} + \vec{MB} + 3\vec{MC}\| = 18 \text{ cm}$.

Déterminer $\mathcal{C}$ et la représenter.

EXERCICE 4

A, B, C sont trois points alignés tels que : $AB = 2 \text{ cm}$ et $BC = 3 \text{ cm}$.

On construit les deux carrés adjacents BCDE et ABFG avec $F \in [BE]$. O est le point d'intersection de (AD) et (BE).

1°) Faire une figure.

2°) a) Exprimer $\vec{AB}$ en fonction de $\vec{AC}$.

b) En utilisant le théorème de Thalès, en déduire que $\vec{BO} = \frac{2}{5} \vec{CD}$.

c) Exprimer $\vec{CB}$ en fonction de $\vec{CA}$.

d) Exprimer $\vec{BO}$ en fonction de $\vec{AG}$.

e) Comparer $\vec{CO}$ et $\vec{CG}$. En déduire que C, O, G sont alignés.

3°) Soient les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ définis par : $\vec{i} = \vec{AB}$ et $\vec{j} = \vec{AG}$.

a) Montrer que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ forment une base du plan.

b) Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

c) Donner une équation de chacune des droites (AD) et (BE).

En déduire les coordonnées du point O

d) Montrer alors que C, G, O sont alignés.

DUREE : 3h

DEVOIR N°20

EXERCICE 1

Soit ABCD un parallélogramme de centre O .

1°) Construire K barycentre de $\{(B, 2)(C, -1)\}$. Montrer que B est le milieu du segment [KC] .

2°) Quel est barycentre de $\{(D, 2)(D, 1)\}$?

3°) Soit I le barycentre de $\{(D, 2)(B, 2)(C, -1)\}$.

a) Montrer que I est l'intersection des droites (DK) et (OC) .

b) Montrer que $4\vec{IO} - \vec{IC} = \vec{0}$.

c) Montrer que I est le centre de gravité du triangle ABD .

d) Soit J le centre de gravité du triangle DBC . Montrer que O est le milieu de [IJ] .

EXERCICE 2

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $7x^2 - 12x + 5 = 0$; b) $4x^2 + 3x + 1 = 0$; c) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 12 = 0$;

d) $(2x^2 + 3x + 7)^2 = (x^2 - 4x + 1)^2$ e) $\frac{x}{3} + \frac{3}{x} = \frac{5}{2}$

2°) Résoudre l'équation : $x^2 + 5x - 36 = 0$, puis en déduire les solutions des équations suivantes :

a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ et $\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)^2 + 5\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) - 36 = 0$.

EXERCICE 3

Soit l'équation (E) : $7x^2 + 10x - 35 = 0$.

Sans calculer le discriminant Δ , montrer que l'équation (E) admet deux solutions distinctes

x_1 et x_2 , puis en déduire $x_1 + x_2$, x_1x_2 , $x_1^2 + x_2^2$ et $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ (Il n'est pas demandé de calculer x_1 et x_2 .)

EXERCICE 4

Dans chacun des cas suivants, trouver les réels x et y vérifiant :

a) $\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -28 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 19 \\ x^2 + y^2 = 193 \end{cases}$.

EXERCICE 5

Trouver les dimensions d'un rectangle de périmètre 140 m et de diagonale 50 m .

DUREE : 2h

DEVOIR N°21

EXERCICE 1

Soient D et D' deux droites définies par : $D : 2x - y + 1 = 0$ et

$$D' : \begin{cases} x = 1 - at \\ y = b + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- 1°) Déterminer un couple (a, b) tel que : $D \parallel D'$.
- 2°) Déterminer un couple (a, b) tel que : $D = D'$.
- 3°) Déterminer un couple (a, b) tel que : D est strictement parallèle à D' .

EXERCICE 2

ABCD est un parallélogramme. a et b sont deux réels non nuls.

E et F sont les points tels que : $\vec{AE} = a \vec{AB}$ et $\vec{AF} = b \vec{AD}$.

La droite parallèle à (AD) passant par E coupe (CD) en G et la droite parallèle à (AB) passant par F coupe (BC) en H.

On note K le point d'intersection des droites (EG) et (FH).

On considère le repère $\mathcal{R} = (A, \vec{AB}, \vec{AD})$.

1°) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H et K dans le repère $\mathcal{R}$.

2°) Déterminer une condition sur a et b pour que $(FG) \parallel (EH)$, puis montrer qu'avec cette condition, on a : $(FG) \parallel (AC)$ et $(EH) \parallel (AC)$.

3°) Montrer que si $a + b = 1$, alors $K \in (BD)$.

4°) Déterminer une condition sur a et b pour que $(EF) \parallel (GH)$, puis montrer que, dans ce cas, on a : $(EF) \parallel (DB)$ et $(GH) \parallel (DB)$.

5°) Montrer alors que : $K \in (AC)$.

6°) Montrer que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme si et seulement

$$\text{si : } \begin{cases} a + b = 1 \\ a = b \end{cases}$$

7°) Montrer qu'alors E et G sont les milieux respectifs de [AB] et [CD], et que les parallélogrammes ABCD et EFGH ont même centre.

DUREE : 2h

DEVOIR N°22

EXERCICE 1

Etant donné un triangle ABC et un réel α , on définit trois points P, Q, R par :

$$\vec{CR} = -\alpha \vec{CB}, \quad \vec{CQ} = \alpha \vec{CA}, \quad \vec{AP} = \alpha \vec{AB}$$

- 1°) Faire la figure pour $\alpha = -2$.
- 2°) Déterminer dans le repère (A, B, C) les coordonnées des points P, Q, R en fonction de α .
- 3°) Exprimer dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$ les coordonnées des vecteurs $\vec{PQ}$ et $\vec{PR}$ à l'aide de α .
- 4°) Déterminer α pour que P, Q, R soient alignés et distincts.
- 5°) Faire la figure dans ce cas et montrer que Q est alors le milieu de [PR].

EXERCICE 2

Soient les points A(- 4 , 6), B(3 , - 2) et C(- 5 , 2).

- 1°) Déterminer le point E de l'axe (y ' O y) tel que $\vec{AB}$ et $\vec{CE}$ soient colinéaires.
- 2°) Déterminer le point F tel que $\vec{BF}$ et $\vec{AC}$ soient colinéaires et que le milieu du segment [BF] soit sur l'axe (x ' O x).
- 3°) Déterminer le point K dont les deux coordonnées sont égales et tel que $\vec{BK}$ et $\vec{CA}$ soient colinéaires.
- 4°) Déterminer le point H tel que $\vec{CH}$ et $\vec{AB}$ soient colinéaires et que le milieu du segment [CH] ait des coordonnées opposées.

EXERCICE 3

Soit ABCD un carré dont le côté mesure 4 cm . On construit à l'intérieur du carré le triangle équilatéral ABE et à l'extérieur du carré le triangle équilatéral BCF .

- 1°) Faire une figure .
- 2°) Justifier que $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$ est un repère .
- 2°) Exprimer les vecteurs $\vec{AE}$ et $\vec{AF}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.
- 3°) Quelles sont les coordonnées des points D, E et F dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$.
- 4°) Démontrer que les points D, E , F sont alignés .

EXERCICE 4

Mettre sous forme canonique chacun des trinômes du second degré suivants :

$$A = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$$

$$B = 3(x + 1)^2 - x$$

$$C = 4\sqrt{2}x - x^2 - 8$$

$$D = \sqrt{2}x^2 - 6x + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$E = -\frac{1}{3}x^2 + x - \frac{1}{5}$$

$$F = (2x - 5)(2x + 5)$$

DUREE : 2h

DEVOIR N°23

EXERCICE 1

1°) Résoudre les systèmes suivants : a) $\begin{cases} x - y = 115 \\ x^2 + y^2 = 117 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{6} \end{cases}$

2°) Résoudre les équations suivantes à l'aide d'un changement de variable :

a) $2x^4 - 5x^2 - 3 = 0$ (poser $X = x^2$) b) $\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{2x-1}\right) = \frac{3}{4}$ (poser $X = \frac{x+2}{2x-1}$)

3°) Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{(x^2 + x - 2)(-x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 36} \geq 0.$$

EXERCICE 2

Le plan P est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$; m étant un paramètre réel, on considère l'ensemble (D_m) des points $M(x, y)$ du plan tels que : $(m-1)x + (m-2)y + m = 0$.

1°) Vérifier que, pour tout nombre m , l'ensemble (D_m) est une droite dont on précisera un vecteur directeur.

2°) Déterminer m pour que (D_m) soit parallèle à l'axe des abscisses.

3°) Déterminer m pour que (D_m) soit parallèle à l'axe des ordonnées.

4°) Déterminer m pour que (D_m) soit perpendiculaire à la droite (D) d'équation : $x + 3y + 2 = 0$.

5°) On considère maintenant (D_3) .

a) Donner une représentation paramétrique de (D_3) .

b) Soit (D') la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -2 + \frac{1}{2}t \\ y = -t \end{cases}$

Donner une équation cartésienne de (D') .

c) Déterminer $(D_3) \cap (D')$.

EXERCICE 3

ABC est un triangle. P, Q, R sont les points tels que :

$$\vec{CP} = \frac{1}{3}\vec{CA}; \quad \vec{AQ} = \frac{1}{3}\vec{AB}; \quad \vec{BR} = \frac{4}{5}\vec{BC}.$$

On note I le point d'intersection des droites (BP) et (CQ).

1°) Démontrer que R est barycentre de $\{(B, 1)(C, 4)\}$. Construire R.

2°) Démontrer que P est barycentre de $\{(A, 1)(C, 2)\}$. Construire P.

3°) Démontrer que : $\vec{BA} + 2\vec{BC} = 3\vec{BP}$.

4°) Démontrer que Q est barycentre de $\{(B, 1)(A, 2)\}$. Construire Q.

5°) Démontrer que : $\vec{CB} + 2\vec{CA} = 3\vec{CQ}$.

6°) Les points B, I, P sont alignés. Donc il existe un réel h tel que : $\vec{BI} = h\vec{BP}$. De même, il existe un réel k tel que $\vec{CI} = k\vec{CQ}$.

Démontrer que : $3\vec{CI} = -3k\vec{BC} + 2k\vec{BA} = (2h-3)\vec{BC} + h\vec{BA}$.

Calculer alors h et k .

7°) Montrer que : $7\vec{CI} = 2\vec{CA} + \vec{CB}$. En déduire que I est barycentre de $\{(A, 2)(B, 1)(C, 4)\}$.

DUREE : 3h

DEVOIR N°24

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1^\circ) 3(x^2 - x)^2 - 2(x^2 - x) - 1 = 0 & 2^\circ) (4x^2 - 3x - 1)(x^2 + 3x + 5) \leq 0. \\ 3^\circ) (1 - 2x)(-2x^2 - 3x - 1) > 0 & 4^\circ) \frac{3x^2 - 4x - 4}{-x^2 + 5x - 4} \leq 0. \end{array}$$

EXERCICE 2

Soit ABC un triangle .

1°) a) Construire les points E, F, G définis par :

- E est le barycentre de $\{(B, 3)(C, 1)\}$
- F est le barycentre de $\{(C, 1)(A, 3)\}$
- G est le barycentre de $\{(A, 3)(B, 3)\}$

b) Montrer que (AB) et (EF) sont parallèles .

2°) On appelle I le barycentre de $\{(A, 3)(B, 3)(C, 1)\}$.

Montrer que I appartient à (AE) et à (CG) et construire I .

3°) a) Construire E' barycentre de $\{(B, 3)(C, -1)\}$.

b) Exprimer $\vec{E'G}$ et $\vec{E'F}$ à l'aide de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

c) Montrer que E', F, G sont alignés .

4°) On désigne par C l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\| 3\vec{MB} + \vec{MC} \| = \| 3\vec{MB} - 3\vec{MC} \| .$$

Déterminer, puis construire C .

EXERCICE 3

Soit ABCD un rectangle tel que : AB = 8 et BC = 5 , l'unité étant le centimètre . Les points E,

F, G, H sont définis par : $\vec{AE} = \frac{3}{8} \vec{AB}$; $\vec{BF} = \frac{2}{5} \vec{BC}$; $\vec{CG} = \frac{3}{8} \vec{CD}$; $\vec{DH} = \frac{2}{5} \vec{DA}$.

1°) Placer sur une figure les points A, B, C, D, E, F, G, H .

2°) Justifier que (A, $\vec{AE}$, $\vec{AD}$) est un repère .

3°) Déterminer, dans ce repère, les coordonnées des points B, E, F, G et H .

4°) Déterminer, dans ce repère, une équation cartésienne de la droite (BE), puis un système d'équations paramétriques de la droite (FH) .

5°) Démontrer, à l'aide des coordonnées calculées au 3°, que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme .

EXERCICE 4

1°) a) Résoudre le système :
$$\begin{cases} x + y = 57 \\ xy = 540 \end{cases}$$

b) Un jardin rectangulaire a un périmètre de 114 m et une aire de 540 m² . Calculer sa longueur et sa largeur .

2°) a) Résoudre le système :
$$\begin{cases} x - y = 7 \\ xy = 144 \end{cases}$$

b) Déterminer les dimensions d'un rectangle qui a pour aire 144 m^2 et dont la longueur surpasse la largeur de 7 m .

3°) Soit ABC un triangle rectangle en A ; les côtés de l'angle droit [AB] et [AC] mesurent respectivement 10 cm et 4 cm .

On appelle D un point du segment [AB] et E un point du segment [AC] tels que $BD = 2AE$.

a) On pose $AE = x$. Exprimer l'aire $A(x)$ du triangle DAE en fonction de x .

b) Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles $A(x)$, exprimée en cm^2 , est égale à $\frac{25}{4}$?

c) Démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 4]$, $A(x)$ est inférieure ou égale à $\frac{25}{4}$.

EXERCICE 5

Soit l'équation d'inconnue x , de paramètre m : $(E) : (m - 3)x^2 - 2mx + m = 0$.

1°) Etudier, suivant les valeurs de m , l'existence des racines de (E) .

2°) Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles l'équation (E) possède :

a) deux racines de signes contraires.

b) deux racines positives.

c) deux racines négatives.

EXERCICE 6

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, A, B, C, ω ont pour coordonnées A(1, 2) ; B(3, 0) ; C(0, -1) ; $\omega(2, 1)$

Calculer les coordonnées de A, B, C

1) dans le repère $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$

2) dans le repère $(O, 2\vec{i}, \vec{j})$

3) dans le repère $(\omega, -\vec{i}, 2\vec{j})$

DUREE : 4h

DEVOIR N°25

EXERCICE 1

1°) Résoudre les équations suivantes :

a) $(2x^2 - 2x\sqrt{5} + 1)(-2x^2 - 9x + 5) = 0$ b) $\frac{x}{x+2} - \frac{5}{x^2 - x - 6} = \frac{5 - 2x}{x - 3}$

2°) Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\frac{(x+1)(2x^2+x-1)}{-x^2+3x+10} \leq 0$ b) $\frac{3x^2-6x+4}{2x^2-x-1} > 2$.

3°) Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0 \\ x^2 - 3x - 10 < 0 \end{cases}$

EXERCICE 2

On considère l'équation suivante : (E) : $(m-1)x^2 + 3x - 5 = 0$ (m paramètre réel).

1°) Déterminer m pour que l'équation :

a) n'admette aucune solution.

b) admette une solution double (qu'on déterminera).

c) admette deux solutions distinctes (qu'on calculera en fonction de m).

2°) Soient X_1 et X_2 les deux solutions de l'équation (E).

Déterminer m pour que l'on ait $(4X_1 + 1)(4X_2 + 1) = -46$.

EXERCICE 3

Soit ABC un triangle. Soient I et J les points définis par : $\vec{AI} = \frac{3}{4} \vec{AB}$ et $\vec{AJ} = \frac{2}{3} \vec{AC}$.

Les droites (BJ) et (CI) se coupent en G. la droite (AG) coupe (BC) en K.

1°) Faire une figure.

2°) Trouver les réels a, b et c tels que I soit le barycentre de $\{(A, a)(B, b)\}$ et J le barycentre de $\{(A, a)(C, c)\}$.

3°) Montrer que le barycentre du système $\{(A, a)(B, b)(C, c)\}$ est le point G.

En déduire que K est le barycentre de $\{(B, b)(C, c)\}$ et donner la position de K sur la droite (BC).

EXERCICE 4

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan, $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs définis par leurs coordonnées respectives $(1, 1)$ et $(1, -1)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

1°) Montrer que $(\vec{U}, \vec{V})$ est une base.

2°) Exprimer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

3°) Soit $\vec{W}$ le vecteur de coordonnées $(3, 1)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer les coordonnées de $\vec{W}$ dans la base $(\vec{U}, \vec{V})$.

4°) Soit $\vec{T}$ le vecteur de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

a) Exprimer le vecteur $\vec{T}$ en fonction des nombres x et y et des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

b) Soit (X, Y) les coordonnées du vecteur $\vec{T}$ dans la base $(\vec{U}, \vec{V})$.

Exprimer X et Y en fonction de x et y.

- b) Soit (X, Y) les coordonnées du vecteur $\vec{T}$ dans la base $(\vec{U}, \vec{V})$.
Exprimer X et Y en fonction de x et y .

EXERCICE 5

On considère un trapèze ABCD de côtés parallèles [AB] et [CD] tel que $DC = 3 AB$. ($AB = 2$ cm)

Soient I et J les milieux respectifs des cotés [AB] et [CD], E le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD), F le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

- 1°) Justifier que $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$ est un repère.
- 2°) Quelles sont les coordonnées des points A, B, C, D, I, J ?
- 3°) Calculer les coordonnées des points E et F.
- 4°) Démontrer que les points I, J, E et F sont alignés.

EXERCICE 6

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D.

- 1°) D passe par A($-1, 2$) et B($1, -4$).
- 2°) D passe par C($1, 2$) et a pour coefficient directeur -3 .
- 3°) D passe par A($3, -1$) et est parallèle à la droite d'équation $7x - 4y + 3 = 0$.

DUREE : 4h

DEVOIR N°26

EXERCICE 1

a, b, c, x, y, z sont des réels positifs ; montrer que :

$$ax + by + cz \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)}$$

EXERCICE 2

On considère les réels A et b définies par :

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{21}{22} \times \frac{23}{24} \quad \text{et} \quad B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{22}{23} \times \frac{24}{25}.$$

1°) Démontrer que $A < B$. Calculer $A \times B$. En déduire que : $A < \frac{1}{5} < B$.

2°) Démontrer que $B < 2A$. En déduire que : $\frac{\sqrt{2}}{10} < A$.

EXERCICE 3

ABC est un triangle ; M, N, P les points définis par :

$$\vec{AP} = -\frac{3}{2} \vec{AC} ; \vec{MN} + \vec{BN} = \vec{AC} \quad \text{et} \quad 2\vec{AN} - 3\vec{AM} = \vec{BA}.$$

1°) Exprimer $\vec{AM}$ et $\vec{AN}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. Construire les points P, M, N.

2°) Montrer que les points B, M, N sont alignés, et préciser la position de M sur [BN].

3°) Soit $F = S_N(P)$. Montrer que (PM) passe par le milieu de [BF].

4°) (AM) coupe (PF) en R. Trouver le réel α tel que : $\vec{PR} = \alpha \vec{PF}$.

EXERCICE 4

ABCD est un quadrilatère convexe tel que [AB] et [CD] soient non parallèles. On note A_0 , A_1 , B_0 , B_1 , les milieux respectifs de [BC], [AD], [AC] et [BD].

1°) Quelle est la nature de $A_0 A_1 B_1 B_0$?

2°) Soit M un point de [CD]. Montrer que $(A_0 A_1)$ passe par le milieu m de [AM] et que $(B_0 B_1)$ passe par le milieu m' de [BM].

3°) En déduire que si M est un point de [CD], et N un point de [AB], alors le milieu I de [MN] est sur la droite (mm') .

DUREE : 2h

DEVOIR N°27

EXERCICE 1

Simplifier les expressions :

$$A = \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) : \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \quad B = \left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}\right) \left(\frac{x^2 + y^2}{2xy} + 1\right) \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)$$
$$C = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{2b}{a(a^2 - b^2)} - \frac{a+b}{ab(a-b)}$$

EXERCICE 2

1°) Déterminer le signe, puis calculer les carrés des réels suivants:

$$X = \sqrt{5} - \sqrt{6} ; \quad Y = \sqrt{5} - \sqrt{2} ; \quad Z = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

2°) En déduire une écriture simplifiée des nombres :

$$A = \sqrt{11 - 2\sqrt{30}} \quad , \quad B = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} \quad , \quad c = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \quad .$$

3°) Trouver trois nombres réels non nuls tels que :

$$\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} = 0 \quad .$$

EXERCICE 3

a, b, c et d sont des réels strictement positifs tels que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Démontrer les égalités :

$$1^\circ) \sqrt{ab} + \sqrt{cd} = \sqrt{(a+c)(b+d)} \quad 2^\circ) \sqrt{\frac{2a^2 + 3b^2}{2c^2 + 3d^2}} = \frac{b}{d}$$

EXERCICE 1

ABCD est un parallélogramme, E et F les points définis par : $\vec{AE} = \frac{1}{3} \vec{AC}$ et $\vec{AF} = \frac{2}{3} \vec{AC}$.

1°) Exprimer $\vec{DE}$ et $\vec{BF}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.

En déduire que (DE) est parallèle à (BF).

2°) (DE) coupe (AB) en J ; (BF) coupe (CD) en I.

Démontrer que I et J sont les milieux de [AB] et [DC] et que (IJ) est parallèle à (AD).

Montrer que IEJF est un parallélogramme.

3°) (DE) coupe (BC) en G. Montrer que G est le milieu de [BC] et J le milieu de [DG].

4°) Montrer que $\vec{DE} = \frac{2}{3} \vec{DJ}$.

Préciser la position de E par rapport aux points D et G.

DUREE : 2h

DEVOIR N°28

EXERCICE 1

Soit une base $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1°) Déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{j}$ soient colinéaires sachant que $\vec{u} = 2\vec{i} + 7\vec{j}$ et $\vec{v} = m\vec{i} + (m-1)\vec{j}$.

2°) Exprimer alors $\vec{w}$ en fonction de $\vec{j}$.

EXERCICE 2

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A (1,2) ; B (4,2) et C (2,6).
I est le milieu de [BC]. J, K et L sont les points tels que ACIJ, AKCB et AILB soient des parallélogrammes. Calculer les coordonnées de I, J, K et L.
Préciser la position des points K, J et L.

EXERCICE 3

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A (2,4), B (1,2), C (5,y) et D (x,2).
Montrer qu'on peut déterminer x et y tels que ABCD soit un rectangle.
Déterminer les coordonnées de son centre.

EXERCICE 4

ABC est un triangle. $E = S_B(A)$; $D = S_C(A)$; F est le milieu de [BD] et G celui de [CE]. On considère le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$.

1°) Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G.

2°) Ecrire les systèmes d'équations paramétriques des droites (AF), (AG) et (BC).

En déduire les coordonnées des points M et N d'intersection de (BC) avec respectivement (AF) et (AG).

3°) I est le milieu de [CD] et J celui de [BE]. Montrer que : $\vec{IF} = \vec{FG} = \vec{GJ}$.

4°) Soit K le milieu de [AF]. Calculer les coordonnées de K et montrer que les points K, N, J sont alignés.

5°) Donner un système d'équations paramétriques des droites (CE) et (BD) ; en déduire les coordonnées de leur points d'intersection P.
Montrer que $(MP) \parallel (AB)$.

DUREE : 2h

DEVOIR N°29

EXERCICE 1

Simplifier les expressions suivantes lorsqu'elles sont définies :

$$A = \left(\frac{-2\sqrt{3}}{5} abc^2 \right)^{-1} \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2} ac \right)^3 : \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} ab \right)^4 \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} a^2b \right).$$

$$B = \frac{x^2 + y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + xy} \quad C = \left(\frac{1}{5x+2} \right)^2 \left[\left(\frac{x-2}{x} + \frac{x}{2-x} \right) : \frac{x^2-1}{x^2-4} \right]$$

EXERCICE 2

Rendre rationnel le dénominateur des quotients suivants, lorsqu'ils sont définis :

$$\frac{1-\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}; \frac{1-\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}; \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1-\sqrt{a}+\sqrt{b}}; \frac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}$$

EXERCICE 3

Soit un parallélogramme propre ABCD.

1°) Construire un représentant des vecteurs $\vec{u} = \vec{AC} - \vec{BD}$ et $\vec{v} = \vec{AC} + \vec{BD}$.

2°) On pose $\vec{AE} = \vec{u}$ et $\vec{AF} = \vec{v}$. Montrer que C est le milieu du segment [EF].

EXERCICE 4

A, B, C sont trois points distincts. Soit S le point défini par $\vec{BS} = \vec{BC} - \vec{AB}$.

1°) Construire le point C sachant que $BC = 2 AB$ et $\vec{BS} \perp \vec{AB}$.

2°) Calculer $\|\vec{BS}\|$ lorsque $\|\vec{AB}\| = 1$.

Donner les mesures en degrés des angles du quadrilatère ABCS.

EXERCICE 1

A et B sont deux points distincts ; C, D, E des points n'appartenant pas à la droite (AB).

On note I, J, K les milieux respectifs de [BC], [BD] et [BE] et $C' = S_I(C)$; $D' = S_J(D)$;

$E' = S_K(E)$.

1°) Comparer les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{CC'}$, $\vec{DD'}$ et $\vec{EE'}$.

2°) En déduire que si C, D, E sont alignés, alors il en est de même de C', D' et E'.

DUREE : 2h

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x + \frac{1}{x} = -2$

b) $\frac{3x-5}{5x-7} = x$

c) $\frac{4x-1}{x+3} = \frac{2-5x}{5x-1}$

EXERCICE 1

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $10x^2 - 49x + 51 = 0$.

En déduire une factorisation du trinôme $f(x) = 10x^2 - 49x + 51$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{2x^2 - 5x}{5x - 17} < \frac{25(2x - 3)}{10x^2 - 49x + 51}$

EXERCICE 1

Soit l'équation (E) : $(1 - \sqrt{2})x^2 + (3 - 2\sqrt{2})x - \sqrt{2} + 2 = 0$.

1°) Montrer que (E) admet deux racines distinctes x_1 et x_2 de signes contraires (ne pas les calculer).

2°) Sans chercher à calculer x_1 et x_2 , calculer : $x_1 + x_2$, x_1x_2 , $x_1^2 + x_2^2$, $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$.

Dans une prochaine édition de ce fascicule, nous donnerons, inshallah, des réponses ou des suggestions à tous les exercices et devoirs .

MERCI POUR VOTRE CONFIANCE

ET BON COURAGE

RAPPELS DE COURS

CALCUL DANS $\mathbb{R}$. ORDRE DANS $\mathbb{R}$

I. LES DIFFERENTS ENSEMBLES DE NOMBRES

Au cours de l'Histoire, les mathématiciens ont découvert successivement :

- L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers *naturels* : $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers *relatifs* : $\mathbb{Z} = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels : ce sont les nombres de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$

et $b \in \mathbb{Z}^*$. Parmi eux, on distingue les nombres décimaux , c'est-à-dire les nombres qui s'écrivent avec un nombre fini de chiffres après la virgule, ou encore de la forme $\frac{a}{10^p}$

avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

Il existe cependant des nombres, tels que $\sqrt{2}$ ou π qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de fraction : de tels nombres sont dits *irrationnels* .

- L'ensemble de tous les nombres, rationnels et irrationnels constitue l'ensemble des nombres *réels*. Il est noté $\mathbb{R}$.

II. REGLES DE CALCUL DANS $\mathbb{R}$

- **Distributivité** : Quels que soient les réels a, b, x, y , on a :

$$a (x + y) = ax + ay$$

$$(a + b) (x + y) = ax + ay + bx + by$$

- **Identités remarquables**:
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 $a^2 - b^2 = (a - b) (a + b)$
 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\begin{aligned}(a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2)\end{aligned}$$

- **Quotients** : Quels que soient les réels a et x, quels que soient les réels b et y non nuls, on a

$$\frac{a}{b} \times \frac{x}{y} = \frac{ax}{by} \quad ; \quad \frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{ay + bx}{by} \quad (\text{réduction au même dénominateur})$$

;

Quels que soient les réels non nuls a et y, quel que soit le réel x on a :

$$\frac{ax}{ay} = \frac{x}{y} \quad (\text{simplification})$$

ATTENTION ! $\frac{a+x}{a+y} \neq \frac{x}{y}$.

Quels que soit les réels non nuls a et b, on a :

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \quad ; \quad \frac{\frac{1}{a}}{b} = \frac{1}{ab}$$

- **Puissances** : pour tout entier naturel non nul m, on pose :

$$a^m = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ fois}} \quad \text{et} \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Règles sur les puissances : Pour tous entiers relatifs m et n, pour tous réels a et b,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$(ab)^m = a^m \times b^m$$

$$\text{Attention : } (a+b)^m \neq a^m + b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$\frac{a^m}{b^n} = a^{m-n}$$

III. RACINE CARREE D'UN REEL POSITIF

On appelle racine carrée du réel positif x l'unique réel y tel que :

$$y \geq 0 \quad \text{et} \quad x = y^2$$

Règles sur les racines carrées :

$$\mathbf{1} \quad X = 2^3 \times 3^{-18} \times 5^{-1} \quad Y = 2^3 \times 3^{13} \times 5^{-5} \quad Q = a^{-6} \times b^{10} \times c^{17}$$

$$\mathbf{2} \quad 1) (2a - b - 3)(2a - b + 3)(2a + b - 3)(2a + b + 3)$$

$$3) (a - b - 3)(a - b + 3)(a + b - 3)(a + b + 1)$$